Axiomas de cuerpo

$+: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\cdot: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x+y$; $(x,y) \longmapsto x\cdot y$

Conmutatividad: $x+y = y+x \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Asociatividad: $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Distributiva: $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Existencia del Neutro para la suma}}$: $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : x+0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Existencia del Neutro para el producto}}$: $\exists\, 1 \neq 0 \in \mathbb{R} : 1\cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Existencia de opuesto}}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (-x) \in \mathbb{R} \ / \ x+(-x) = 0$

Existencia del inverso: $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} \ / \ x\cdot x^{-1} = 1$

Los números racionales también satisfacen este conjunto de propiedades.

Axiomas de orden

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^{-}$; $\mathbb{R}^{+} \cap \mathbb{R}^{-} = \emptyset$, $0 \notin \mathbb{R}^{+}$, $0 \notin \mathbb{R}^{-}$

$\mathbb{R}^{+}$: Positivos

$\mathbb{R}^{-}$: Negativos

* $x \in \mathbb{R}^{+} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^{-}$ $\longrightarrow$ Observar que esto también

* $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^+$
$\qquad\qquad\qquad\;\; x \cdot y \in \mathbb{R}^+$

Se puede escribir:

$x \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow (-x) \in \mathbb{R}^+$

Ej: $(-2) \in \mathbb{R}^-$ y $-(-2) = 2 \in \mathbb{R}^+$

Tabla de los signos

$\cdot$	$\mathbb{R}^-$	$\mathbb{R}^+$
$\mathbb{R}^-$	$\boxed{\mathbb{R}^+}$	$\mathbb{R}^-$
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^-$	$\boxed{\mathbb{R}^+}$

Justifiquemos la Tabla de signos a partir de los axiomas de orden

Veamos que "menos × menos da más"

Tomemos $x, y \in \mathbb{R}^-$, queremos ver que $xy \in \mathbb{R}^+$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^- \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R}^+ \\ y \in \mathbb{R}^- \Rightarrow (-y) \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \Rightarrow (-x)(-y) \in \mathbb{R}^+$$

Ahora,

$$\left.\begin{array}{l} (-x) = (-1)x \\ (-y) = (-1) \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(-x)\cdot(-y)} = (-1) \cdot x \, (-1) \, y =$$

$$= (-1)^2 xy = \boxed{xy} \in \mathbb{R}^+$$

Proposición: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$ y sea $z \in \mathbb{R}^+$.

Entonces $\boxed{z \cdot x < z \cdot y}$

$\Updownarrow$

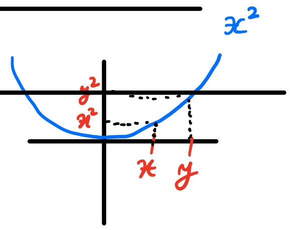
$(y-x) \in \mathbb{R}^+$

Dem: $\boxed{zx < zy \Longleftrightarrow 0 < zy - zx \Longleftrightarrow 0 < z(y-x)}$

Como $x<y$ tenemos que $y-x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z(y-x)$ es un producto de positivos

$\Rightarrow z(y-x) \in \mathbb{R}^+$ como queríamos

<u>Proposición:</u> Si $x, y \in \mathbb{R}^+$.



Entonces $x<y \iff x^2<y^2$

"cuando tenemos números positivos, elevar al cuadrado preserva la desigualdad"

($\Rightarrow$) Tomemos $x, y \in \mathbb{R}^+$, con $x<y$

$$x<y \underset{\substack{\text{Por la}\\ \text{Proposición}\\ \text{anterior}}}{\Longrightarrow} x \cdot x < x \cdot y$$

$$x<y \underset{\substack{\text{Prop.}\\ \text{Anterior}}}{\Longrightarrow} y \cdot x < y \cdot y$$

Uniendo ambas desigualdades

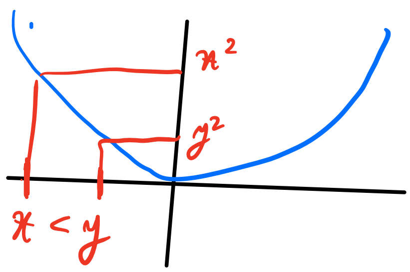
$$\boxed{x^2 < xy = y \cdot x < y^2}$$

($\Leftarrow$) Tenemos $x, y \in \mathbb{R}^+$ tales que

$x^2 < y^2$, queremos probar que en este caso se tiene que $x<y$.

$$x<y \iff 0<y-x \iff (y-x)\in\mathbb{R}^+$$
$$\iff (y-x)\underbrace{(y+x)}_{\in\mathbb{R}^+}\in\mathbb{R}^+ \iff$$
$$\iff y^2-x^2\in\mathbb{R}^+ \iff 0<y^2-x^2$$
$$\iff x^2<y^2$$

__Observación__: si no asumimos inicialmente que $x,y\in\mathbb{R}^+$, el enunciado no es cierto:



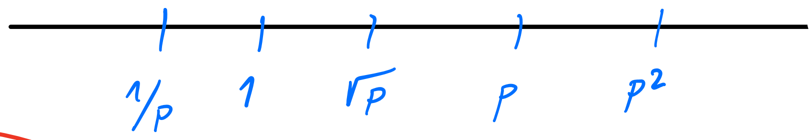
__Ejercicio__: Probar que si $x,y\in\mathbb{R}^-$ Entonces $x<y \iff x^2>y^2$

Ejercicio del práctico:

Sea $p>1$. Ordenar los siguientes números:

$1,\ p,\ \sqrt{p},\ 1/p,\ p^2$

Solución:



Pero porqué?

Justifiquemos que $1/p < 1$:

$$1/p < 1 \underset{\substack{\text{MulT. por} \\ \text{positivo} \\ \text{preserva} \\ \text{desigualdad}}}{\iff} p \cdot 1/p < p \cdot 1$$

$$\iff \boxed{1 < p}$$

Ejercicio: Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$; entonces $\boxed{x < y \iff 1/y < 1/x}$

"invertir números positivos revierte desigualdades"

Por otro lado, como $1 < p$, multiplicando por $\underline{p > 0}$ a cada lado obtenemos: $1 < p \implies \boxed{p < p^2}$

Observemos también, que $\sqrt{p}$ y p son positivos, entonces elevar al cuadrado preserva la desigualdad, es decir:

$$\sqrt{p} < p \iff \underbrace{(\sqrt{p})^2}_{\substack{\shortparallel \\ p}} < p^2 \iff \boxed{p < p^2}$$; y esto último lo sabemos.

Ejercicio: Probar que si $p > 1 \Rightarrow 1 < \sqrt{p}$