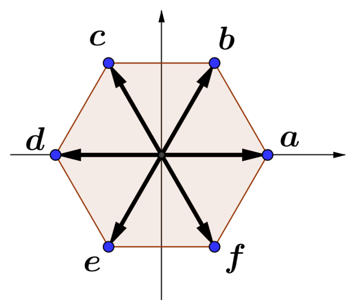
Práctico 5 – Geometría en el espacio. Rectas y planos

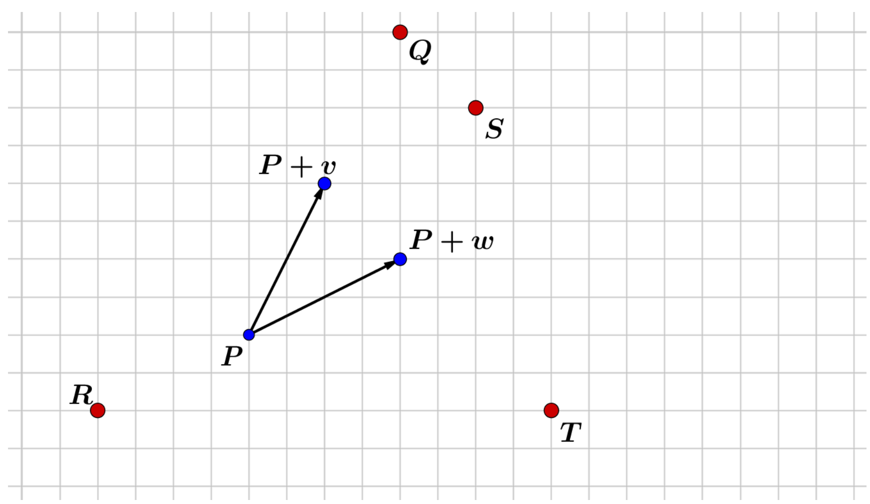
1. Puntos y vectores

1. **Polígonos regulares.** Considere el hexágono regular centrado en el origen que se muestra en la figura.



   a) ¿Cuánto da la suma de los vectores a, b, c, d, e y f?
   b) ¿Qué ocurre si sumamos todos menos a?
   c) Discutir qué ocurre con el triángulo regular a, c, e.

2. Para el plano representado en la siguiente figura determinar λ y μ tal que $Q = P + \lambda v + \mu w$. Repetir para R, S y T.



2. Ecuación del plano y de la recta

1. Hallar ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas (o reducidas) de las siguientes rectas:

   a) la que pasa por el punto $P = (1, 2, 5)$, con vector director $v = (2, 1, 3)$;
   b) la que pasa por los puntos $A = (4, 3, 0)$ y $B = (1, 0, 1)$.

2. *a*) Averiguar si los puntos $(3, 1, -1)$, $(5, 2, 1)$ y $(5, 0, 0)$ pertenecen a la recta con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = -2 + \lambda. \end{cases}$$

b) Repetir para los puntos $(-1,0,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,-1,1)$, y la recta que tiene ecuaciones reducidas

$$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 2x-y+z+2=0. \end{cases}$$

c) Averiguar si los puntos $(1,0,2)$, $(-1,1,1)$ y $(3,-1,1)$ están alineados. Si lo están, encontrar ecuaciones paramétricas y reducidas de la recta que determinan.

d) Repetir para $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ y $(1,2,3)$.

3. Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de los siguientes planos:

a) el que pasa por el punto $(1,1,1)$ y tiene a $(2,-1,1)$ y $(1,0,-1)$ como vectores directores;

b) el que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(2,2,3)$ y $(1,1,-2)$;

c) el que pasa por el punto $(1,1,1)$ y contiene a la recta dada por $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ x-y-z-2=0. \end{cases}$

4. *a*) Demostrar que si $u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$ son dos vectores no colineales, es decir, ninguno es múltiplo del otro, el sistema de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x=p_1+\lambda u_1+\mu v_1 \\ y=p_2+\lambda u_2+\mu v_2 \\ z=p_3+\lambda u_3+\mu v_3 \end{cases} \tag{1}$$

es compatible si y sólo si el determinante

$$\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Concluir que el plano de ecuaciones paramétricas tiene una ecuación reducida de la forma

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}(x-p_1)-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}(y-p_2)+\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}(z-p_3)=0.$$

c) Usar este resultado para hallar una ecuación reducida del plano cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x=-1+\lambda-\mu, \\ y=2+\lambda+\mu, \\ z=-1-\lambda-2\mu. \end{cases}.$$

5. Hallar la intersección de los siguientes planos:

$$2x-3y+4z=-2, \qquad \begin{cases} x=2-\lambda+\mu, \\ y=-1-\lambda+2\mu, \\ z=-2-2\lambda-\mu. \end{cases}$$

6. Se consideran los planos de ecuaciones

$$2x+y+z-2=0, \qquad \begin{cases} x=1+2\lambda+2\mu, \\ y=-3+\lambda-\mu, \\ z=\lambda+\mu, \end{cases},$$

y las rectas de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y-3z=-6, \\ x+2y-4z=-8, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3+\lambda, \\ y=4+\lambda, \\ z=1-3\lambda \end{cases}.$$

Hallar la intersección de cada una de las dos rectas con cada uno de los dos planos.

7. Para cada una de las ternas de planos π_1, π_2 y π_3 que se proponen a continuación, hallar la intersección $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ de los tres planos. En caso de que la intersección sea vacía, estudiar las intersecciones dos a dos. Interpretar geométricamente los resultados.

   a) $\pi_1 : y + z = 0$, $\pi_2 : 2x - y - 2z = 5$, $\pi_3 : 3x + 3y + 2z = 7$.
   b) $\pi_1 : x + 2y - z = 2$, $\pi_2 : 2x + y - 3z = 0$, $\pi_3 : -2x - 4y + 2z = 3$.
   c) $\pi_1 : x - 2y + z = 5$, $\pi_2 : x + z = 3$, $\pi_3 : x + 4y + z = 0$.

8. Hallar ecuaciones paramétricas de la recta que no corta a ninguno de los planos de ecuaciones

$$x + y + z = 1, \quad x - y = 3,$$

   y que pasa por el punto $(10, 11, 12)$.

9. Sean π el plano dado por $\pi : x + y + z = 3$ y r la recta dada por $r : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(a, b, 1)$.

   Discutir la intersección de r y π en función de a y b.

Guía del práctico

Para acompañar el curso se suguiere como mínimo resolver al menos la siguiente lista de problemas. No contabilizar dentro de esta lista los ejercicios resueltos en el pizarrón durante la clase.

- Ejercicio 2.1.
- Ejercicio 2.3.
- Ejercicio 2.4.
- Ejercicio 2.5.
- Ejercicio 2.7, una parte.