PROBABILIDAD

Ejercicio 1 Cambio de variable

1. Si $X \sim U[0,1]$ halle la densidad de $Y = aX + b$ (analice la situación geometricamente)
2. Si X tiene densidad f_X e $Y = g(X)$ con g estrictamente monótona, pruebe que Y tiene densidad $f_Y(y) = \frac{1}{|dy/dx|} f_X(x)$ donde $x = x(y)$
3. Si X tiene densidad $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$, halle la densidad de $Y = \sqrt{X}$

Ejercicio 2 Densidades condicionales

Se considera la función de densidad dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} Kx & \text{si } 0 < x < 1,\, 0 < y < 1-x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Halle K, las funciones de densidad marginales, las densidades condicionales, el vector de medias, la matriz de varianzas-covarianzas y el coeficiente de correlación de la variables aleatorias.

Ejercicio 3 Descomposición de la varianza I

Se extraen sucesivamente, sin reposición, dos bolas de una urna que contiene tres blancas y dos negras. En relación a este experimento, se definen las siguientes variables:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{si la primera bola es blanca} \\ 1 & \text{si la primera bola es negra} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0 & \text{si la segunda bola es blanca} \\ 1 & \text{si la segunda bola es negra} \end{cases}$$

Descomponga la varianza de la variable X teniendo en cuenta el condicionamiento a Y.

Ejercicio 4 Descomposición de la varianza II

Sea (X,Y) un vector aleatorio con funcón de densidad $f(x,y) = 2, 0 < x < y < 1$.

- Calcular $\mathbb{E}(X^3|Y)$
- Descomponga la varianza de la variable Y.

Ejercicio 5 Concatenación de normales

Sean $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $U \in \{-1,1\}$ tal que $\mathbb{P}(U=1) = \mathbb{P}(U=-1) = 0{,}5$ independiente de X. Consideramos la variable aleatoria $Y = UX$.

1. Pruebe que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ pero que (X,Y) no es conjuntamente normal.
2. Simule $n = 100$ datos del vector (X,Y) y analizar gráficamente las distribuciones univariadas (mediante histogramas y densidades normales, por ejemplo) y conjunta (diagrama de dispersión).

Ejercicio 6 Esperanza condicional

1. Si $\mathbb{E}(Y) = 2$ calcule $\mathbb{E}(X)$ sabiendo que $\mathbb{E}(X|Y) = -2Y + 3$.
2. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de densidad $f(x,y) = e^{-x-y}$. Calcule $\mathbb{E}(X|Y = y)$.
3. Sea X uan variable aleatoria con $\mathbb{E}(X) = \mu$ e $Y = aX + b$ con a y b constante. Calcule $\mathbb{E}(X|Y = y)$.
4. Si (X,Y) es una punto al azar en el triangulo $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$, calcule $\mathbb{P}(Y > 1|X = x)$ y $\mathbb{E}(Y|X = x)$.

Ejercicio 7 Normal multivariada

Supongamos que $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ es un vector aleatorio con distribución normal de media $\mu = (-1,1,0)'$ y matriz de covarianzas $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Halle la distribución de $Y = X_1 + 2x_2 - 3X_3$
2. Halle un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ tal que la variables aleatorias X_1 y $X_1 - (u_1X_1 + u_2X_2)$ sean independientes.

Ejercicio 8 Combinación lineal de normales multivariadas

Sean $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4$ vectores aleatorios independientes con distribución normal con media $\mu = (1,2)'$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Halle la distribución de $\mathbf{Y} = \frac{1}{4}\mathbf{X}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_3 + \frac{1}{4}\mathbf{X}_4$.
2. Dé la función de densidad de $\mathbf{Y}$.

Ejercicio 9 Distancia de Mahalanobis

Genere y represente 5000 datos normales con media $(0,0)'$ y matriz de varianzas-covarianzas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Represente la nube de puntos generada y estime con estos datos el vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas.
2. Investigue sobre la función `mahalanobis` del paquete `mvtnorm` en R.

   Aplique a las distancias de Mahalanobis obtenida sobre una muestra test de 1000 datos, un test de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov para ver si se ajusta a una $\chi^2(2)$.