Práctico 6 – Producto escalar y vectorial

1. Producto escalar y producto vectorial

1. Dados los vectores $u = (2,-1,7)$, $v = (1,1,-3)$ y $w = (1,-1,2)$ calcular:

   a) $\|u\|$, $\|v\|$, $\langle u,v\rangle$, $u \wedge v$, $\|u \wedge v\|$.

   b) $u \wedge (v \wedge w)$ y $(u \wedge v) \wedge w$. Observar que el producto vectorial no es asociativo.

2. **Productos notables.**
   Sean x e y vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Demostrar que se satisfacen las igualdades

   a) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$.

   b) $\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

   c) **Regla del paralelogramo.** $\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2$

3. Sean u y v dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

   a) Hallar $\|v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es igual a $\pi/4$, $\|u\| = 3$ y que $u - v$ es perpendicular a u.

   b) Hallar $\|v\|$ y $\|u+v\|$ sabiendo que el ángulo entre u y v es $\pi/4$, que $\|u\| = 3$ y que el ángulo entre $u+v$ y u es igual a $\pi/6$.

   c) ¿Es cierto que si v es un vector no nulo entonces la igualdad $\langle u,v\rangle = \langle w,v\rangle$ implica $u = w$? ¿Qué puede decirse de $u - w$?

4. Dados dos vectores u y v de $\mathbb{R}^3$, hallar:

   a) todos los vectores w para los que se satisface $u \wedge w = u \wedge v$.

   b) todos los vectores w para los que se satisface $\langle u,w\rangle = \langle u,v\rangle$.

5. Calcular el producto vectorial
   $$(a_{11}, a_{12}, 0) \wedge (a_{21}, a_{22}, 0)$$
   y usarlo para analizar la interpretación del determinante
   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
   como un área orientada.

2. Revisitando ecuaciones de rectas y planos

1. **Ecuaciones de planos y vectores normales.**

   a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-3,1,0)$ y es perpendicular a $(-1,2,3)$.

   b) Expresar el plano π de ecuación $x - y + 3z = 1$ como $\langle P - P_0, N\rangle = 0$, donde $P = (x,y,z)$ es un punto genérico, N es un vector perpendicular al plano, y P_0 es un punto a determinar.

   c) Hallar dos versores que sean perpendiculares al plano $2x + y = 0$. Recordar que un versor es un vector de norma 1.

2. Demostrar que las siguientes rectas son ortogonales.
   $$\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0, \\ 2x - 2y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

3. **Trazado de perpendiculares.** Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta que pasa por el punto $(4,4,4)$ y es perpendicular al plano $2x+y=0$.

4. En cada caso, hallar las ecuaciones reducida y paramétrica de la recta que satisface las condiciones especificadas:

   a) pasa por el punto $(1,0,1)$ y es perpendicular al plano $2x+y+3z-1=0$.

   b) Pasa por el punto $(-1,2,-3)$, se intersecta con la recta
   $$P=(1,-1,3)+\lambda(3,2,-5),$$
   y es ortogonal a la recta
   $$\begin{cases} x=-1+6\lambda, \\ y=-3-2\lambda, \\ z=2-3\lambda. \end{cases}.$$

   c) Pasa por el punto $(1,1,1)$ e intersecta perpendicularmente a la recta
   $$\begin{cases} x=4+3\lambda \\ y=-2-2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}.$$

   d) Pasa por el punto $(-4,-5,3)$ e intersecta perpendicularmente a la recta de ecuación paramétrica
   $$P=(-1,-3,2)+\lambda(3,-2,-1).$$

3. Distancias entre elementos geométricos

1. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una función que preserva las distancias, es decir, que para cualquier par de puntos P,Q se cumple $d(P,Q)=d(f(P),f(Q))$. Observar que esto es lo mismo que $\|P-Q\|=\|f(P)-f(Q)\|$, es decir, preserva la norma de los vectores. Se sabe además que $f(O)=O$.

   Demostrar que f preserva ángulos, es decir que si el ángulo entre dos vectores no nulos u y v es α entonces el ángulo entre $f(v)$ y $f(u)$ también es α.

2. Determinar la distancia entre los plano π_1 y π_2 siendo

   a) $\pi_1: x+y+z=1,\ \pi_2: x+y+z=5$ *b*) $\pi_1: x+2y-z=1,\ \pi_2: 2x+4y-2z=-1$

3. Determinar la distancia entre el plano π y el punto P, siendo

   a) $\pi: x+y+z=0,\ P=(2,2,4)$ *b*) $\pi: x=0,\ P=(2,3,4)$

4. Hallar la distancia entre las rectas r y s donde

   a) $r:(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,0,0),\ s:(x,y,z)=(3,0,0)+\mu(0,1,1)$

   b) $r=\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=1 \end{cases},\ s=\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+2z=10 \end{cases}$

5. Hallar la distancia entre la recta r y el punto P siendo

   a) $P=(1,3,2),\ r:(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(1,3,2)$ *b*) $P=(1,0,1),\ s=\begin{cases} y+z=2 \\ y-z=10 \end{cases}$

Guía del práctico

Para acompañar el curso se suguiere como mínimo resolver al menos la siguiente lista de problemas. No contabilizar dentro de esta lista los ejercicios resueltos en el pizarrón durante la clase.

- Ejercicio 1.1.
- Ejercicio 1.2, una parte.
- Ejercicio 1.3.
- Ejercicio 2.1.
- Ejercicio 2.2.
- Ejercicio 2.3.
- Ejercicio 2.4, una parte.
- Ejercicio 3.2, una parte.
- Ejercicio 3.3, una parte.
- Ejercicio 3.4, una parte.