

Práctico 2

Definición y notación: Se recuerda la definición de transformada de Laplace, como integral paramétrica de parámetro complejo s , integrando en la variable real $t \geq 0$:

$$F(s) := \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt.$$

Se asume, por convención, que toda función Laplace transformable satisface: $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.

Durante todo el práctico se usarán las siguientes notaciones:

- $H(t)$ denota el “escalón de Heaviside” definido como:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

- $\mathcal{L}f$ o $(\mathcal{L}f)(s)$ o $F(s)$ denota la transformada de Laplace de la función $f(t)$.

1. Encontrar la transformada de Laplace de $H(t)$.
2.
 - a) Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s - \alpha)$ es la transformada de Laplace de $f(t)e^{\alpha t}$, donde α es cualquier número complejo fijo. Este resultado se llama “propiedad de traslación en frecuencia”.
 - b) Demostrar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ entonces $F(s) \cdot e^{-as}$ es la transformada de $f(t - a)$, donde a es un número real fijo, y $f(t) = 0$ para todo real $t < 0$ y también para todo $t < a$. Este resultado se llama “propiedad de traslación en el tiempo”.
 - c) Usando las partes a) y b) y la linealidad de la transformada de Laplace, calcular la transformada de:

$$f(t) = H(t) \sinh(at) = H(t) \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}.$$

- d) Dada una función f , probar que la transformada de Laplace de su derivada $f'(t)$ satisface la identidad:

$$(\mathcal{L}(f'))(s) = s(\mathcal{L}(f))(s) - f(0).$$

- e) Usando las partes c) y d) encontrar la transformada de Laplace de:

$$\frac{1}{a} \cdot (H(t) \sinh(at))' = H(t) \cosh(at) = H(t) \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}.$$

- f) Admitiendo que la transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ es derivable como función de variable s , y que al derivar respecto a s la integral impropia que define $F(s)$ es igual a la integral impropia de la función que se obtiene derivando dentro de la integral, deducir que:

$$F'(s) = (\mathcal{L}[-tf(t)])(s)$$

- g) Usando las partes a) y f) encontrar la transformada de $f(t) = H(t)e^{2t} t^2$.

6. a) Llamando $F(s)$ a la transformada de Laplace de la función $f(t)$, tomar la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial siguiente, y expresarla en función de $F(s)$:

$$2 \frac{df}{dt} = 1 \quad \text{con condición inicial} \quad f(0) = 4.$$

Sugerencia: Usar la parte b) del ejercicio 2. Recordar que la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1 \forall t \geq 0$ coincide con la transformada del escalón de Heaviside $H(t)$.

- b) Resolver por el método de transformada de Laplace la ecuación diferencial de la parte a).

Nota: El método de transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales consiste en usar la igualdad obtenida en la parte a) para despejar la transformada $F(s)$ de $f(t)$. Luego, basándose en la tabla construida en el ejercicio 3, y en la linealidad de la Transformada de Laplace, hallar $f(t)$.

7. Resolver usando el método de la transformada de Laplace las siguientes ecuaciones diferenciales.

Para los primeros cuatro sistemas también resolver con el método ya estudiado para lineales y escribir en formato matricial (de primer orden con dos variables). Para los últimos tres casos pensar si se puede y cómo se resolverían con los métodos estudiados anteriormente.

a) $f'' - 4f' + 3f = 1$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.

b) $f'' - 4f' + 3f = 2e^t$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.

Nota: En este ejemplo aparece un factor repetido en el cociente; en ese caso, la fracción simple tiene la forma:

$$\frac{1}{(s-a)^2(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{(s-a)^2} + \frac{C}{s-b}.$$

c) $f'' - 4f' + 3f = 0$ con condiciones iniciales $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$.

d) $y'' - 2ay' + a^2y = 0$ con condiciones iniciales $y'(0) = 1$ e $y(0) = 0$, donde a es una constante real.

e) $f'' + 2f' - 3f = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < c \\ 0, & t \geq c \end{cases}$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.

f) $f'' + 2f' - 3f = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.

g) $f'' + 2f' - 3f = \delta(t-1)$ con condiciones iniciales $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Nota: Recordar que $(\mathcal{L}[\delta(t-a)])(s) = e^{-as}$.

8. Resolver con el método de transformada de Laplace la siguiente ecuación diferencial no autónoma.

$$\begin{cases} \dot{x} + 3x - y = u(t) \\ \dot{y} - 2y = 2u(t) \end{cases}$$

Notas: La transferencia de un sistema lineal se define como el cociente $\frac{X(s)}{U(s)}$ donde $X(s)$ y $U(s)$ son las transformadas de Laplace de x y u , respectivamente. Para hallar la transferencia, por convención, las condiciones iniciales han de ser nulas.

9. Usando Transformada de Laplace, encontrar la convolución $(f * g)(t)$ para:

a) $f(t) = t, g(t) = e^{2t}$.

b) $f(t) = \cos(t), g(t) = e^{-t}$.

Recordar: se asume, por convención, que toda función Laplace transformable satisface $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.