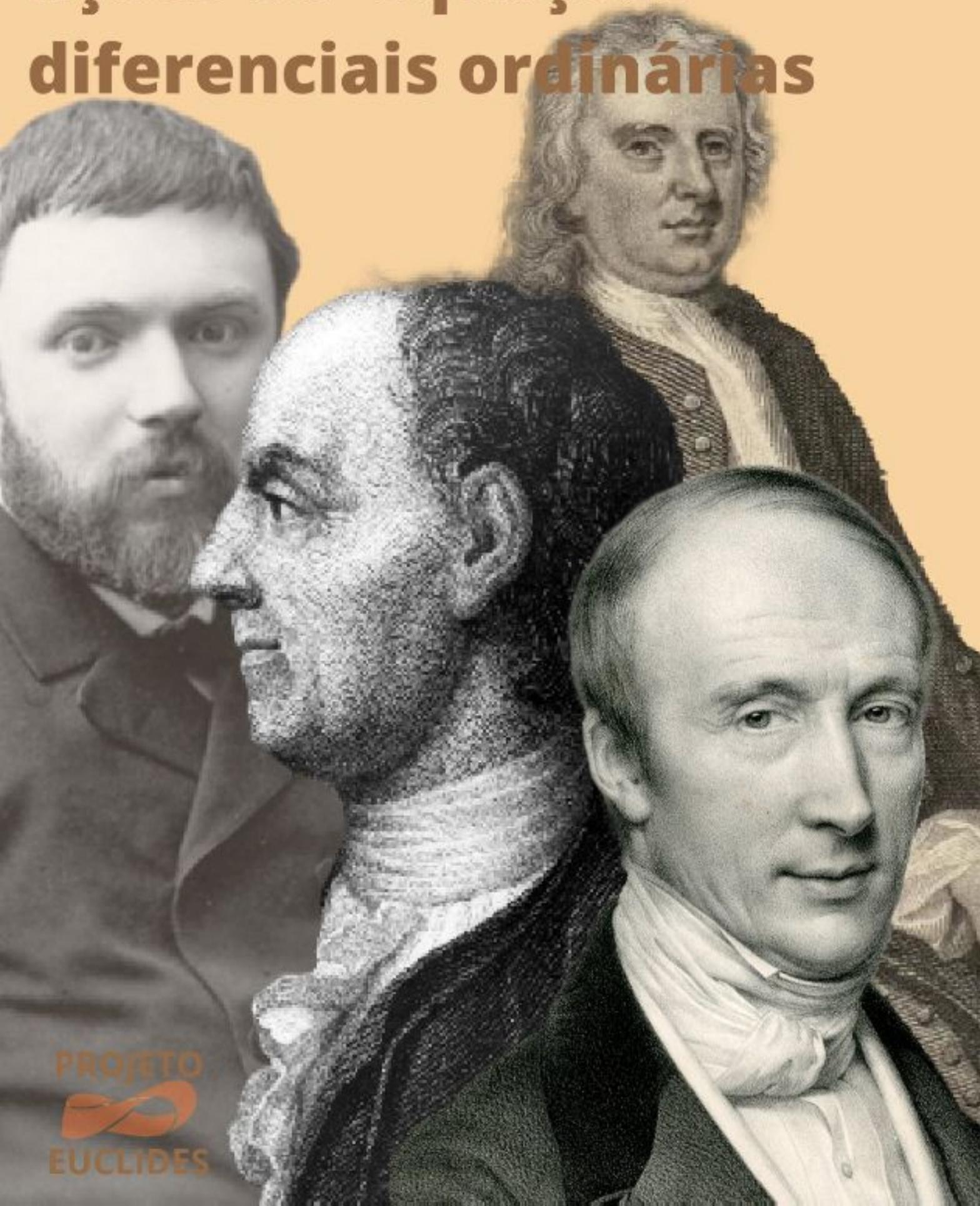


**jorge sotomayor**  
**lições de equações**  
**diferenciais ordinárias**



**lições de  
equações  
diferenciais  
ordinárias**

Sotomayor Tello, Jorge Manuel, 1942-  
Lições de equações diferenciais ordinárias / Jorge Sotomayor. - Rio  
de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.  
(Projeto Euclides)

**Bibliografia**

1. Equações diferenciais ordinárias. I. Série. II. Título.

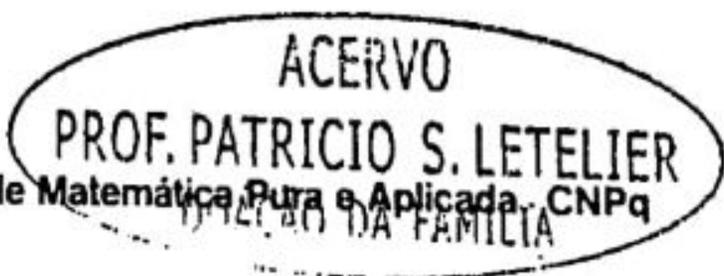
CDD-515.352

**jorge sotomayor**

**lições de  
equações  
diferenciais  
ordinárias**



Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq



Copyright © 1979, by Jorge Sotomayor Tello  
Direitos reservados, 1979, por Conselho Nacional  
de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq,  
Av. W-3 Norte, Brasília, DF

Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Capa: Gian Calvi Criação Visual Ltda  
Ladeira Ari Barroso 40, Leme, Rio de Janeiro, RJ

Projeto Euclides — Coordenado por Elon Lages Lima

Comissão Editorial: Chaim Samuel Hönl, Djairo Guedes de Figueiredo, Elon Lages Lima,  
Heitor Gurgulino de Souza, Jacob Palis Junior, Manfredo Perdigão  
do Carmo, Pedro Jesus Fernández.

#### Títulos já publicados

1. Curso de Análise, vol. 1, Elon Lages Lima
2. Medida e Integração, Pedro Jesus Fernández
3. Aplicações da Topologia à Análise, Chaim Samuel Hönl
4. Espaços Métricos, Elon Lages Lima
5. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, Djairo Guedes de Figueiredo
6. Introdução aos Sistemas Dinâmicos, Jacob Palis Junior e Welington C. de Melo
7. Introdução à Álgebra, Adilson Gonçalves
8. Aspectos Teóricos da Computação, Cláudio L. Lucchesi, Imre Simon, Istvan Simon,  
Janos Simon e Tomasz Kowaltowski
9. Teoria Geométrica das Folheações, Alcides Lins Neto e Cesar Camacho
10. Geometria Riemanniana, Manfredo P. do Carmo
11. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Jorge Sotomayor

Composição e arte:  
AM Produções Gráficas Ltda.

Impresso por:  
Gráfica Editora Hamburg Ltda.  
Rua Apeninos, 294 - São Paulo - Brasil

Distribuído por:  
Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.  
Avenida Venezuela, 163  
20.220 - Rio de Janeiro, RJ - Brasil

*A meus pais,  
Alfonso e Rosa.*

# ÍNDICE

PREFÁCIO .....	XI
INTRODUÇÃO .....	XIII
<i>Quadro de interdependência entre capítulos</i> .....	XVI
<b>PARTE A: FUNDAMENTOS</b>	
<b>CAPÍTULO I EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES</b> .....	3
1. Preliminares .....	3
2. O problema de Cauchy .....	5
3. Exemplos .....	7
4. Teoremas de Picard e de Peano .....	12
5. Soluções máximas .....	17
6. Sistemas de equações diferenciais e equações de ordem superior ...	19
<i>Exercícios</i> .....	21
<b>CAPÍTULO II DEPENDÊNCIA DAS SOLUÇÕES EM RELAÇÃO ÀS CONDIÇÕES INICIAIS E PARÂMETROS</b> .....	33
1. Preliminares .....	33
2. Continuidade .....	34
3. Diferenciabilidade .....	38
<i>Exercícios</i> .....	43
<b>PARTE B: EQUAÇÕES LINEARES</b>	
<b>CAPÍTULO III EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES</b> .....	49
1. Preliminares .....	49
2. Propriedades gerais .....	50
3. Equações lineares com coeficientes constantes .....	57
4. Sistemas bidimensionais simples .....	64
5. Conjugação de sistemas lineares .....	69
6. Classificação Topológica dos Sistemas Lineares Hiperbólicos .....	77
7. Sistemas lineares complexos .....	82
8. Oscilações mecânicas e elétricas .....	84
<i>Exercícios</i> .....	88

<b>CAPÍTULO IV</b>	<b>ELEMENTOS DA TEORIA DE STURM-LIOUVILLE E PROBLEMAS DE CONTÓRNO</b>	<b>103</b>
1.	Os Teoremas de Sturm	103
2.	Problemas de Sturm-Liouville	106
3.	Existência de autovalores	109
4.	O problema da corda vibrante	112
5.	Expansão em séries de autofunções	115
	<i>Exercícios</i>	124
	Apêndice: O Teorema Espectral	131

<b>CAPÍTULO V</b>	<b>EQUAÇÕES LINEARES NO CAMPO COMPLEXO</b>	<b>139</b>
1.	Pontos singulares de um sistema linear	140
2.	Pontos singulares simples	143
3.	Soluções formais em pontos singulares simples	148
4.	Matrizes fundamentais em um ponto singular simples	152
5.	A equação de ordem $n$	155
6.	Equações Fuchsianas de segunda ordem	163
7.	O método de Frobenius	173
8.	A equação Hipergeométrica	177
9.	A equação de Bessel	186
10.	Funções de Bessel e a equação da membrana oscilante	191
	<i>Exercícios</i>	195

## PARTE C: TEORIA QUALITATIVA

<b>CAPÍTULO VI</b>	<b>ELEMENTOS DA TEORIA QUALITATIVA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS</b>	<b>207</b>
1.	Campos vetoriais e fluxos	208
2.	Diferenciabilidade dos fluxos gerados por campos vetoriais	211
3.	Retrato de fase de um campo vetorial	217
4.	Equivalência e conjugação de campos vetoriais	220
5.	Estrutura local dos pontos singulares hiperbólicos	225
6.	Estrutura local de órbitas periódicas	226
7.	Fluxos lineares no toro	231
	<i>Exercícios</i>	233

<b>CAPÍTULO VII</b>	<b>O TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON</b>	<b>243</b>
1.	Conjuntos $\alpha$ -limite e $\omega$ -limite de uma órbita	243
2.	O Teorema de Poincaré-Bendixson	248
3.	Aplicações do teorema de Poincaré-Bendixson	254
	<i>Exercícios</i>	258

<b>CAPÍTULO VIII</b>	<b>ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LIAPOUNOV</b>	<b>268</b>
1.	Estabilidade de Liapounov	268
2.	O critério de Liapounov	272
	<i>Exercícios</i>	276

<b>CAPÍTULO IX. ESTRUTURA LOCAL DOS PONTOS SINGULARES E ÓRBITAS PERIÓDICAS HIPERBÓLICAS.....</b>	<b>281</b>
1. Preliminares.....	281
2. Teorema de Hartman para difeomorfismos e órbitas periódicas hiperbólicas .....	283
3. Teorema de Hartman em espaços de Banach .....	286
4. Teorema de Hartman para campos vetoriais e fluxos.....	291
5. Teorema de Hartman: Caso local para difeomorfismos .....	293
6. Teorema de Hartman: Caso local para campos vetoriais.....	294
7. Variedades invariantes .....	295
<b>Apêndice: Diferenciabilidade das Variedades Invariantes de Pontos Hiper- bólicos .....</b>	<b>299</b>
<i>Exercícios</i> .....	<b>307</b>
<b>CAPÍTULO X TEORIA DE POINCARÉ-BENDIXSON EM SUPERFÍCIES.....</b>	<b>309</b>
1. Número de rotação.....	310
2. Teorema de Schwartz .....	313
<i>Exercícios</i> .....	321
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>323</b>
<b>ÍNDICE ALFABÉTICO.....</b>	<b>325</b>

## PREFÁCIO

Este livro baseia-se nos cursos sobre Equações Diferenciais Ordinárias dadas pelo autor em 1971 e 1973 no Instituto de Matemática Pura e Aplicada, para alunos de pós-graduação orientados para o Mestrado em Matemática.

Desenvolvemos aqui a Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, isto é, o estudo das propriedades gerais das funções que são soluções deste tipo de equações, a partir de hipóteses amplas sobre as funções que as definem, usando os recursos da Análise Matemática Clássica e da Álgebra Linear, sem recorrer necessariamente à forma particular das equações.

A matéria apresentada não difere essencialmente daquela desenvolvida em vários tratados clássicos ou modernos, mormente em língua estrangeira. Registramos aqui nosso reconhecimento pela influência recebida destes, e especialmente mencionamos Hartman [1964], Coddington e Levinson [1955] e Pontrjagin [1962].

O livro está dividido em três partes basicamente autosuficientes: Fundamentos, Equações Lineares e Teoria Qualitativa. Um quadro de interdependência entre os capítulos permite atalhos diretos para vários tópicos, sem seguir necessariamente a ordem em que estão apresentados no texto. Isto é conseguido ao custo de uma certa repetição dos fundamentos da Teoria, em diversas versões, que, a nosso ver, se complementam para dar uma visão mais ampla dos métodos disponíveis. O conteúdo dos capítulos é ditado por uma inevitável escolha dentro do vasto universo das Equações Diferenciais. Acreditamos entretanto ter abordado os elementos da maior parte dos assuntos surgidos ou sistematizados a partir do grande movimento de fundamentação e expansão que experimentou a Teoria no século XIX e que ainda na atualidade, sob variadas formas, são objeto de pesquisa ou usados nas aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias.

O texto apresenta mais material do que poderia ser razoavelmente coberto no curso de um período letivo, sendo indispensável neste caso uma escolha criteriosa de tópicos para uma primeira leitura.

O texto central é complementado com diversos apêndices, nos quais desenvolvemos aspectos importantes da Teoria mas tecnicamente mais elaborados ou diferentes no enfoque, cuja introdução no texto quebraria a continuidade de idéias e métodos elementares que neste predominam.

Os exercícios propostos, quando não são rotineiros, representam complementos, aplicações ou abordagens diferentes para a teoria; algumas vezes eles visam fornecer ao leitor informações sobre assuntos correlatos importantes que por limitação de espaço e tempo não puderam ser abordados com plenitude no texto. Estas informações devem ser complementadas, sempre que possível, com a leitura de bibliografia apropriada. Recomendamos ao leitor abordar e pensar em todos os exercícios propostos. Quase sempre anexamos sugestões para aqueles menos imediatos.

A Teoria das Equações Diferenciais se distingue tanto por sua riqueza de idéias e métodos como por sua aplicabilidade. O aluno obterá de seu estudo uma experiência de grande valor formativo, já que terá oportunidade de integrar, num único corpo, os fundamentos da Análise Clássica, Álgebra Linear e Topologia, disciplinas que pelas limitações e distorções derivadas da departamentalização do conhecimento são, amiúde, apresentadas em forma isolada.

É com grande satisfação que registramos nossos agradecimentos aos colegas e alunos que, com palavras de estímulo, sugestões e comentários, contribuíram para o aprimoramento das notas de aula precursoras deste livro. Com particular ênfase mencionamos a Wilson Barbosa, Roberto Paterlini e Genésio L. dos Reis, por sua inestimável colaboração na revisão e complementação de versões preliminares.

Agrademos também aos colegas, Carlos Gutiérrez, Cesar Camacho, Elon Lima, Jacob Palis e Pedro Mendes por sugestões diversas após terem usado parte destas versões preliminares em cursos ministrados.

Finalmente, mas não com menor satisfação, agradecemos a Maurício Peixoto pela influência que suas estimulantes lições dadas no IMPA em 1963-64, tiveram na concepção inicial deste livro.

Jorge Sotomayor  
Rio de Janeiro, abril de 1979

## INTRODUÇÃO

Uma equação da forma  $F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = 0$ , onde a incógnita  $x$  é uma função de uma variável, chama-se equação diferencial ordinária. Muitas leis gerais da Física, Biologia e Economia encontram sua expressão natural nestas equações. Por outro lado, inúmeras questões na própria Matemática (por exemplo, em Topologia e Geometria Diferenciais e no Cálculo de Variações) são formuladas por equações diferenciais ordinárias ou se reduzem a elas.

O estudo das equações diferenciais começou com os métodos do Cálculo Diferencial e Integral, descobertos por Newton e Leibnitz, e elaborados no último quarto do século XVII para resolver problemas motivados por considerações físicas e geométricas. Estes métodos, na sua evolução, conduziram gradualmente à consolidação das Equações Diferenciais como um novo ramo da Matemática, que em meados do século XVIII se transformou numa disciplina independente.

Neste estágio, a procura e análise de soluções tornou-se uma finalidade própria. Também nesta época ficaram conhecidos os métodos elementares de resolução (integração) de vários tipos especiais de equações diferenciais, tais como as de variáveis separáveis ( $x' = f(x)g(t)$ ), as lineares ( $x' = a(t)x + b(t)$ ), as de Bernoulli ( $x' = p(t)x + q(t)x^n$ ), as de Clairaut ( $f(x') + tx' = x$ ), as de Riccati ( $x' = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2$ ), estudados, tradicionalmente, até nossos dias, em muitos cursos introdutórios de Cálculo.

A natureza daquilo que era considerado solução foi mudando gradualmente, num processo que acompanhou e, às vezes, propiciou o desenvolvimento do próprio conceito de função. Inicialmente buscavam-se soluções expressas em termos de funções elementares, isto é, polinomiais, racionais, trigonométricas e exponenciais. Posteriormente, passou-se a considerar satisfatório expressar a solução na forma de uma integral (quadratura) contendo operações elementares envolvendo estas funções, ainda que a mesma não admitisse uma expressão em termos destas. Quando estes dois caminhos deixaram de resolver os problemas focalizados, surgiram as soluções expressas por meio de

séries infinitas (ainda sem a preocupação com a análise da convergência das mesmas).

Em fins do século XVIII a Teoria das Equações Diferenciais se transformou numa das disciplinas matemáticas mais importantes e o método mais efetivo para a pesquisa científica. As contribuições de Euler, Lagrange, Laplace e outros expandiram notavelmente o conhecimento dentro do Cálculo das Variações, Mecânica Celeste, Teoria das Oscilações, Elasticidade, Dinâmica de Fluidos, etc. Nesta época iniciou-se também a descoberta das relações das equações diferenciais com as funções de variável complexa, séries de potências e trigonométricas e funções especiais (conhecidas posteriormente como de Bessel, etc.). O grau que o conhecimento matemático atingiu nesta primeira fase ficou registrado na obra de Euler "Institutiones Calculi Integralis" em quatro volumes, o último deles publicado em 1794.

No século XIX os fundamentos da Análise Matemática experimentaram uma revisão e reformulação gerais visando maior rigor e exatidão. Assim, os conceitos de limite, derivada, convergência de séries numéricas e séries de funções e outros processos infinitos foram definidos em termos aritméticos. A integral, que no século anterior era concebida como primitiva, foi definida como limite de uma seqüência de somas. Este movimento de fundamentação não deixou de atingir as equações diferenciais. Enquanto no século anterior procurava-se uma solução geral para uma dada equação diferencial, passou-se a considerar como questão prévia em cada problema a existência e unicidade de soluções satisfazendo dados iniciais. Este é o problema de Cauchy, estudado em sua generalidade na parte A deste livro. Tomava-se então uma classe ampla de equações diferenciais, como as lineares, por exemplo, para as quais a existência e unicidade das soluções estava aceita e procuravam-se propriedades gerais destas soluções a partir de características das funções que definiam a equação diferencial. Por outro lado, o método de separação de variáveis aplicado a certas equações diferenciais parciais conduziu a equações ordinárias que não admitem soluções em termos de funções elementares conhecidas, como é o caso das equações de Sturm-Liouville e das equações de Fuchs (lineares com coeficientes analíticos complexos com singularidades isoladas regulares). As primeiras fornecem um exemplo característico de um problema linear de contorno, enquanto que as equações Fuchsianas sistematizam vários tipos de equações especiais surgidas originalmente no século XVIII em trabalhos de Euler e Bernoulli e estudadas também por Gauss e Riemann. Incluem equações de rele-

vância da Física-Matemática, como as de Bessel, de Legendre e de Gauss (ou hipergeométrica). A parte B deste livro aborda o estudo das equações diferenciais lineares nos moldes descritos acima.

Um marco de referência fundamental na evolução das equações diferenciais é o trabalho de Poincaré "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle" (1881) no qual são lançadas as bases da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Esta teoria visa a descrição da configuração global das soluções e o efeito de pequenas perturbações das condições iniciais (estabilidade). O estudo da estabilidade de um sistema, de grande importância na tecnologia contemporânea, teve sua origem em questões de Mecânica Celeste estudadas inicialmente por Newton, Lagrange e Laplace. Pergunta-se se uma pequena perturbação na posição e velocidade de um corpo celeste o coloca em uma órbita que se afasta ou converge para a órbita original. O problema geral da estabilidade foi simultaneamente estudado por Liapounov, que juntamente com Poincaré, é considerado fundador da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. O conceito de estabilidade de soluções é estudado no capítulo 8 deste livro.

Outro aspecto da Teoria Qualitativa, também estudado por Poincaré, visa descrever o comportamento assintótico das soluções e a estrutura de seus conjuntos limites. O comportamento assintótico de uma solução se obtém quando se faz a variável independente (tempo) tender para infinito. O conjunto limite pode ser um ponto de equilíbrio, uma solução periódica ou outro conjunto mais complicado. A Teoria de Poincaré-Bendixson, estudada nos capítulos 7 e 10, responde a este tipo de questões no plano e em superfícies bidimensionais, respectivamente.

O estudo de oscilações não lineares de fenômenos elétricos realizado no primeiro quarto do presente século conduziu a equações especiais de segunda ordem tais como as de van der Pol e Lienard. No capítulo 7 estudamos suas propriedades mais elementares à luz do teorema de Poincaré-Bendixson.

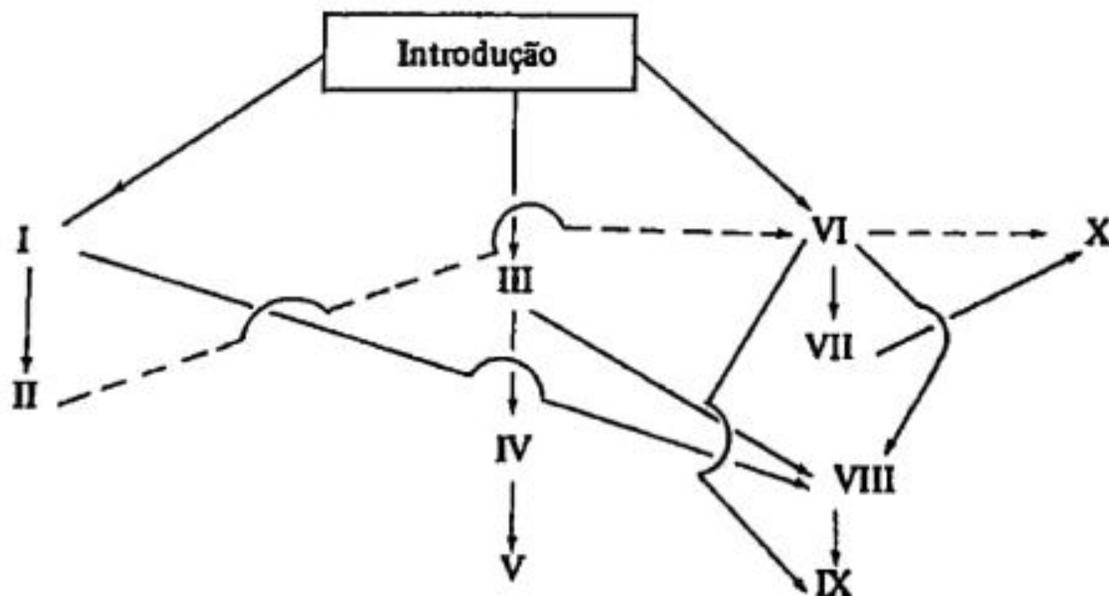
A introdução do conceito de estabilidade estrutural por Andronov e Pontrjagin (1937) e os trabalhos de Peixoto (1958-62) relativos à caracterização, abertura e densidade das equações diferenciais estruturalmente estáveis em superfícies constituem um marco fundamental para o desenvolvimento contemporâneo das equações diferenciais. Trata-se de determinar as condições necessárias e suficientes para que o retrato de fase de uma equação diferencial não experimente mudanças qualitativas bruscas por pequenas perturbações das funções que as

definem. Na Física encontramos motivação para o estudo destes conceitos. No capítulo 9 deste livro tratamos com detalhe o caso local da estabilidade estrutural (Teorema de Hartman).

No desenvolvimento presente do assunto distinguem-se os métodos de Topologia Diferencial nas contribuições de Smale e Thom, que têm grande influência na pesquisa atual.



*Quadro de interdependência entre os capítulos*



**PARTE A**

**FUNDAMENTOS**

## EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

Este capítulo introduz de maneira precisa os conceitos fundamentais da teoria das equações diferenciais ordinárias e inicia o seu estudo. Assim, em vez de lidar com "equações que envolvem funções e suas derivadas" damos na seção 1 a definição de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$x' = f(t, x) \quad (1)$$

e do que vem a ser uma solução desta equação.

Na seção 2 formulamos o problema de Cauchy para (1). Isto significa que dados  $t_0, x_0$  fixos queremos saber se existe alguma solução de (1) que no ponto  $t_0$  assume o valor  $x_0$  e se essa solução é única. O problema de Cauchy para (1) com condições iniciais  $(t_0, x_0)$  é denotado abreviadamente

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

Na seção 3 discutimos alguns casos elementares de existência e unicidade de (2) entre os quais os casos de variáveis separáveis e linear.

O estudo geral de (2) é feito na seção 4. Aí é provado o teorema de Picard que garante a existência e unicidade de (2) com condições relativamente fracas em  $f$ . Por exemplo, basta que  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial x}$  sejam contínuas. Provamos também o teorema de Peano que afirma que (2) admite pelo menos uma solução mesmo que  $f$  seja apenas contínua. Neste caso porém a unicidade é, em geral, perdida.

Na seção 5 consideramos as soluções que não podem ser prolongadas, ou seja, as soluções máximas.

Na seção 6 definimos as equações de ordem superior e mostramos que seu estudo se reduz ao dos sistemas de equações de primeira ordem.

## 1. Preliminares

Sejam  $\Omega$  um subconjunto do espaço  $\mathbb{R} \times E$  onde  $\mathbb{R}$  é a reta real e  $E = \mathbb{R}^n$  um espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Um ponto de  $\mathbb{R} \times E$

será denotado por  $(t, x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  em  $E$ ; salvo menção em contrário, adotaremos em  $\mathbb{R} \times E$  a norma:  $|(t, x)| = \max\{|t|, |x|\}$  onde  $|x|$  denota uma norma em  $E$ , por exemplo  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  ou  $|x| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$  ou ainda  $|x| = |x_1| + \dots + |x_n|$ .

Seja  $f = \Omega \rightarrow E$  uma aplicação contínua e seja  $I$  um intervalo não degenerado da reta, isto é, um subconjunto conexo de  $\mathbb{R}$  não reduzido a um ponto. O intervalo  $I$  pode ser aberto, fechado ou semi-fechado, finito ou infinito.

1. DEFINIÇÃO. Uma função diferenciável  $\varphi = I \rightarrow E$  chama-se solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

no intervalo  $I$  se:

i) o gráfico de  $\varphi$  em  $I$ , isto é,  $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$  está contido em  $\Omega$  e

ii)  $\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in I$ . Se  $t$  é um ponto extremo do

intervalo, a derivada é a derivada lateral respectiva.

A equação (1) chama-se equação diferencial ordinária de primeira ordem e é denotada abreviadamente por

$$x' = f(t, x) \quad (1)$$

Sejam  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  as componentes de  $f$ ;  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  com  $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução de (1) se e somente se cada  $\varphi_i$  é diferenciável em  $I$ ,  $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in \Omega$  para todo  $t \in I$  e

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt}(t) = f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \frac{d\varphi_2}{dt}(t) = f_2(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \dots \\ \frac{d\varphi_n}{dt}(t) = f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{cases} \quad (1')$$

para todo  $t \in I$ .

Por esta razão diz-se que a equação diferencial "vetorial" (1) é equivalente ao sistema de equações diferenciais escalares

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, \dots, n \quad (1')$$

## 2. O problema de Cauchy

Consideremos inicialmente dois exemplos:

1)  $\Omega = I \times \mathbb{R}$ ,  $f(t, x) = g(t)$  onde  $g$  é uma função contínua no intervalo  $I$ ;  $\varphi$  é uma solução de  $x' = g(t)$  em  $I$  se e somente se  $\varphi(t) = c + \int_{t_0}^t g(s) ds$  onde  $t_0 \in I$  e  $c$  é uma constante.

2)  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $f(t, x) = 3x^{2/3}$ . Para todo  $c \in \mathbb{R}$  a função  $\varphi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} (t - c)^3, & t \geq c \\ 0, & t \leq c \end{cases}$$

é uma solução da equação  $x' = 3x^{2/3}$  em  $I = \mathbb{R}$  como se vê por verificação direta das condições (i) e (ii) acima.

Mas a função constante  $\varphi = 0$  também é solução desta equação. Ver Fig. 1.

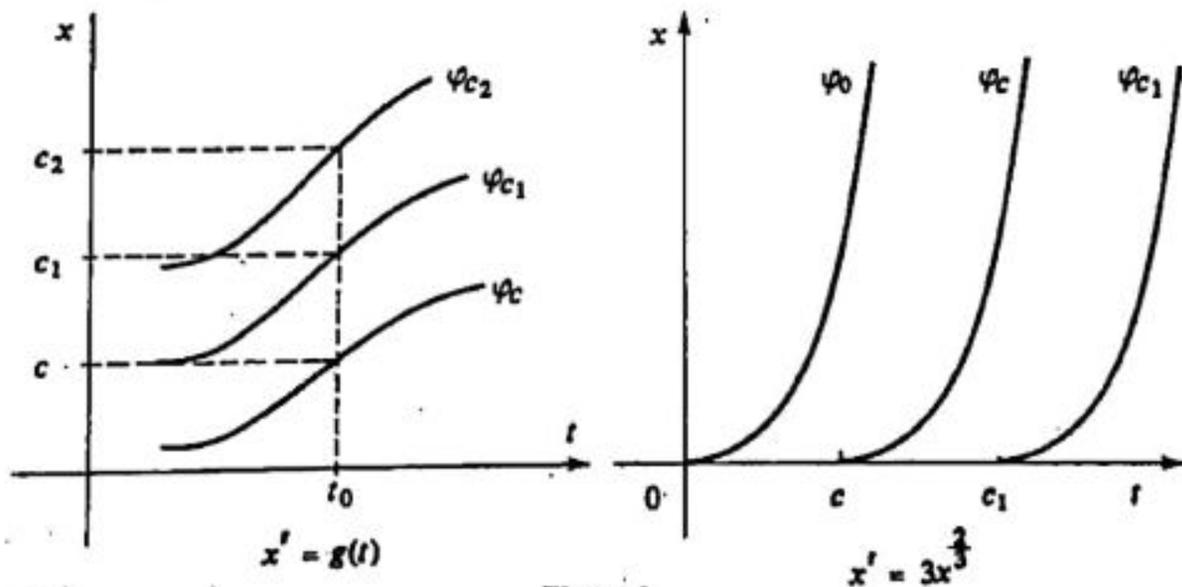


Figura 1

Estes exemplos ilustram o fato de que as equações diferenciais possuem em geral uma infinidade de soluções. Porém, no exemplo 1, em cada ponto de  $\Omega$  passa uma única solução; isto é, dado  $(t_0, x_0) \in \Omega$  existe uma única solução  $\varphi$  tal que  $\varphi(t_0) = x_0$ .

O mesmo não acontece no exemplo 2; neste caso em cada ponto da forma  $(t_0, 0)$  passa uma infinidade de soluções. Sob hipóteses bem gerais sobre  $f$  — por exemplo se  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial x}$  são contínuas em  $\Omega$  — existe uma e só uma solução  $\varphi$  de (1) num intervalo que contém  $t_0$  e tal que  $\varphi(t_0) = x_0$ . Uma tal  $\varphi$  será chamada de *solução do problema com dados iniciais*  $(t_0, x_0)$  para a equação 1. Este problema é também conhecido como *problema de Cauchy* e será denotado abreviadamente por

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

*Observação.* A equação (2) é equivalente à equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (3)$$

Isto é, se  $t_0 \in I$ , uma função contínua  $\varphi: I \rightarrow E$  cujo gráfico está contido em  $\Omega$  é solução de (3) se e só se é solução de (2). Isto decorre do teorema fundamental do cálculo.

A equação (1) (ou (2)) admite a seguinte interpretação geométrica (Fig. 2)

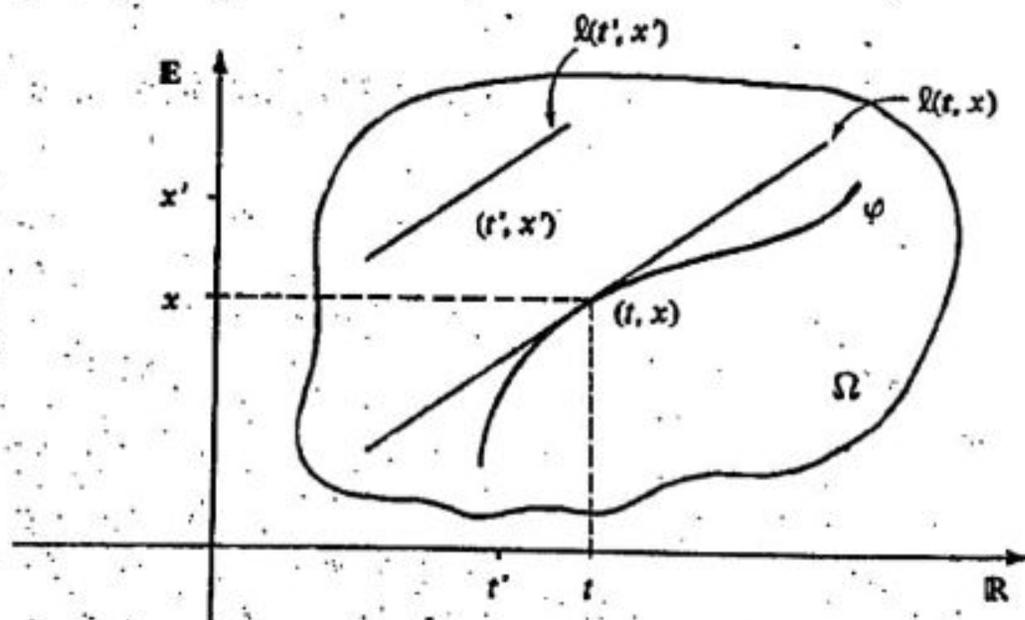


Figura 2

A função  $f$  define em  $\Omega$  um campo de direções. Isto é, associa a cada ponto  $(t, x)$  a reta:

$$\ell(t, x) : \xi - x = f(t, x)(\tau - t)$$

de "declividade"  $f(t, x)$  que passa por  $(t, x)$ . A equação (1) (ou (2)) coloca o problema de achar (se existem) as curvas passando por  $(t_0, x_0)$  cujas

retas tangentes em cada ponto coincidem com as dadas pelo campo de direções.

### 3. Exemplos

Discutimos a seguir quatro exemplos elementares de existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy que admitem um tratamento direto.

**EXEMPLO 1.** Seja  $\Omega = \mathbb{R} \times (a_1, a_2)$  e  $f(t, x) = f(x)$ . Supomos que  $f$  é contínua e não se anula em  $(a_1, a_2)$ . Dados  $x_0 \in (a_1, a_2)$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$  calculemos a solução para o problema de Cauchy

$$x' = f(x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

Se  $\varphi$  é uma solução de (1) então

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)) \quad \text{e} \quad \varphi(t_0) = x_0 \quad (2)$$

donde segue-se

$$\frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = 1 \quad (3)$$

Se  $F: (a_1, a_2) \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$F(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{f(\xi)}$$

vê-se que  $F'(x) = \frac{1}{f(x)} \neq 0$  em  $(a_1, a_2)$  provando que  $F$  é inversível e aplica  $(a_1, a_2)$  num intervalo  $(b_1, b_2)$  onde  $F^{-1}$  está definida.

De (1) resulta

$$1 = \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = F'(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

ou seja,

$$(F \circ \varphi)'(t) = 1$$

Integrando ambos os lados entre  $t_0$  e  $t$  obtemos

$$F(\varphi(t)) - F(\varphi(t_0)) = t - t_0$$

e como  $F(\varphi(t_0)) = 0$ ,

$$F(\varphi(t)) = t - t_0$$

Logo a solução de (1) é dada por

$$\varphi(t) = F^{-1}(t - t_0) \quad t \in (t_0 + b_1, t_0 + b_2)$$

e vê-se facilmente que esta é a única solução.

Compare este exemplo com o exemplo 2.2 onde não existe unicidade de soluções e com a equação do tipo  $x' = g(t)$  (2.1).

Note também que  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)}$  que é deste tipo tem soluções que são inversas das soluções de (1) e vice-versa.

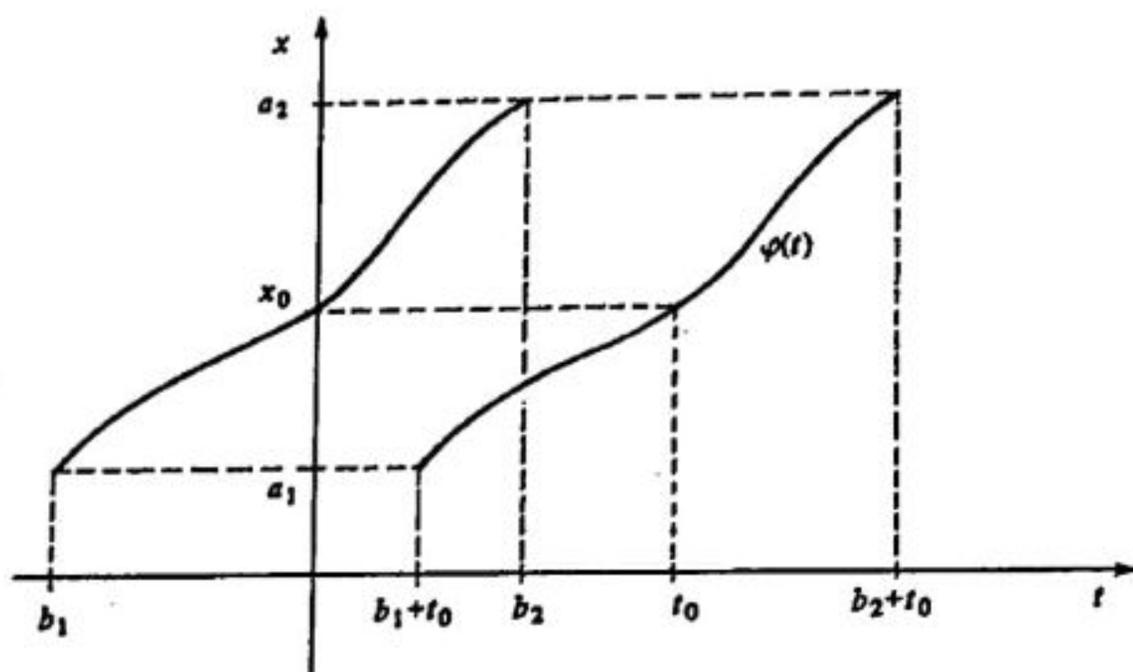


Figura 3

**EXEMPLO 2.** Equações de variáveis separáveis. Consideremos o problema de Cauchy

$$x' = g(t)f(x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

onde  $g$  e  $f$  são contínuas em intervalos abertos  $(t_1, t_2)$  e  $(a_1, a_2)$  respectivamente, e  $f$  não se anula em  $(a_1, a_2)$ .

Procedendo como no exemplo anterior (que é o caso particular em que  $g(t) \equiv 1$ ) se  $\varphi$  é solução de (1) obtemos

$$\varphi'(t) = g(t)f(\varphi(t))$$

ou seja

$$\begin{aligned} g(t) &= F'(\varphi(t)) \varphi'(t) \\ &= (F \circ \varphi)'(t) \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados entre  $t_0$  e  $t$  resulta

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau = F(\varphi(t))$$

e daí no intervalo  $I$  contendo  $t_0$  tal que  $t \in I$  implica  $b_1 < \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau < b_2$ , a solução é  $\varphi(t) = F^{-1}(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau)$ .

O leitor deve verificar que esta é a única solução.

Observe que a solução obtida é dada implicitamente, para constantes de integração apropriadas, pela relação

$$\int g(t) dt = \int \frac{dx}{f(x)}$$

entre as integrais indefinidas.

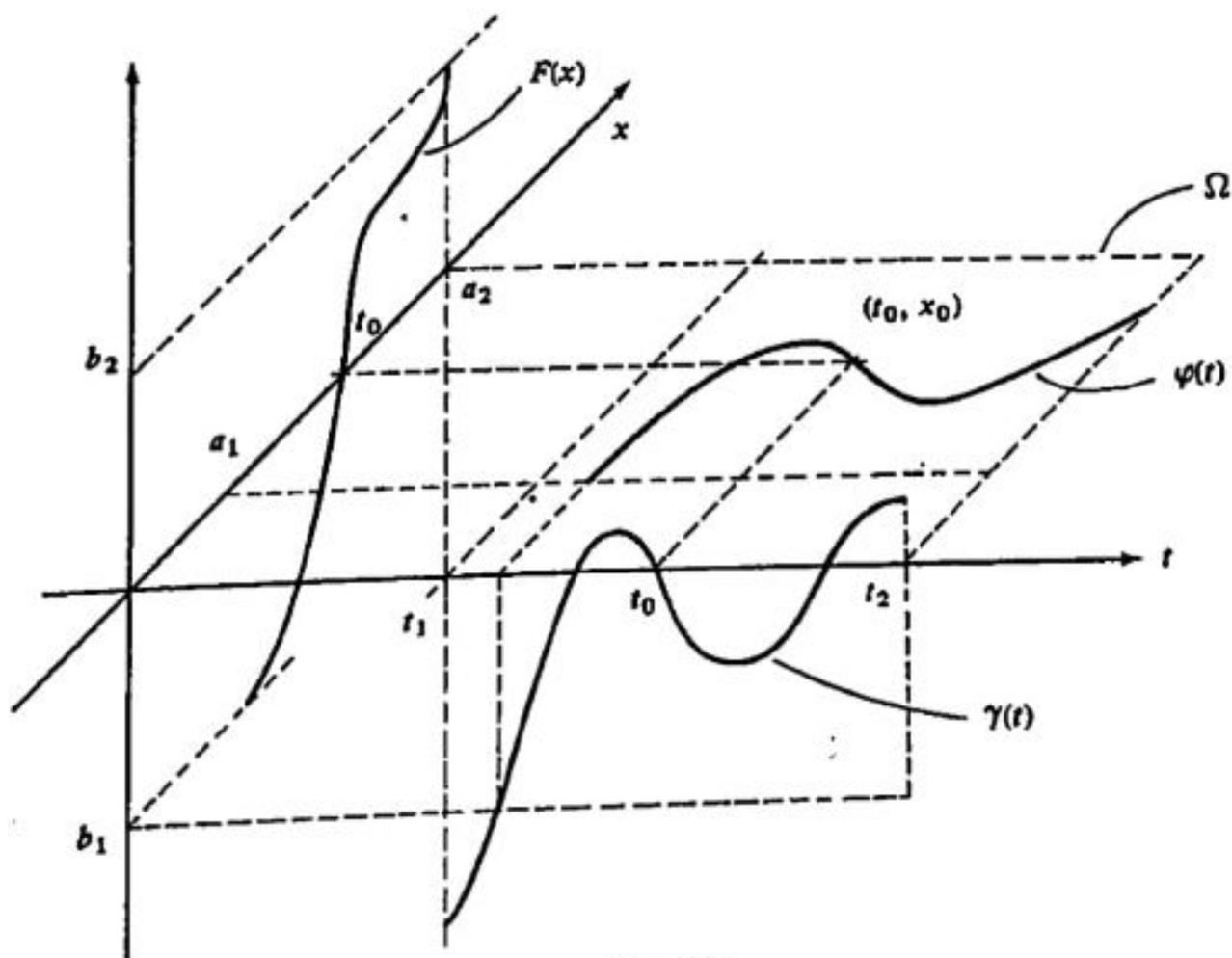


Figura 4

**EXEMPLO 3. Equações lineares**

Sejam  $a(t)$  e  $b(t)$  funções contínuas em  $(t_1, t_2)$  e consideremos o problema de Cauchy

$$x' = a(t)x + b(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

Se  $b \equiv 0$  esta equação chama-se homogênea e é do tipo de variáveis separáveis. Os casos  $x < 0$  e  $x > 0$  poderiam então ser analisadas à luz do exemplo anterior. Preferimos porém seguir o método clássico de "variação de parâmetros" que é aplicável mesmo no caso não homogêneo.

Este método consiste em fazer a mudança de variáveis

$$x = c \exp \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right] \quad (2)$$

que transforma (1) no problema

$$c' = b(t) \exp \left[ - \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right], \quad c(t_0) = x_0 \quad (3)$$

cuja solução única é

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s) \exp \left[ - \int_{t_0}^s a(\tau) d\tau \right] ds \quad /$$

Logo o problema de Cauchy (1) admite como única solução

$$\varphi(t) = \gamma(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right] \quad t \in (t_1, t_2)$$

Para ver que a mudança de variáveis transforma (1) em (3) basta derivar (2) e substituir em  $x' = a(t)x + b(t)$ .

Obtemos então

$$\begin{aligned} c' \exp \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right] + ca(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right] &= \\ &= ca(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right] + b(t) \end{aligned}$$

isto é,

$$c' = b(t) \exp \left[ - \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right].$$

O termo variação de parâmetros deriva do fato de  $c(t) \equiv x_0$  no caso homogêneo.

**EXEMPLO 4.** Consideremos agora um sistema de duas equações lineares e o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = \alpha(t)x - \beta(t)y + \delta(t) \\ y' = \beta(t)x + \alpha(t)y + \eta(t) \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  e  $\eta$  são funções contínuas num intervalo  $(t_1, t_2)$  que contém o ponto  $t_0$ .

Este problema não difere em seu tratamento formal do exemplo anterior. Introduzindo notação complexa  $z = x + iy$ ,  $a(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$  e  $b(t) = \delta(t) + i\eta(t)$  vemos que (1) se escreve

$$z' = a(t)z + b(t), \quad z(t_0) = z_0$$

cuja única solução é, para  $t \in (t_1, t_2)$

$$\varphi(t) = \gamma(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right] \quad \text{onde}$$

$$\gamma(t) = z_0 + \int_{t_0}^t b(s) \exp \left[ - \int_{t_0}^s a(\tau) d\tau \right] ds.$$

Ilustremos o caso homogêneo ( $\delta \equiv \eta \equiv 0$ ) com coeficientes constantes ( $\alpha(t) \equiv \alpha$  e  $\beta(t) \equiv \beta$ ) e com  $t_0 = 0$ . Neste caso  $\varphi(t) = z_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t}$  e temos as seguintes possibilidades

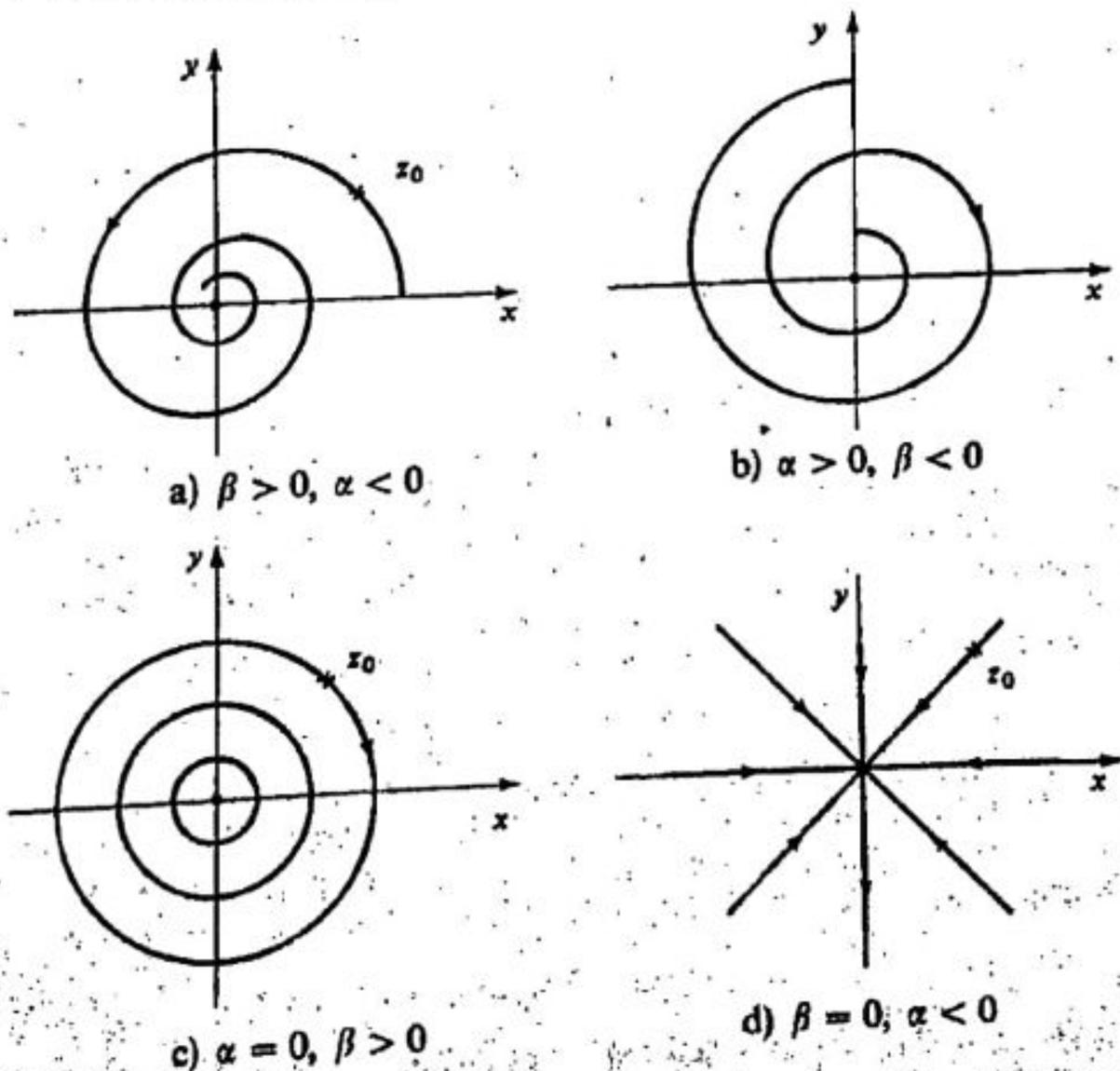


Figura 5

## 4. Teoremas de Picard e de Peano

Uma aplicação  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se *Lipschitziana em  $\Omega$  relativamente à segunda variável* ou, simplesmente, *Lipschitziana*, se existe uma constante  $K$  tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K |x - y|$$

para todos  $(t, x), (t, y) \in \Omega$ ;  $K$  chama-se constante de Lipschitz de  $f$ .

Por exemplo, se  $f$  admite derivada parcial em relação à segunda variável,  $D_2 f$ , com  $\|D_2 f\| \leq K$  em  $\Omega$ , e  $\Omega_t = \{x \mid (t, x) \in \Omega\}$  é um conjunto convexo para todo  $t$ , então  $f$  é lipschitziana em  $\Omega$  e  $K$  é sua constante de Lipschitz.

De fato, pelo teorema do valor médio,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \sup_{0 < \theta < 1} |D_2 f(t, \theta x + (1 - \theta)y)| |(x - y)| \leq K |x - y|$$

A aplicação  $f$  diz-se localmente lipschitziana em  $\Omega$  se cada  $(t_0, x_0)$  tem uma vizinhança  $V = \mathcal{U}(t_0, x_0)$  tal que  $f|_V$  é lipschitziana em  $V$ . Por exemplo, se  $f$  admite derivada parcial em relação à segunda variável,  $D_2 f$ , contínua em  $\Omega$ , então  $f$  é localmente lipschitziana em  $\Omega$ . Isto resulta de se aplicar o argumento anterior a vizinhanças convexas  $V$  onde  $D_2 f$  é limitada.

Lembramos a seguir o Lema da Contração e, principalmente, um corolário deste que será usado na demonstração do Teorema 2, abaixo.

1. LEMA DE CONTRAÇÃO. *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $F: X \rightarrow X$  uma contração, isto é,  $d(F(x), F(y)) \leq K d(x, y)$ ,  $0 \leq K < 1$ . Existe um único ponto fixo  $p$ , por  $F$ , isto é  $F(p) = p$ . Mais ainda,  $p$  é um atrator de  $F$ , isto é,  $F^n(x) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $x \in X$ .  $F^n(x)$  é definido por  $F(F^{n-1}(x))$ .*

*Demonstração.* Unicidade: sejam  $p$  e  $p_1$  dois pontos fixos.

$$d(p, p_1) = d(F(p), F(p_1)) \leq K d(p_1, p)$$

o que implica que  $d(p, p_1) = 0$  donde  $p_1 = p$ .

Existência: sejam  $x \in X$  e  $x_n = F^n(x)$ . Provaremos que  $x_n$  é uma seqüência de Cauchy. Realmente,  $d(x_{n+r}, x_n) \leq K^n d(x, x_r)$  e,  $d(x, x_r) \leq d(x, F(x)) + d(F(x), F^2(x)) + \dots + d(F^{r-1}(x), F^r(x)) \leq (1 + K + K^2 + \dots + K^{r-1}) d(x, F(x))$ . Portanto,  $d(x_{n+r}, x_n) \leq \frac{K^n}{1 - K} d(x, F(x))$ . Logo,  $\{x_n\}$  é convergente. Provemos que  $\lim x_n = p$  é ponto fixo de  $F$ . De fato:

$$F(p) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim x_{n+1} = p \quad \blacksquare$$

**COROLÁRIO.** *Seja  $X$  um espaço métrico completo. Se  $F : X \rightarrow X$  é contínua e, para algum  $m$ ,  $F^m$  é uma contração, então existe um único ponto  $p$  fixo por  $F$ . Mais ainda,  $p$  é um atrator de  $F$ .*

*Demonstração.* Seja  $p$  o ponto fixo atrator de  $F^m$  dado pelo Lema da Contração. Seja  $n = mk + \ell$  com  $0 \leq \ell < m$ . Dado  $x \in X$ ,  $F^\ell(x)$  é um ponto de  $X$ . Como  $p$  é atrator de  $F^m$ , temos (já que  $\{F^\ell(j)\}$ ,  $0 \leq \ell < m$  é finito)  $[F^m]^k(F^\ell(x)) \rightarrow p$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Da relação:  $F^n(x) = [F^m]^k(F^\ell(x))$  e do fato que quando  $n \rightarrow \infty$  tem-se  $k \rightarrow \infty$ , segue-se que  $F^n(x) \rightarrow p$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , isto é,  $p$  é um atrator de  $F$ . Provaremos agora que  $F(p) = p$ . Com efeito,

$$p = \lim F^n(F(p)) = \lim F^{n+1}(p) = \lim F(F^n(p)) = F(\lim F^n(p)) = F(p) \quad \blacksquare$$

## 2. TEOREMA DE PICARD

*Seja  $f$  contínua e lipschitziana em  $\Omega = I_a \times B_b$ , onde  $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$ ,  $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ , existe uma e única solução de*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

*em  $I_a$ , onde  $\alpha = \min \{a, b/M\}$*

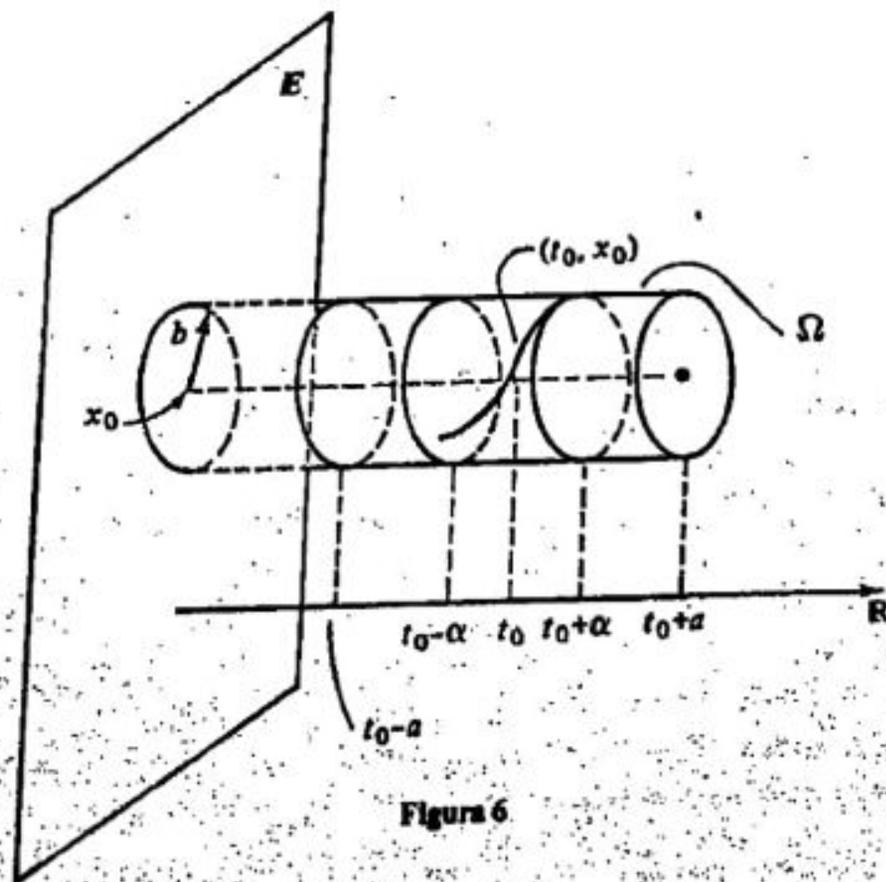


Figura 6

*Demonstração.* Seja  $X = C(I_a, B_b)$  o espaço métrico completo das funções contínuas  $\varphi : I_a \rightarrow B_b$ , com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_a} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$$

Para  $\varphi \in X$ , seja  $F(\varphi) : I_a \rightarrow \mathbb{E}$  definida por:

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

$t \in I_a$ . Destacamos as seguintes propriedades de  $F$ :

- (1)  $F(X) \subseteq X$
- (2)  $F^n$  é uma contração, para  $n$  suficientemente grande.

De fato, para todo  $t \in I_a$ ,

$$|F(\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M\alpha \leq b$$

Isto prova (1). Quanto a (2), para todo par  $\varphi_1, \varphi_2 \in X$  e todo  $n \geq 0$

$$(*) \quad |F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_a,$$

onde  $K$  é a constante de Lipschitz de  $f$ . Verificamos esta desigualdade por indução em  $n$ . Para  $n = 0$  ela é óbvia. Suponhamos que é válida para  $k$ . Então,

$$\begin{aligned} (+) \quad & |F^{k+1}(\varphi_1)(t) - F^{k+1}(\varphi_2)(t)| = |F(F^k(\varphi_1))(t) - F(F^k(\varphi_2))(t)| \leq \\ & \left| \int_{t_0}^t |f(s, F^k(\varphi_1)(s)) - f(s, F^k(\varphi_2)(s))| ds \right| \leq \\ & \left| \int_{t_0}^t K |F^k(\varphi_1)(s) - F^k(\varphi_2)(s)| ds \right| \leq \\ & \leq K \left| \int_{t_0}^t \frac{K^k (t_0 - s)^k}{k!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| = \frac{K^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{k+1!} d(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

portanto,  $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$  e, para  $n$  grande,  $K^n \alpha^n / n! <$

$< 1$ , pois este é o termo geral de uma série cuja soma é  $e^{K\alpha}$ , donde  $F^n$  é uma contração de  $X$ . Pelo corolário do Lema da Contração, existe uma única  $\varphi$  tal que  $F(\varphi) = \varphi$ , e isto prova o teorema de Picard. ■

**3. COROLÁRIO.** *Seja  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$  e seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  contínua com  $D_2 f$  também contínua. Para todo ponto  $(t_0, x_0)$  em  $\Omega$  existe uma vizinhança  $V = I(t_0) \times B(x_0)$  tal que  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  tem uma única solução em  $I(t_0)$ . Além disso, o gráfico desta solução está contido em  $V$ .*

*Demonstração.* Seja  $U$  uma vizinhança de  $(t_0, x_0)$  tal que  $f|U$  é lipschitziana e  $|f| \leq M$  em  $U$ . Seja  $\alpha > 0$  suficientemente pequeno para que  $V = I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \subseteq U$ , onde  $b = \alpha M$ . Conclue-se o argumento aplicando o Teorema 2. ■

**4. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $f$  contínua e lipschitziana em  $\Omega = [a, b] \times E$ . Então, para todo  $(t_0, x_0) \in \Omega$  existe uma única solução de (1) em  $I = [a, b]$ .*

*Demonstração:* Considerar  $X = \mathcal{C}(I, E)$  e  $F: X \rightarrow X$  definida como na demonstração do Teorema 2.

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

$F$  tem um único ponto fixo pois, para  $n$  grande,  $F^n$  é uma contração. Basta observar que a desigualdade (\*) da demonstração do Teorema 2 é verificada. ■

**5. COROLÁRIO.** (*Equações Lineares*).

*Sejam  $A(t)$  e  $b(t)$  respectivamente matrizes  $n \times n$  e  $n \times 1$  de funções contínuas num intervalo  $I$ . Para todo  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$  existe uma única solução de  $x' = A(t)x + b(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  definida em  $I$ .*

*Demonstração.* Seja  $I = \bigcup_n I_n$  onde  $I_n \subseteq I_{n+1}$  são intervalos compactos que contém  $t_0$ .

$f(t, x) = A(t)x + b(t)$  satisfaz as hipóteses da proposição 4 em cada intervalo  $I_n$ . Seja  $\varphi_n$  a única solução neste intervalo passando por  $(t_0, x_0)$ . É claro que  $\varphi_{n+1}|I_n = \varphi_n$ . Logo  $\varphi(t) = \varphi_n(t)$ ,  $t \in I_n$  está bem definida em  $I$ . É claro também que  $\varphi$  é a única solução em  $I$  passando por  $(t_0, x_0)$ . ■

Se retirarmos a hipótese de  $f$  ser lipschitziana ainda temos existência de soluções. Antes lembramos o Teorema de Arzelá que será usado na demonstração do seguinte e de outros teoremas deste livro.

**6. TEOREMA DE ARZELÁ.**

*Seja  $(X, d)$  um espaço métrico compacto. Seja  $F$  uma família equicontinua de funções  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Isto é, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) < \delta$  então  $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$  para toda  $\varphi \in F$ . Se  $F$  é uniformemente limitada (isto é, existe  $M > 0$  tal que  $|\varphi| < M$  para todo*

$\varphi \in F$ ), então toda seqüência  $\{\varphi_n\}$  de elementos de  $F$  tem uma subsequência  $\{\varphi_{n_k}\}$  uniformemente convergente em  $X$ .

*Demonstração.* Ver Lima [1977] pag. 244. ■

## 7. TEOREMA DE PEANO.

Seja  $f$  contínua em  $\Omega = I_a \times B_b$  como no Teorema 2. Se  $|f| < M$  em  $\Omega$ , (1) tem pelo menos uma solução em  $I_a$ , onde  $\alpha = \min\{a, b/M\}$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma seqüência  $f_n$  de funções, cujas componentes são polinômios, que converge para  $f$ , uniformemente em  $\Omega$ . Para  $n$  grande,  $f_n$  satisfaz as hipóteses do Teorema 2. Seja  $\varphi_n$  solução de  $x' = f_n(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  em  $I_a$ , cuja existência e unicidade decorrem do Teorema 2. A família  $\{\varphi_n\}$  é equicontínua e uniformemente limitada, pois:

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(t')| = \left| \int_{t'}^t f_n(s, \varphi_n(s)) ds \right| \leq M |t - t'|$$

e  $|\varphi_n - x_0| \leq b$ , para todo  $n$  suficientemente grande. Pelo Teorema de Arzelá existe uma subsequência, que denotaremos também por  $\varphi_n$ , tal que  $\varphi_n$  converge uniformemente em  $I_a$  para uma função  $\varphi$ . Provaremos que  $\varphi$  é solução de (1). Aplicando a desigualdade triangular a  $f_n(s, \varphi_n(s))$ ,  $f(s, \varphi_n(s))$  e  $f(s, \varphi(s))$  resulta que  $f_n(s, \varphi_n(s))$  converge uniformemente em  $I_a$  para  $f(s, \varphi(s))$ . Portanto, fazendo  $n$  tender a  $\infty$  em ambos os membros de  $\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_n(s, \varphi_n(s)) ds$ , temos, para todo  $t \in I_a$ ,  $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$ . ■

8. COROLÁRIO. Seja  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$  e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  contínua. Se  $C \subseteq \Omega$  é um conjunto tal que  $|f| < M$  em  $\Omega_0$ , onde  $\Omega \supseteq \Omega_0 \supseteq C$  com  $\text{dist}(C, \Omega - \Omega_0) > 0$ , então existe  $\alpha > 0$  tal que, para todo ponto  $(t_0, x_0) \in C$ , existe uma solução de:  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  em  $I_\alpha(t_0) = \{t \mid |t - t_0| \leq \alpha\}$ .

*Demonstração.* Seja  $0 < a < \text{dist}(C, \Omega - \Omega_0)$ . Tomar  $\alpha = \min\{a, a/M\}$  e aplicar o Teorema 7 a  $I_\alpha(t_0) \times B_a(x_0) \subseteq \Omega_0$ .

9. Observação. Se  $C$  é compacto contido no interior de um outro compacto  $\Omega_0$  as hipóteses deste corolário são satisfeitas para  $M > \sup |f|$  em  $\Omega_0$ .

## 5. Soluções máximas

1) PROPOSIÇÃO. Seja  $f$  contínua num aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ . Suponhamos que para todo  $(t_0, x_0) \in \Omega$  exista uma única solução de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  definida num intervalo aberto  $I = I(t_0, x_0)$  (por exemplo, se  $f$  é localmente de Lipschitz esta condição é satisfeita). Então, para todo  $(t_0, x_0) \in \Omega$  existe uma única solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$  de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , definida num intervalo  $M(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$  com a propriedade de que toda solução  $\psi$  de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  num intervalo  $I$  satisfaz a  $I \subseteq M(t_0, x_0)$  e  $\psi = \varphi|_I$ .

Demonstração. É suficiente tomar  $M(t_0, x_0) = \cup I_\psi$  onde  $I_\psi$  é o intervalo de definição de alguma solução  $\psi$  de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Se  $t \in I_\psi$  definimos  $\varphi(t) = \psi(t)$ . Esta definição não depende da  $\psi$  usada. Com efeito, o conjunto  $C = \{t \in I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}; \psi_1(t) = \psi_2(t)\}$  é fechado, aberto e não vazio em  $I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$ . Como este último conjunto é conexo, segue-se que  $C = I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$ . O conjunto  $C$  é fechado pois é igual a  $(\psi_1 - \psi_2)^{-1}(0)$ ;  $C$  é aberto porque para todo ponto  $t'$  ele contém  $I(t', \psi_1(t')) \cap C$ . ■

2. DEFINIÇÃO. Chama-se *solução máxima* de

$$x' = f(t, x) \quad (1)$$

a toda solução  $\varphi$  definida num intervalo  $I$ , denominado *intervalo máximo* de  $\varphi$ , tal que se  $\psi$  é uma outra solução no intervalo  $J$  com  $J \supseteq I$  e  $\varphi = \psi|_I$ , então  $I = J$ . Em outras palavras,  $\varphi$  é máxima se não admite nenhuma extensão que também é solução de (1).

O exemplo 2.2 mostra que, em geral, existe uma infinidade de soluções máximas por um ponto se apenas a continuidade da  $f$  é exigida.

A proposição 1 mostra que se (1) tem por cada ponto  $(t_0, x_0)$  uma única solução local (isto é, num certo intervalo  $I(t_0, x_0)$ ) então (1) tem soluções máximas únicas.

3) TEOREMA. Seja  $f$  contínua num aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times E$ . Se  $\varphi$  é uma solução máxima única de  $x' = f(t, x)$  definida em  $(\omega_-, \omega_+)$ , então a aplicação  $g(t) = (t, \varphi(t))$  tende a  $\partial\Omega$  quando  $t \rightarrow \omega_\pm$ . Isto é, para todo compacto  $K \subseteq \Omega$  existe uma vizinhança  $V$  de  $\omega_\pm$  tal que  $g(t) \notin K$  para  $t \in V$ .

*Demonstração:* Suponhamos que para algum compacto  $K \subseteq \Omega$  exista uma seqüência  $t_n \rightarrow \omega_+$  tal que  $g(t_n) \in K$ . Seja  $t'_n$  uma subseqüência de  $t_n$  tal que  $g(t'_n)$  é convergente. Seja  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t'_n) = (\omega_+, x_0) \in K$ .

Para  $(t_0, x_0) = (\omega_+, x_0)$ , seja  $V = I_\alpha \times B_b$  a vizinhança dada pelo Teorema de Peano onde  $\alpha = b/M$  e  $M > |f|$  em  $V$ .

Seja  $V_1 = I_{\alpha/3}(t_0) \times B_{b/3}(x_0)$ . Para todo  $(t_1, x_1) \in V_1$  existe uma solução definida em  $I_{\alpha_1}(t_1)$ , com  $\alpha_1 = \alpha/2$ . De fato, aplicando o Teorema de Peano ao ponto  $(t_1, x_1)$  da vizinhança  $\hat{V} = I_{\alpha_1}(t_1) \times B_{b_1}(x_1)$ ,  $b_1 = \frac{\alpha M}{2}$ , contida em  $V$ , encontramos uma solução de (1) passando por  $(t_1, x_1)$  definida para todo  $t \in I_{\alpha_1}(t_1)$ . Tomando  $t_1 = t'_n$  com  $n$  suficientemente grande de modo que  $g(t'_n) \in V_1$  temos que  $\varphi$  pode ser prolongada até  $t'_n + \frac{\alpha}{2} > t_0 = \omega_+$ , uma contradição. Analogamente, procede-se para  $\omega_-$ . ■

#### 4. Observações:

a) Não é verdade em geral, que exista o limite da solução máxima  $\varphi$  de  $x' = g(t)$  quando  $t \rightarrow \omega_\pm$ , mesmo que  $\omega_\pm < \infty$ .

Basta ver, por exemplo

$$x' = -\frac{\cos 1/t}{t^2}, \quad t > 0$$

que tem como solução máxima a função  $\varphi(t) = \text{sen } \frac{1}{t}$ ,  $t > 0$ .

b) No entanto, se  $f$  é limitada em  $\Omega$ , digamos  $|f| \leq M$ , e se  $\omega_\pm < \infty$  então o limite existe. Pois se  $\varphi$  é solução e  $t, s < \omega_+ < \infty$ , usando a observação do final da seção 2 sai que

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| = \left| \int_s^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq M |t - s|$$

Logo a afirmação resulta do critério de convergência de Cauchy pois quando  $t, s \rightarrow \omega_+$ ,  $|\varphi(t) - \varphi(s)| \rightarrow 0$ .

Analogamente para  $\omega_-$ .

## 6. Sistemas de equações diferenciais e equações de ordem superior

Sejam  $E_1, E_2, \dots, E_m$  espaços euclidianos e seja  $\Omega$  um subconjunto de  $\mathbb{R} \times E$  onde  $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m$ .

Sejam  $f_i: \Omega \rightarrow E_i, i = 1, \dots, m$ , funções contínuas. Uma família  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ , onde cada  $\varphi_i: I \rightarrow E_i, i = 1, \dots, m$  é uma função diferenciável de um intervalo  $I$  em  $E_i$ , chama-se *solução do sistema de equações diferenciais ordinárias*:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_m}{dt} = f_m(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases} \quad (1)$$

no intervalo  $I$ , se:

- (i) Para todo  $t \in I, (t, \varphi(t)) = (t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) \in \Omega$
- (ii) Para todo  $i = 1, 2, \dots, m,$

$$\frac{d\varphi_i}{dt}(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))$$

para todo  $t \in I$ .

O sistema (1), denotado abreviadamente por:

$$x'_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_m), i = 1, \dots, m \quad (1')$$

é equivalente à equação diferencial ordinária

$$x' = f(t, x) \quad (2)$$

onde:  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m): \Omega \rightarrow E = E_1 \times \dots \times E_m$ . Isto é, uma família  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  de funções é solução de (1) em  $I$  se e somente se  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m): I \rightarrow E$  é solução de (2) em  $I$ .

Em particular, a equação "vetorial" (1) da seção 1 é equivalente a um sistema de equações "escalares" do tipo (1) acima, em que  $f_i$  é a  $i$ -ésima coordenada de  $f$  em  $E = E_1 \times \dots \times E_m$ , onde  $E_i = \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$ . Note que este fato óbvio foi estabelecido na própria seção 1.

O Problema de Cauchy para sistemas de equações da forma (1) formula-se do seguinte modo: dados  $t_0, x_{1,0}, \dots, x_{m,0}$  tais que  $(t_0, x_{1,0}, \dots, x_{m,0})$  pertence a  $\Omega$ , encontrar uma solução  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  de (1) num intervalo  $I$  que contém  $t_0$  tal que  $\varphi_i(t_0) = x_{i,0}$  para todo  $i$ .

Abreviadamente, escrevemos:

$$x'_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_m), \quad x_i(t_0) = x_{i,0} \quad (3)$$

Este problema é equivalente ao problema de Cauchy:

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4)$$

Para a equação (2), onde  $x_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{m,0})$  tendo em conta que a função  $f$  em (2) é, respectivamente, contínua, lipschitziana com constante de Lipschitz  $K$ , diferenciável em relação à segunda variável, etc, se e somente se cada uma das  $f_i$  de (1) também é do mesmo tipo, temos que todos os teoremas de existência, unicidade e soluções máximas das seções 4 e 5 são válidos para soluções de (1).

Seja agora  $\Omega$  um aberto de  $E \times E^m$ , onde  $E$  é um espaço euclidiano e  $f: \Omega \rightarrow E$  uma função contínua.

Uma função  $\varphi: I \rightarrow E$ , de classe  $C^m$ , definida num intervalo, chama-se *solução da equação diferencial ordinária de ordem  $m$* .

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m-1)}) \quad (5)$$

em  $I$ , se:

- (i) Para todo  $t \in I$ ,  $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(m-1)}(t)) \in \Omega$
- (ii) Para todo  $t \in I$ ,

$$\frac{d^m \varphi}{dt^m}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(m-1)}(t))$$

A equação (5) também é denotada por

$$x^{(m)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(m-1)}) \quad (5')$$

e é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x'_r = x_{r+1}, & r = 1, 2, \dots, m-1 \\ x'_m = f(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases} \quad (6)$$

Isto é, se uma função  $\varphi$  é solução de (5), então  $\{\varphi, \varphi', \varphi'', \dots, \varphi^{(m-1)}\}$  é uma solução de (6); e se  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$  é uma solução de (6) então  $\varphi = \varphi_1$  é uma solução de (5), isto é,  $\varphi$  é de classe  $C^m$  e satisfaz (i) e (ii), acima.

O *Problema de Cauchy para a equação (5)* formula-se do seguinte modo: dado um ponto  $(t_0, x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{m-1}) \in \Omega$  encontrar uma solução  $\varphi$  de (5) definida num intervalo  $I$  que contém o ponto  $t_0$  e satisfaz a:

$$\varphi(t_0) = x_0^0, \quad \varphi'(t_0) = x_0^1, \dots, \varphi^{(m-1)}(t_0) = x_0^{m-1}.$$

Abreviadamente escrevemos

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}), \quad x^{(i)}(t_0) = x_0^i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (7)$$

Este problema é equivalente ao seguinte problema de Cauchy para sistemas de equações

$$\begin{cases} x'_r = x_{r+1}, & x_i(t_0) = x_0^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m \\ x'_m = f(t, x_1, \dots, x_m), & r = 1, 2, \dots, m-1 \end{cases} \quad (8)$$

Assim, questões relativas à existência, unicidade e intervalos máximos de soluções de (5) são reduzidos a questões similares para sistemas (6) e portanto a equações (1) da seção 1. Em particular, todos os resultados relativos a estas questões demonstrados nas seções 4 e 5 são válidos para equações de ordem  $m$  qualquer.

## EXERCÍCIOS

1. Seja  $g(t) = \frac{2}{t^2 - 1}$ ,  $|t| \neq 1$ .

a) Mostre que toda solução de  $x' = g(t)$  é da forma

$$\varphi(t) = c + \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right|$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ .

b) Faça um esboço destas soluções em

$$\Omega = \{t \mid |t| \neq 1\} \times \mathbb{R}.$$

(Sugestão: Note que  $g(t) = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$ )

2. Seja  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$ . Mostre que toda solução de  $x' = f(x)$  diferente das soluções  $\varphi_+ \equiv 1$  e  $\varphi_- \equiv -1$  é da forma

$$\varphi(t) = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t} \quad c \neq 0$$

Qual é o intervalo máximo  $I_c = (\omega_-(c), \omega_+(c))$  de definição destas soluções?

Faça um esboço geométrico das soluções em  $\Omega = \mathbb{R}^2$  e compare com o exercício anterior.

3. Denote por  $I(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$  o intervalo máximo de definição da solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$  do problema de Cauchy

$$x' = f(x)g(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

onde  $(t_0, x_0) \in (t_1, t_2) \times (a_1, a_2)$  e  $f$  e  $g$  são como no exemplo 2 da seção 3.

a) Mostre que

$$D = \{(t, t_0, x_0) \mid (t_0, x_0) \in (t_1, t_2) \times (a_1, a_2), t \in I(t_0, x_0)\}$$

é aberto e que  $\varphi$  é contínua em  $D$ .

b) Se  $f$  e  $g$  são de classe  $C^1$  mostre que  $\varphi$  é de classe  $C^1$  em  $D$ .

c) Calcule  $D$  e  $\varphi$  no caso

$$x' = x^2 \cos t, \quad x \neq 0.$$

4. Estenda os resultados dos exemplos 1 e 2 da seção 3 para o caso em que  $f$  é de classe  $C^1$  na vizinhança de cada um de seus zeros.

Use o teorema de Picard para garantir a unicidade das soluções da forma  $\varphi(t) \equiv a$  onde  $f(a) = 0$ .

Estenda as conclusões do exercício anterior para este caso e faça o cálculo de  $D$  e  $\varphi$  para

$$x' = x^2 \cos t, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

5. *Equações homogêneas.* Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

a) As equações da forma

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right), \quad t \neq 0$$

são chamadas homogêneas. Prove que a mudança de variáveis  $x = yt$  transforma equações homogêneas em equações com variáveis separáveis.

b) Resolva a equação

$$x' = \frac{x+t}{t}, \quad x(1) = 0.$$

6. Sejam  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  e  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $f(r) = r$ . Mostre que  
 a) Se  $f'(r) < 1$  então nenhuma solução da equação

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right) \quad (*)$$

é tangente em 0 à solução  $\varphi(t) = rt$ .

- b) Se  $f'(r) > 1$  então existe uma infinidade de soluções de (\*) tangentes à  $\varphi(t) = rt$  na origem.

*Nota:* Duas funções  $\varphi$  e  $\psi$  definidas para  $t > 0$  são ditas tangentes em 0 se  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(t) - \varphi(t)}{t} = 0$

7. Encontre os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para os quais

$$x' = at^\alpha + bx^\beta$$

se transforma numa equação homogênea por meio de uma mudança de variáveis da forma  $x = y^m$ .

8. Seja

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{at + bx + c}{dt + ex + f}\right) \quad (*)$$

- a) Mostre que se  $ae - bd \neq 0$  então existem  $h, k$  tais que as mudanças de variáveis

$$t = \tau - h \quad x = y - k$$

transformam (\*) numa equação homogênea.

- b) Se  $ae - bd = 0$  encontre uma mudança de variáveis que transforma (\*) numa equação com variáveis separáveis.

9. *Equação de Bernoulli.* Mostre que a mudança de variáveis  $x^{1-n} = y$  transforma a equação de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + c(t)x^n$$

numa equação linear.

10. *Equação de Riccati.* A equação do tipo

$$x' = r(t)x^2 + a(t)x + b(t) \quad (*)$$

chama-se equação de Riccati. Mostre que se  $\varphi_1$  é uma solução de (\*) então  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  é solução de (\*) então  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  é solu-

ção de (\*) se e só se  $\varphi_2$  é uma solução da equação de Bernoulli (veja o exercício anterior)

$$y' = (a(t) + 2r(t)\varphi_1(t))y + r(t)y^2$$

Ache as soluções de

$$x' = \frac{x}{t} + t^3 x^2 - t^5$$

sabendo que esta equação admite  $\varphi_1(t) = t$  como solução.

11. Em cada um dos seguintes exemplos, encontre ou demonstre que não existe uma constante de Lipschitz nos domínios indicados

a)  $f(t, x) = t|x|$ ,  $|t| < a$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

b)  $f(t, x) = x^{1/3}$ ,  $|x| < 1$

c)  $f(t, x) = 1/x$ ,  $1 \leq x < \infty$ .

d)  $f(t, x) = (x_1^2 x_2, t + x_3, x_3^2)$ ,  $|x| \leq b$ ,  $|t| \leq a$

12. Seja  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ . Considere a equação diferencial  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  com a condição inicial  $y(0) = 0$ .

i) Dê uma solução desta equação

ii) Ela é única?

iii) Caso a resposta de ii seja negativa, contradiz o Teorema de Picard? Justifique.

(Sugestão: Use o método de variáveis separáveis para encontrar a seguinte solução

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{4}, & x \leq 0 \end{cases}$$

13. Seja a equação diferencial  $\frac{dv}{dx} = f(x, y)$ , onde

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

i) Mostre que a equação acima admite soluções para condições iniciais  $y(x_0) = y_0$  arbitrárias.

ii)  $f$  satisfaz localmente as condições do Teorema de Picard? Justifique.

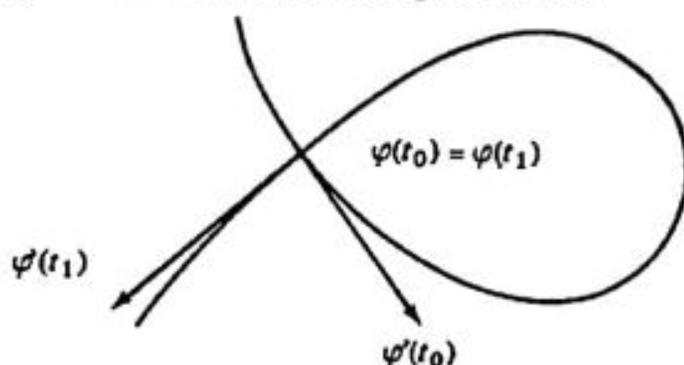
iii) E as do Teorema de Peano? Justifique.

(Sugestão:  $y(x) \equiv 0$  é solução da equação. Note que se  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  então  $f(x, x) = \frac{1}{2}$ )

14. Seja  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e suponhamos que  $\varphi(t)$  definida em  $\mathbb{R}$  é a solução de

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (*)$$

- a) É possível que exista  $t_1 \neq t_0$  tal que  $\varphi(t_1) = \varphi(t_0)$  porém  $\varphi'(t_1)$  e  $\varphi'(t_0)$  são linearmente independentes?



- b) Caso (a) seja afirmativo estude isso em termos da unicidade das soluções dada pelo Teorema de Picard.

(Sugestão: Note que  $\frac{d}{dt} (t \sin t) = t \cos t + \sin t$  e  $\frac{d}{dt} (t^2 \sin t) = t^2 \cos t + 2t \sin t$ . Seja  $\varphi(t)$  a solução de (\*) com  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$f(t, (x, y)) = (t \cos t + \sin t, t^2 \cos t + 2t \sin t)$$

e condições iniciais  $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ . Calcule então  $\varphi(\pi)$ ,  $\varphi(2\pi)$ ,  $\varphi'(\pi)$  e  $\varphi'(2\pi)$ .)

15. Seja  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lipschitziana. Prove que dado  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  existe uma única solução de

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

definida em todo  $\mathbb{R}$ .

16. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e suponhamos que  $\varphi(t)$  definida em  $\mathbb{R}$  é solução de

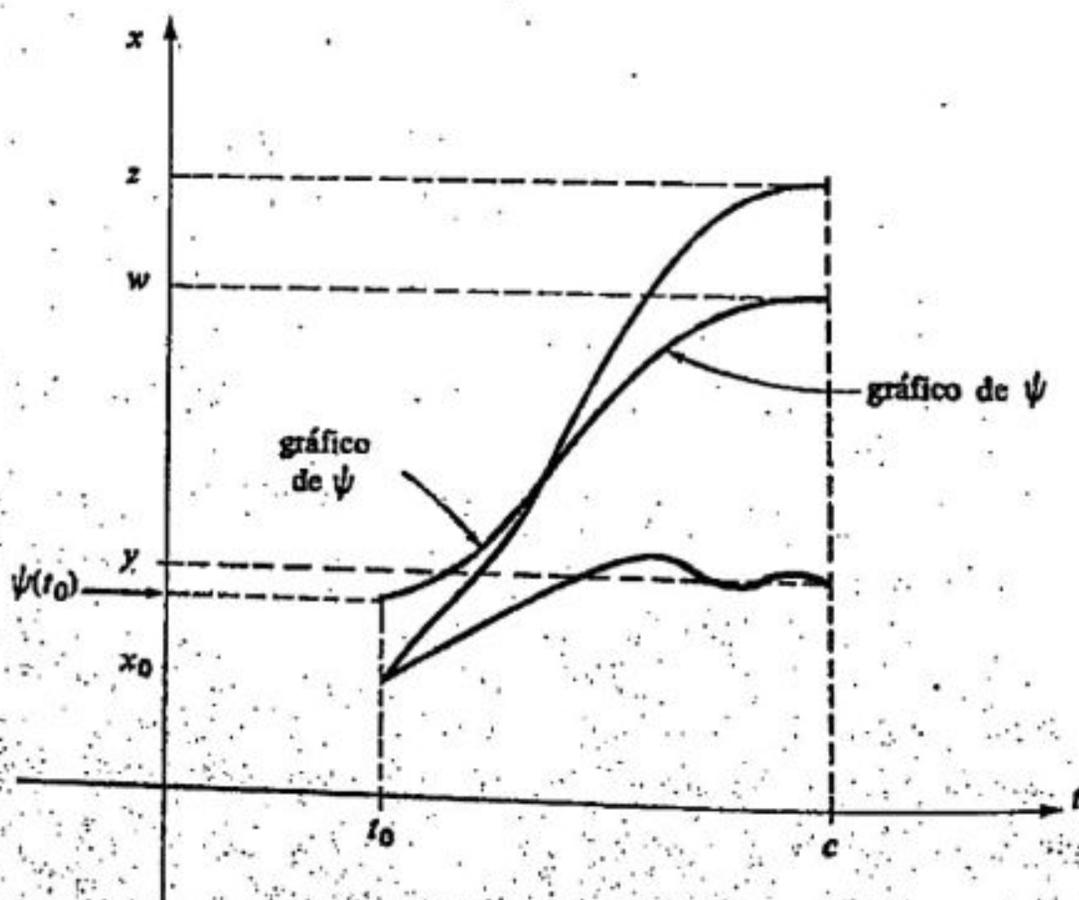
$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

- a) É possível que exista  $t_1 \neq t_0$  tal que  $\varphi(t_1) = \varphi(t_0)$  mas  $\varphi'(t_0) \neq \varphi'(t_1)$ ?
- b) Compare (a) com o exercício 14 parte (a).
17. Sejam  $g, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas sendo  $f$  Lipschitziana. Prove que o sistema

$$\begin{cases} x' = f(x), & x(t_0) = x_0 \\ y' = g(x)y, & y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem solução única em qualquer intervalo (onde ela esteja definida). Pode-se retirar a hipótese de  $f$  ser Lipschitziana e obter a mesma conclusão?

18. Com as mesmas hipótese e notações do Teorema de Peano sejam  $c \in [t_0, t_0 + \alpha]$  e  $S_c$  o conjunto dos pontos  $x$  tais que existe uma solução de  $x' = f(t, x)$   $x(t_0) = x_0$  definida em  $[t_0, c]$  e que passa por  $(c, x)$ . Prove que  $S_c$  é um intervalo fechado, no caso  $n = 1$ . *Nota:* Este resultado é conhecido como Teorema de Kneser e é válido para  $n \geq 1$  qualquer, substituindo no enunciado acima  $S_c$ , intervalo fechado, por domínio (i.e., conexo e compacto). (Sugestão: Seja  $x_n$  uma seqüência de pontos em  $S_c$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Se  $\varphi_n$  é solução de



$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (*)$$

com  $\varphi_n(c) = x_n$  aplique o teorema de Arzelá para encontrar uma solução  $\varphi$  de (\*) tal que  $\varphi(c) = x$ . Para provar que  $S_c$  é conexo sejam  $y, z \in S_c$ ,  $y < z$ . Se  $y < \omega < z$  é preciso provar que  $\omega \in S_c$ . Use o teorema de Peano para encontrar uma solução  $\psi$  de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(c) = \omega$  definida em  $[t_0, c]$ . Pode acontecer que  $\psi(t_0) \neq x_0$  (ver figura) porém certamente existirá uma solução  $\theta$  de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  tal que  $\theta(c) = \omega$ .

19. Seja  $f$  contínua no aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ . Prove que se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$  então:
- Toda solução de  $x' = f(t, x)$  pode ser prolongada a uma solução máxima  $\varphi$  definida num intervalo  $(\omega_-, \omega_+)$ .
  - $(t, \varphi(t)) \rightarrow \partial\Omega$  quando  $t \rightarrow \omega_{\pm}$
  - se  $\varphi$  é limitada,  $\lim_{t \rightarrow \omega_{\pm}} \varphi(t)$  existe? Compare com a observação 5.4.
  - retire a hipótese de limitação de  $f$  e prove (a) e (b) neste caso. (Sugestão para (c): considere

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \quad \Omega = \mathbb{R} \times D$$

$$\text{e } f(t, x, y) = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2))$$

20. Sejam  $\Omega, f$  e  $(\omega_-, \omega_+)$  como no exercício 19-a. Prove que se  $\bar{\Omega}$  é compacto então  $\lim_{t \rightarrow \omega_{\pm}} \varphi(t) = x_{\pm}$  existe e  $(\omega_{\pm}, x_{\pm}) \in \partial\Omega$ .

21. Seja  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e  $f(t, x) = f(x)$  contínua, localmente lipschitziana e tal que  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ . Prove que
- Para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  a solução  $\varphi(t, x_0)$  de

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

- Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_t : x_0 \rightarrow \varphi(t, x_0)$  é um homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

- $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ , quaisquer que sejam  $t, s \in \mathbb{R}$ .

(Sugestão para (b): suponha que  $x_n \rightarrow x_0$  mas  $\varphi(t, x_n)$  não seja convergente a  $\varphi(t, x_0)$ . Considere  $\varphi_n(\tau) = \varphi(\tau, x_n)$ ,  $\tau \in [0, t]$ . Prove que  $\varphi_n$  é equicontínua e use o teorema de Arzelá para achar uma solução de  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$  diferente de  $\varphi(t, x_0)$ .)

22. (Aproximação Poligonal): Sob as hipóteses do Teorema de Peano, defina a família de funções  $\varphi_n(t)$  da seguinte maneira: seja

$\sigma : t_0 < t_1 < \dots < t_m = t_0 + \alpha$  uma partição de  $[t_0, t_0 + \alpha]$  com norma  $|\sigma| = \max(t_{k+1} - t_k) \quad k = 0, \dots, m-1$ . Em  $[t_0, t_1]$  defina  $\varphi_\sigma(t) = x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0)$ . Se  $\varphi_\sigma(t)$  for definido em  $[t_0, t_k]$ ,  $k < m$ , e  $|\varphi_\sigma(t) - x_0| \leq b$ , defina  $\varphi_\sigma(t) = \varphi_\sigma(t_k) + (t - t_k) f(t_k, \varphi_\sigma(t_k))$  para  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ . Este processo define  $\varphi_\sigma$  como uma função contínua e seccionalmente linear. Demonstre o Teorema de Peano obtendo uma solução como limite uniforme de uma seqüência de funções da família acima definida.

23. Seja  $f_1, f_2, \dots$  uma seqüência de funções contínuas em  $\Omega = \{(t, x); t_0 \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b\}$  tal que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $\Omega$ . Seja  $\varphi_n$  uma solução de

$$x' = f_n(t, x), \quad x(t_n) = x_n$$

em  $[t_0, t_0 + a]$ , onde  $n = 1, 2, \dots$ , e tal que  $t_n \rightarrow t_0, x_n \rightarrow x_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Prove que existe uma subseqüência  $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \dots, \varphi_{n_k}, \dots$  uniformemente convergente em  $[t_0, t_0 + a]$  e que, para qualquer subseqüência nestas condições, o limite  $\varphi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t)$  é uma solução de

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad \text{em } [t_0, t_0 + a] \quad (*)$$

Em particular, se (\*) possuir uma única solução  $\varphi(t)$  em  $[t_0, t_0 + a]$ , então  $\varphi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t)$  uniformemente.

24. (Aproximações Sucessivas). Com as mesmas hipóteses e notações do Teorema de Peano, prove que a seguinte seqüência,  $\{\varphi_n\}$ , chamada seqüência de aproximações sucessivas, está bem definida para  $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ :

$$\varphi_0(t) = x_0, \quad \varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_n(s)) ds, \quad n = 0, 1, \dots$$

- (a) Se  $f$  é lipschitziana, foi provado (Teorema de Picard) que  $\{\varphi_n\}$  é convergente. Verifique que para a função  $f$ , não lipschitziana, dada por

$$f(t, x) = \begin{cases} -2t, & t^2 < x < \infty \\ 2t - \frac{4x}{t}, & 0 < x \leq t^2, \quad t \leq 1 \\ 2t, & x \leq 0 \end{cases}$$

a seqüência de aproximações sucessivas, para  $t_0 = x_0 = 0$ , não é convergente.

(b) No caso  $n = 1$ , seja  $t_0 = x_0 = 0$  e seja  $f$  contínua tal que  $f(t, x_1) \leq f(t, x_2)$  se  $x_1 \leq x_2$ , e  $f(t, 0) \geq 0$ , para todo  $t \in [0, a]$ . Prove que as aproximações sucessivas convergem para uma solução de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(0) = 0$ .

25. (a) Seja  $f$  contínua em  $\Omega = \{(t, x); |t| \leq a, |x| \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $f(t, x) < 0$  quando  $tx > 0$ , e  $f(t, x) > 0$  quando  $tx < 0$ , mostre que  $x' = f(t, x)$ ,  $x(0) = 0$ , tem  $\varphi = 0$  como única solução.

(b) Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t, x) = \begin{cases} -2t, & \text{se } x \geq t^2 \\ -\frac{2x}{t}, & \text{se } |x| < t^2 \\ 2t, & \text{se } x \leq -t^2 \end{cases}$

Prove que  $x' = f(t, x)$ ,  $x(0) = 0$ , tem uma única solução embora  $F^n$  – definida na demonstração do Teorema de Picard – não seja contração para nenhum  $n$ .

26. No retângulo  $P = \{(t, x); |t - t_0| < a, |x - x_0| < b\} \subset \mathbb{R}^2$ , sejam  $f, g$  duas funções contínuas e localmente lipschitzianas. Se  $g < f$  em  $P$ , então para  $\varphi$  e  $\psi$  soluções de, respectivamente,

$$x' = g(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{e} \quad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

definidas para  $0 \leq t \leq c$ , prove que  $\varphi(t) \leq \psi(t)$  para todo  $t_0 < t \leq c$ .

Nas mesmas hipóteses, se  $g \leq f$ , prove que  $\varphi(t) \leq \psi(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq c$ .

27. Seja  $\{\varphi_n\}$  a seqüência de funções definidas por

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_n(x) = 1 + \int_0^x (\varphi_{n-1}(t))^2 dt$$

Mostre que  $\varphi_n$  é um polinômio de grau  $2^{n-1} - 1$ , cujos coeficientes estão em  $[0, 1]$ . Mostre que, para  $|x| < 1$ ,  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ , onde  $\varphi$  é a solução

$$\text{de } \frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 1.$$

28. Seja  $f(t, x)$  definida e contínua em  $\Omega = \mathbb{R} \times E$ , onde  $f(t, x) = f(t+1, x)$  e  $f$  é lipschitziana em  $[0, 1] \times E$ . Prove que toda solução  $\varphi(t, t_0, x_0)$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t+1, t_0+1, x_0)$ .

29. Seja  $H : E \rightarrow E$  de classe  $C^1$ . Seja  $f(t, x)$  contínua em  $\mathbb{R} \times E$  tal que  $f(t, H(x)) = D H(x) \cdot f(t, x)$ , para todo  $(t, x)$  em  $\mathbb{R} \times E$ . Se  $f$  é lipschitziana e  $\varphi(t, t_0, x_0)$  denota a solução de  $x' = f(t, x)$  que passa por  $(t_0, x_0)$  prove que

$$\varphi(t, t_0, H(x)) = H(\varphi(t, t_0, x_0))$$

30. Se  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  é um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $V$  é uma função real diferenciável em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) X_i(x) \leq 0$  e  $V(x) \geq |x|^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , prove que toda solução de  $x' = X(x)$  está definida para todo  $t > 0$ .

31. No enunciado do teorema de Peano mude a condição  $|f| < M$  por  $|f| \leq M$  obtenha as mesmas conclusões que neste teorema. (Sugestão: Considere a seqüência de aplicações  $\varphi_k: [t_0, t_0 + \alpha_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $\varphi_k$  é a solução de

$$x' = f_k(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad \text{e} \quad \alpha_k = b(M + \varepsilon_k)^{-1},$$

sendo  $\varepsilon_k = \sup \{|f_k - f| \text{ em } K\}$  onde  $K \subset \Omega$  é compacto e contém  $[t_0, t_0 + \alpha] \times B(x_0, b)$ .)

32. (Extensão do domínio da função inversa): Seja  $B(0, b) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < b\}$  a bola de centro 0 e raio  $b$  em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $f: D = \overline{B(0, b)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$  numa vizinhança de  $D$  tal que  $f(0) = 0$  e  $A(x) = Df(x)$  é inversível  $\forall x \in D$ , sejam  $M = \max \| (A(x))^{-1} \|$ ,  $M_1 = \max \| A(x) \|$  para  $x \in D$ , e seja  $B_1 = B(0, b/MM_1)$ . Observe que  $B_1 \subset D$  (por quê?). Prove que existe um aberto  $B_0, B_1 \subset B_0 \subset D$ , tal que  $f|_{B_0}$  é um difeomorfismo de  $B_0$  sobre a bola  $B(0, b/M)$ .

(Sugestão: Seja  $\xi \in \mathbb{R}^n$  com  $|\xi| = 1$ . Prove que a equação  $f(x) = t\xi$  tem uma solução única  $x = x(t, \xi)$  para  $0 \leq t \leq b/M$  com  $x(0, \xi) = 0$ . Para isto considere a equação diferencial  $x' = (f'(x))^{-1}\xi$  e aplique o Teorema de Peano na versão do exercício anterior. Prove que

$g(y) = x\left(y, \frac{y}{|y|}\right)$  é uma inversa à direita de  $f$ , definida em

$B(0, bM^{-1})$ . Para encontrar  $B_1$  aplique a mesma idéia a  $g$ .)

33. Equações analíticas no Campo Complexo.

Seja  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$  analítica no aberto  $\Omega \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ . Denotemos por  $(z, w)$  os pontos de  $\Omega$ , com  $w = (w_1, \dots, w_n)$ . Uma função  $\varphi: H \rightarrow \mathbb{C}^n$ , holomorfa no aberto  $H \subset \mathbb{C}$ , chama-se solução da equação

$$(*) \quad w' = f(z, w), \quad \text{se}$$

i)  $\text{graf } \varphi \subset \Omega$

ii)  $\frac{d\varphi}{dz}(z) = f(z, \varphi(z))$ , para todo  $z \in H$

Demonstre o seguinte resultado: Seja  $\Omega = B_a(z_0) \times B_b(w_0)$ , onde  $B_a(z_0) = \{z; |z - z_0| < a\}$ ,  $B_b(w_0) = \{w; |w - w_0| < b\}$ , e seja  $f$  tal que  $|f| \leq M$  em  $\Omega$ . Então existe uma única solução  $\varphi$  de (\*) em  $H = B_x(z_0)$  tal que  $\varphi(z_0) = w_0$  e  $x = \min \{a, b/M\}$

(Sugestão: Defina  $F(\varphi)(z) = w_0 + \int_{\Gamma(z)} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$ , onde

$$\Gamma(z) = \{\theta(z - z_0) + z_0; 0 \leq \theta \leq 1\}$$

é o segmento que liga  $z_0$  a  $z$ . Mostre que para cada  $a' < a$ , existe um único ponto fixo atrator de  $F$  considerada como aplicação de  $\mathcal{C}(B_{a'}, B_b)$ . Utilize o teorema de Montel segundo o qual uma seqüência de funções analíticas complexas convergindo uniformemente tem limite analítico.)

34. Formule e demonstre um teorema análogo ao do exercício anterior para funções analíticas reais.

35. Nas hipóteses do exercício 33 prove que a série  $\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i$  converge para a solução de (\*), onde  $a_0 = w_0$ ,  $a_1 = f(z_0, w_0)$ ,  $a_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0) + \frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) a_1 \right]$ , etc. Isto é, os  $a_i$  são determinados formalmente, derivando a expressão  $\varphi'(z) = f(z, \varphi(z))$  e avaliando-a no ponto  $z = z_0$ , assim

$$\varphi''(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, w_0) + \frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) \varphi'(z_0),$$

o de ordem 2 da série de Taylor formal.

36. (Soluções aproximadas) (i) Seja  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua com constante de Lipschitz  $K$  relativamente à segunda variável. Sejam  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  funções seccionalmente diferenciáveis num intervalo  $I = (a, b)$  que contém o ponto  $t_0$ . Suponha que para  $t \in I$

$$|\varphi_i'(t) - f(t, \varphi_i(t))| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2 \quad (*)$$

mostre que

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| e^{K|t-t_0|} + \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{K} (e^{K|t-t_0|} - 1)$$

(Sugestão: Seja  $t \geq t_0$ . Integrando (\*) entre  $t_0$  e  $t$  obtenha  $|(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - (\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)) - \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] ds| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0)$  e daí conclua que

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| + K \int_{t_0}^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0) \quad (**)$$

Defina agora  $R(t) = \int_{t_0}^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds$ ,  $t_0 \leq t < b$ . Então  $R'(t) - KR(t) \leq |\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(t - t_0)$  e multiplicando ambos os lados desta expressão por  $e^{-K(t-t_0)}$  e integrando entre  $t_0$  e  $t$  resulta

$$R(t) \leq \frac{|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)|}{K} (e^{K(t-t_0)} - 1) - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{K^2} (1 + K(t - t_0)) + \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{K^2} e^{K(t-t_0)}$$

Combinando esta desigualdade com (\*\*) segue-se o resultado)

(ii) Sejam  $f_m: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $f_m \rightarrow f_0$  uniformemente em  $I \times \mathbb{R}^n$  e todas tem a mesma constante de Lipschitz  $K$ . Se  $\varphi_m$  é a solução de

$$x' = f_m(t, x) \quad x(t_0) = x_m$$

use (i) para provar que  $\varphi_m$  tende uniformemente em  $I$  para  $\varphi_0$  se  $x_m \rightarrow x_0$ .

(iii) Usando a desigualdade em (i) e as aproximações poligonais construídas no exercício 22, prove o teorema de Picard.

37. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Suponha que existem duas soluções  $\varphi_1, \varphi_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de  $x' = f(t, x)$  satisfazendo

$$\text{Graf } \varphi_1 \cap \text{Graf } \varphi_2 = \{(0, p), (1, q)\} \text{ e}$$

$\text{Graf } \varphi_1 \cup \text{Graf } \varphi_2 = \{\text{fronteira de uma região } D \text{ homeomorfa a um disco}\}$ . Prove que para todo  $x \in D$  existe uma solução  $\varphi$  de  $x' = f(t, x)$  tal que seu gráfico contém  $(0, p)$ ,  $(1, q)$  e  $x$ .

# DEPENDÊNCIA DAS SOLUÇÕES EM RELAÇÃO ÀS CONDIÇÕES INICIAIS E PARÂMETROS

## 1. Preliminares

Suponhamos que  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{E}$  seja contínua num aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$ , onde  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$  é o espaço euclidiano de dimensão  $n$ , e que através de cada ponto  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , passe uma única solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$  de

$$(1) \quad x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

definida no seu intervalo máximo  $I(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$ .

Mostraremos neste capítulo que, nestas condições, a função  $\varphi$  depende continuamente e também diferenciavelmente (se  $f$  é diferenciável) das variáveis  $(t, t_0, x_0)$ .

Estudaremos também a dependência em relação às variáveis  $(t, t_0, x_0, \lambda)$ , das soluções de uma família de equações do seguinte tipo:

$$(2) \quad x' = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0,$$

dependente de um parâmetro  $\lambda$  num espaço euclidiano  $\Lambda$  tal que, para cada  $\lambda$  fixo, (2) possui uma única solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$  definida no seu intervalo máximo  $I(t_0, x_0, \lambda) = (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$ . Neste caso,  $f$  está definida num aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda$ .

1. *Observação.* As questões de dependência em relação a  $(t, t_0, x_0, \lambda)$  das soluções de (2) podem ser reduzidas a questões relativas às soluções de (1), sem parâmetros adicionais. De fato, substituindo-se (2) por

$$(1') \quad y' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0 = (x_0, \lambda_0),$$

onde  $y = (x, \lambda) \in \mathbb{E} \times \Lambda$  e  $F(t, y) = (f(t, x, \lambda); 0)$ , tem-se que a solução de (1') por  $(t_0, y_0)$  é da forma

$$(4) \quad \Phi(t, t_0, y_0) = (\varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0).$$

Logo, as propriedades de continuidade e diferenciabilidade de  $\Phi$  serão também válidas para  $\varphi$ .

## 2. Continuidade

1. TEOREMA. Seja  $f$  contínua no conjunto aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times E \times \Lambda$ .  
 Para cada  $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$  suponhamos que o problema de dados iniciais, com  $\lambda$  fixo,

$$(2) \quad x' = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0,$$

tenha uma única solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ , definida no seu intervalo máximo  $(\omega_-, \omega_+)$ ,  $\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(t_0, x_0, \lambda)$ .

Então

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda); (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, t \in (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))\}$$

é aberto em  $\mathbb{R} \times \Omega$  e  $\varphi$  é contínua em  $D$ .

Exemplo. Seja  $x' = f(t, x, \lambda) = \lambda x^2$  em  $\mathbb{R}^3$ . Então  $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda) =$   

$$= \frac{x_0}{1 - \lambda(t - t_0)x_0}.$$

Neste caso,  $\omega_{\pm}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  estão dadas por

$$\begin{aligned} \omega_+(t_0, x_0, \lambda) &= \infty, & \text{para } \lambda x_0 \leq 0 \\ \omega_+(t_0, x_0, \lambda) &= t_0 + \frac{1}{\lambda x_0} & \text{para } \lambda x_0 > 0 \\ \omega_-(t_0, x_0, \lambda) &= -\infty & \text{para } \lambda x_0 \geq 0 \\ \omega_-(t_0, x_0, \lambda) &= t_0 + \frac{1}{\lambda x_0} & \text{para } \lambda x_0 < 0 \end{aligned}$$

Identifique  $D$  e verifique que é aberto em  $\mathbb{R}^4$ .

As seguintes proposições facilitarão a demonstração do Teorema 1.

2. LEMA. Seja  $\{\varphi_n\}$  uma seqüência equicontínua e uniformemente limitada de funções reais e contínuas num espaço métrico compacto  $X$ . Suponhamos que toda subsequência uniformemente convergente desta seqüência tem o mesmo limite  $\varphi$ . Então  $\{\varphi_n\}$  é uniformemente convergente para  $\varphi$ .

Demonstração. Suponhamos que  $\{\varphi_n\}$  não converge uniformemente para  $\varphi$ . Então existe  $\varepsilon > 0$  e uma subsequência  $\{\varphi_{n'}\}$  tal que  $|\varphi_{n'}(t_{n'}) - \varphi(t_{n'})| \geq \varepsilon$  para alguma seqüência  $\{t_{n'}\}$  em  $X$ .  $\{\varphi_{n'}\}$  também é uma seqüência equicontínua e uniformemente limitada. O Teorema de Arzela (I: 9, 6) e a hipótese implicam que  $\{\varphi_{n'}\}$  tem uma

subseqüência  $\{\varphi_{n''}\}$  uniformemente convergente para  $\varphi$ . Contradição, pois  $|\varphi_{n''}(t_{n''}) - \varphi(t_{n''})| \geq \varepsilon$ , para todo  $n''$ . ■

**3. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  uma seqüência de funções contínuas no aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$  tal que  $f_n$  converge para  $f_0$ , uniformemente em cada parte compacta de  $\Omega$ . Seja  $(t_n, x_n)$  uma seqüência de pontos de  $\Omega$  que converge para  $(t_0, x_0)$ . Suponhamos que*

$$x' = f_n(t, x), \quad x(t_n) = x_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

tem uma única solução máxima  $\varphi_n$  no seu intervalo máximo  $I_n = (\omega_-(n), \omega_+(n))$ . Seja  $[a, b] \subset I_0 = (\omega_-(0), \omega_+(0))$ . Então existe  $n_0 = n_0(a, b)$  tal que para  $n > n_0$ ,  $I_n \supset [a, b]$  e  $\varphi_n|_{[a, b]} \rightarrow \varphi_0|_{[a, b]}$  uniformemente.

*Demonstração.* Seja  $C$  um compacto que contém o gráfico de  $\varphi_0$  em  $[a, b]$  no seu interior. Seja  $\Omega_0 \subset \Omega$  um outro compacto que contém  $C$  no seu interior. Existe  $n_1$  tal que se  $n > n_1$ ,  $|f_n| < M$  em  $\Omega_0$ . Por (I; 4, 9), existe  $\alpha > 0$  tal que, para todo  $(t^1, x^1) \in C$ ,

$$x' = f_n(t, x), \quad x(t^1) = x^1, \quad n > n_1$$

tem uma única solução definida em  $|t - t^1| \leq \alpha$ , cujo gráfico está contido em  $\Omega_0$ .

Seja  $\varepsilon = \alpha/3$ . Existe  $n_2 > n_1$  tal que se  $n > n_2$ ,  $(t_n, x_n) \in C$  e  $|t_n - t_0| < \varepsilon$  e, portanto,  $\varphi_n$ ,  $n > n_2$ , está definida em  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  pois, nestas condições,  $|t_n - t| \leq \alpha = 3\varepsilon$  contém  $|t - t_0| \leq \varepsilon$ .

A família  $F = \{\varphi_n | \{|t - t_0| \leq \varepsilon\}, n \geq n_2\}$  é uma seqüência que satisfaz as hipóteses do Lema 2.

a) É uniformemente limitada e equicontinua porque o gráfico de  $\varphi_n$  está no compacto  $\Omega_0$ , onde

$$|\varphi_n'(t)| = |f_n(t, \varphi_n(t))| < M.$$

b) Toda subseqüência  $\varphi_{n'}$ , uniformemente convergente em  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  converge para  $\varphi_0$ . É suficiente provar que  $\varphi = \lim \varphi_{n'}$  é solução de  $x' = f_0(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . De fato,

$$\varphi_{n'}(t) = x_{n'} + \int_{t_0}^t f_{n'}(s, \varphi_{n'}(s)) ds.$$

Para  $n' \rightarrow \infty$ , temos

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_0(s, \varphi(s)) ds.$$

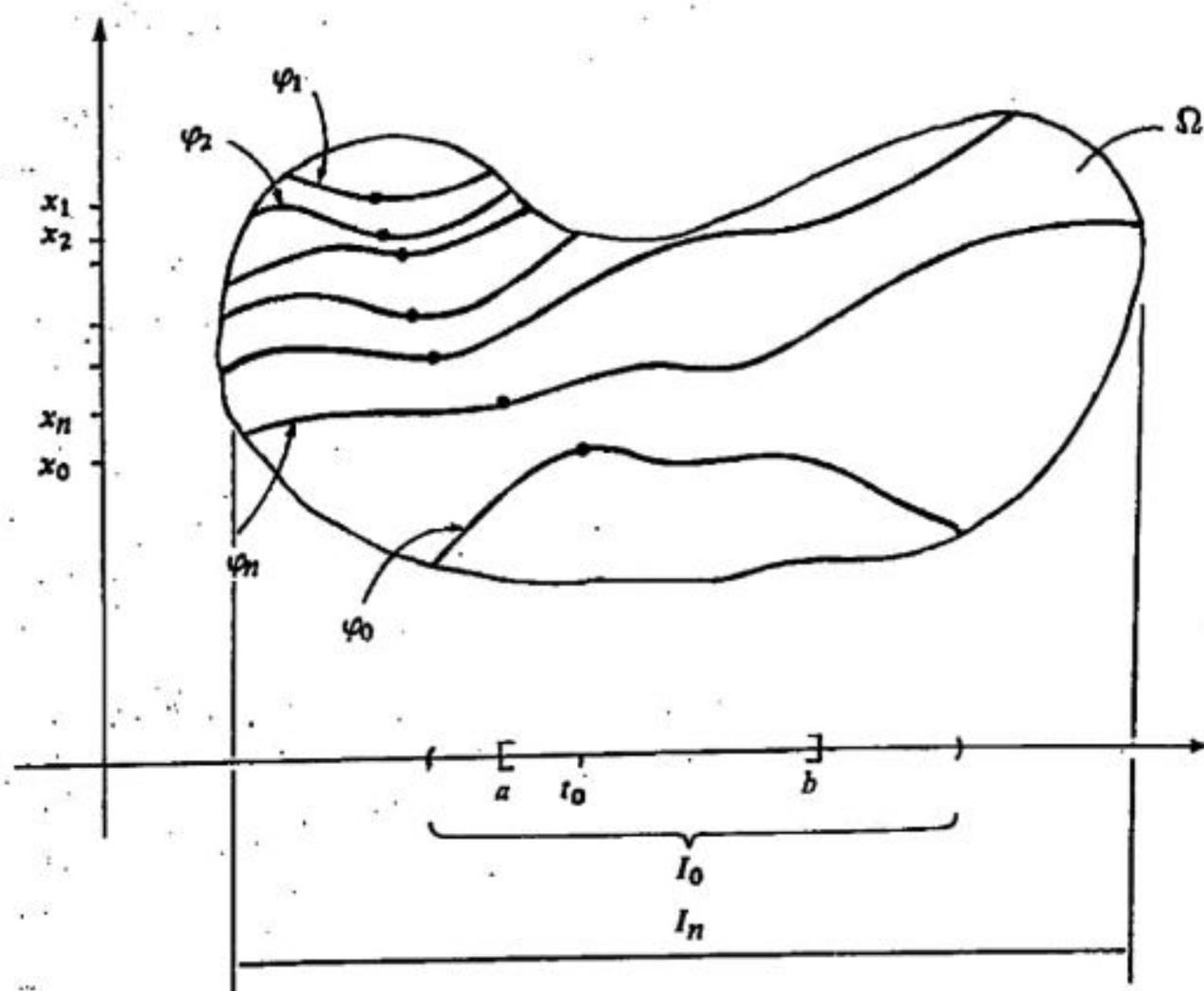


Figura 1 Ilustração da proposição 3

Logo, pela unicidade das soluções,  $\varphi = \varphi_0$  em  $|t - t_0| \leq \varepsilon$ . Consequentemente, pelo Lema 2,  $\varphi_n$  converge uniformemente para  $\varphi_0$  em  $|t - t_0| \leq \varepsilon$ .

Se  $t_0 + \varepsilon \leq b$ , repetindo o argumento anterior para a seqüência  $x_n = \varphi_n(t_0 + \varepsilon)$ ,  $t_n = t_0 + \varepsilon$ , conclui-se que existe  $n_3$  tal que se  $n > n_3$ ,  $\varphi_n$  está definida em  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + 2\varepsilon]$  e converge uniformemente para  $\varphi_0$  neste intervalo. Analogamente para  $t - 2\varepsilon$ . Depois de um número finito de etapas (no máximo  $(b - a)/\varepsilon$ ) conclui-se que existe  $n_0 = n_0(a, b)$  tal que, para  $n > n_0$ ,  $\varphi_n$  está definida em  $[a, b]$  (isto é;  $I_n \supset [a, b]$ ) e converge uniformemente para  $\varphi_0$  em  $[a, b]$ . ■

**Demonstração do Teorema 1.** Pela observação (1,1), é suficiente provar este teorema para equações da forma

$$x' = f(t, x)$$

com todas as suas soluções únicas. A Proposição 3 aplicada a  $f_n = f$  implica que para todo  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , dados  $\varepsilon > 0$  e  $[a, b] \subset I(t_0, x_0)$ ,

existe uma vizinhança  $V_0 = V_0(t_0, x_0)$  tal que, para todo  $(t', x') \in V_0$ ,  $I(t', x') \supset [a, b]$  e

$$|\varphi(t, t', x') - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon/2,$$

se  $t \in [a, b]$ .

Isto prova que  $D$  é aberto. Prova também a continuidade de  $\varphi$  em  $(t, t_0, x_0)$  para  $t \in (a, b)$ . Pois

$$|\varphi(s, t', x') - \varphi(t, t_0, x_0)| \leq |\varphi(s, t', x') - \varphi(s, t_0, x_0)| + |\varphi(s, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon,$$

para  $s$  próximo de  $t$  tal que  $|\varphi(s, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon/2$ . O que é possível devido à continuidade em  $t$  de  $\varphi(t, t_0, x_0)$ . ■

Se  $f$  é contínua e lipschitziana num aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times E$  sabemos que as soluções de  $x' = f(t, x)$  são únicas e; pelo Teorema 1, a função  $\varphi(t, t_0, x_0)$  é contínua em  $(t, t_0, x_0) \in D = \{(t, t_0, x_0); (t_0, x_0) \in \Omega, t \in I(t_0, x_0)\}$ .

O fato de que  $f$  satisfaz a uma condição de Lipschitz permite provar que, para  $t, t_0$  fixos,  $\varphi$  também satisfaz a uma condição de Lipschitz relativamente a  $x_0$ . Precisaremos de um lema que também será útil em outras oportunidades.

4. LEMA. (Gronwall). Sejam  $u, v$  funções contínuas não negativas em  $[a, b]$  tais que, para  $\alpha \geq 0$ , satisfazem a

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Então

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Em particular, se  $\alpha = 0$  então  $u \equiv 0$ .

Demonstração. Se  $\alpha > 0$ , para  $\omega(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds$ , temos  $\omega(a) = \alpha$ ,  $\omega(t) \geq \alpha > 0$ . De  $\omega'(t) = v(t)u(t) \leq v(t)\omega(t)$ , temos  $\omega'(t)/\omega(t) \leq v(t)$ .

Integrando entre  $a$  e  $t$  obtemos

$$\frac{\omega(t)}{\alpha} = e^{\int_a^t v(s)ds},$$

donde

$$u(t) \leq \omega(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}$$

Se  $\alpha = 0$ , o caso anterior implica que, para todo  $\alpha' > 0$ ,

$$u(t) \leq \alpha' e^{\int_a^t v(s) ds}, \text{ para todo } t \geq a,$$

donde  $u(t) \equiv 0$ .

5. PROPOSIÇÃO. Seja  $K$  a constante de Lipschitz de  $f$ . Então, para  $t \in I(t_0, x_0) \cap I(t_0, y_0)$ , temos

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, y_0)| \leq e^{K|t-t_0|} |x_0 - y_0|.$$

Demonstração. Sejam  $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ ,  $\psi(t) = \varphi(t, t_0, y_0)$ . Então  $\varphi(t) - \psi(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))] ds$ ,

donde

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |x_0 - y_0| + \left| \int_{t_0}^t K |\varphi(s) - \psi(s)| ds \right|.$$

Se  $t \geq t_0$ , a proposição decorre do lema anterior para  $\alpha = |x_0 - y_0|$ ,  $u(t) = |\varphi(t) - \psi(t)|$  e  $v(t) = K$ .

Se  $t \leq t_0$ , a proposição resulta do caso anterior aplicado a  $x' = -f(-t, x)$ , cuja solução por  $(-t_0, x_0)$  é  $\psi(t, -t_0, x_0) = \varphi(-t, t_0, x_0)$ .

Se  $t \leq t_0$ , então  $-t \geq -t_0$  e, pelo caso anterior,

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = |\varphi(-t, -t_0, x_0) - \psi(-t, -t_0, y_0)| \leq e^{K(-t+t_0)} |x_0 - y_0|.$$

Logo,

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq e^{K|t-t_0|} |x_0 - y_0|.$$

Observação. Se  $|f| \leq M$ ,  $\varphi$  satisfaz uma condição de Lipschitz relativamente a  $t$ . Pois

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq \left| \int_s^t f(u, \varphi(u)) du \right| \leq |t - s| M.$$

### 3. Diferenciabilidade

1. TEOREMA. Seja  $f$  contínua no aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda$ , com  $D_2 f$  contínua em  $\Omega$ . Então, para  $\lambda$  fixo, a solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$  de

$$x' = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0,$$

é única e admite derivada parcial  $D_3 \varphi$  com relação a  $x_0$ . Mais ainda, a aplicação  $(t, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow D_3 \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$  é contínua no seu domínio

$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda); (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, \omega_-(t_0, x_0, \lambda) < t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\}$ ,  
e

$$x(t) = D_3 \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) \cdot e_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0^k}(t, t_0, x_0, \lambda),$$

para todo  $1 \leq k \leq \dim E$ , é solução de

$$(1) \quad x' = J(t)x, x(t_0) = e_k,$$

onde

$$J(t) = J(t, t_0, x_0, \lambda) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$$

2. LEMA. Seja  $f$  contínua em  $(a, b) \times K$ , onde  $K$  é um aberto convexo de  $E$ . Se  $f$  admite derivada parcial em relação à segunda variável,  $D_2 f$ , contínua em  $(a, b) \times K$ , então existe uma função  $\hat{f}: (a, b) \times K \times K \rightarrow L(E)$  contínua, tal que

$$(1) \quad \hat{f}(t, x, x) = D_2 f(t, x), (t, x) \in (a, b) \times K;$$

$$(2) \quad f(t, x_2) - f(t, x_1) = \hat{f}(t, x_1, x_2)(x_2 - x_1).$$

Aqui  $L(E)$  denota o espaço de aplicações lineares de  $E$  em  $E$ , identificado com o espaço de matrizes  $n \times n$  i.e.  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

*Demonstração.* Definir  $\hat{f}(t, x_1, x_2) = \int_0^1 D_2 f(t, \theta x_2 + (1 - \theta)x_1) d\theta$ . A continuidade de  $\hat{f}$  resulta da continuidade de  $D_2 f$ . 1) é imediato; 2) resulta da relação

$$\begin{aligned} f(t, x_2) - f(t, x_1) &= \int_0^1 \frac{df}{d\theta}(t, \theta x_2 + (1 - \theta)x_1) d\theta \\ &= \int_0^1 Df_2(t, \theta x_2 + (1 - \theta)x_1)(x_2 - x_1) d\theta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

*Demonstração do Teorema 1.* Sejam  $a_- < a_+$  tais que  $\omega_-(t_1, x_1, \lambda_1) < a_- < a_+ < \omega_+(t_1, x_1, \lambda_1)$ . Pelo Teorema 1.1, para  $(t_0, x_0, \lambda)$  numa vizinhança de  $(t_1, x_1, \lambda_1)$  e todo  $t \in [a_-, a_+]$ ,  $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$  é definida e contínua.

Seja  $y_h(t) = \varphi(t, t_0, x_0 + h e_k, \lambda)$ , para  $h$  pequeno. Pela Proposição 3, da seção 1,  $y_h \rightarrow y_0$  uniformemente em  $[a_-, a_+]$ , quando  $h \rightarrow 0$ . Pelo Lema 2, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d(y_h - y_0)(t)}{dt} &= f(t, y_h(t), \lambda) - f(t, y_0(t), \lambda) = \\ &= \hat{f}(t, y_0(t), y_h(t), \lambda)(y_h(t) - y_0(t)). \end{aligned}$$

A existência de  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0^k}(t, t_0, y_0, \lambda)$  é equivalente à existência do limite de  $x_h(t)$ , quando  $h \rightarrow 0$ , onde  $x_h = \frac{y_h - y_0}{h}$ , para  $h \neq 0$ .

Mas  $x_h$  é solução da equação linear

$$(1, h) \quad x' = J(t, h)x, \quad x(t_0) = e_k,$$

onde

$$J(t, h) = f'(t, y_0(t), y_h(t), \lambda).$$

A função  $J(t, h)$  é contínua, para  $h$  pequeno, e  $J(t, 0) = J(t)$ . Logo, pelo fato de que (1,  $h$ ) tem soluções únicas (I; 4, 5) o Teorema 1 implica que  $\lim_{h \rightarrow 0} x_h(t)$  existe e é igual a  $x_0(t) = x(t)$ , que é solução da equação (1, 0) que é idêntica a (1).

Agora provaremos a continuidade de  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0^k}$  relativamente a todas as variáveis.

Para isto consideremos a família de equações dependentes do parâmetro  $(t_0, x_0, \lambda)$ ,

$$(2) \quad x' = J(t, t_0, x_0, \lambda)x, \quad x(t_0) = e_k.$$

A função  $J(t, t_0, x_0, \lambda)x$  é contínua em  $(t, t_0, x_0, \lambda, x)$  no conjunto  $D \times E$  e (2) tem soluções únicas, para cada  $(t_0, x_0, \lambda)$  fixo. O Teorema (2, 1), implica que  $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0^k}$  é contínua em todos os seus argumentos. Isto prova que  $\varphi$  é diferenciável relativamente a  $y_0$  e que  $D_3\varphi$  é contínua em  $D$ . ■

Seguindo a mesma idéia de demonstração o leitor provará que  $\varphi$  também admite derivada parcial contínua em relação a  $t_0$ . (Ver exercício 10).

**3. COROLÁRIO:** Se além das hipóteses do Teorema 1 supusermos que  $f$  é diferenciável relativamente a  $\lambda$  e que  $D_3f$  é contínua em  $\Omega$ , então  $\varphi$  é diferenciável relativamente a  $\lambda$  e  $D_4\varphi \cdot e_k = \partial\varphi/\partial\lambda^k$  é contínua em  $D$ . Além disto,  $x(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda^k}(t, t_0, x_0, \lambda)$  é solução de

$$(*) \quad x' = J(t)x + b(t), \quad x(t_0) = 0,$$

onde

$$b(t) = B(t) \cdot e_k, \quad B(t) = D_3 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda)$$

*Demonstração.*  $\Phi = (\varphi, \lambda)$  é a solução de

$$(x, \lambda)' = (f(t, x, \lambda), 0), \quad (x, \lambda)(t_0) = (x_0, e_k),$$

o qual satisfaz as hipóteses do Teorema I (sem parâmetro). Logo,  $D_4 \Phi$  e, portanto,  $D_4 \varphi$ , existe e é contínua. A última parte da proposição decorre do fato de que  $D_4 \Phi \cdot e_k = (D_4 \varphi \cdot e_k, e_k)$  satisfaz, conforme o Teorema I, a

$$(x', y') = (J(t)x + B(t)y, 0), \quad (x, y)(t_0) = (0, e_k),$$

e, por conseguinte,  $x = D_4 \varphi \cdot e_k$  satisfaz a (\*). ■

4. COROLÁRIO. Seja  $f$  contínua em  $\Omega$ ,  $\Omega$  aberto em  $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda \times \mathcal{M}$  onde  $\mathbb{E}, \Lambda, \mathcal{M}$ , são espaços euclidianos quaisquer. Se  $f$  é diferenciável em relação à segunda e à terceira variáveis  $x$  e  $\lambda$ , respectivamente, e  $D_2 f$  e  $D_3 f$  são contínuas em  $\Omega$ , então, para  $\lambda$  e  $\mu$  fixos.

$$x' = f(t, x, \lambda, \mu), \quad x(t_0) = x_0,$$

tem uma única solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda, \mu)$ , a qual é diferenciável relativamente a  $(t, x_0, \lambda)$ . As derivadas  $D_1 \varphi, D_3 \varphi, D_4 \varphi, D_1 D_3 \varphi$  e  $D_1 D_4 \varphi$  também são contínuas em  $D$ .

*Demonstração.* Para  $\mu$  fixo,  $D_3 \varphi$  e  $D_4 \varphi$  existem. Elas são contínuas, pois satisfazem às seguintes equações lineares com segundo membro contínuo e soluções únicas:

$$\begin{aligned} D_1 [D_3 \varphi] &= J(t, t_0, x_0, \lambda, \mu) [D_3 \varphi], \\ D_1 [D_4 \varphi] &= J(t, t_0, x_0, \lambda, \mu) [D_4 \varphi] + D_3 f(t, \varphi(t, t_0, \lambda, \mu), \lambda, \mu) \end{aligned}$$

Isto também prova a continuidade de  $D_1 D_3 \varphi$  e  $D_1 D_4 \varphi$ . A função  $D_1 \varphi = f(t, \varphi)$  é, obviamente, contínua. ■

5. TEOREMA. Seja  $f(t, x, \lambda, \mu)$  contínua no aberto  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda \times \mathcal{M}$ , com derivadas parciais de ordem  $\leq m$  relativas às coordenadas de  $(x, \lambda)$  também contínuas. Então, para  $\lambda$  e  $\mu$  fixos,

$$x' = f(t, x, \lambda, \mu), \quad x(t_0) = x_0,$$

tem uma única solução  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda, \mu)$ . A solução  $\varphi$  está definida no aberto

$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda, \mu); (t_0, x_0, \lambda, \mu) \in \Omega \text{ e } \omega_-(t_0, x_0, \lambda, \mu) < t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda, \mu)\}$   
 de  $\mathbb{R} \times \Omega$ , no qual admite todas as derivadas parciais da forma

$$\frac{\partial^{i+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n+\beta_1+\dots+\beta_r} \varphi}{\partial t^i \partial (x_0^1)^{\alpha_1} \partial (x_0^2)^{\alpha_2} \dots \partial (\lambda^1)^{\beta_1} \dots \partial (\lambda^r)^{\beta_r}}$$

com  $\sum \alpha_j + \sum \beta_j \leq m$ ,  $i \leq 1$ , as quais são contínuas.

*Demonstração.* Por indução em  $m$ . Para  $m = 1$ , o teorema é válido pelo Corolário 4. Suponhamos que o teorema é válido para  $m - 1$  ( $m - 1 \geq 1$ ). Seja

$$J(t, t_0, x_0, \lambda, \mu) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda, \mu), \lambda, \mu),$$

e consideremos o problema de valor inicial:

$$x' = J(t, t_0, x_0, \lambda, \mu)x, \quad x(t_0) = e_k.$$

O segundo membro da equação tem derivadas de todas as ordens  $\leq m - 1$ , com relação às componentes de  $x, x_0, \lambda$ . Pela hipótese de indução, sua solução  $D_2 \varphi \cdot e_k = \partial \varphi / \partial x_0^k$  tem derivadas parciais de todas as ordens  $\leq m - 1$  com relação às componentes de  $x_0$ , e estas têm derivadas contínuas com relação a  $t$ . Isto prova o teorema quando todos os  $\beta_i$  são 0.

Consideremos agora

$$x' = J(t, t_0, x_0, \lambda, \mu)x + b(t, t_0, x_0, \lambda, \mu), \quad x(t_0) = 0,$$

onde

$$b(t, t_0, x_0, \lambda, \mu) = D_3 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda, \mu), \lambda, \mu) \cdot e_j.$$

A hipótese de indução garante que a sua solução  $D_3 \varphi \cdot e_j = \partial \varphi / \partial \lambda^j$  tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens  $\leq m - 1$ , relativamente às componentes de  $x_0$  e  $\lambda$ , cada uma das quais tem derivada contínua relativamente a  $t$ . Isto prova o teorema quando algum  $\beta_i$  é  $\neq 0$ , completando a indução. ■

**6. COROLÁRIO.** Seja  $f = f(t, x)$  de classe  $C^m$  em  $\Omega$ . Então  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$  tem todas as derivadas parciais de ordem  $\leq m$  com respeito às variáveis  $(t, x_0)$ , contínuas no aberto

$$D = \{(t, t_0, x_0); (t_0, x_0) \in \Omega, \omega_-(t_0, x_0) < t < \omega_+(t_0, x_0)\}.$$

**Demonstração.** Por indução em  $m$ . Para  $m = 1$  o Corolário é válido pelo Corolário 4. Suponhamos que o Corolário é válido para  $m - 1$ . Seja

$$J(t, t_0, x_0) = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0))$$

e consideremos o seguinte problema de valores iniciais

$$x' = J(t, t_0, x_0)x, \quad x(t_0) = e_k.$$

O segundo membro desta equação tem derivadas de todas as ordens  $\leq m - 1$ , com relação às componentes de  $(x, x_0, t)$ . Pela hipótese de indução,  $D_2 \varphi e_k = \partial \varphi / x_0^k$  tem derivadas de todas as ordens  $\leq m - 1$  com respeito a  $(t, x_0)$  e estas derivadas são contínuas em  $D$ . Por outro lado,  $D_1 \varphi = \partial \varphi / \partial t = f \circ \varphi$  tem todas as derivadas de ordem  $\leq m - 1$  com respeito a  $x_0$ , contínuas em  $D$ . Isto pela regra da cadeia, pois  $f$  é de classe  $C^m$  e  $\varphi$  tem todas derivadas de ordem  $\leq m$  com relação a  $x_0$ , contínuas em  $D$ , pelo Teorema 5. Logo,  $\varphi$  tem todas as derivadas parciais de ordens  $\leq m$  com respeito às variáveis  $(t, x_0)$ , contínuas em  $D$ . Isto termina a demonstração do Corolário. ■

*Nota:* Na seção 2 do Capítulo VI demonstraremos com outro método os resultados desta seção.

## EXERCÍCIOS

1. Sejam  $f_n: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^c$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  contínuas tais que para todo  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^c$  a solução de

$$(*) \quad x' = f_n(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

é única. Suponha também que  $f_n$  converge para  $f_0$  uniformemente nas partes compactas de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^c$ . Dados  $t_0 < t_1$ , prove que os conjuntos  $A_n = A_n(t_0, t_1)$  formados pelos  $x_0 \in \mathbb{R}^c$  tais que a solução  $\varphi_n(t, t_0, x_0)$  de (\*) está definida para  $t = t_1$  é um aberto; mostre também que se  $A_0 \neq \emptyset$  então  $A_n \neq \emptyset$  para todo  $n$  suficientemente grande.

Seja agora  $T_n: A_n \rightarrow \mathbb{R}^c$  dado por  $T_n(x_0) = \varphi(t_1, t_0, x_0)$ . Mostre que  $T_n$  é um homeomorfismo de  $A_n$  sobre um aberto  $B_n$  de  $\mathbb{R}^c$ , que converge para  $T_0$  uniformemente nas partes compactas de  $A_0$ . Isto é, dado  $K \subset A_0$ , existe  $n(K)$  tal que se  $n > n(K)$  então  $K \subset A_n$  e  $T_n|_K$  converge uniformemente para  $T_0|_K$ .

2. No exercício 1 suponha que existe  $M$  tal que  $|D_2 f_n(t, x)| < M$  para todo  $n = 1, 2, \dots$  e  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^c$ . Prove que  $A_n = B_n = \mathbb{R}^c$ .

3. Prove o Teorema 1 da seção 2 para  $\Lambda$  um espaço métrico qualquer.
4. Além da hipótese do exercício 1, suponha também que  $D_2 f_n$  é contínua e converge para  $D_2 f_0$  em partes compactas de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Prove que  $T_n$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$  e que  $DT_n$  converge para  $DT_0$  uniformemente em partes compactas de  $A_0$ .
5. Estenda o resultado do exercício 4 para o caso em que  $D_2^k f_n$  converge uniformemente, em partes compactas, para  $D_2^k f_0$  para todo  $0 \leq k \leq m$ . Conclua que  $D^k T_n$  converge uniformemente em partes compactas para  $D^k T_0$ ,  $0 \leq k \leq m$ .
6. Seja  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , e  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  que contém o gráfico de  $\varphi$ . Seja  $\mathcal{F}(\varphi)$  o conjunto de aplicações  $f$  de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}^n$ , contínuas com  $D_2 f$  contínua. Seja  $T_f(x_0)$  o valor que toma em  $b$  a solução de

$$x' = f(t, x), \quad x(a) = x_0.$$

Mostre que se  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\varphi)$  e  $D_2 f_1(t, \varphi(t)) = D_2 f_2(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in [a, b]$  então  $DT_{f_1}(\varphi(a)) = DT_{f_2}(\varphi(a))$ . Generalize para  $D^k T_f(\varphi(a))$  fazendo as hipóteses apropriadas sobre  $D_2^k f(t, \varphi(t))$ .

7. A partir do estabelecido na seção 3, conclua que

$$(*) \quad \begin{aligned} \varphi(t, t_0, x_0, \lambda) &= \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0) + \\ &+ D_4 \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0) (\lambda - \lambda_0) + \varepsilon_\lambda(t) (\lambda - \lambda_0), \end{aligned}$$

com  $\varepsilon_\lambda$  tendendo para zero uniformemente em partes compactas de  $I(t_0, x_0, \lambda_0)$  quando  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ . Este fato é útil para se encontrar expressões aproximadas das soluções (\*), em partes compactas, a partir de  $\varphi_0(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0)$  e  $y(t) = D_4 \varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0)$ , que são soluções conhecidas de

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, \lambda_0); \quad x(t_0) = x_0 \\ \text{e } y' &= D_2 f(t, \varphi_0(t), \lambda_0) y + D_3 f(t, \varphi_0(t), \lambda_0), \quad y(t_0) = 0 \end{aligned}$$

respectivamente.

8. Aplique as conclusões do exercício 7 para provar a seguinte forma da lei de Galileu. Seja um corpo em queda livre num meio que oferece uma resistência muito pequena ao movimento. Suponhamos que esta depende da posição e da velocidade do corpo, de maneira que a equação do movimento é

$$\left. \begin{aligned} x'' &= -g + \lambda R(x, x') \\ x(0) &= x_0, \quad x'(0) = v_0 \end{aligned} \right\} (*)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\lambda < 1$  uma constante e  $x_0, v_0$  são a posição e a velocidade iniciais. Então a posição do corpo no instante  $t$  é dada por

$$x(t) = x_0(t) + \lambda \int_0^t \int_0^s R(x_0(r), x'_0(r)) dr ds$$

com  $x_0(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ .

(Sugestão: Usando (\*) e o fato de que para  $\lambda = 0$  a solução de (\*) é  $x_0(t)$ , obtenha a expressão de  $x(t)$  a menos de termos da forma  $\varepsilon(t, \lambda)$  com  $\frac{\varepsilon(t, \lambda)}{\lambda}$  tendendo para zero em intervalos compactos de  $[0, \infty)$ .)

9. Desenvolva as fórmulas para as derivadas da solução  $\varphi(t, t_0, x_0, x'_0, \lambda)$  da equação

$$\begin{aligned} x'' &= f(t, x, x', \lambda) \\ x(t_0) &= x_0, \quad x'(t_0) = x'_0. \end{aligned}$$

10. Com a hipótese e a notação do teorema 3.1 mostre que  $D_2 \varphi$ , isto é,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t_0}$  existe e é contínua em  $D$ , e que

$$y(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t, t_0, x_0, \lambda)$$

é solução de

$$y' = J(t)y, \quad y(t_0) = -f(t_0, x_0, \lambda).$$

11. Seja  $f(t, x, \lambda)$  de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  e periódica de período  $\omega$  em  $t$ . Suponha que  $p(t)$  é uma solução de período  $\omega$  de

$$x' = f(t, x, 0)$$

tal que a única solução de

$$\begin{aligned} y' &= D_2 f(t, p(t), 0)y \\ y(\omega) &= y(0) \end{aligned}$$

é a função idênticamente nula. Mostre que existem  $\varepsilon, \delta > 0$  tais que se  $|\lambda| < \delta$  então existe uma única solução periódica  $p(t, \lambda)$  com período  $\omega$  em  $t$ , de

$$x' = f(t, x, \lambda)$$

tal que  $|p(t, \lambda) - p(t)| < \varepsilon$ .

(Sugestão: Aplique o teorema das funções implícitas à equação  $\varphi(\omega, 0, x, \lambda) - x = 0$ .)

**PARTE B**

**EQUAÇÕES LINEARES**

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Para a classe das equações lineares é possível um alto grau de perfeição no conhecimento das propriedades de suas soluções. No caso de coeficientes constantes é possível resolvê-las, com o auxílio da álgebra linear, em termos de funções elementares.

Este conhecimento apurado é importante para o estudo local das soluções de uma equação não linear, que é feito através da comparação com as soluções do sistema linear que a aproxima. É um processo semelhante ao que ocorre no Cálculo Diferencial, onde obtém-se informações locais sobre uma função a partir de sua derivada.

Assim, para compreender o comportamento das soluções da equação do pêndulo com fricção

$$x'' + g \operatorname{sen} x + \varepsilon x' = 0$$

na vizinhança de  $(0, 0)$ , estuda-se a equação

$$x'' + \varepsilon x' + gx = 0.$$

Neste capítulo nos limitaremos a estabelecer as propriedades gerais das soluções das equações lineares. Somente nos capítulos VI, VIII e IX relacionaremos com precisão as propriedades das equações não lineares com as das obtidas delas por linearização. Para isso será fundamental o estudo que faremos nas seções 5 e 6, dos sistemas lineares hiperbólicos.

O tratamento, na seção 7, dos sistemas lineares no campo complexo será utilizado apenas no capítulo V.

## 1. Preliminares

Salvo menção explícita em contrário, neste capítulo  $E$  representará o espaço euclidiano  $n$ -dimensional real  $\mathbb{R}^n$  ou complexo  $\mathbb{C}^n$ , com a norma

$$|x| = \sup |x_i|, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

Sejam  $I$  um intervalo e  $a_{ij}, b_j$  funções contínuas em  $I$ , com valores reais ou complexos,  $i, j = 1, \dots, n$ .

Consideraremos um sistema de  $n$  equações da forma

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases}$$

que é denotado abreviadamente por

$$x_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t), i = 1, 2, \dots, n.$$

Uma família de funções  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  reais ou complexas de classe  $C^1$  num intervalo  $I_0 \subset I$ , chama-se *solução do sistema (1)* em  $I_0$  se para todo  $t \in I_0$

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\varphi_j(t) + b_i(t), i = 1, \dots, n.$$

A equação matricial

$$(2) \quad x' = A(t)x + b(t)$$

onde  $A(t) = (a_{ij}(t))$  é a matriz  $n \times n$  cujos elementos são  $a_{ij}(t)$ , e  $b(t) = (b_i(t))$  é o vetor coluna cujas coordenadas são  $b_i(t)$ , é equivalente ao sistema (1) no seguinte sentido: uma família  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$  é solução de (1) em  $I_0$  se e somente se a aplicação  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  é solução de (2) em  $I_0$ , isto é, se

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t), \forall t \in I_0.$$

O sistema (1) ou a equação (2) em  $I \times \mathbb{E}$  chama-se *linear*; se  $b_i(t) = 0$ , chama-se *linear homogênea*.

Embora, neste livro, estejamos interessados principalmente no caso real ( $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ ) trataremos, simultaneamente, do caso complexo que é obtido, na sua maior parte, sem esforço adicional.

## 2. Propriedades gerais

1. TEOREMA. Para todo  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{E}$  existe uma única solução  $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$  de (2) definida em  $I$  tal que  $\varphi(t_0) = x_0$ .  
Nota: A prova dada a seguir ilustra o "método das aproximações sucessivas" e é direta e elementar. Porém ela é essencialmente idêntica

à prova, usando métodos de espaços métricos de funções contínuas, dada em I; 4, 5.

*Demonstração.* Consideremos a seqüência de aplicações  $\varphi_i$  de  $I$  em  $E$ , dada por

$$(*) \quad \begin{cases} \varphi_0(t) = x_0 \\ \varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi_{i-1}(s) + b(s)] ds \end{cases}$$

Provaremos que para todo intervalo compacto  $[a, b] \subset I$ , a seqüência  $\varphi_i$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para uma solução de (2). Sejam

$$K = \sup \{ \|A(s)\|; s \in [a, b] \} \text{ e} \\ c = \sup \{ |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)|; s \in [a, b] \}$$

Notemos que

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| = \left| \int_{t_0}^t A(s) [\varphi_1(s) - \varphi_0(s)] ds \right| \leq \\ \leq \int_{t_0}^t |A(s) [\varphi_1(s) - \varphi_0(s)]| ds \leq Kc |t - t_0|$$

$$|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| = \left| \int_{t_0}^t A(s) [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)] ds \right| \leq \\ \leq \int_{t_0}^t |A(s) [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]| ds \leq \frac{K^2 c}{2!} |t - t_0|^2$$

Por indução, temos

$$|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \leq \frac{K^i c}{i!} |t - t_0|^i$$

Portanto, temos que

$$\sup_{t \in [a, b]} |\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \leq \frac{[K(b-a)]^i c}{i!}$$

Por ser  $\frac{(K(b-a))^i c}{i!}$  uma série convergente, a série de aplicações

$\varphi_i = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \dots + (\varphi_i - \varphi_{i-1})$  converge uniformemente em  $[a, b]$ , pelo critério de Weierstrass.

Denotemos por  $\varphi$  o limite (pontual) desta série. Notemos que este limite existe em  $I$  pois  $I$  é união de intervalos compactos da forma  $[a, b]$ . Fazendo  $i$  tender a infinito em (\*) temos que, para todo  $t \in I$ ,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\varphi(s) + b(s)] ds.$$

Derivando com respeito a  $t$ , verificamos que  $\varphi$  satisfaz a (2).

Suponhamos que existe outra aplicação  $\psi$  que satisfaz (2) em  $I$ . Portanto, para  $t \in I$ ,

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [A(s)\psi(s) + b(s)] ds.$$

Denotemos por  $m$  o  $\sup |\psi(t) - \varphi_1(t)|, t \in [a, b]$ . Para  $t \in [a, b]$ , temos

$$\begin{aligned} |\psi(t) - \varphi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t A(s)(\psi(s) - \varphi_1(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t |A(s)(\psi(s) - \varphi_1(s))| ds \leq Km |t - t_0| \\ |\psi(t) - \varphi_3(t)| &\leq \frac{K^2 m}{2!} |t - t_0|^2; \\ &\vdots \\ |\psi(t) - \varphi_i(t)| &\leq \frac{K^{i-1} m}{(i-1)!} |t - t_0|^{i-1} \end{aligned}$$

Logo  $\psi(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi_i(t) = \varphi(t)$ . Isto prova a unicidade de  $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ . ■

*Exemplo.* Se  $E = \mathbb{C}$  e  $A(t) = a \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , temos que

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= x_0, \quad \varphi_1(t) = x_0(1 + ta), \\ \varphi_2(t) &= x_0 \left( 1 + ta + \frac{t^2}{2!} a^2 \right), \dots, \\ \varphi_i(t) &= x_0 \left( 1 + ta + \frac{t^2}{2!} a^2 + \dots + \frac{t^i}{i!} a^i \right). \end{aligned}$$

Portanto  $\varphi(t, t_0, x_0)$  solução, em  $\mathbb{R}$ , de

$$x' = ax, \quad x(0) = x_0$$

é dada por  $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{at}$ . Ver Fig. 1.

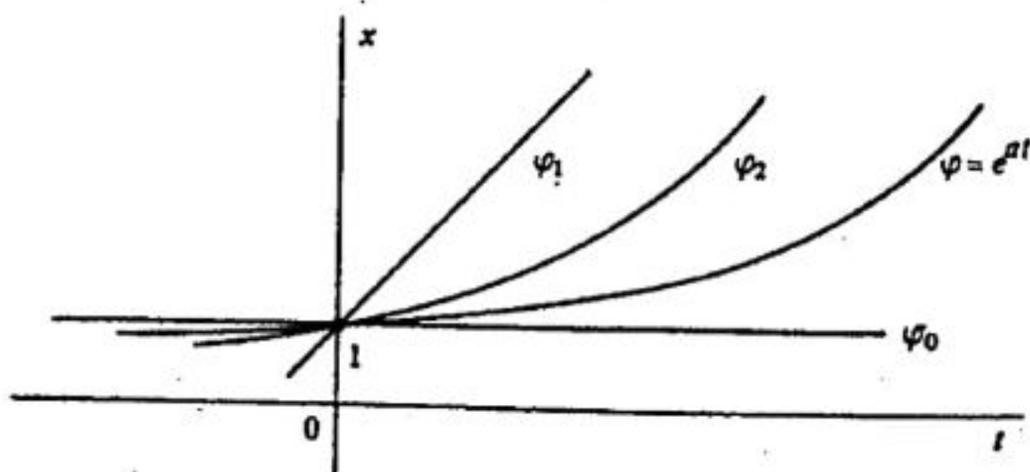


Figura 1 Aproximações sucessivas para  $\varphi = e^{at}$

2. COROLÁRIO. Sejam  $\varphi, \psi$  soluções da equação homogênea

$$(3) \quad x' = A(t)x.$$

- (a) Se  $a, b$  são constantes arbitrárias, reais ou complexas, então  $\gamma = a\varphi + b\psi$  é solução de (3).  
 (b) Se  $\varphi(s) = 0$  para algum  $s \in I$  então  $\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in I$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{d\gamma(t)}{dt} &= a \frac{d\varphi}{dt}(t) + b \frac{d\psi}{dt}(t) = \\ &= a A(t)\varphi(t) + b A(t)\psi(t) = \\ &= A(t)[a\varphi(t) + b\psi(t)] = \\ &= A(t)\gamma(t). \end{aligned}$$

- (b) É consequência imediata da unicidade das soluções, pois a função nula também é solução de (3). ■

Consideremos o espaço  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, E)$  das funções contínuas  $\varphi: I \rightarrow E$  como espaço vetorial munido das operações de soma de funções e produto de uma constante, real ou complexa conforme o caso, por uma função. Assim, neste espaço vetorial,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , são linearmente dependentes se existem constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , não todas nulas, tais que  $\sum c_i \varphi_i = 0 \in \mathcal{C}$ , isto é, se para todo  $t \in I, \sum c_i \varphi_i(t) = 0$ .

Observemos o seguinte:

- (i) O Corolário 2, parte (a), mostra que o conjunto  $\mathcal{A}$  das soluções de (3) forma um subespaço vetorial de  $\mathcal{C}$  (sobre os reais ou complexos conforme o caso).  
 (ii) Seja  $s \in I$ . Representemos por  $\varepsilon_s$  a aplicação de  $\mathcal{A}$  em  $E$  dada por  $\varepsilon_s(\varphi) = \varphi(s)$ ;  $\varepsilon_s$  é um isomorfismo de espaços vetoriais. É óbvio que  $\varepsilon_s$  é linear. Ela é sobre  $E$  pelo Teorema 1, pois  $\varepsilon_s(\varphi(t, s, x_0)) = x_0$  para qualquer  $x_0 \in E$ . Finalmente, o Corolário 2, parte b, implica que o núcleo de  $\varepsilon_s$  é  $\{0\}$ , portanto, ela é biunívoca.

Em particular,  $\dim \mathcal{A} = \dim E$

Resumindo estas propriedades temos:

3. PROPOSIÇÃO. O conjunto  $\mathcal{A}$  de todas as soluções de (3) é um espaço vetorial de dimensão igual a dimensão de  $E$ . Mais ainda, para cada  $s \in I$ , a aplicação que a  $x_0 \in E$  associa a solução  $\varphi(t, s, x_0)$ , que passa por  $(s, x_0)$  é um isomorfismo de  $E$  sobre  $\mathcal{A}$ .

Em particular, se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  formam uma base de  $E$ , então  $\varphi_1 = \varphi(t, s, v_1), \dots, \varphi_n = \varphi(t, s, v_n)$  formam uma base de  $\mathcal{S}$ ; isto é, toda solução de (3) se exprime como combinação linear única de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , com coeficientes reais ou complexos, segundo o caso.

*Demonstração.* Imediata por (i) e (ii), acima.

Observar que  $e_s^{-1}(x_0) = \varphi(t, s, x_0)$ . ■

4. COROLÁRIO. A aplicação  $\phi_s^t: E \rightarrow E$  dada por  $\phi_s^t(x) = \varphi(t, s, x)$ , onde  $\varphi(t, s, x)$  é a solução de (2) passando por  $(s, x)$  e tomada no ponto  $t$ , é um isomorfismo que tem as seguintes propriedades:

- $\phi_s^s = \text{identidade}$
- $\phi_s^t \circ \phi_u^s = \phi_u^t$
- $\phi_s^t = [\phi_t^s]^{-1}$

*Demonstração.* Imediata pois  $\phi_s^t = e_t \circ e_s^{-1}$ . ■

Consideremos agora as equações matriciais lineares

$$(4) \quad X' = A(t)X,$$

em  $I \times M(n)$ , onde  $M(n)$  é o espaço das matrizes  $X = (x_{ij})$  com  $n$  linhas e  $n$  colunas, de elementos reais ou complexos, identificado com o espaço  $\mathbb{R}^{n^2}$  ou  $\mathbb{C}^{n^2}$ , com a norma  $|X| = \sup |x_{ij}|$ . A equação linear (4) chama-se *linear homogênea*.

Por ser (4) equivalente ao sistema do tipo (1)

$$x'_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_{kj}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

e, portanto, a uma equação do tipo (2), o Teorema 1 se aplica neste caso para garantir a existência e unicidade, em  $I$ , das soluções de (4) que passam por  $(t_0, X_0) \in I \times M(n)$ . Isto também decorre da seguinte observação:

$\phi(t)$  é solução de (4) se e somente se para todo  $1 \leq j \leq n$ , a  $j$ -ésima coluna  $\phi_j(t)$  de  $\phi(t)$  é solução da equação homogênea  $x' = A(t)x$ .

5. DEFINIÇÃO. Uma matriz  $\phi(t)$  de ordem  $n \times n$  cujas colunas formam uma base do espaço de soluções de (3) chama-se *matriz fundamental de (3)*.

Com base na proposição 3, parte (b), temos que uma matriz  $\phi(t)$  é uma matriz fundamental de (3) se e somente se  $\phi(t)$  é uma solução

de (4) tal que para algum  $t_0 \in I$ , e portanto para todo  $t_0 \in I$ ,  $\phi(t_0)$  é não singular. Pelo Teorema 1, dado  $t_0 \in I$  e  $M_0$  uma matriz não singular, existe uma única matriz fundamental  $\phi$  tal que  $\phi(t_0) = M_0$ .

Por substituição direta verifica-se que se  $\phi(t)$  é uma solução de (4), então para toda matriz  $C$ ,  $n \times n$ ,  $\psi(t) = \phi(t)C$  é também solução de (4).

**6. PROPOSIÇÃO.** *Sejam  $\phi(t)$  e  $\psi(t)$  soluções de (4), sendo  $\phi$  fundamental. Existe uma única matriz  $C$  de ordem  $n \times n$  tal que para todo  $t \in I$*

$$\psi(t) = \phi(t)C.$$

*$C$  é não singular se e somente se  $\psi(t)$  é fundamental.*

*Demonstração.* Temos

$$(\phi^{-1}(t)\psi(t))' = (\phi^{-1}(t))'\psi(t) + (\phi^{-1}(t))\psi'(t)$$

$$\text{Mas } (\phi^{-1}(t))' = -\phi^{-1}(t)\phi'(t)\phi^{-1}(t) = -\phi^{-1}(t)A(t).$$

Portanto

$$(\phi^{-1}(t)\psi(t))' = -\phi^{-1}(t)A(t)\psi(t) + \phi^{-1}(t)A(t)\psi(t) = 0$$

Por conseguinte

$$\phi^{-1}(t)\psi(t) = C. \blacksquare$$

## 7. EXEMPLOS.

(a) No caso  $n = 1$ ,  $A(t) = a(t)$  e  $x' = a(t)x$ , temos que  $\phi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$  é uma matriz fundamental. Aqui,  $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$  é a solução que passa por  $(t_0, x_0)$ .

(b) Seja  $A(t)$  definida em  $I = \mathbb{R}$  e periódica de período  $\tau$ , isto é,  $A(t + \tau) = A(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Seja  $\phi$  uma matriz fundamental de (3). Existe  $C$  não singular tal que

$$\phi(t + \tau) = \phi(t)C$$

De fato,  $\psi(t) = \phi(t + \tau)$  é também matriz fundamental, pois

$$\psi'(t) = \phi'(t + \tau) = A(t + \tau)\phi(t + \tau) = A(t)\psi(t)$$

A aplicação da Proposição 6 conclui o argumento.

O teorema seguinte mostra que o conhecimento de uma matriz fundamental de (3) implica no conhecimento da "solução geral" de (2).

8. TEOREMA. Se  $\phi(t)$  é uma matriz fundamental de (3), então a solução  $\varphi(t, t_0, x_0)$  de (2) tal que  $\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$  é dada por

$$(5) \quad \varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t) [\phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds]$$

Em particular,  $\varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)x_0$ , no caso homogêneo.

*Demonstração.* Imediata por substituição direta em (2). Indicaremos o processo heurístico que motiva a fórmula (5), chamada na terminologia clássica "fórmula de variação dos parâmetros".

Seja  $C(t)$  tal que  $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0) = \phi(t)C(t)$ .

Então,

$$\begin{aligned} A(t)\varphi(t) + b(t) &= \varphi'(t) = \\ &= \phi'(t)C(t) + \phi(t)C'(t) = \\ &= A(t)\phi(t)C(t) + \phi(t)C'(t) = \\ &= A(t)\varphi(t) + \phi(t)C'(t). \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$C'(t) = \phi^{-1}(t)b(t)$$

e, como  $C(t_0) = \phi^{-1}(t_0)x_0$ , temos

$$C(t) = \phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)b(s)ds. \blacksquare$$

9. PROPOSIÇÃO. (Fórmula de Liouville). Seja  $\phi(t)$  uma matriz cujas colunas são soluções de (3).

Então para todo  $t \in I$  e  $t_0 \in I$  fixo,

$$\det \phi(t) = \det[\phi(t_0)] e^{\int_{t_0}^t \text{traço } A(s) ds}$$

onde traço  $A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ , se  $A = (a_{ij})$ .

*Demonstração.* É suficiente provar que  $\varphi(t) = \det \phi(t)$  é solução de  $x' = [\text{traço } A(t)]x$ .

Derivando  $\varphi(t) = \det \phi(t) = \det(\phi_1, \dots, \phi_n)$ , como função n-linear alternada das colunas de  $\phi(t)$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \det(\phi_1(t), \dots, \phi_i'(t), \dots, \phi_n(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\phi_1(t), \dots, A(t)\phi_i(t), \dots, \phi_n(t)) \end{aligned}$$

É suficiente supor que  $\phi(t)$  é fundamental, caso contrário o teorema é trivialmente satisfeito. Expressamos para cada  $t$  o vetor  $A(t)\phi_j(t)$  em termos da base  $\{\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$  de  $E$ .

$$A(t)\phi_j(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}(t)\phi_i(t)$$

Isto é, a matriz  $(\alpha_{ij}(t))$  é a matriz do operador  $x \rightarrow A(t)x$  na base  $\{\phi_i(t)\}$ . Lembrando que o traço não depende da expressão matricial do operador, temos:

$$\text{traço } A(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t).$$

Logo

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \det(\phi_1(t), \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)\phi_j(t), \dots, \phi_n(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}(t) \det(\phi_1(t), \dots, \phi_i(t), \dots, \phi_n(t)) = \\ &= [\text{traço } A(t)] \varphi(t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3. Equações lineares com coeficientes constantes

Consideremos agora a equação linear homogênea

$$(1) \quad x' = Ax$$

onde  $A$  é uma matriz real ou complexa de ordem  $n \times n$ . Esta é a equação associada ao campo vetorial definido pela aplicação linear  $x \rightarrow Ax$ .

Seja  $\phi(t)$  a matriz fundamental de (1) tal que  $\phi(0) = E$  (identidade). É claro, pelo Teorema 1, da Seção 2 que  $\phi$  está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

No caso  $n = 1$ ,  $A = a \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , e temos  $\phi(t) = e^{at}$ . Na seguinte proposição mostraremos que a aplicação  $t \rightarrow \phi(t)$  tem propriedades análogas à função exponencial. Isto motivará a definição de exponencial de matrizes.

#### 1. PROPOSIÇÃO.

- $\phi'(t) = A\phi(t)$ ,  $\phi(0) = E$
- para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$

- c)  $[\phi(t)]^{-1} = \phi(-t)$   
 d) a série

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

converge para  $\phi(t)$  em  $\mathbb{R}$ , uniformemente em cada intervalo compacto.

*Demonstração.* a) É óbvio, por definição de  $\phi$ .

b) Fixado  $s$ ,  $\psi(t) = \phi(t+s)$  e  $\theta(t) = \phi(t)\phi(s)$  são soluções de  $X' = AX$ ,  $X(0) = \phi(s)$ . A prova segue então de unicidade das soluções.

c) Segue de (b) fazendo  $s = -t$ .

d) É imediata a partir da prova do teorema 2.1 aplicada à equação linear homogênea  $X' = AX$ ,  $X(0) = E$ .

É suficiente observar que a seqüência  $\phi_k$  de aplicações de  $\mathbb{R}$  no espaço de matrizes  $n \times n$  definida por

$$\phi_0(t) = E, \quad \phi_{k+1}(t) = E + \int_0^t A\phi_k(s)ds$$

é a seqüência das somas parciais da série (2).

De fato,

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= E + \int_0^t AEds = E + tA \\ \phi_2(t) &= E + \int_0^t A(E + As)ds = E + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} \\ &\vdots \\ \phi_k(t) &= E + \int_0^t A \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{s^j A^j}{j!} \right) ds = \sum_{j=0}^k \frac{t^j A^j}{j!} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2. *Definição.* A matriz  $e^A$  definida por  $\phi(1)$  chama-se exponencial da matriz  $A$ .

Reescrevendo a proposição 1 temos que:

a)  $\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA}$  e  $e^{0A} = E$

b)  $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$

c)  $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$

d)  $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$

sendo a convergência da série uniforme em cada intervalo compacto.

3. FLUXOS LINEARES. Uma aplicação  $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  de classe  $C^1$  é dita um fluxo se:

- i)  $\varphi(0, x) = x$
- ii)  $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)) \quad t, s \in \mathbb{R}$

Um fluxo chama-se linear se para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$  é uma aplicação linear em  $\mathbb{E}$ . Neste caso, existe uma única matriz  $A$  tal que

$$\varphi_t(x) = e^{tA} x$$

De fato, se  $f$  é dada por

$$f(x) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \right|_{t=0}$$

então  $f$  é linear, pois

$$\begin{aligned} f(ax + by) &= \left. \frac{\partial \varphi(t, ax + by)}{\partial t} \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{\partial [a\varphi(t, x) + b\varphi(t, y)]}{\partial t} \right|_{t=0} = \\ &= af(x) + bf(y). \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é definida por uma matriz  $A$ ,  $f(x) = Ax$  e isto implica  $\varphi(t, x) = e^{tA}x$  pois para  $x$  fixo, ambas são soluções de

$$y' = Ay, \quad y(0) = x.$$

Um estudo mais geral dos fluxos e sua relação com as equações diferenciais ordinárias será feito no capítulo VI.

#### 4. EXEMPLOS.

a) Introduzimos a notação  $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)$  para designar a matriz

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix}$$

que tem blocos quadrados,  $A_i$ , de diversas ordens, na diagonal principal, sendo nulos seus elementos restantes. Temos:

$$e^{At} = \text{diag}(e^{A_1 t}, e^{A_2 t}, \dots, e^{A_m t}).$$

De fato,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)]^k t^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{diag}(A_1^k t^k, A_2^k t^k, \dots, A_m^k t^k) = \\ &= \text{diag} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k t^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_2^k t^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_m^k t^k}{k!} \right) = \\ &= \text{diag}(e^{A_1 t}, e^{A_2 t}, \dots, e^{A_m t}). \end{aligned}$$

Em particular, se  $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , então

$$e^{At} = \text{diag}(e^{a_1 t}, \dots, e^{a_m t}).$$

b) Se  $I(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ , então

$$e^{t I(\alpha, \beta)} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos t\beta & \text{sen } t\beta \\ -\text{sen } t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix}.$$

Este fato segue-se, por verificação direta de que

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\alpha t}(\cos t\beta, -\text{sen } t\beta) \text{ e} \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t}(\text{sen } t\beta, \cos t\beta), \end{aligned}$$

as colunas da matriz, são soluções da equação (1), com  $A = I(\alpha, \beta)$ , e satisfazem a  $\varphi_1(0) = (1, 0)$  e  $\varphi_2(0) = (0, 1)$ .

c) Se  $A$  é nilpotente, isto é, existe um inteiro positivo  $r$  tal que  $A^r = 0$ , então

$$e^{tA} = E + At + \dots + \frac{A^{r-1} t^{r-1}}{(r-1)!}$$

Um exemplo de matriz nilpotente é o seguinte

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Isto é,  $E_1$  é a matriz  $n \times n$ , com todos seus elementos da forma  $a_{j,j+1}$ , isto é, um lugar à direita da diagonal principal, iguais a 1 e o resto dos elementos iguais a 0.  $E_1$  é nilpotente, pois  $E_1^k$  é a matriz cujos

elementos  $k$  lugares à direita da diagonal principal são iguais a 1 e os restantes elementos são iguais a zero. Logo,  $E_1^n = 0$ .

Em particular,

$$e^{tE_1} = E + tE_1 + \frac{t^2 E_1^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1} E_1^{n-1}}{(n-1)!}$$

ou mais explicitamente,

$$e^{tE_1} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{n-2}/(n-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & t^2/2! & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & t & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 5. PROPOSIÇÃO.

- (i) Seja  $C$  tal que  $BC = CA$ . Então,  $e^{tB}C = Ce^{tA}$ .  
 (ii) Se  $AB = BA$ , então para todo  $t$

$$e^{tA}B = Be^{tA} \quad e \quad e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$$

*Demonstração.* (i) Segue da Proposição 1(d) por ser

$$B^k C = CA^k \text{ para todo } k, \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} e^{tB}C &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k t^k}{k!} \right) C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B^k C)t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(CA^k)t^k}{k!} = \\ &= C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = Ce^{tA}. \end{aligned}$$

- (ii) A primeira parte de (ii) segue imediatamente de (i).

A segunda parte de (ii) decorre de que tanto  $e^{tA}e^{tB}$  como  $e^{t(A+B)}$  são soluções da equação  $X' = (A+B)X$ ,  $X(0) = E$ . De fato:

$$\begin{aligned} (e^{tA}e^{tB})' &= A e^{tA}e^{tB} + e^{tA}B e^{tB} = A e^{tA}e^{tB} + B e^{tA}e^{tB} = \\ &= (A+B)e^{tA}e^{tB}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6. *Observação.* Trabalhando com exponenciais de matrizes é preciso lembrar que não é verdade, em geral, que  $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ . Também não é verdade, em geral, que  $e^{\int_0^t A(s)ds}$  seja uma solução da equação  $X' = A(t)X$ . Ver exercícios 16, 17, 18.

## 7. EXEMPLOS.

a) Seja  $J(\lambda) = \lambda E + E_1$ , onde  $E_1$  é a matriz nilpotente definida no exemplo 4. c). Temos  $\lambda E \cdot E_1 = E_1(\lambda E)$  portanto, a Proposição 5 implica em

$$\begin{aligned}
 e^{tJ(\lambda)} &= e^{t(\lambda E + E_1)} = e^{t\lambda E} \cdot e^{tE_1} = e^{t\lambda} [E + E_1 t + E_1^2 t^2/2! + \\
 &\quad + \dots + E_1^{n-1} t^{n-1}/(n-1)!] = \\
 &= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

b) Analogamente, para  $J(\alpha, \beta) = \text{diag}[I(\alpha, \beta), \dots, I(\alpha, \beta)] + E_2$ ,

$$\text{onde } I(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ e } E_2 = E_1^2, \text{ temos}$$

$$\text{diag}[I(\alpha, \beta), \dots, I(\alpha, \beta)]E_2 = E_2 \text{diag}[I(\alpha, \beta), \dots, I(\alpha, \beta)].$$

Portanto,

$$e^{tJ(\alpha, \beta)} = \text{diag}[e^{tI(\alpha, \beta)}, \dots, e^{tI(\alpha, \beta)}] \cdot e^{tE_2} = e^{t\alpha} \text{diag}[R(t, \beta), \dots, R(t, \beta)] e^{tE_2}$$

$$\text{onde } R(t, \beta) = \begin{pmatrix} \cos t\beta & \text{sen } t\beta \\ -\text{sen } t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix}. \text{ Ver exemplo 4 b).}$$

8. *Observação.* No exemplo 7.a) o valor próprio  $\lambda$  de  $J(\lambda)$  tem multiplicidade  $n$ , se  $J(\lambda)$  é  $n \times n$ . No exemplo 7.b), com  $\alpha$  e  $\beta$  reais,  $J(\alpha, \beta)$  tem os valores próprios  $\lambda = \alpha + i\beta$  e  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ , cada um com multiplicidade  $n/2$ , se  $J(\alpha, \beta)$  é  $n \times n$ .

As matrizes  $J(\lambda)$  e  $J(\alpha, \beta)$  são os blocos que aparecem na diagonal da forma de Jordan real de uma matriz, que será considerada com maiores detalhes na seção 5.

Para referência futura determinaremos o comportamento assintótico de suas exponenciais. Precisaremos do seguinte lema.

9. LEMA DE CÁLCULO. *Seja  $\varepsilon > 0$ . Então para todo  $k > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\varepsilon t} t^k = 0$ . Daí, para qualquer polinômio  $p(t)$ ,  $e^{-\varepsilon t} p(t)$  é limitado para  $t \geq 0$ .*

*Demonstração.* Segue da regra de l'Hospital aplicada várias vezes a  $\frac{s^{-k}}{e^{t/s}}$ , obtida da função  $e^{-\alpha} t^k$  após a mudança de variáveis  $t = \frac{1}{s}$  ■

10. PROPOSIÇÃO. Seja  $0 < \mu < -\alpha = -\operatorname{Re}(\lambda)$ . Então existe constante  $K \geq 1$  tal que

$$\begin{aligned} \|e^{tJ(\lambda)}\| &\leq K e^{-t\mu}, \quad t \geq 0 \\ \|e^{tJ(\alpha, \beta)}\| &\leq K e^{-t\mu}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Pelo exemplo 7.a temos, para  $\varepsilon = -\mu - \operatorname{Re}(\lambda) > 0$

$$\begin{aligned} \|e^{tJ(\lambda)}\| &\leq |e^{\lambda t}| \|E + E_1 t + \dots + \frac{E_1^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1}\| \leq \\ &\leq e^{-\mu t} [e^{-\alpha} (a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1})] \end{aligned}$$

onde  $a_0 = \|E\| = 1$  e  $a_i = \frac{\|E_1^i\|}{i!}$   $i = 1, \dots, n-1$ .

Pelo lema anterior existe  $K$  tal que para  $t \geq 0$ ,

$$e^{-\alpha} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \right] \leq K.$$

A prova do outro caso é similar. ■

11. LEMA. Seja  $A$  uma matriz complexa (respectivamente, real). Se  $\lambda$  é um valor próprio complexo (respectivamente, valor próprio real) de  $A$  e  $v$  é um vetor próprio correspondente, então  $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$  é uma solução da equação complexa (respectivamente, real) (1).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v. \text{ Logo,} \\ \varphi'(t) &= \lambda e^{\lambda t} v = A(e^{\lambda t} v) = A\varphi(t) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

12. PROPOSIÇÃO. Se a matriz complexa (respectivamente, real)  $A$  de ordem  $n \times n$  tem valores próprios complexos (respectivamente, valores próprios reais)  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são vetores (próprios) linearmente independentes, com  $Av_i = \lambda_i v_i$ , então a matriz  $V(t)$ , cuja coluna  $i$ -ésima,  $i = 1, \dots, n$ , é  $\varphi_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$ , é uma matriz fundamental de  $x' = Ax$ . Em particular:

$$e^{tA} = V(t) V^{-1}(0).$$

*Demonstração.*

Obvia a partir do lema 11 e da independência linear dos  $v_i = \varphi_i(0)$ . A última parte segue da unicidade da solução de  $X' = AX$ ,  $X(0) = E$ . ■

13. *Observação.* Sejam  $A$  uma matriz real,  $\lambda = \alpha + i\beta$  um valor próprio e  $v = v_1 + iv_2$  um vetor próprio de  $A$  correspondente a  $\lambda$ . Então,  $\bar{v} = v_1 - iv_2$  é um vetor próprio correspondente a  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ . Pois  $\bar{\lambda}\bar{v} = \overline{\lambda v} = A\bar{v}$ , por ser  $A$  real.

Pela proposição 12,  $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$  e  $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{v}$  são soluções linearmente independentes da equação (1), com  $A$  considerada complexa. Logo,

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2} [\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)] \text{ e } \varphi_2(t) = \frac{1}{2i} [\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)]$$

são soluções reais de (1), com  $\varphi_1(0) = v_1$ ,  $\varphi_2(0) = v_2$ , como equação real. Por serem  $v_1, v_2$  vetores de  $\mathbb{R}^n$  linearmente independentes segue-se que estas soluções são linearmente independentes. Os vetores  $v_1$  e  $v_2$  são linearmente independentes, pois, caso contrário teríamos  $v_2 = c v_1$ , donde  $v = (1 + ic) v_1$  e  $\bar{v} = (1 - ic) v_1$  resultariam linearmente dependentes em  $\mathbb{C}^n$ .

Por exemplo, se  $A$  é  $2 \times 2$  temos que

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\alpha t} [\cos \beta t v_1 - \text{sen } \beta t v_2] = \text{Re } \varphi(t), \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t} [\text{sen } \beta t v_1 + \cos \beta t v_2] = \text{Im } \varphi(t), \end{aligned}$$

é uma base de soluções de (1), onde  $v_1 + i v_2$  é vetor próprio associado a  $\lambda = \alpha + i\beta$ . No caso geral, onde  $A$  é  $n \times n$ , temos que toda solução cuja condição inicial pertence ao plano gerado por  $\{v_1, v_2\}$  de  $\mathbb{R}^n$  é combinação linear de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  e conseqüentemente está contida neste plano.

Aplicaremos 12 e 13 na determinação da configuração geométrica de todas as soluções dos sistemas lineares bidimensionais.

#### 4. Sistemas bidimensionais simples

Consideremos agora sistemas reais da forma

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases} \text{ com } a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Ou, equivalentemente equações lineares homogêneas do tipo

$$(1') \quad x' = Ax, \text{ com } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } \det A \neq 0$$

Estas equações são associadas a campos vetoriais lineares  $A$  em  $\mathbb{R}^2$ . A condição  $\det A \neq 0$  é equivalente a que a origem  $0 \in \mathbb{R}^2$  seja o único ponto onde  $A$  se anula ou seja o único ponto fixo do fluxo linear  $\varphi(t, x) = e^{tA}x$ . Este ponto fixo, ou todo o sistema, chama-se *simplex* se  $\det A \neq 0$ .

O polinômio característico de  $A$  é

$$\lambda^2 - (\text{traço } A)\lambda + \det A$$

Logo, os valores próprios são

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\text{traço } A \pm \sqrt{(\text{traço } A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

Distinguimos os seguintes casos:

- Os valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $A$  são reais e distintos. Necessariamente,  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ .
- Os valores próprios são complexos conjugados:  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ , com  $\beta \neq 0$ .
- Os valores próprios são reais e iguais:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ .

*Caso a.*

Sejam  $v_1, v_2$  vetores próprios correspondentes aos valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2$ . Denotemos por  $E_1, E_2$  as linhas geradas por estes vetores. A proposição 12 da seção 3 garante que toda solução de (1') (isto é, trajetória de  $A$ ) pode ser escrita na forma

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

*Caso a<sub>1</sub>.*  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , nó atrator

Toda trajetória tende a 0, quando  $t \rightarrow +\infty$ ; exceto a origem que permanece fixa, toda trajetória tende a  $\infty$ , quando  $t \rightarrow -\infty$ . Se  $c_1 \neq 0$ , a reta tangente à trajetória tende à linha  $E_1$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ .

De fato, se  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{c_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0$ , pois

$\lambda_2 - \lambda_1 < 0$ . Se  $c_1 = 0$ , as soluções são semiretas de  $E_2$ .

Na figura  $a_1$  está ilustrado o comportamento de todas as trajetórias. As setas indicam o sentido de percurso com  $t$  crescente.

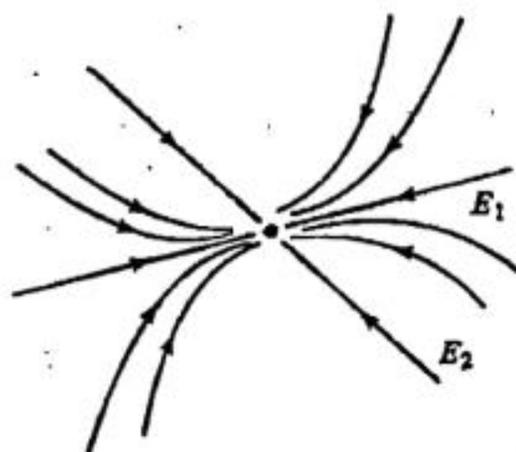


Figura  $a_1$  = nó atrator

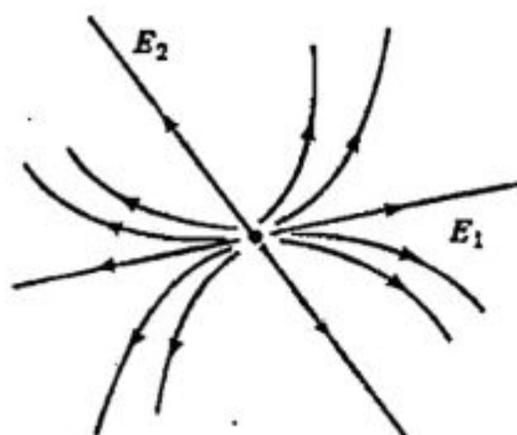


figura  $a_2$  = nó instável (fonte)

Caso  $a_2$ .  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ , nó instável (fonte)

Discussão similar ao caso anterior, mudando o sentido das setas. Ver figura  $a_2$ .

Caso  $a_3$ .  $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$ , sela

As trajetórias que passam por pontos de  $E_1(c_2 = 0)$  (ou de  $E_2(c_1 = 0)$ ) permanecem nesta linha e tendem para 0, quando  $t \rightarrow +\infty$  (ou  $t \rightarrow -\infty$ ). Se  $c_1, c_2 \neq 0$ , as soluções tendem para  $\infty$ , quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . A componente segundo  $E_1$  (respectivamente,  $E_2$ ) tende a 0 (respectivamente,  $\infty$ ), quando  $t \rightarrow +\infty$ , a componente segundo  $E_2$  (respectivamente,  $E_1$ ) tende a 0 (respectivamente,  $\infty$ ). Ver figura  $a_3$ .

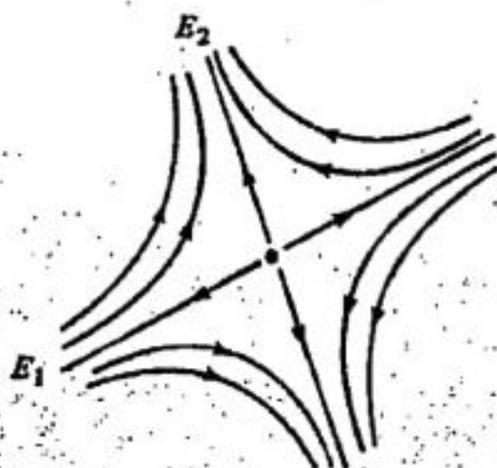


figura  $a_3$ , sela

**Caso b.**

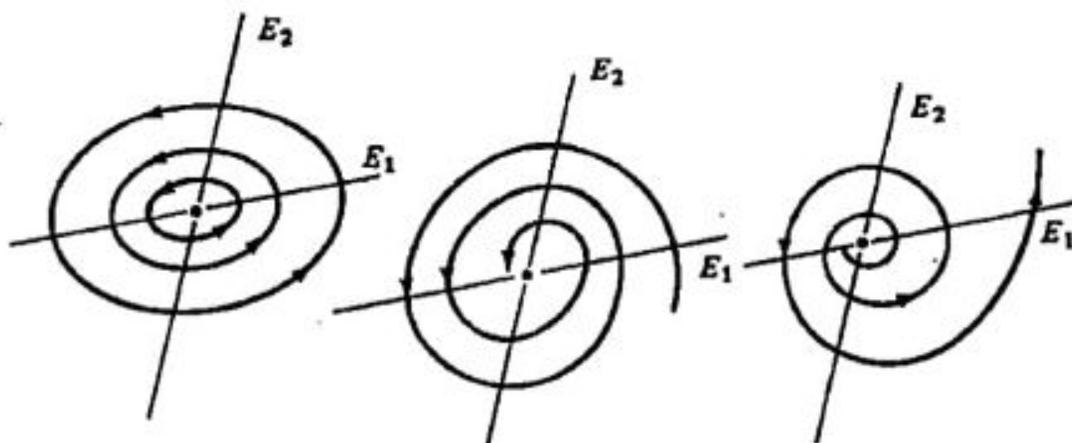
Da observação 13 da seção 3 segue que toda solução de (1) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t), \text{ onde} \\ \varphi_1(t) &= e^{\alpha t} [\cos \beta t v_1 - \text{sen } \beta t v_2] \text{ e} \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t} [\text{sen } \beta t v_1 + \cos \beta t v_2]\end{aligned}$$

Escrevemos  $c_1 = \rho \cos \omega$ ,  $c_2 = \rho \text{sen } \omega$ . Temos  $\varphi(t) = e^{\alpha t} \rho [(\cos \omega \cos \beta t + \text{sen } \omega \text{sen } \beta t) v_1 + (\text{sen } \omega \cos \beta t - \cos \omega \text{sen } \beta t) v_2] = e^{\alpha t} \rho [\cos(\omega - \beta t) v_1 + \text{sen}(\omega - \beta t) v_2]$ .

**Caso  $b_1$ .  $\alpha = 0$ , centro**

Todas as soluções, exceto a solução nula, são elipses. Ver figura  $b_1$ .

Figura  $b_1$  centroFigura  $b_2$  foco estávelFigura  $b_3$  foco instável**Caso  $b_2$ .  $\alpha < 0$ , foco atrator**

Toda solução tende para 0 espiralando em torno da origem quando  $t \rightarrow +\infty$ . Isto é,  $|\varphi(t)| \rightarrow 0$  e  $\omega - \beta t$ , ângulo entre  $\varphi(t)$  e  $E_1$ , tende para  $+\infty$  ou  $-\infty$ , segundo  $\beta$  seja negativo ou positivo. Ver figura  $b_2$  para o caso em que  $\beta < 0$ .

**Caso  $b_3$ .  $\alpha > 0$ , foco instável**

Toda solução tende para 0 espiralando em torno da origem, quando  $t \rightarrow -\infty$ . Ver figura  $b_3$ .

**Caso c. nó impróprio**

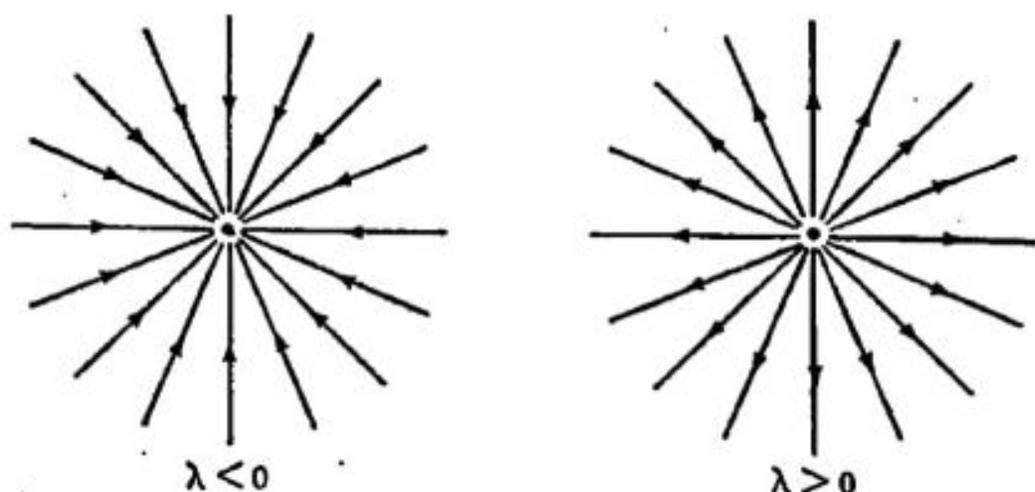
Distinguimos dois casos:

**Caso  $c_1$ .**

Núcleo de  $A - \lambda E$  é bidimensional. Em outros termos,  $\lambda$  tem vetores próprios  $v_1, v_2$  linearmente independentes. Pela proposição 12 da seção 3 toda solução de (1) pode ser escrita na forma

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}(c_1 v_1 + c_2 v_2)$$

Todas as órbitas, exceto a solução nula, são semiretas. Ver figura  $c_1$ .

Figura  $c_1$ **Caso  $c_2$ .**

Núcleo de  $A - \lambda I = E_1$  é unidimensional. Seja  $v$  um gerador de  $E_1$  e  $\omega$  um vetor não colinear com  $v$ . A matriz do operador  $x \rightarrow Ax$  na base  $\{v, \omega\}$  é da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0,$$

pois  $Av = \lambda v$ ,  $A\omega = \mu\omega + \alpha v$ . Os valores próprios desta matriz são  $\lambda$  e  $\mu$ . Logo,  $\lambda = \mu$ . Definindo

$$v_1 = \alpha v \text{ e } v_2 = \omega, \text{ temos} \\ Av_1 = \lambda v_1, \quad Av_2 = \lambda v_2 + v_1$$

Usando estas propriedades da base  $\{v_1, v_2\}$ , verifica-se, por substituição direta, que

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}[(c_1 + t c_2)v_1 + c_2 v_2]$$

é a solução de (1) por  $\varphi(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2$ .

As órbitas que passam por  $E_1 (c_2 = 0)$ , exceto a origem que é ponto fixo, são semiretas. Para toda outra órbita, ( $c_2 \neq 0$ ) a sua reta tangente tende a  $E_1$ , quando  $t \rightarrow \pm \infty$ , pois

$$\frac{c_2 e^{\lambda t}}{(c_1 + t c_2) e^{\lambda t}} = \frac{1}{\frac{c_1}{c_2} + t} \rightarrow 0$$

Se  $\lambda < 0$  (respectivamente,  $\lambda > 0$ ), toda trajetória tende a 0, quando  $t \rightarrow +\infty$  (respectivamente,  $-\infty$ ). Ver figura  $c_2$ .

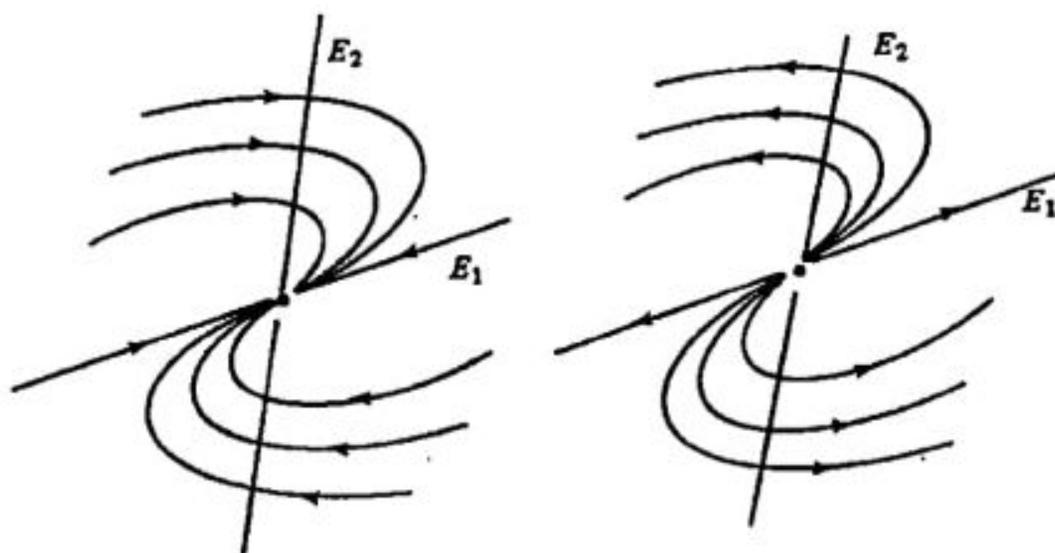


Figura  $c_2$

## 5. Conjugação de sistemas lineares

### 1. INTRODUÇÃO.

Como em toda estrutura matemática, nas equações diferenciais e nos fluxos ou sistemas dinâmicos, levanta-se o problema de comparar dois objetos com a mesma estrutura, identificando-os se tiverem as mesmas propriedades essenciais da estrutura. Assim, na Álgebra, dois grupos são considerados equivalentes se eles são isomorfos; na Topologia, dois espaços topológicos são identificados se são homeomorfos. Estas noções de equivalência ou identificação revelam o que há de essencial da estrutura nos dois objetos comparados. No primeiro caso o isomorfismo preserva a operação do grupo, no segundo caso o homeomorfismo preserva os conjuntos abertos dos espaços. Sendo a operação, na Álgebra, e os abertos, na Topologia,

os elementos essenciais da estrutura respectiva, os conceitos de isomorfismo e homeomorfismo são satisfatórios para a comparação de dois objetos.

No caso das equações diferenciais ou fluxos, é inegável que as soluções ou trajetórias são os elementos mais relevantes. Portanto é de se esperar que nesta estrutura qualquer noção de equivalência preserve, em alguma forma, as soluções ou trajetórias. Nesta seção trataremos dos sistemas de equações lineares ou fluxos lineares. A questão geral, para o caso não linear, é abordada no Capítulo VI.

2. DEFINIÇÃO. Sejam  $x \rightarrow Ax$  e  $x \rightarrow Bx$  campos vetoriais lineares em  $\mathbb{R}^n$ . Estes campos, seus fluxos  $\varphi(t, x) = e^{At}x$ ,  $\psi(t, x) = e^{Bt}x$  ou seus sistemas de equações lineares associados

$$(1) x' = Ax \text{ e } (2) x' = Bx,$$

são ditos *conjugados* se existe uma bijeção  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , chamada de *conjugação*, tal que para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  tem-se

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)).$$

Se  $h$  é, respectivamente, um isomorfismo linear,  $C^r$ -difeomorfismo, homeomorfismo, diz-se que (1) e (2) são *linearmente conjugados*,  *$C^r$ -diferenciavelmente conjugados*, *topologicamente conjugados*.

3. *Observação*. Claramente, a relação de conjugação é uma relação de equivalência entre sistemas lineares.

#### 4. EXEMPLOS.

1) Seja  $A$   $2 \times 2$  com valores próprios reais  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e vetores próprios  $v_1, v_2$ . Então  $h(x = (x_1, x_2)) = x_1 v_1 + x_2 v_2$  define uma conjugação linear entre  $x' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x$  e  $x' = Ax$ . Este é o caso a) da seção 4.

Analogamente, nos casos b) e c) da seção 4., resulta que os sistemas

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} x \text{ e } x' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} x$$

são conjugados linearmente ao sistema  $x' = Ax$ , onde  $A$  tem respectivamente valores próprios  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  e  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  com  $A - \lambda E \neq 0$ .

O leitor verificará que  $h(x_1, x_2) = x_1 v_1 + x_2 v_2$  é uma conjugação linear, onde  $v_1, v_2$  são os vetores definidos em 4, caso a.

2) Um centro não pode ser conjugado a uma sela. Pois teremos que  $h(\varphi(2\pi/\beta, x)) = \psi(2\pi/\beta, h(x)) = h(x)$  devido a que  $\varphi(2\pi/\beta, x) = x$ , isto é, todas as trajetórias do centro, fora da origem, são periódicas de período  $2\pi/\beta$ . Contradição pois a sela não tem trajetórias periódicas, isto é  $\psi(t_1, y) \neq \psi(t_2, y)$  se  $t_1 \neq t_2$  e  $y \neq 0$ .

3)  $h(x) \begin{cases} = x^\lambda, x > 0 \\ = 0, x = 0 \\ = -(-x)^\lambda, x < 0 \end{cases}$  é uma conjugação topológica

entre  $x' = x$  e  $x' = \lambda x$ ,  $\lambda > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

De fato, para  $x > 0$ ,  $h(e^t x) = e^{\lambda t} x^\lambda = e^{\lambda t} h(x)$ ; para  $x = 0$  é óbvio; e para  $x < 0$  é similar. É claro que se  $\lambda \neq 1$ ,  $h$  não é difeomorfismo.

Da proposição 8 resultará que se  $\lambda \neq 1$ , não existe nenhuma conjugação diferenciável entre estes sistemas.

**5. PROPOSIÇÃO.** A transformação linear  $h: x \rightarrow Cx$  é uma conjugação linear entre (1) e (2) se e somente se a matriz  $C$  satisfaz a  $CA = BC$ . Em particular (1) e (2) são linearmente conjugados se e somente se as matrizes  $A$  e  $B$  são similares.

*Demonstração.* Se  $CA = BC$ , a proposição 5 da seção 3 implica que  $Ce^{tA}x = e^{tB}Cx$ , para todo  $x$ . Isto é  $h(x) = Cx$  é uma conjugação linear entre (1) e (2).

Se  $h(x) = Cx$  satisfaz a  $Ce^{tA}x = e^{tB}Cx$ , derivando com respeito a  $t$  em  $t = 0$  resulta

$$CAe^{tA}x \Big|_{t=0} = CAx = B e^{tB}Cx \Big|_{t=0} = BCx. \text{ Logo } CA = BC. \blacksquare$$

**6. Observação.** É claro que a relação de conjugação linear é uma relação de equivalência entre sistemas lineares. Segundo a proposição anterior, as classes de conjugação linear dos sistemas lineares estão determinadas pelas classes de similaridade das matrizes correspondentes. Consequentemente o problema de determinar a classe de conjugação linear de um sistema reduz-se ao seguinte Teorema da Álgebra Linear, cuja demonstração pode ser obtida de Hoffman-Kunze [1971].

## 7. TEOREMA. (Forma Canônica de Jordan).

*Caso Complexo.* Seja  $A$  uma matriz complexa.

Existe uma matriz complexa  $C$ , não singular, tal que  $J = C^{-1}AC = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_k)$ , onde cada  $J_i$  é da forma  $J(\lambda) = \lambda E + E_1$ , definido em 7 da seção 3, e  $\lambda$  é um valor próprio de  $A$ . A soma das ordens dos blocos da forma  $J(\lambda)$  é igual à multiplicidade de  $\lambda$  como raiz do polinômio característico de  $A$ .

A matriz  $J$  chama-se forma de Jordan de  $A$  e é única, salvo a ordem dos blocos  $J_i$ . Finalmente duas matrizes são similares se e somente se elas tem a mesma forma de Jordan.

*Caso real.* Seja  $A$  uma matriz real.

Existe uma matriz real  $C$ , não singular, tal que  $J = C^{-1}AC = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_k)$  onde cada  $J_i$  é da forma  $J(\lambda)$  ou  $J(\alpha, \beta)$  definidos em 7 da seção 3, onde  $\lambda$  é valor próprio real e  $\alpha + i\beta$  é valor próprio complexo.

A soma das ordens dos blocos da forma  $J(\lambda)$  é igual à multiplicidade de  $\lambda$  como raiz do polinômio característico de  $A$ . A soma das ordens dos blocos da forma  $J(\alpha, \beta)$  é igual ao dobro da multiplicidade de  $\alpha + i\beta$  como raiz do polinômio característico de  $A$ . A matriz  $J$  chama-se forma canônica real de  $A$  e é única, salvo a ordem dos blocos e o sinal da parte imaginária  $\beta$  das raízes complexas de  $A$ . Duas matrizes reais são similares se e somente se tem a mesma forma canônica real.

8. PROPOSIÇÃO. Os sistemas (1) e (2) são  $C^1$ -diferenciavelmente conjugados se e somente se  $A$  e  $B$  são similares. Em particular dois sistemas são  $C^1$ -diferenciavelmente conjugados se e somente se são linearmente conjugados.

*Demonstração.* Se  $A$  e  $B$  são similares, a Proposição 5 implica que (1) e (2) são linearmente conjugados, portanto  $C^1$ -diferenciavelmente conjugados.

Seja  $h$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  tal que  $h(e^{tA}x) = e^{tB}h(x)$ , para todo  $t$  e  $x$ . Suponhamos inicialmente que  $h(0) = 0$ . Derivando com respeito a  $t$ , em  $t = 0$ , temos  $Dh(x)Ax = Dh(e^{tA}x)Ax|_{t=0} = B e^{tB}h(x)|_{t=0} = B h(x)$ , para todo  $x$ . Em particular para  $x = \lambda y$ ,

$Dh(\lambda y)Ay = B \frac{h(\lambda y)}{\lambda}$ . Quando  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $Dh(\lambda y) \rightarrow Dh(0)$  por continuidade de  $Dh$ , e também  $\frac{h(\lambda y)}{\lambda} \rightarrow Dh(0)y$ . Logo  $Dh(0)A = B Dh(0)$ .

Se  $h(0) = c \neq 0$ ,  $k: x \rightarrow x - c$  é uma conjugação  $C^\infty$  diferenciável de (2) com ele próprio. De fato,  $e^{tB}c = e^{tB}h(0) = h(e^{tA}0) = h(0) = c$ . Logo  $k(e^{tB}x) = e^{tB}x - c = e^{tB}x - e^{tB}c = e^{tB}(x - c) = e^{tB}k(x)$ . Portanto,  $h_1 = k \circ h$  é uma conjugação  $C^1$ -diferenciável entre (1) e (2) tal que  $h_1(0) = 0$ . A última afirmativa decorre da Proposição 5. ■

**9. DEFINIÇÃO.** Um sistema linear  $x' = Ax$  (ou a origem de  $\mathbb{R}^n$ ) chama-se atrator (do sistema) se para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $e^{tA}x \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

É claro que se  $h$  é uma conjugação topológica entre um atrator  $x' = Ax$ , é um sistema  $x' = Bx$ , então este último também é um atrator. De fato,  $h(e^{tA}h^{-1}(x)) = e^{tB}x$ , logo para todo  $x$ ,  $e^{tB}x \rightarrow h(0)$ , quando  $t \rightarrow \infty$ ; mas  $h(0) = 0$  pois  $e^{tB}0 = 0$ .

O seguinte teorema caracteriza os sistemas lineares atratores.

**10. TEOREMA.** As seguintes proposições são equivalentes

- 1) O sistema  $x' = Ax$  é um atrator.
- 2) Todos os valores próprios de  $A$  têm parte real negativa.
- 3) Existem  $\mu > 0$  e  $K \geq 1$  tais que  $|e^{tA}x| \leq Ke^{-\mu t}|x|$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \geq 0$ .
- 4) O sistema  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado a  $x' = -x$ .

*Demonstração.* O sistema  $x' = -x$  é um atrator pois  $e^{-t}x \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Logo (4)  $\rightarrow$  (1), pela observação anterior.

Suponha que  $\lambda$  é um valor próprio de  $A$  com parte real não negativa. Se  $\lambda$  é real e  $v$  um vetor próprio,  $|e^{tA}v| = e^{\lambda t}|v|$  não tende a zero. Se  $\lambda = \alpha + i\beta$  é complexo, por 13 da seção 3,  $|e^{tA}v_1| = e^{\alpha t}|\cos t\beta v_1 - \sin t\beta v_2|$ , que também não tende a zero se  $\alpha \geq 0$ . Logo (1)  $\rightarrow$  (2).

Notemos que 3) não depende da norma  $||$  em  $\mathbb{R}^n$  pois se

$$\alpha ||x|| \leq ||e^{tA}x|| \leq \beta ||x||, \quad ||e^{tA}x|| \leq \beta |e^{tA}x| \leq \beta K e^{-\mu t} |x| \leq \beta/\alpha K e^{-\mu t} ||x||, \quad \text{com } \beta/\alpha K \geq 1.$$

Observemos que 3) não depende da classe de similaridade de  $A$ . De fato, se  $C$  é uma matriz real ou complexa invertível, temos

$$\begin{aligned} |e^{tC^{-1}AC}x| &= |C^{-1}e^{tA}Cx| \leq |C^{-1}| |e^{tA}Cx| \leq |C^{-1}|Ke^{-\mu t}|C| |x| = \\ &= K_1 e^{-\mu t} |x|, \end{aligned}$$

onde  $K_1 = |C^{-1}| |C|K$ . Verifique que  $K_1 \geq 1$ . Portanto na prova de (2)  $\rightarrow$  (3) é suficiente supor que  $A$  está na forma de Jordan complexa e que  $|x|$  é o sup dos valores absolutos das coordenadas de  $x$ . Então  $A = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_k)$ ,  $J_i = \lambda_i E + E_1$ . Seja  $\mu < \text{Re}\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Por 10 da seção 3 temos

$$\begin{aligned} |e^{At}x| &= |(e^{J_1 t}x_1, e^{J_2 t}x_2, \dots, e^{J_k t}x_k)| \leq \\ &\leq \sup_{i=1, \dots, k} K_i e^{-\mu t} |x_i| \leq K e^{-\mu t} |x|, \end{aligned}$$

onde  $K = \sup K_i$  e  $|x| = \sup \{|x_i|\}$  pois trabalhamos com a norma do sup. Isto mostra que (2)  $\rightarrow$  (3).

Demonstremos que (3)  $\rightarrow$  (4).

Seja  $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$  e  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ .

Destaquemos o seguinte:

i. A forma quadrática  $q(x) = \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle dt$  é definida positiva e

$$(a) \quad \frac{dq}{dt}(e^{tA}x) = -\langle e^{tA}x, e^{tA}x \rangle,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \in \mathbb{R}$ .

A convergência da integral imprópria é consequência da desigualdade em (3). Por outro lado,

$$\begin{aligned} q(e^{tA}x) &= \int_0^\infty \langle e^{uA}e^{tA}x, e^{uA}e^{tA}x \rangle du = \\ &= \int_0^\infty \langle e^{(u+t)A}x, e^{(u+t)A}x \rangle du. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis  $u + t = v$ , temos

$$q(e^{tA}x) = \int_t^\infty \langle e^{vA}x, e^{vA}x \rangle dv;$$

derivando resulta a expressão (a).

ii. Para toda forma quadrática  $q$ , definida positiva, existem números positivos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha \|x\|^2 \leq q(x) \leq \beta \|x\|^2$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Verifica-se este fato tomando  $\alpha = \min \{q(x); \|x\| = 1\}$  e

$$\beta = \max \{q(x); \|x\| = 1\}.$$

iii. Para todo  $x \neq 0$ , a trajetória  $e^{tA}x$  intercepta todos os esferoides  $q(x) = r > 0$ .

De fato, por (a) e, ii

$$-\frac{1}{\alpha} \leq \frac{d}{dt} q(e^{tA}x) / q(e^{tA}x) \leq -\frac{1}{\beta}$$

Logo,

$$-\frac{t}{\alpha} \leq \log q(e^{tA}x) - \log q(x) \leq -\frac{t}{\beta}$$

Portanto

$$(b) \quad e^{-t/\alpha} q(x) \leq q(e^{tA}x) \leq e^{-t/\beta} q(x)$$

e daí, quando  $t$  percorre  $\mathbb{R}$ ,  $q(e^{tA}x)$  percorre todo o eixo positivo.

Note-se que, em virtude de (a),  $e^{tA}x$  corta cada esferoide uma única vez, apontando para o seu interior.

Se  $x \neq 0$ , denotemos por  $t_x$  o (único) número real tal que  $q(e^{t_x A}x) = 1$ .

iv. A função  $t_x$  é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .

Este fato decorre do Teorema da Função Implícita aplicado à equação  $q(e^{tA}x) = 1$ , pois por (a)  $\frac{\partial}{\partial t} q(e^{tA}x) \neq 0$ , se  $x \neq 0$ .

Passamos a definir a conjugação topológica  $h$ , da seguinte maneira:

$$h(0) = 0, \text{ e } h(x) = e^{t_x A} x, \text{ se } x \neq 0.$$

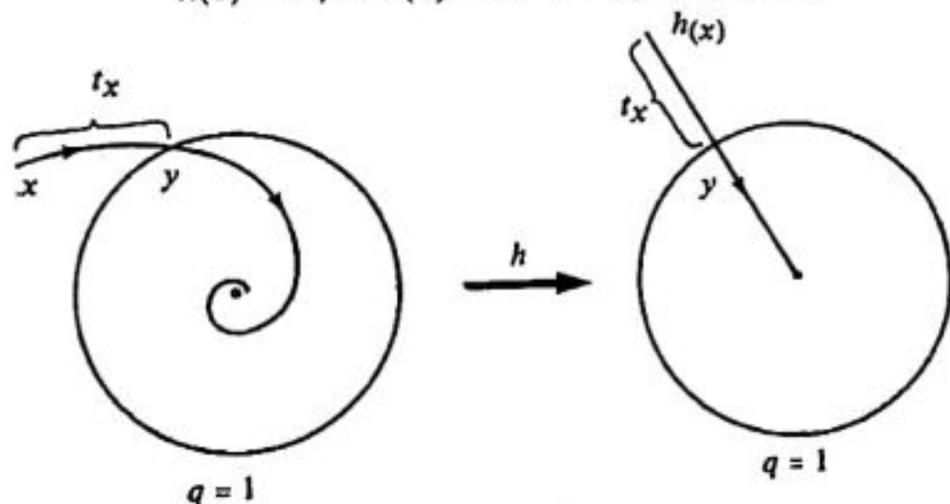


Figura 1

É claro por iv que  $h|_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$  sobre  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . Provemos a continuidade de  $h$  em 0.

Por ii temos

$$\|h(x)\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} (q(e^{t_x A}x))^{1/2} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/2} e^{t_x}$$

pois  $q(e^{t_x A}x) = 1$ .

De (b) obtemos

$$e^{-t\alpha/\beta} q(x) \geq q(e^{tA}x) = 1$$

e, daí

$$e^{t\alpha} \leq [q(x)]^\beta$$

Logo,

$$\|h(x)\| \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\beta} [q(x)]^\beta$$

e claramente, se  $x \rightarrow 0$ ,  $h(x) \rightarrow 0$ .

A continuidade de  $h^{-1}$  resulta da continuidade de  $h$  e do fato de  $h|_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$  ser difeomorfismo sobre  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , usando argumento de compacidade.

Verifiquemos agora que  $h$  é conjugação:

$$h(e^{tA}x) = h(e^{(t-t_0)A} e^{t_0A}x) = e^{-(t-t_0)\alpha} e^{t_0A}x = e^{-t\alpha} (e^{t_0\alpha} e^{t_0A}x) = e^{-t\alpha} h(x).$$

No passo do segundo para o terceiro termo destas igualdades usamos o fato que para  $y = e^{t_0A}x$  tem-se  $t_y = -(t - t_0)$ . ■

11. DEFINIÇÃO. Um sistema linear  $x' = Ax$  (ou a origem  $0 \in \mathbb{R}^n$ ) chama-se *fonte* se para todo  $x \neq 0$ ,  $|e^{tA}x| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

12. TEOREMA As seguintes condições são equivalentes:

- 1)  $x' = Ax$  é uma fonte
- 2) Todos os valores próprios de  $A$  têm parte real positiva.
- 3) Existem números  $\mu > 0$  e  $K \geq 1$  tais que

$$|e^{tA}x| \geq K^{-1} e^{\mu t} |x|, \text{ se } t \geq 0.$$

- 4)  $x' = Ax$  é topologicamente conjugado com o sistema  $x' = x$ .

*Demonstração.* A demonstração é imediata a partir do Teorema 10 e da observação seguinte:

$x' = Ax$  é topologicamente conjugado a  $x' = Bx$  se e somente se  $x' = (-A)x$  é topologicamente conjugado a  $x' = (-B)x$ . De fato,  $h(e^{tA}x) = h(e^{t(-A)}(-A)x) = e^{-t(-\alpha)} h(x) = e^{t\alpha} h(x)$ .

Logo, se  $h$  conjugua  $x' = -Ax$  com  $x' = -Bx$ , também conjugua  $x' = Ax$  com  $x' = Bx$ .

Assim 4) implica que  $x' = (-A)x$  é conjugado topologicamente a  $x' = -x$ , portanto os valores próprios de  $-A$  têm parte real negativa, donde segue 2).

Aplicando o Teorema 10 a  $-A$  temos que 2) implica que

$$|x| = |e^{t(-A)}e^{tA}x| \leq K e^{-\mu t} |e^{tA}x|,$$

donde segue 3).

Obviamente 3)  $\rightarrow$  1). Deixamos a cargo do leitor a prova de 1)  $\rightarrow$  2). A implicação 2)  $\rightarrow$  4) decorre do Teorema 10 aplicado a  $-A$ . ■

## 6. Classificação Topológica dos Sistemas Lineares Hiperbólicos

1. DEFINIÇÃO. Um sistema linear  $x' = Ax$  (ou o campo vetorial linear  $x \rightarrow Ax$ , ou a origem  $0 \in \mathbb{R}^n$ ) chama-se hiperbólico se todos os valores próprios de  $A$  têm parte real diferente de zero. O número  $s = s(A)$  de valores próprios, contando suas multiplicidades, que têm parte real negativa, chama-se índice de estabilidade do sistema.

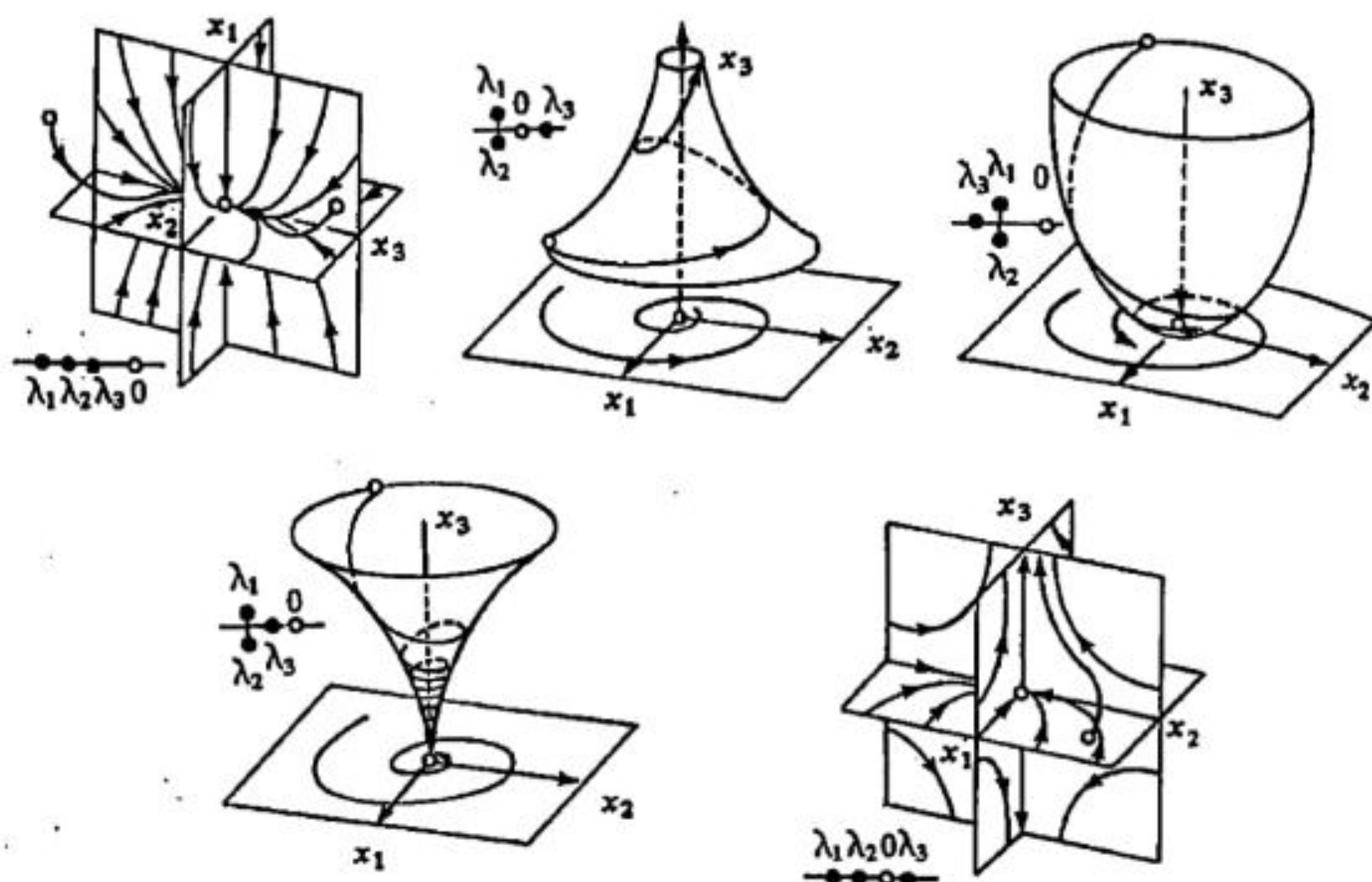
Note-se que esta definição depende apenas da classe de similaridade da matriz  $A$ , ou equivalentemente da classe de conjugação linear do sistema.

2. Exemplo. Dos sistemas bidimensionais simples considerados na seção 4, todos são hiperbólicos, exceto o centro. O índice de estabilidade da sela é 1, do foco e nó atratores é 2, do foco e nó instáveis é 0.

Em geral o índice de estabilidade de um atrator é  $n$  e de uma fonte é 0.

As figuras seguintes mostram o retrato de fase de alguns sistemas lineares hiperbólicos em  $\mathbb{R}^3$ . O leitor justificará analiticamente estas configurações com base nos dados sobre os valores próprios que nelas aparecem.

3. DEFINIÇÃO. Chama-se *subespaço estável* de  $x' = Ax$  o subespaço maximal  $E^s$ , invariante por  $A$  (i.e.  $Av \in E^s$ ,  $v \in E^s$ ) tal que  $A|_{E^s}$  tem todos seus valores próprios com parte real negativa. Analogamente define-se o subespaço instável de  $x' = Ax$  como o sub-

Figura 1 Sistemas lineares hiperbólicos em  $\mathbb{R}^3$ .

espaço maximal invariante  $E^u$  onde  $A|_{E^u}$  tem todos seus valores próprios com parte real positiva.

Para um atrator  $E^s = \mathbb{R}^n$  e  $E^u = \{0\}$ ; para uma fonte  $E^s = \{0\}$ ,  $E^u = \mathbb{R}^n$ .

**4 PROPOSIÇÃO.** Seja  $x' = Ax$  um sistema linear hiperbólico de índice de estabilidade  $\beta$ .

- 1)  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ , e  $E^s$  e  $E^u$  são invariantes pelo sistema, isto é, para todo  $x \in E^i$ ,  $i = s, u$ , a trajetória do sistema,  $e^{tA}x$ , pertence a  $E^i$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . A dimensão de  $E^s$  é igual a  $\beta$ .
- 2) Existem  $\mu > 0$  e  $K \geq 1$  tais que
  - a)  $|e^{tA}x| \leq K e^{-\mu t} |x|$ , para  $x \in E^s$  e  $t \geq 0$ .
  - b)  $|e^{tA}x| \leq K e^{\mu t} |x|$ , para  $x \in E^u$  e  $t \leq 0$ .

*Demonstração.* A demonstração é imediata a partir das seguintes observações.

*Observação.* i) Se  $h$  é uma conjugação linear entre dois sistemas  $x' = Ax$  e  $x' = Bx$ , cujos subespaços estáveis são  $E^s$  e  $E^s_1$ , então  $h(E^s) = E^s_1$ .

Imediato pois  $A|E^s$  e  $B|h(E^s)$  resultam similares, e portanto têm os mesmos valores próprios. Verificar este fato.  
Analogamente para o subespaço  $E^u$ .

*Observação.* ii) A conclusão 2) não depende da norma  $|\cdot|$  nem da classe de similaridade da matriz  $A$ .

A prova desta afirmativa é similar à dada em 10 da seção 5 e fica a cargo do leitor.

*Observação.* iii) Se  $x' = Ax$  é um sistema linear hiperbólico de índice de estabilidade  $s$ , então ele é linearmente conjugado a um sistema da forma

$$(*) \quad \begin{cases} x'_1 = A_1 x_1, & x_1 \in \mathbb{R}^s \\ x'_2 = A_2 x_2, & x_2 \in \mathbb{R}^{n-s} \end{cases}$$

onde os valores próprios de  $A_1$  têm parte real menor do que 0, e os valores próprios de  $A_2$  têm parte real maior do que 0.

Para verificar este fato é suficiente conjugar  $A$  com sua forma de Jordan real  $J$ , na qual aparecem agrupados na parte superior da diagonal os blocos correspondentes às raízes de parte real negativa. O bloco de ordem  $s \times s$  da esquina superior esquerda de  $J$  é  $A_1$ ; o bloco de ordem  $(n-s) \times (n-s)$  da esquina inferior direita é  $A_2$ .

Com base nas observações, é suficiente demonstrar a Proposição 4 para sistemas da forma (\*). Para estes sistemas,  $E^s = \mathbb{R}^s \times \{0 \in \mathbb{R}^{n-s}\}$  e  $E^u = \{0 \in \mathbb{R}^s\} \times \mathbb{R}^{n-s}$ . Donde resulta 1). A parte 2) resulta de que  $x'_1 = A_1 x_1$  é um atrator e  $x'_2 = A_2 x_2$  é uma fonte, aplicando os teoremas 10 e 12 da seção 5 a  $A_1$  e  $A_2$ . ■

**5. COROLÁRIO.** Nas hipóteses da proposição 4, temos

$$\begin{aligned} \text{a')} & \quad |e^{tA}x| \geq K^{-1} e^{\mu t} |x|, \text{ para toda } x \in E^u \text{ e } t \geq 0 \\ \text{b')} & \quad |e^{tA}x| \geq K^{-1} e^{-\mu t} |x|, \text{ para todo } x \in E^s \text{ e } t \leq 0 \end{aligned}$$

*Demonstração.* Pela desigualdade b) de 4.2, aplicada a  $\tau = -t \leq 0$  e  $\bar{x} = e^{tA}x \in E^u$ , temos

$$|x| = |e^{(\tau+t)A}x| = |e^{\tau A}\bar{x}| \leq K e^{\mu \tau} |\bar{x}| = K e^{-\mu t} |e^{tA}x|$$

Logo

$$|e^{tA}x| \geq K^{-1} e^{\mu t} |x|.$$

Isto prova a'); b') é similar. ■

*Observação.* A desigualdade a) da proposição 4.2 significa que todas as trajetórias que passam por pontos de  $E^s$  tendem a 0 exponencialmente quando  $t \rightarrow \infty$ .

A desigualdade b') de 5 implica que estas mesmas trajetórias, exceto a nula, se afastam exponencialmente de 0 quando  $t \rightarrow -\infty$ .

Em outras palavras, o comportamento de um sistema hiperbólico em  $E^s$  é análogo ao comportamento de um atrator. Considerações análogas são válidas para  $E^u$  onde o comportamento das trajetórias é similar ao caso de uma fonte.

Finalmente, as trajetórias que passam por pontos  $x$  fora de  $E^s \cup E^u$ , se comportam em forma similar às hipérboles: as suas componentes segundo  $E^s$  tendem a 0, enquanto as suas componentes segundo  $E^u$  tendem a  $\infty$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ ; quando  $t \rightarrow -\infty$  as componentes segundo  $E^s$  tendem a  $\infty$ , e as componentes segundo  $E^u$  tendem a zero.

Isto decorre de que  $e^{At}x = e^{At}x_s + e^{At}x_u$  onde  $x_i \in E^i$ ,  $i = s, u$ , e  $x = x_s + x_u$ .

6. LEMA. *Seja  $x' = Ax$  um sistema hiperbólico. Um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  pertence a  $E^s$  se e somente se  $e^{tA}x$  é limitado para  $t \geq 0$ . Um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  pertence a  $E^u$  se e somente se  $e^{tA}x$  é limitado para  $t \leq 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $x = x_s + x_u$  com  $x_i \in E^i$ ,  $i = s, u$ , donde  $e^{tA}x = e^{tA}x_s + e^{tA}x_u$ . Em virtude de a') do Corolário 5, temos

$$|e^{tA}x| \geq |e^{tA}x_u| - |e^{tA}x_s| \geq K^{-1}e^{\mu t} |x_u| - |e^{tA}x_s|.$$

O último termo tende para  $\infty$  quando  $t \rightarrow \infty$  se e somente se  $|x_u| \neq 0$ , pois  $|e^{tA}x_s| \rightarrow 0$ , logo  $e^{tA}x$  é limitado para  $t \geq 0$  se e somente se  $x \in E^s$  (i.e.  $x_u = 0$ ). Analogamente para  $t \leq 0$  e  $E^u$ . ■

7. LEMA. *Se  $x'_i = A_i x_i$  é topologicamente conjugado a  $x'_i = B_i x_i$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Então*

$$(\alpha) \quad \begin{cases} x'_1 = A_1 x_1 \\ x'_2 = A_2 x_2 \end{cases}$$

*é topologicamente conjugado a*

$$(\beta) \quad \begin{cases} x'_1 = B_1 x_1 \\ x'_2 = B_2 x_2 \end{cases}.$$

*Demonstração.* Seja  $h_i$  uma conjugação topológica entre  $x'_i = A_i x_i$  e  $x'_i = B_i x_i$ ,  $i = 1, 2$ . Então  $h = (h_1, h_2)$  é uma conjugação topológica entre  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ . De fato:  $h(e^{tA_1}x_1, e^{tA_2}x_2) = (h_1(e^{tA_1}x_1), h_2(e^{tA_2}x_2)) = (e^{tB_1}h_1(x_1), e^{tB_2}h_2(x_2)) = (e^{tB_1}, e^{tB_2})(h(x_1), h(x_2))$ . ■

8. TEOREMA. *Dois sistemas lineares hiperbólicos  $x' = Ax$  e  $x' = Bx$  em  $\mathbb{R}^n$  são topologicamente conjugados se e somente se ambos têm o mesmo índice de estabilidade.*

*Demonstração.* Se  $x' = Ax$  tem índice de estabilidade  $s$ , ele é conjugado linearmente ao sistema (\*) da observação (iii) de 4. Em virtude do Lema 7, o sistema (\*) e conseqüentemente o sistema  $x' = Ax$  é conjugado topologicamente ao sistema

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1, & x_1 \in \mathbb{R}^s \\ x'_2 = x_2, & x_2 \in \mathbb{R}^{n-s} \end{cases}$$

Ver Teoremas 10 e 12.

Disto resulta que dois sistemas hiperbólicos de índice  $s$  são topologicamente conjugados entre si.

Por outro lado, se  $h$  é uma conjugação topológica entre dois sistemas hiperbólicos  $x' = Ax$  e  $x' = Bx$  em  $\mathbb{R}^n$ , temos que  $h(E_A^s) = E_B^s$ , onde  $E_i^s$  denota o subespaço estável de  $x' = ix$ ,  $i = A, B$ . De fato:

$$e^{tB}h(x) = h(e^{tA}x), \text{ logo se } x \in E_A^s \text{ e } t \rightarrow \infty, \text{ temos}$$

por continuidade que  $h(e^{tA}x) \rightarrow h(0) = 0$ . Portanto,  $h(x) \in E_B^s$ , pelo lema 6.

O Teorema da Invariância da Dimensão de Brouwer implica que  $\dim E_B^s = \dim E_A^s$ . A demonstração deste teorema foge ao caráter deste livro. Daremos porém uma idéia dela.

A Teoria da Homologia associa a cada espaço topológico  $X$  uma seqüência de grupos  $H_i(X)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , e a cada homeomorfismo  $h: X \rightarrow Y$  uma seqüência  $h'_i: H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$  de isomorfismos destes grupos. Para  $X = S^k$ , esfera  $k$ -dimensional, calcula-se

$$(*) \quad H^i(S^k) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ (inteiros)}, & i = k, 0, \text{ se } k \neq 0; \\ 0, & i \neq k; \quad H_0(S^0) = \mathbb{Z}^2. \end{cases}$$

Em nosso caso, compactificamos  $E_B^s$  e  $E_A^s$  adjuntando o ponto do infinito (compactificação de Alexandrov), obtemos  $S^{n(A)}$  e  $S^{n(B)}$ , onde  $n(\alpha) = \dim E_\alpha^s$ ,  $\alpha = A, B$ , e estendemos  $h$  para  $\tilde{h}: S^{n(A)} \rightarrow S^{n(B)}$ , que é um homeomorfismo.

Temos que  $h'_{n(A)}: H_{n(A)}(S^{n(A)}) = \mathbb{Z} \rightarrow H_{n(B)}(S^{n(B)})$  é isomorfismo. A expressão (\*) prova que  $n(A) = n(B)$ . O leitor encontrará em Greenberg [1966] os fundamentos da Teoria da Homologia. ■

## 7. Sistemas lineares complexos

Nesta seção vamos considerar brevemente a equação linear

$$(1) \quad \omega' = A(z)\omega + b(z)$$

onde  $A(z)$  é matriz  $n \times n$  e  $b(z)$  é um vetor  $n$ -dimensional; ambos analíticos num conjunto simplesmente conexo  $D \subset \mathbb{C}$ .

Por solução de (1) entendemos uma função analítica  $\omega: D \rightarrow \mathbb{C}^n$  tal que

$$\omega'(z) = A(z)\omega(z) + b(z)$$

para todo  $z \in D$ .

**1. PROPOSIÇÃO.** Dados  $z_0 \in D$ ,  $\omega_0 \in \mathbb{C}^n$  existe uma única solução de (1) (em  $D$ ) tal que  $\omega(z_0) = \omega_0$ .

*Demonstração.* Se  $z \in D$  e se  $\gamma_1, \gamma_2$  são caminhos em  $D$  com extremidades  $z_0$  e  $z$  sabemos que para toda função  $f(z)$  analítica em  $D$ ,  $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$ . Denotaremos esta integral por  $\int_{z_0}^z f(\tau) d\tau$ .

Definamos então

$$\varphi_0(z) \equiv \omega_0$$

$$\varphi_n(z) = \omega_0 + \int_{z_0}^z [A(\tau)\varphi_{n-1}(\tau) + b(\tau)] d\tau, \quad 1 < n.$$

Fixemos agora um domínio compacto  $K$  com  $z_0 \in K \subset D$ , e sejam  $M > 0$ ,  $L > 0$  tais que  $|A(z)| < M$ ,  $|b(z)| < M$  em  $K$  e todo ponto de  $K$  possa ser ligado a  $z_0$  por um caminho de comprimento menor que  $L$ .

Seja  $z_1 \in K$  e  $\gamma$  um caminho entre  $z_0$  e  $z_1$  de comprimento menor que  $L$ . Se  $s$  é o comprimento de arco ao longo de  $\gamma$ , partindo de  $z_0$ , e  $z \in \gamma$ , temos

$$|\varphi_1(z) - \varphi_0(z)| \leq M(|\omega_0| + 1)s \leq ML(|\omega_0| + 1)$$

e em geral,

$$|\varphi_n(z) - \varphi_{n-1}(z)| \leq \frac{M^n s^n}{n!} (|\omega_0| + 1) \leq \frac{M^n L^n}{n!} (|\omega_0| + 1)$$

Dai  $\varphi_n(z)$  converge uniformemente nas partes compactas de  $D$  a uma função  $\varphi$  que deve então ser analítica. Além disso,

$$\varphi(z) = \omega_0 + \int_{z_0}^z [A(\tau)\varphi(\tau) + b(\tau)] d\tau$$

logo  $\varphi(z_0) = \omega_0$  e

$$\varphi'(z) = A(z)\varphi(z) + b(z).$$

Se  $\psi$  é outra solução de (1) em  $D$  com  $\psi(z_0) = \omega_0$ , fazendo  $m = \sup_{z \in K} |\psi(z) - \varphi_1(z)|$  e procedendo como acima obtemos para  $z \in \gamma$ ,

$$|\psi(z) - \varphi_n(z)| \leq \frac{M^{n-1}m}{(n-1)!} s^{n-1} \leq \frac{M^{n-1}L^{n-1}}{(n-1)!} m$$

provando que  $\psi(z) \equiv \varphi(z)$  em  $D$ . ■

O leitor pode agora verificar facilmente que todos os resultados das seções 1 e 2 mantêm-se válidos para o sistema (1).

2. *Observação.* Suponhamos que o sistema (1) esteja definido numa bola aberta de centro  $z_0 \in \mathbb{C}$  e raio  $r > 0$ . Então  $A(z)$  e  $b(z)$  admitem expansões  $A(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (z-z_0)^m A_m$ ,  $b(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (z-z_0)^m b_m$  válidas para  $|z-z_0| < r$  onde  $A_m$  é matriz  $n \times n$  constante e  $b_m$  é vetor constante  $n$ -dimensional.

Consideremos agora uma série formal (isto é, uma série para a qual não sabemos em princípio se converge em algum ponto  $z \neq z_0$ )

$$(2) \quad \sum_{m=0}^{\infty} (z-z_0)^m a_m$$

onde  $a_m$  é vetor constante  $n$ -dimensional. Se seus coeficientes satisfazem para  $m \geq 1$ , as relações de recorrência

$$(3) \quad ma_m = \sum_{j=0}^{m-1} A_j a_{m-j-1} + b_{m-1}$$

então a série (2) converge para  $|z-z_0| < r$  e é aí a única solução de (1) que no ponto  $z_0$  assume o valor  $a_0$ .

Pois se

$$(4) \quad \omega(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (z-z_0)^m c_m$$

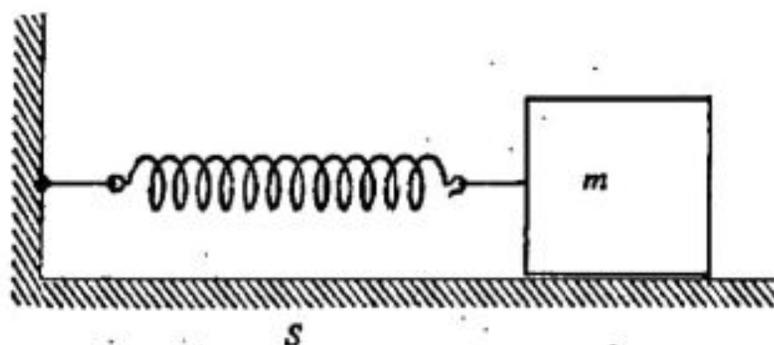
é a única solução de (1) em  $|z-z_0| < r$  com  $\omega(z_0) = a_0$  então claramente  $c_0 = a_0$ . Para obter  $c_m$ ,  $m \geq 1$  substituímos (4) e sua derivada

$\omega'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m (z - z_0)^{m-1}$  em (1) e igualamos os coeficientes de cada termo  $(z - z_0)^m$ . Obtemos então que  $c_m, m \geq 1$  deve satisfazer as relações de recorrência (3). Logo  $c_m = a_m$ , donde resulta a afirmação feita acima.

## 8. Oscilações mecânicas e elétricas

O objetivo dessa seção é dar uma ilustração simples de como as equações diferenciais lineares aparecem na descrição dos fenômenos oscilatórios mecânicos e elétricos.

Consideremos uma massa  $m$  presa a uma mola horizontal cuja outra extremidade está fixa, como na figura abaixo. Suponhamos que o atrito entre  $m$  e a superfície  $S$  é desprezível e que quando o sistema está em repouso a massa ocupa a posição  $x = 0$ .



Pela lei de Hooke, quando uma mola é esticada ou comprimida, ela reage com uma força proporcional à sua deformação e que tende a restaurar sua posição de equilíbrio. Isto significa que quando a massa está em  $x$ , a força sobre ela é  $-cx$  onde  $c$  é a constante de rigidez da mola.

Daí, se o sistema é afastado de sua posição de equilíbrio e em seguida é solto, a equação do movimento de  $m$  é dada, a partir da segunda lei de Newton, por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = 0$$

que é igual a

$$(1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - \omega_0^2 x = 0$$

onde  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$

A solução geral de (1) é

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

ou seja,

$$x(t) = R \cos(\omega_0 t - \alpha)$$

com  $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  e  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{c_2}{c_1}$ .

Vemos então que o sistema oscila perpetuamente com período  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  em torno de sua posição de equilíbrio sendo que  $-R \leq x(t) \leq R$ . Por causa disso  $R$  é chamado *amplitude máxima* do sistema e  $\omega_0$ , que denota o número de oscilações num tempo igual a  $2\pi$  chama-se *frequência natural* do sistema. Notemos que a expressão  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  confirma quantitativamente a idéia de que a frequência cresce com a rigidez da mola e diminui com a massa. O tipo de movimento que acabamos de considerar chama-se *movimento harmônico simples*.

Uma situação mais realista ocorre se levamos em conta o atrito produzido pela resistência do meio. Em condições ideais esta fricção é proporcional à velocidade e tem sentido contrário ao da velocidade  $\frac{dx}{dt}$ . A equação do movimento passa a ser então

$$(2) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

Como as raízes de  $m\lambda^2 + k\lambda + c = 0$  são  $\lambda_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4mc}}{2m}$

e  $\lambda_2 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - 4mc}}{2m}$ , temos três casos a considerar:

(i)  $k^2 - 4mc > 0$ ; neste caso  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  e a solução geral de (2) é

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

(ii)  $k^2 - 4mc = 0$ ; neste caso  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{k}{2m}$  e a solução geral é

$$x(t) = c_1 e^{-k/2m t} + c_2 t e^{-k/2m t}$$

Em ambas as situações o sistema tende exponencialmente para zero, sem oscilar.

(iii)  $k^2 - 4mc < 0$ ; neste caso a solução geral é

$$x(t) = e^{-k/2m t} \left[ c_1 \cos \left( \frac{\sqrt{4mc - k^2}}{2m} t \right) + c_2 \operatorname{sen} \left( \frac{\sqrt{4mc - k^2}}{2m} t \right) \right]$$

ou seja,

$$x(t) = R e^{-k/2m t} \cos \left( \frac{\sqrt{4mc - k^2}}{2m} t - \alpha \right)$$

onde  $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  e  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{c_2}{c_1}$ . Segue-se que o gráfico de  $x(t)$  é dado por uma função coseno que decresce exponencialmente, isto é,  $x(t)$  oscila enquanto tende para zero.

Em qualquer dos três casos  $x(t)$  tende rapidamente para a posição de equilíbrio do sistema. Este é dito então um sistema *amortecido*.

Quando interessa manter uma oscilação não trivial, aplicamos uma força externa  $F(t) = F_0 \cos \omega t$  à massa  $m$ . Temos então um *sistema mecânico forçado* e a oscilação que resulta chama-se *oscilação forçada*. A equação do movimento é então

$$(3) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = F_0 \cos \omega t$$

Uma solução particular de (3) é dada por

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{F_0}{(c - m\omega^2)^2 + k^2\omega^2} [(c - m\omega^2) \cos \omega t + k\omega \operatorname{sen} \omega t] = \\ &= \frac{F_0 \cos(\omega t - \beta)}{\sqrt{(c - m\omega^2)^2 + k^2\omega^2}} \end{aligned}$$

onde  $\beta = \operatorname{arctg} \frac{k\omega}{c - m\omega^2}$ . Logo a solução geral de (3) é

$$x(t) = f(t) + g(t)$$

onde  $f(t)$  é a solução geral de (2). Como  $f(t)$  tende rapidamente para zero concluímos que para todo  $t$  suficientemente grande,  $x(t)$  é dado praticamente por  $g(t)$ , quaisquer que tenham sido as condições iniciais. Por esse motivo,  $g(t)$  é dita a *parte estacionária* da solução e  $f(t)$  a *parte transiente*.

Analiseemos finalmente o caso em que o atrito pode ser desprezado ( $k = 0$ ) e a força externa é dada por  $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$  onde  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ . A equação do movimento é então

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t$$

Uma solução particular desta equação é

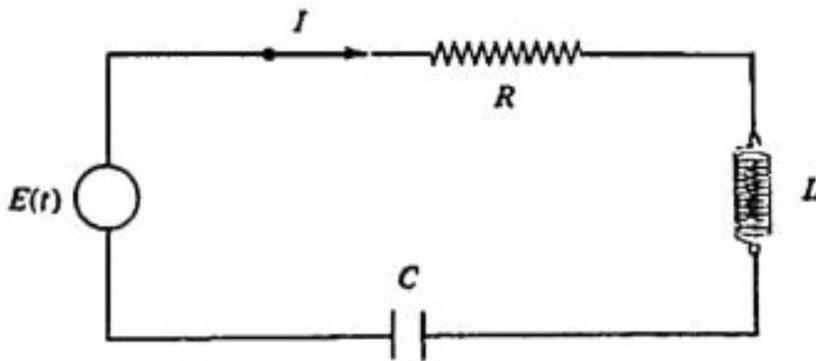
$$\frac{F_0 t}{2m\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t$$

logo,

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0 t}{2m\omega_0} \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Resulta que quando o atrito pode ser desprezado e a força externa tem a frequência natural do sistema, as oscilações são ilimitadas quando  $t \rightarrow \infty$ . Tal fenômeno chama-se *ressonância*.

Suponhamos agora que ao invés de um sistema mecânico, temos um circuito elétrico como na figura com indutância, resistência e ca-



pacitância respectivamente  $L$ ,  $R$  e  $C$ . Se o gerador produz uma voltagem  $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$  então a corrente  $I$  no circuito é dada pela equação

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E_0 \omega \cos \omega t$$

que é semelhante a (3). Logo, a análise desenvolvida anteriormente também se aplica aqui.

## EXERCÍCIOS

1. Seja  $\phi(t)$  uma matriz  $n \times n$  cujos elementos são funções de classe  $C^1$ , não singular para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Prove que existe uma única matriz  $A(t)$  contínua tal que  $\phi(t)$  é matriz fundamental de  $x' = A(t)x$ .
2. Sejam  $a_0, \dots, a_{n-1}$  funções contínuas, reais (ou complexas), num intervalo  $I$ . A seguinte equação linear

$$(*) \quad \frac{d^n x}{dt^n} = a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) x,$$

chama-se "equação linear de ordem  $n$ ". Considere  $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  (ou  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ ) o espaço vetorial das funções reais (ou complexas) de classe  $C^n$  em  $I$ . Prove que:

- (a) o conjunto das soluções de (\*) é um subespaço vetorial de  $\mathcal{C}^n$  de dimensão  $n$ .

(Sugestão: escreva  $x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$  e verifique que (\*) é equivalente a um sistema linear da forma  $x' = A(t)x$ ).

- (b) Sejam  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  em  $\mathcal{C}^n$  e  $W(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t)$  o determinante da matriz  $n \times n$  cuja  $i$ -ésima linha é formada por

$$\frac{d^{i-1} \varphi_1}{dt^{i-1}}, \dots, \frac{d^{i-1} \varphi_n}{dt^{i-1}},$$

as derivadas de ordem  $i-1, i=1, \dots, n$ , de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Então  $W(t) = W(t_0) \exp \left[ \int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds \right]$  desde que  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sejam soluções de (\*). ( $W(t)$  é chamado o Wronskiano do sistema de funções  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ).

Prove que  $n$  funções  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , soluções de (\*), são linearmente independentes se e somente se, para todo  $t, W(t) = W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$ .

- (c) Sejam  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$   $n$  funções de  $\mathcal{C}^n$ , tais que  $W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$  em  $I$ . Prove que existe uma única equação da forma (\*) que tem  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  como base de soluções.

3. Se  $A(t)$  é anti-simétrica para todo  $t \in I$ , i.e.,  ${}^*A(t) = -A(t)$ , onde  ${}^*A(t)$  é a transposta de  $A(t)$ , prove que toda matriz fundamental  $\Phi(t)$  de  $x' = A(t)x$  satisfaz a  ${}^*\Phi(t)\Phi(t) = C$ , constante. Em particular, se  $\Phi(t_0)$  é ortogonal para algum  $t_0$ , então  $\Phi(t)$  é ortogonal para todo  $t \in I$ .

**APLICAÇÃO:** Prove o Teorema Fundamental da Teoria das Curvas: Dadas funções contínuas  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$ , existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco (mó-

dulo congruência em  $\mathbb{R}^3$ ) cuja curvatura e torsão são, respectivamente,  $k(s)$  e  $\tau(s)$ .

(Sugestão: Primeiro lembramos alguns fatos da teoria das curvas.

Sejam  $I$  um intervalo e  $x(s), s \in I$ , uma curva diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $|x'(s)| = 1$ , para todo  $s \in I$ . Se  $t(s) = x'(s)$  então  $k(s) = |t'(s)|$  é chamada curvatura de  $x$ . Denotemos por  $n(s)$  o vetor unitário tal que  $k(s)n(s) = t'(s)$ . Dado  $b(s) = t(s) \times n(s)$  existe uma função  $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$  chamada torsão, satisfazendo  $\frac{db}{ds}(s) = -\tau(s)n(s)$ . Note que  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$  são unitários e mutuamente ortogonais. As fórmulas de Frenet são:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{ds} &= kn \\ \frac{dn}{ds} &= -kt + \tau b \\ \frac{db}{ds} &= -\tau n\end{aligned}$$

Para provar o teorema fundamental da teoria das curvas escrevemos a seguinte equação diferencial matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{dt}{ds} \\ \frac{dn}{ds} \\ \frac{db}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

com a condição inicial

$$\begin{pmatrix} t(0) \\ n(0) \\ b(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde supomos que  $0 \in I$ .)

4. Sejam  $A, B, C$  e  $D$  matrizes de ordem  $n$  cujos elementos são funções contínuas, reais ou complexas, definidas num intervalo  $I$ .

(a) Seja  $U = U(t)$  uma matriz fundamental de  $x' = A(t) \cdot x$ . Prove que a inversa de  $U$  satisfaz a equação  $y' = -yA(t)$ .

(b) Sejam  $U$  e  $V$  soluções de  $X' = A(t) \cdot X$ ,  $X(t_0) = Id$  e  $X' = X B(t)$ ,  $X(t_0) = Id$ . Prove que  $\Phi(t) = U(t) \cdot X_0 \cdot V(t)$  é a solução de  $X' = A(t)X + X B(t)$ ,  $X(t_0) = X_0$ .

(c) Seja  $\{U, V\}$  uma solução do seguinte sistema

$$\begin{aligned} X' &= A(t) \cdot X + B(t)Y \\ Y' &= C(t) \cdot X + D(t)Y \end{aligned}$$

Prove que se  $V$  é inversível em  $I$ , então  $W(t) = U(t) \cdot V^{-1}(t)$  é uma solução da equação

$$Z' = B(t) + A(t) \cdot Z - Z \cdot D(t) - Z \cdot C(t) \cdot Z$$

5. Seja  $A(t)$  contínua em  $I = [0, S]$ . Suponha que

$$(*) \quad x' = A(t)x$$

tem a solução nula como única solução de período  $S$ . Então para toda função contínua  $b(t)$  existe uma única solução  $\varphi_b$ , de período,  $S$  de  $x' = A(t)x + b(t)$ . Mais ainda, existe uma constante  $C > 0$ , independente de  $b$ , tal que  $|\varphi_b| \leq C|b|$ .

(Sugestão: Use o fato de  $\psi(t) \equiv 0$  ser a única solução de (\*) que satisfaz  $\psi(0) = \psi(s)$  para provar que se  $\phi(t)$  é matriz fundamental de (\*) tal que  $\phi(0) = Id$  então  $\phi(0) - \phi(s) = Id - \phi(s)$  é inversível. Depois use a fórmula de "variação de parâmetros" para provar que se  $\varphi(t, 0, x_0)$  é solução de  $x' = A(t)x + b(t)$  e satisfaz  $\varphi(0, 0, x_0) = \varphi(s, 0, x_0)$ , então

$$x_0 = (Id - \phi(s))^{-1} \phi(s) \int_0^s \phi^{-1}(u) b(u) du.$$

6. Seja  $A(t)$  contínua e periódica de período  $S$  em  $\mathbb{R}$ . Suponha que (\*) (Exercício 5) tem  $\varphi \equiv 0$  como única solução periódica de período  $S$ . Prove que existe  $\delta > 0$  tal que para toda função contínua  $f: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ , periódica de período  $S$  na primeira variável com  $|D_x f(t, x)| < \delta$  para todo  $(t, x)$ , então

$$x' = A(t)x + f(t, x)$$

tem uma única solução  $\varphi_f$  periódica de período  $S$ . Prove também que se  $f \rightarrow 0$  uniformemente, então  $\varphi_f \rightarrow 0$  uniformemente.

(Sugestão: Use o exercício 5 para concluir que, para toda função contínua  $b$  de período  $S$ , existe uma única solução  $\varphi_b$  de período  $S$ , de  $x' = A(t)x + f(t, b(t))$ . Prove que a aplicação  $b \rightarrow \varphi_b$  é uma contração, se  $\delta$  é pequeno. Compare este método com o desenvolvido no capítulo II.)

7. Considere o sistema n-dimensional

$$x' = A(t)x$$

tal que  $A(t)$  pode ser desenvolvida em série de potências

$$A(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m$$

para  $t \in (-r, r)$ , onde  $A_m$  é matriz constante  $n \times n$ . Seja  $x: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma solução do sistema com desenvolvimento em série

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m, \quad a_m \in \mathbb{R}^n. \text{ Mostre que}$$

$$(m+1)a_{m+1} = \sum_{j=0}^m A_{m-j} a_j \quad (*)$$

para todo  $m \geq 0$ . Deduza que o desenvolvimento em série de  $x(t)$  é convergente em  $(-r, r)$ .

(Sugestão: Sejam  $0 < \rho_1 < \rho < r$ . Da convergência absoluta da série  $\sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m$  em  $t = \rho$  deduzir que existe  $c > 0$

tal que,

$$\|A_m\| \leq c \left(\frac{1}{\rho}\right)^m, \quad m \geq 0$$

Dai provar por indução, em  $m$ , que existe  $K > 0$  tal que:

$$|a_m| \leq K \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^m$$

usando (\*))

8. Suponha que  $f$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$  e que para todo  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ ,  $\varphi(t, t_0, x_0)$ , solução de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

(a) Prove que se  $D_3 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)$  existe e é contínua, então

$$X(t) = D_3 \varphi(t, t_0, x_0) \text{ é solução da equação matricial } X' = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0)) \cdot X, \quad X(t_0) = Id.$$

(Sugestão: Note que  $\varphi(t, t_0, x_0)$  é solução de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$  se e só se  $\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s, t_0, x_0)) ds$ . Use então o teorema de Leibnitz: Sejam  $[a, b]$  intervalo em  $\mathbb{R}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $g: [a, b] \times U \rightarrow \mathbb{R}^p$  contínua com  $\partial_2 g: [a, b] \times U \rightarrow$

→  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  contínua. Então  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  definida por  $\phi(x) = \int_a^b g(t, x) dt$  é de classe  $C^1$  e  $\phi'(x) = \int_a^b \partial_2 g(t, x) dt$ .

(b) Suponha que  $f: \mathbb{R} \times E \times \Lambda \rightarrow E$  é de classe  $C^1$ , onde  $E$  e  $\Lambda$  são espaços euclidianos e que para todo  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ , a solução de  $x' = f(t, x, \lambda)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , está definida para todo

$t \in \mathbb{R}$ . Se  $D_4 \varphi = \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$  existe e é contínua, prove que

$Y(t) = D_4 \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$  é solução da equação matricial

$$Y' = D_2 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda) \cdot Y + D_3 f(t, \varphi(t, t_0, x_0, \lambda), \lambda), Y(t_0) = 0$$

(c) Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  com  $|f| < M$  em  $\mathbb{R}^2$ . Prove que  $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$  está definida e é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$ . Demonstre que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^t \partial f / \partial x(s, \varphi(s, t_0, x_0)) ds}$$

(Sugestão: Defina a seqüência de funções  $\{\varphi_i\}$  como segue:

$$\varphi_0(t) = x_0$$

$$\varphi_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{i-1}(s)) ds$$

Usando o mesmo argumento do teorema 1 da seção 2 prove que  $\varphi(t) = \lim \varphi_i(t)$  é solução de  $x' = f(t, x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Depois use (a) para escrever

$$\int_{t_0}^t \frac{\frac{\partial^2 \varphi(s, t_0, x_0)}{\partial t \partial x_0}}{\frac{\partial \varphi(s, t_0, x_0)}{\partial x_0}} ds = \int_{t_0}^t D_2 f(s, \varphi(s, t_0, x_0)) ds$$

9. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Encontrar uma base de soluções para  $x' = Ax$  e provar que toda solução desta equação tende para 0 quando  $t \rightarrow -\infty$ .  
 (b) Calcular a solução  $\varphi$  de  $x' = B \cdot x$ ,  $x(0) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ . Provar que  $|\varphi(t)|$  é limitada se e somente se,  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ .

10. Seja  $p(t)$  um polinômio em  $\mathbb{R}$ . Defina  $p_0(t) = p(t)$ ,  $p_1(t) = 1 + \int_0^t p_0(s)ds$ , ...,  $p_k(t) = 1 + \int_0^t p_{k-1}(s)ds$ . Prove que  $p_k(t)$  converge uniformemente em cada intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Calcule  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k(t)$ .
11. Se  $V$  é um subespaço de  $E = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ , invariante por  $A$ , prove que  $V$  é também invariante por  $e^{tA}$ , para todo  $t$ . ( $V$  é invariante por  $A$  se  $Av \in V$  para todo  $v \in V$ )
12. Prove que: (a)  $|e^A| \leq e^{|A|}$   
(b)  $\det e^A = e^{\text{tr}(A)}$
13. Suponha que  $\mu$  não é valor próprio de  $A$ . Prove que a equação  $x' = A \cdot x + e^{\mu t} \cdot b$  tem uma solução da forma  $\varphi(t) = v e^{\mu t}$ .
14. Encontre a solução de  $x'' + x = g(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $x'(t_0) = x'_0$ , onde  $g$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$ .  
(Sugestão: Use Teorema 8 da seção 2. Melhor ainda, desenvolva uma fórmula de variação dos parâmetros para equações de segunda ordem).
15. Seja  $\Phi(t)$  uma matriz de  $n \times n$  funções de classe  $C^1$ . Se  $\Phi(0) = I$  (identidade) e  $\Phi(t+s) = \Phi(t) \Phi(s)$  para todo  $t, s$  em  $\mathbb{R}$ , prove que existe uma única matriz  $A$  tal que  $\Phi(t) = e^{tA}$ .  
(Sugestão: Considere  $A = \Phi'(0)$ ).
16. Seja  $A(t)$  uma matriz  $n \times n$  de funções contínuas num intervalo de  $\mathbb{R}$ . Se para todo  $t$

$$\left[ \int_{t_0}^t A(s)ds \right] A(t) = A(t) \left[ \int_{t_0}^t A(s)ds \right]$$

prove que  $\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$  é uma matriz fundamental de  $x' = A(t)x$ .  
(Sugestão: Imite a prova da Prop. 1, seção 3, tendo em conta que a condição acima implica

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{t_0}^t A(s)ds \right]^m = m A(t) \left[ \int_{t_0}^t A(s)ds \right]^{m-1}, m = 1, 2, m)$$

17. Sejam  $A, B$  matrizes reais ou complexas. Prove que  $e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  se e somente se  $AB = BA$ .
18. Sejam  $A, B$  matrizes  $n \times n$  de números reais ou complexos. Defina o colchete de  $A$  e  $B$  por  $[A, B] = BA - AB$ . Se  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ , prove que para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

$$e^{tB} e^{tA} = e^{t(A+B)} e^{\frac{t^2}{2} [A, B]}$$

(Sugestão: Verifique que  $\Phi(t) = e^{-t(A+B)} e^{tB} e^{tA}$  é solução de  $X' = t[A, B] X$ )

19. Considere o seguinte sistema complexo em  $\mathbb{C}^2$ :

$$\frac{dz_1}{dt} = \omega_1 z_1, \quad \frac{dz_2}{dt} = \omega_2 z_2, \quad \omega_1 \neq 0.$$

Denote por  $\varphi(t, z_1, z_2)$  a solução deste sistema tal que  $\varphi(0, z_1, z_2) = (z_1, z_2)$ . Seja  $T^2 = \{(z_1, z_2); |z_1| = |z_2| = 1\}$  o toro bidimensional em  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ ,  $T^2 = S^1 \times S^1$ .

- (a) Prove que  $T^2$  é invariante por  $\varphi$  (i.e.,  $\varphi(t, z_1, z_2) \in T^2$  para todo  $t$ , se  $(z_1, z_2) \in T^2$ ), se e somente se  $\operatorname{Re}(\omega_1) = \operatorname{Re}(\omega_2) = 0$ .  
 (b) Prove que  $\varphi(t, z_1, z_2)$  é periódica em  $t$ , para todo  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ , se e somente se  $\operatorname{Re}(\omega_1) = \operatorname{Re}(\omega_2) = 0$  e  $\operatorname{Im}(\omega_2)/\operatorname{Im}(\omega_1)$  é racional.  
 (c) Se  $\operatorname{Re}(\omega_1) = \operatorname{Re}(\omega_2) = 0$  e  $\operatorname{Im}(\omega_2)/\operatorname{Im}(\omega_1)$  é irracional prove que para todo  $(z_1, z_2) \in T^2$ , a aplicação  $t \rightarrow \varphi(t, z_1, z_2)$  é biunívoca e sua imagem é densa em  $T^2$ .

(d) Seja  $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$  a esfera tridimensional em  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ . Prove que é possível decompor  $S^3$  como união disjunta de curvas simples e fechadas, i.e., curvas homeomorfas a círculos.

(Sugestão: (c) Defina  $\xi(z_2) = e^{2\pi i \omega_2/\omega_1} \cdot z_2$ ,  $\xi: S^1 \rightarrow S^1$ . Prove que para todo  $z_2 \in S^1$ ,  $\theta(z_2) = \{z = \xi^n(z_2), n \in \mathbb{Z}\}$  é denso em  $S^1$ . Prove que o conjunto dos pontos onde a solução  $\varphi(t, 1, z_2)$  intercepta  $\{1\} \times S^1 \subset T^2$  é  $\{1\} \times \theta(z_2)$ .

(d) Considere as soluções da equação acima com  $\operatorname{Re}(\omega_1) = \operatorname{Re}(\omega_2) = 0$  e  $\operatorname{Im}(\omega_2)/\operatorname{Im}(\omega_1)$  racional. Observe que  $S^3$  é invariante por  $\varphi$ .)

20. Seja  $x' = Ax$  um sistema bidimensional real. Em termos de  $\Delta = \det A$  e  $\tau = \operatorname{traço} A$  decida quando este sistema define uma sela, nó estável, foco instável, nó impróprio, centro, etc. Por exemplo, se  $\Delta < 0$ , temos uma sela, etc.

21. Seja  $\mathcal{U}$  o conjunto das matrizes reais  $2 \times 2$  tais que o sistema  $x' = Ax$ ,  $A \in \mathcal{U}$ , define

- (a) uma sela; (b) nó atrator; (c) nó fonte; (d) foco atrator; (e) nó impróprio; (f) centro, etc.

Prove que  $\mathcal{U}$  é aberto nos casos (a), (b), (c), (d), e  $\mathcal{U}$  tem interior vazio no caso (e).

22. Faça um esquema aproximado das soluções de  $x' = A \cdot x$  nos seguintes casos:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad 5) A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad 6) A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nos casos 1 a 5 diga se o sistema define uma sela, centro, foco estável, nó instável, etc.

23. Equações lineares de ordem superior com coeficientes constantes

(I) Caso das raízes simples

**DEFINIÇÃO.** A equação linear homogênea de  $n$ -ésima ordem com coeficientes constantes é a equação da forma

$$(I.1) \quad z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z^{(1)} + a_n z = 0$$

onde  $z$  é a função incógnita na variável independente  $t$  e os coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são constantes (reais ou complexos). Também indicamos que  $z^{(j)}$  é a  $j$ -ésima derivada de  $z$ .

a) Escrever a equação I.1 na forma de uma equação matricial ( $X' = AX$ , sendo  $A$  uma matriz com coeficientes constantes).

**DEFINIÇÃO.** Dada a equação I.1 o polinômio

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

é chamado polinômio característico de dita equação.

b) Suponhamos que o polinômio característico da equação I.1 não tem raízes múltiplas e que as raízes são

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Se consideramos

$$(1) \quad z_1 = e^{\lambda_1 t}, z_2 = e^{\lambda_2 t}, \dots, z_n = e^{\lambda_n t}$$

então para constantes complexas quaisquer  $c^1, c^2, \dots, c^n$ , a função

$$(2) \quad z = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \dots + c^n z_n$$

é solução da equação I.1. Esta solução é a solução geral no sentido seguinte: cada solução da equação I.1 pode ser obtida de (2) por uma apropriada eleição das constantes  $c^1, c^2, \dots, c^n$ . Aqui as constantes  $c^1, c^2, \dots, c^n$  (as quais são chamadas constantes de integração) estão definidas de modo único para cada solução  $z$  dada. As funções de (1) constituem uma base para o espaço vetorial de soluções de I.1 e chamam-se *sistema fundamental de soluções de I.1*.

c) Sejam

$$(3) \quad z_1, z_2, \dots, z_n$$

um sistema de  $n$  vetores complexos linearmente independentes em um espaço  $n$ -dimensional que satisfaçam

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{z}_1 &= z_2, \dots, \bar{z}_{2k-1} = z_{2k} \\ \bar{z}_j &= z_j, j = 2k + 1, \dots, n \end{aligned}$$

sendo  $\bar{z}_i$  = conjugado de  $z_i$ . Então o vetor

$$(5) \quad z = c^1 z_1 + \dots + c^n z_n$$

é real se e só se os coeficientes de todo par de vetores conjugados são conjugados e os coeficientes de todos os vetores reais são reais.

Esta proposição será útil no exercício seguinte.

d) Suponhamos que os coeficientes do polinômio característico  $L(p)$  de I.1 são reais. Então para que a solução (2) de I.1 seja real é necessário e suficiente que os coeficientes de pares de soluções complexas conjugadas sejam conjugados e os coeficientes de soluções reais sejam reais. Observe que se a raiz  $\lambda$  de  $L(p)$  é real,  $e^{\lambda t}$  é solução real, se  $\lambda$  é complexa  $e^{\lambda t}$  e  $e^{\bar{\lambda} t}$  são soluções mutuamente conjugadas.

(Sugestão. Denotemos por  $Z_k$  o vetor com coordenadas  $\{z_k(0), z'_k(0), \dots, z_k^{(n-1)}(0)\}$  (sendo  $z_k$  como em (1)). Então é fácil ver que  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  são linearmente independentes e assim pode-se usar o Exercício c para provar a necessidade da condição.)

e) Provar que se substituirmos cada par de soluções complexas conjugadas  $e^{\lambda t}, e^{\bar{\lambda} t}$  de I.1 pelas partes reais e imaginárias  $\operatorname{Re}(e^{\lambda t}), \operatorname{Im}(e^{\lambda t})$  no sistema fundamental (1), obtemos um sistema fundamental de soluções reais.

f) Se as soluções (1) satisfazem

$$\begin{aligned}\bar{Z}_1 &= Z_2, \dots, \bar{Z}_{2k-1} = Z_{2k} \\ \bar{Z}_{2k+1} &= Z_{2k+1}, \dots, \bar{Z}_n = Z_n\end{aligned}$$

então cada solução real  $z$  pode ser escrita na forma

$$z = \rho_1 e^{\mu_1 t} \cos(v_1 t + \alpha_1) + \dots + \rho_k e^{\mu_k t} \cos(v_k t + \alpha_k) + c^{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} + \dots + c^n e^{\lambda_n t}.$$

onde  $\rho_1, \dots, \rho_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k, c^{2k+1}, \dots, c^n$  são constantes reais arbitrárias. Observe que, intuitivamente, para  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $v_j$  dá um caráter oscilatório à solução com frequência  $v_j$  e  $\mu_j$  tende a afastar ou aproximar a solução da origem segundo seja  $\mu_j > 0$  ou  $\mu_j < 0$ .

(II) *Caso das raízes múltiplas.*

**DEFINIÇÃO.** Seja  $L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$  um polinômio arbitrário com coeficientes constantes (reais ou complexos) com respeito ao símbolo  $p$ , e seja  $z$  uma certa função real ou complexa na variável real  $t$ . Definimos:

$$(6) \quad L(p)z = a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z$$

Pela notação introduzida a equação I.1 pode ser escrita na forma

$$(7) \quad L(p)z = 0$$

onde  $L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ .

g) Se  $L(p)$  e  $M(p)$  são dois polinômios arbitrários no símbolo  $p$  (ou, como em geral se diz, no operador diferencial  $p$ ),  $z_1, z_2$  e  $z$  são funções de  $t$  e  $\lambda$  é qualquer número complexo, então temos as identidades

$$\begin{aligned}L(p)(z_1 + z_2) &= L(p)z_1 + L(p)z_2 \\ (L(p) + M(p))z &= L(p)z + M(p)z \\ L(p)(M(p)z) &= (L(p)M(p))z \\ L(p)e^{\lambda t} &= L(\lambda)e^{\lambda t} \\ L(p)(e^{\lambda t} z) &= e^{\lambda t} L(p + \lambda)z\end{aligned}$$

h) Seja  $L(p)$  um polinômio arbitrário no símbolo  $p$ , e seja a função  $\omega_r(t)$  na variável real  $t$  definida pela fórmula

$$\omega_r(t) = L(p)t^r e^{\lambda t}$$

onde  $\lambda$  é um número complexo. Temos que, se  $\lambda$  é raiz de multiplicidade  $k$  de  $L(p)$ , então as funções  $\omega_0(t), \omega_1(t), \dots, \omega_{k-1}(t)$  são identicamente zero.

i) Seja  $L(p)z = 0$  uma equação linear homogênea de  $n$ -ésima ordem com coeficientes constantes. Ademais, sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  o conjunto de raízes mutuamente distintas do polinômio  $L(p)$ , a raiz  $\lambda_j$  tendo multiplicidade  $k_j$ , assim que  $\sum k_j = n$ . Se consideramos

$$(8) \quad \begin{cases} z_1 = e^{\lambda_1 t}, z_2 = t e^{\lambda_1 t}, \dots, z_{k_1} = t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}; \\ z_{k_1+1} = e^{\lambda_2 t}, \dots, z_{k_1+k_2} = t^{k_2-1} e^{\lambda_2 t} \\ \dots, z_n = t^{k_m-1} e^{\lambda_m t} \end{cases}$$

então as funções (8) são soluções da equação  $L(p)z = 0$ ; além disso a solução geral da equação  $L(p)z = 0$  tem a forma

$$(9) \quad z = c^1 z_1 + \dots + c^n z_n,$$

sendo  $c^1, c^2, \dots, c^n$  constantes complexas.

j) Suponhamos que os coeficientes do polinômio característico  $L(p)$  da equação  $L(p)z = 0$  são reais. A fim de que a solução (9) seja real, é necessário e suficiente que os coeficientes das soluções reais sejam reais, e os coeficientes de pares de soluções complexas conjugadas sejam complexos conjugados.

k) Sejam  $t^r e^{\lambda t}$  e  $t^r e^{\bar{\lambda} t}$  duas soluções complexas conjugadas de (8).

No caso de uma solução real  $z$ , a parte da soma (9) correspondente a estas soluções pode ser escrita na forma

$$\hat{z} = c t^r e^{(u+iv)t} + \bar{c} t^r e^{(u-iv)t}$$

Se consideramos  $c = \frac{1}{2} \rho e^{i\alpha}$ ,

teremos:

$$(10) \quad \hat{z} = \rho t^r e^{ut} \cos(vt + \alpha).$$

Deste modo é possível substituir cada par de soluções complexas conjugadas que aparecem em (9) por uma função real da forma (10) contendo duas constantes reais arbitrárias  $\rho$  e  $\alpha$ .

24. Polinômios estáveis e equações lineares não homogêneas com coeficientes constantes

**DEFINIÇÃO.** Um polinômio  $L(p)$  é dito estável se todas as suas raízes têm parte real negativa.

Prove que se  $p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ , com  $a_i \in \mathbb{R}$ , é estável, então  $a_i > 0$  para todo  $i$ . Demonstre também que toda solução  $\varphi$  da equação diferencial  $L(p) = 0$ , onde  $L$  é estável, é tal que  $\varphi(t) \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$ .

a) O polinômio

$$L(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3, \quad a_0 > 0$$

com coeficientes reais é estável se e só se os números  $a_1, a_2, a_3$  são positivos e  $a_1 a_2 > a_0 a_3$ .

**DEFINIÇÃO.** Um quase-polinômio é qualquer função  $F(t)$  que pode ser escrita na forma

$$(1) \quad F(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + f_m(t)e^{\lambda_m t}$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  são números complexos e  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$  são polinômios em  $t$ .

Nos exercícios seguintes estudaremos a equação

$$(2) \quad L(p)z = F(t)$$

onde  $F(t)$  é um quase-polinômio. Junto com a equação (2) estudaremos a equação homogênea correspondente

$$(3) \quad L(p)u = 0$$

b) Se  $\hat{z}$  é alguma solução da equação (2) (ou também dita, uma solução particular), então uma solução arbitrária  $z$  desta equação pode ser escrita na forma

$$z = \hat{z} + u$$

onde  $u$  é solução da equação (3).

c) Consideremos a equação não-homogênea

$$(4) \quad L(p)z = f(t)e^{\lambda t}$$

na qual  $f(t)$  é um polinômio de grau  $r$  em  $t$ , e  $\lambda$  é um número complexo. Seja  $k = 0$  caso  $L(\lambda) \neq 0$ , e seja  $k$  a multiplicidade da raiz

$\lambda$  se  $L(\lambda) = 0$ . Nestas condições existe uma solução particular da equação 4) da forma

$$(5) \quad z = t^k g(t) e^{\lambda t}$$

sendo  $g(t)$  um polinômio em  $t$  de grau  $r$ .

25. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  de números reais ou complexos. a) Prove

que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( E + \frac{A}{n} \right)^n = e^A$ ,  $E =$  identidade.

(Sugestão: Desenvolver  $\left( E + \frac{A}{n} \right)^n$  usando o Teorema do Binômio

de Newton e comparar com  $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} A^i / i!$ .)

b) Sejam  $f$  um campo vetorial em  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $x_{k+1} = x_k + f(x_k) \Delta t$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , onde  $\Delta t = t/n$ . A poligonal cujos vértices são os pontos  $x_k$  chama-se poligonal de Euler. Se  $f(x) = Ax$ , prove que para todo  $t \in \mathbb{R}$ , o extremo  $x_n = x_n(t)$  da poligonal converge para  $e^{At} x_0$ .

(Sugestão: Verifique que  $x_n(t) = \left( E + \frac{At}{n} \right)^n x_0$ .)

c) Prove que  $\frac{d}{d\theta} \det(E + \theta A) = \text{traço } A$ .

(Sugestão: Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são os autovalores de  $A$  então

$$\det(E + \theta A) = \prod_{i=1}^n (1 + \theta \lambda_i) = 1 + \theta \sum_{i=1}^n \lambda_i + O(\theta^2).$$

d) Usando as idéias do exercício prove que  $\det(e^A) = e^{\text{traço } A}$

(Sugestão: Note que  $\det e^A = \det \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( E + \frac{A}{n} \right)^n \right)$  e que

$$\left( \det \left( E + \frac{A}{n} \right) \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{n} \text{traço } A + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^n.$$

e) Em que condições nos valores próprios de  $e^A$ , a matriz  $A$  define um sistema linear atrator, uma fonte, um sistema hiperbólico?

26. Se  $x' = Ax$  e  $x' = Bx$  são atratores e  $AB = BA$ , prove que  $x' = (A + B)x$  também é atrator. Desenvolva a mesma questão mudando atrator por fonte e sistema hiperbólico.

(Sugestão: Use o teorema 5.10).

27. Seja  $f$  o campo vetorial associado a um fluxo  $\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$ , de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^n$ . Prove que para todo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  aberto limitado  $B$ ,  $v(t) = \text{volume} [\varphi_t(B)]$  satisfaz a  $\frac{dv}{dt}(t) = \int_{\varphi_t(B)} \text{div } f$ .

Lembramos que  $\text{vol}[D] = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_D$  onde  $\chi_D = 1$  em  $D$  e  $\chi_D = 0$ , fora de  $D$ , e que a divergência de  $f = (f_1, \dots, f_n)$  é definida como  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \text{traço de } Df$ .

(Sugestão: Aplicar a fórmula de mudança de variáveis para obter  $v(t) = \int_B \det(D\varphi_t)$  e usar a Fórmula de Liouville (2.9) em uma matriz fundamental do sistema linear  $x' = Df(\varphi_t(x_0))x$ . Em particular se  $\text{div } f \equiv 0$ ,  $\text{vol}[\varphi_t(B)] = \text{vol}[B]$  para todo  $t$ . Isto é,  $\varphi_t$  preserva o volume.)

28. Sejam  $M_n$  o conjunto das matrizes de ordem  $n \times n$  identificado com  $\mathbb{R}^{n^2}$  e  $S = \{A \in M_n; x' = Ax \text{ é hiperbólico}\}$ . Mostre que  $S$  é aberto e denso em  $M_n$ .

29. Sejam:  $x' = Ax$  um sistema hiperbólico com índice de estabilidade  $s$ ,  $E^s = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } e^{tA} x \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$ ,  $E^u = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } e^{tA} x \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$ .

Mostre que:

$E^s$  é um subespaço vetorial de dimensão  $s$ ; e  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ .

30.  $M_n$  denota o conjunto de matrizes de ordem  $n \times n$ . Seja  $C_i = \{A \in M_n \text{ tal que } x' = Ax \text{ é hiperbólico e tem índice de estabilidade } i\}$ .

Mostre que  $C_i$  é aberto em  $M_n$ .

31. Um sistema linear  $x' = Ax$  chama-se *estruturalmente estável* se existe uma vizinhança  $V(A)$  tal que para toda matriz  $B \in V(A)$  o sistema linear  $x' = Bx$  é topologicamente conjugado a  $x' = Ax$ . Prove que  $x' = Ax$  é estruturalmente estável se e somente se  $x' = Ax$  é hiperbólico.

(Sugestão: para a prova de  $\implies$  observe que se  $\lambda$  é autovalor de  $A$  e  $v$  é um autovetor correspondente a  $\lambda$ , então  $\varphi(t) = e^{t\lambda}v$  é solução de  $Ax = x'$ . Além disso,  $|\varphi(t)| = e^{\alpha t}|v|$  se  $\alpha = \text{Re}(\lambda)$ .)

32. Prove que  $x' = Ax$  é um atrator se e só se existe uma forma quadrática  $q$  definida positiva tal que

$$Dq(x) \cdot Ax < 0 \text{ para todo } x \neq 0.$$

33. Seja  $C$  uma matriz  $n \times n$  complexa com  $\det C \neq 0$ . Prove que existe uma matriz  $B$  complexa tal que  $C = e^B$ .  
(Sugestão: use a forma de Jordan complexa de  $C$ ).
34. Para toda matriz real  $D$  com  $\det D \neq 0$  prove que existe uma matriz real  $B$  tal que  $e^B = D^2$ .  
(Sugestão: Observe que se  $A$  é uma matriz complexa e  $\bar{A}$  denota a sua conjugada então  $e^{\bar{A}} = \overline{e^A}$ ). Use então o exercício 33).
35. (Teorema de Floquet). Seja  $A(t)$  periódica de período  $\tau$  como no exemplo 7.b da seção 2. Prove que existem uma matriz  $P = P(t)$  periódica de período  $\tau$  e uma matriz  $B$ , em geral complexa, tais que, para a matriz fundamental  $\phi(t)$ , tem-se  $\phi(t) = P(t)e^{Bt}$ .  
(Sugestão: se  $\phi(t + \tau) = \phi(t)C$ , defina  $B$  por  $C = e^{B\tau}$  e  $P(t) = \phi(t)e^{-Bt}$ ).
36. Seja  $A(t)$  como no exercício 35. Prove que existe uma matriz periódica  $P(t)$  tal que a transformação  $\phi(t) \rightarrow P(t)\phi(t)$  transforma biunivocamente as soluções de  $x' = A(t)x$  nas soluções de uma equação linear  $x' = Bx$  com coeficientes constantes.
37. Mostre que os valores próprios de  $B$  não dependem da matriz fundamental  $\phi$  escolhida. Estes valores próprios chamam-se expoentes característicos da equação  $x' = A(t)x$ . Prove que eles têm parte real negativa se e somente se  $|\phi(t)| \leq K e^{-\mu t}$  para certos  $K, \mu > 0$  (veja o exercício anterior).
38. Um sistema linear periódico  $x' = A(t)x$  chama-se hiperbólico se os valores próprios da matriz  $B$  obtida no exercício 36 tem parte real diferente de zero. Prove que esta definição não depende de  $P(t)$  e desenvolva uma teoria análoga à das seções 5 e 6 para estes sistemas.
39. Achar a única solução limitada da equação

$$x'' + bx' + \omega_0^2 x = A \cos \omega t$$

onde  $b > 0$  e  $b^2 - 4\omega_0^2 < 0$ .

(Sugestão: tentar uma solução da forma  $x(t) = k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t$ ). Se  $x_\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é esta solução, definir  $f(\omega) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x_\omega(t)|$ .

Para que valor de  $\omega$  esta função toma seu valor máximo?

## ELEMENTOS DA TEORIA DE STURM-LIOUVILLE E PROBLEMAS DE CONTÓRNO

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades elementares da equação de Sturm-Liouville regular, isto é, a equação da forma

$$(p(x)y')' + (\lambda\rho(x) - q(x))y = 0 \quad (1)$$

definida num intervalo  $[a, b]$  onde  $p(x) > 0$ , sendo que  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Um caso particular de (1) é

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \lambda > 0 \quad (2)$$

e grande parte do que faremos aqui será generalizar para as soluções de (1) as propriedades das soluções  $\cos(\sqrt{\lambda} x)$  e  $\sin(\sqrt{\lambda} x)$  de (2).

Assim, na seção 1, o teorema de separação de Sturm afirma que duas soluções linearmente independentes de (1) tem zeros alternados e o teorema de comparação de Sturm diz intuitivamente que quanto maior for  $q$  em (1) mais rapidamente as soluções de (1) oscilarão.

Sabemos também que os únicos valores de  $\lambda$  para os quais (2) tem solução não trivial  $y$  satisfazendo  $y(0) = y(\pi) = 0$  são dados por  $\lambda = n^2$ , com as soluções  $\sin(nx)$ . Isto nos lembra a expansão em série de Fourier

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx + \dots$$

de uma função  $f$  em  $[0, \pi]$  tal que  $f(0) = f(\pi) = 0$ .

Estes aspectos serão considerados na seção 4 em relação com o problema da corda vibrante e na seção 5 para a equação geral do tipo (1).

### 1. Os Teoremas de Sturm

A proposição que se segue descreve a localização relativa dos zeros de duas soluções de uma mesma equação de segunda ordem.

**1. TEOREMA DE SEPARAÇÃO DE STURM.** *Sejam  $u$  e  $v$  soluções reais linearmente independentes de*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

*onde  $a(x)$  e  $b(x)$  são contínuas. Então os zeros de  $u$  e  $v$  são alternados.*

*Demonstração.* Como  $u$  e  $v$  são linearmente independentes,  $W(x) =$

$$= \det \begin{vmatrix} v(x) & u(x) \\ v'(x) & u'(x) \end{vmatrix} \text{ não se anula, isto é, o sinal de } W(x)$$

permanece constante. Se  $x_1 < x_2$  são zeros consecutivos de  $u(x)$  então os sinais de  $u'(x_1)$  e  $u'(x_2)$  são distintos e como  $W(x_1) = v(x_1)u'(x_1)$ ,  $W(x_2) = v(x_2)u'(x_2)$  segue-se que o mesmo acontece com os sinais de  $v(x_1)$  e  $v(x_2)$ . Isto prova que  $v$  se anula pelo menos uma vez em  $(x_1, x_2)$ . Trocando os papéis de  $u$  e  $v$  vemos que os zeros dessas funções são alternados. ■

O próximo teorema lida com soluções de duas equações distintas.

**2. TEOREMA DE COMPARAÇÃO DE STURM.** *Sejam  $u$  e  $v$  soluções reais não triviais de*

$$(p(x)u')' + q(x)u = 0 \tag{1}$$

$$(p(x)v')' + q_1(x)v = 0 \tag{2}$$

*onde  $p, p', q$  e  $q_1$  são contínuas,  $p(x) > 0$  e  $q_1(x) \geq q(x)$  para todo  $x$ . Se  $x_1 < x_2$  são zeros consecutivos de  $u$  então  $v$  se anula pelo menos uma vez em  $(x_1, x_2)$ , a menos que nesse intervalo tenhamos  $q(x) \equiv q_1(x)$  e  $v(x) \equiv ku(x)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Multiplicando (1) por  $v$ , (2) por  $u$  e subtraindo obtemos

$$(p(x)u')'v - (p(x)v')'u - (q_1 - q)uv = 0 \tag{3}$$

Como  $(pu')'v - (pv')'u = [(pu')v - (pv')u]'$  integrando (3) entre  $x_1$  e  $x_2$  resulta

$$\int_{x_1}^{x_2} (q_1 - q)uv dx = p(x_2)u'(x_2)v(x_2) - p(x_1)u'(x_1)v(x_1)$$

Se  $v$  não se anula em  $(x_1, x_2)$ , multiplicando por  $-1$  se necessário, podemos supor que nesse intervalo  $u(x) > 0$  e  $v(x) > 0$ . Como  $u'(x_2) < 0$  e  $u'(x_1) > 0$  segue-se então que

$$\int_{x_1}^{x_2} (q_1 - q) u v dx \leq 0$$

e daí  $q_1(x) \equiv q(x)$  para  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Logo, em  $[x_1, x_2]$  as equações (1) e (2) são iguais e aplicando a proposição 1 concluímos que  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes nesse intervalo. Existe então  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $v(x) = ku(x)$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$ . ■

Para uma generalização desse teorema veja o exercício 13.

3. *Observação.* Se as soluções não são reais, as proposições 1 e 2 não são válidas. Pois  $\cos x$  e  $\cos x + i \sin x$  são soluções de  $u'' + u = 0$  mas enquanto a primeira tem um número infinito de zeros, a segunda não se anula em nenhum ponto.

As proposições 4 e 5 a seguir são aplicações do teorema de comparação de Sturm.

4. PROPOSIÇÃO. *Seja a equação*

$$(p(x)u')' + q(x)u = 0 \quad (4)$$

*definida num intervalo  $[a, b]$  com  $p, p'$  e  $q$  contínuas e  $p > 0$ . Se  $q(x) \leq 0$  em  $[a, b]$  então as soluções não triviais de (4) tem no máximo um zero nesse intervalo.*

*Demonstração.* Uma solução não trivial da equação  $(p(x)u')' = 0$  é

$$\text{dada por } u(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)}. \text{ Como } u(x) \text{ se anula apenas}$$

em  $x = a$  o resultado segue-se pelo teorema de comparação de Sturm. ■

5. PROPOSIÇÃO. *Sejam  $c, K$  constantes tais que*

$$0 < c^2 \leq q(x) \leq K^2$$

*em  $[a, b]$  e seja  $u(x)$  uma solução não trivial de*

$$u'' + q(x)u = 0$$

i) Se  $x_1$  e  $x_2$  são zeros sucessivos de  $u$  então

$$\frac{\pi}{K} \leq x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{c}$$

ii) Se  $u(a) = u(b) = 0$  e  $u$  tem  $n - 1$  zeros em  $(a, b)$ , então

$$\frac{c(b-a)}{\pi} \leq n \leq \frac{K(b-a)}{\pi}$$

*Demonstração.* i)  $z(x) = \sin c(x - x_1)$  é uma solução de  $z'' + c^2 z = 0$  tal que  $z(x_1) = 0$  e seu zero seguinte é no ponto

$x_1 + \frac{\pi}{c}$ . Pelo teorema de comparação de Sturm devemos ter  $x_2 \leq$

$x_1 + \frac{\pi}{c}$ . Daí  $x_2 - x_1 \leq \frac{\pi}{c}$ . Usando a equação  $z'' + K^2 z = 0$

obtemos que  $x_2 - x_1 \geq \frac{\pi}{K}$ .

ii) Se  $u(a) = u(b) = 0$  e  $u$  tem  $n - 1$  zeros em  $(a, b)$  então os intervalos entre os zeros consecutivos em  $[a, b]$  são em número de  $n$ . Por (i) segue-se que

$$n \frac{\pi}{K} \leq b - a \leq n \frac{\pi}{c}$$

ou seja,

$$\frac{c(b-a)}{\pi} \leq n \leq \frac{K(b-a)}{\pi} \quad \blacksquare$$

Para uma generalização da proposição 5 veja o exercício 14.

## 2. Problemas de Sturm-Liouville

Chamamos *equação de Sturm-Liouville* a uma equação com coeficientes reais da forma

$$(p(x)u')' + (\lambda\rho(x) - q(x))u = 0 \quad (1)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro real e as funções  $\rho(x)$  e  $p(x)$  são positivas.

Consideremos agora a equação (1) definida num intervalo  $I$  e sejam  $\lambda_1, \lambda_2$  valores distintos do parâmetro  $\lambda$  para os quais (1) admite em  $I$  soluções não triviais  $u_1$  e  $u_2$  respectivamente.

Temos então

$$\begin{aligned}(p(x)u_1')' + (\lambda_1\rho(x) - q(x))u_1 &= 0 \\ (p(x)u_2')' + (\lambda_2\rho(x) - q(x))u_2 &= 0\end{aligned}$$

e multiplicando a primeira equação por  $u_2$ , a segunda por  $u_1$  e subtraindo obtemos

$$p(x)[u_2u_1'' - u_1u_2''] + p'(x)[u_2u_1' - u_1u_2'] = (\lambda_1 - \lambda_2)\rho(x)u_1u_2$$

ou seja

$$\frac{d}{dx} [p(x)(u_2u_1' - u_1u_2')] = (\lambda_1 - \lambda_2)\rho(x)u_1u_2. \quad (2)$$

Se  $I$  é um intervalo compacto  $I = [a, b]$  resulta de (2)

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b u_1(x)u_2(x)\rho(x)dx = [p(x)(u_2(x)u_1'(x) - u_1(x)u_2'(x))]_a^b. \quad (3)$$

Para que tenhamos  $\int_a^b u_1(x)u_2(x)\rho(x)dx = 0$  impomos às soluções de (1) condições de contorno (isto é, condições definidas nas extremidades de  $[a, b]$ ) lineares em  $u$  que anulem o termo da direita em (3). Tais condições de contorno são ditas *auto-adjuntas*.

As condições dadas separadamente em  $a$  e  $b$  por

$$\begin{cases} \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \\ \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

onde  $\alpha$  e  $\alpha'$  (resp.  $\beta$  e  $\beta'$ ) não se anulam ao mesmo tempo são um exemplo de condições de contorno auto-adjuntas. Se  $p(a) = p(b)$  outro exemplo é dado pelas condições periódicas

$$\begin{cases} u(a) = u(b) \\ u'(a) = u'(b) \end{cases} \quad (5)$$

Um problema de Sturm-Liouville regular em  $[a, b]$  consiste de uma equação do tipo (1) em  $[a, b]$  junto com condições de contorno auto-adjuntas. Os valores de  $\lambda$  para os quais o problema admite solução não trivial, isto é, para os quais (1) admite solução não trivial satisfazendo as condições de contorno fixadas são ditos *autovalores* do problema. As soluções não triviais correspondentes a um autovalor  $\lambda$  são ditas *autofunções* do problema associadas a  $\lambda$ .

1. PROPOSIÇÃO. Consideremos um problema de Sturm-Liouville regular em  $[a, b]$  para a equação (1). Se  $\lambda_1, \lambda_2$  são autovalores distintos do problema e  $u_1, u_2$  são autofunções a eles associadas então  $u_1$  e  $u_2$  são ortogonais em  $[a, b]$  em relação ao peso  $\rho(x)$ , ou seja,

$$\int_a^b u_1(x) u_2(x) \rho(x) dx = 0.$$

Demonstração. Imediata a partir das definições e do que foi feito anteriormente. ■

2. EXEMPLOS. i) O problema dado pela equação  $u'' + \lambda u = 0$  no intervalo  $0 \leq x \leq \pi$  com condições de contorno separadas  $u(0) = u(\pi) = 0$  tem como autovalores  $1, 4, \dots, n^2, \dots$  e as autofunções associadas a  $n^2$  são os múltiplos de  $u_n(x) = \text{sen } nx$ .

ii) O problema dado pela mesma equação do exemplo anterior  $u'' + \lambda u = 0$  no mesmo intervalo  $0 \leq x \leq \pi$  mas com as condições de contorno separadas  $u'(0) = u'(\pi) = 0$  tem como autovalores  $0, 1, 4, \dots, n^2, \dots$ . Associadas ao autovalor zero temos as autofunções constantes; ao autovalor  $n^2$  temos os múltiplos de  $u_n(x) = \cos nx$ .

iii) Ainda com a equação  $u'' + \lambda u = 0$  mas no intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$  temos o problema com condições periódicas  $u(\pi) = u(-\pi)$  e  $u'(-\pi) = u'(\pi)$ . Os autovalores são  $0, 1, 4, \dots, n^2, \dots$ . Associadas ao autovalor zero temos as autofunções constantes; a cada  $n^2 > 0$  corresponde um espaço bidimensional de autofunções gerado por  $u_n(x) = \cos nx$  e  $v_n(x) = \text{sen } nx$ .

Todo problema de Sturm-Liouville regular com condições de contorno dadas por (4) ou (5) admite uma seqüência infinita de autovalores que tende para  $\infty$ . Na seção 3 isto será provado para condições do tipo  $u(a) = u(b) = 0$ . Na seção 5 os casos do tipo (5) e o caso  $u'(a) = u'(b) = 0$  serão considerados.

Se a equação (1) é definida no interior de um intervalo finito  $I$ , mas em uma ou em ambas as extremidades de  $I$  temos que, ou pelo menos uma das funções  $p(x), q(x), \rho(x)$  não é contínua ou uma das funções  $p(x), q(x)$  se anula então dizemos que os problemas de contorno para (1) em  $I$  são *singulares*. Se  $I$  é um intervalo infinito, os problemas de contorno para (1) em  $I$  também são ditos *singulares*.

Em qualquer um desses casos se  $\lambda_1, \lambda_2$  são valores distintos do parâmetro  $\lambda$  para os quais (1) admite em  $I$  soluções não triviais  $u_1$  e  $u_2$  então (2) continua válida para todos os pontos interiores de  $I$  mas a integral em (3) pode ser infinita.

Por causa disso exigimos que as soluções de (1) sejam de quadrado integrável em  $I$  em relação ao peso  $\rho(x)$ . Dai

$$\left( \int_I |u_1(x)u_2(x)| \rho(x) dx \right)^2 \leq \int_I (u_1(x))^2 \rho(x) dx \int_I (u_2(x))^2 \rho(x) dx < \infty$$

e (3) se transforma em

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_I u_1(x)u_2(x)\rho(x)dx = \lim_{\substack{a' \rightarrow a \\ b' \rightarrow b}} [p(x)(u_2(x)u_1'(x) - u_1(x)u_2'(x))]_{a'}^{b'}$$

onde  $a$  e  $b$  são as extremidades de  $I$ .

Com as definições de autovalor e autofunção idênticas às dadas acima temos então imediatamente

**3. PROPOSIÇÃO.** *Consideremos um problema singular para (1) num intervalo  $I$  com condições de contorno que impliquem*

$$\lim_{\substack{a' \rightarrow a \\ b' \rightarrow b}} [p(x)(u_2(x)u_1'(x) - u_1(x)u_2'(x))]_{a'}^{b'} = 0$$

onde  $a$  e  $b$  são as extremidades de  $I$ . Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são autovalores distintos do problema e  $u_1, u_2$  são autofunções de quadrado integrável em relação a  $\rho(x)$  a eles associadas então

$$\int_I u_1(x)u_2(x)\rho(x)dx = 0. \blacksquare$$

**4. Exemplo.** No intervalo  $(0, a]$  a equação de Bessel

$$\frac{d}{dx}(xu') + \left(k^2x - \frac{n^2}{x}\right)u = 0$$

onde  $n$  está fixo, define um problema de Sturm-Liouville singular com  $\lambda = k^2$ , se impomos as condições  $u(a) = 0$  e  $u(x)$  limitada quando  $x \rightarrow 0$ . Ver seção 9 do Capítulo V.

### 3. Existência de autovalores

Consideremos o problema de Sturm-Liouville regular dado no intervalo  $[a, b]$  por

$$\begin{aligned} u'' + (\lambda\rho(x) - q(x))u' &= 0 \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Mostraremos agora como os resultados da seção 1 nos permitem provar de maneira simples a existência de uma seqüência infinita de autovalores para o problema acima.

Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  seja  $u_\lambda$  a única solução da equação (1) com  $u_\lambda(a) = 0$ ,  $u'_\lambda(a) = 1$  e consideremos a aplicação  $N: \lambda \rightarrow N(\lambda)$ , onde  $N(\lambda)$  é o número de zeros de  $u_\lambda$  em  $(a, b]$ .

1. LEMA. (i)  $\lambda > \nu$  implica  $N(\lambda) \geq N(\nu)$   
 (ii) Se  $u_\lambda(b) = 0$  então  $N$  é descontínua no ponto  $\lambda$ .

*Demonstração.* Se  $\lambda > \nu$ ,  $\lambda\rho(x) - q(x) > \nu\rho(x) - q(x)$  e o teorema de comparação de Sturm nos garante que  $u_\lambda$  se anula pelo menos uma vez entre dois zeros consecutivos de  $u_\nu$ . Daí  $N(\nu)$  é menor ou igual ao número de zeros de  $u_\lambda$  em  $(a, b)$ . Segue-se que  $N(\nu) \leq N(\lambda)$ . Caso  $u_\lambda(b) = 0$  concluímos que  $\nu < \lambda$  acarreta  $N(\nu) \leq N(\lambda) - 1$  provando que  $N$  é descontínua no ponto  $\lambda$ . ■

2. LEMA. (i)  $0 \in N(\mathbb{R})$   
 (ii)  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} N(\lambda) = \infty$ .

*Demonstração.* (i) Se  $\lambda$  é tal que  $\lambda\rho(x) - q(x) \leq 0$  em  $[a, b]$  segue-se pela proposição 1.4 que  $u_\lambda$  não se anula em  $(a, b]$ , isto é,  $N(\lambda) = 0$ .

(ii) Se  $\lambda$  é tal que  $\lambda\rho(x) - q(x) \geq \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$  em  $[a, b]$  por (i) da proposição 1.5 resulta que  $u_\lambda$  tem pelo menos  $n$  zeros em  $(a, b]$  ou seja  $N(\lambda) \geq n$ . ■

3. LEMA.  $N$  é contínua à direita e  $\lambda$  é descontinuidade de  $N$  se e só se  $u_\lambda(b) = 0$ . Nesse caso

$$N(\lambda) - \lim_{\nu \uparrow \lambda} N(\nu) = 1.$$

*Demonstração.* Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se  $N(\lambda) = 0$  claramente  $N$  é contínua em  $\lambda$ . Suponhamos então que  $N(\lambda) = n > 0$  e sejam  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  os zeros de  $u_\lambda$  em  $[a, b]$ . Como  $u'_\lambda(x_0) \neq 0, \dots,$

$u'_\lambda(x_m) \neq 0$  existem  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\delta > 0$  tais que se  $M_i = \{x \in [a, b] : |x - x_i| < \delta\}$  e  $M = \bigcup_{i=0}^m M_i$  então  $x \in M$  implica  $|u'_\lambda(x)| > \varepsilon_1$ . Além

disso, se  $u_\lambda(b) \neq 0$ , ou seja, se  $x_m \neq b$ , podemos supor que  $\delta < b - x_m$ . Se  $\varepsilon_2 = \inf \{|u_\lambda(x)| : x \in [a, b] - M\}$ , pela continuidade e diferenciabilidade das soluções de (1) em relação ao parâmetro  $\lambda$  resulta que existe  $r > 0$  tal que  $|u_\lambda(x) - u_\nu(x)| < \varepsilon_2$  e  $|u'_\lambda(x) - u'_\nu(x)| < \varepsilon_1$  para todo  $x \in [a, b]$ , se  $|\lambda - \nu| < r$ . Para um tal  $\nu$  é óbvio que se  $x \in [a, b] - M$ ,  $u_\nu(x) \neq 0$  e tem o mesmo sinal que  $u_\lambda(x)$ ; além disso,  $u_\nu$  tem no máximo um zero em cada um dos  $M_i$  pois  $u'_\nu$  não se anula em  $M$ . Vê-se então que  $u_\nu$  tem exatamente um zero em cada conjunto  $M_i$ ,  $0 \leq i < n$ , isto é,  $n - 1 \leq N(\nu) \leq n$ . Por (i) do lema 1 sai que  $N$  é contínua à direita em  $\lambda$  e que se  $\lambda$  é descontinuidade de  $N$  então  $N(\lambda) - \lim_{\nu \uparrow \lambda} N(\nu) = 1$ .

Enfim, se  $u_\lambda(b) \neq 0$  temos que existe também um zero de  $u_\nu$  em  $M_n$  e daí  $N(\nu) = n$ , provando a continuidade de  $N$  em  $\lambda$ . ■

Com base nos lemas acima podemos afirmar que os pontos de descontinuidade de  $N$  formam uma seqüência infinita  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$  com as seguintes propriedades:

- (i) Se  $\lambda < \lambda_0$ ,  $u_\lambda$  não se anula em  $(a, b)$ .
- (ii) Para  $n \geq 1$ , se  $\lambda_{n-1} < \lambda < \lambda_n$  então  $u_\lambda$  tem exatamente  $n$  zeros em  $(a, b)$  mas  $u_\lambda(b) \neq 0$ .
- (iii) Para todo  $n \geq 0$ ,  $u_{\lambda_n}$  tem exatamente  $n$  zeros em  $(a, b)$  e  $u_{\lambda_n}(b) = 0$ .
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ .

**4. PROPOSIÇÃO.** Os autovalores do problema de Sturm-Liouville regular dado em  $[a, b]$  por

$$\begin{aligned} u'' + (\lambda\rho(x) - q(x))u &= 0 \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned}$$

formam uma seqüência  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ .

A menos de uma constante, existe apenas uma autofunção  $u_n$  associada a cada  $\lambda_n$  e  $u_n$  tem exatamente  $n$  zeros em  $(a, b)$ .

*Demonstração.* Pelo que foi visto segue-se que os autovalores do problema são as descontinuidades de  $N$  e as autofunções correspondentes são as  $u_{\lambda_n}$ . ■

5. *Observação.* Seja em  $[a, b]$  o problema regular

$$\left. \begin{aligned} (p(x)u')' + (\lambda\rho(x) + q(x))u &= 0 \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Através da mudança de variável independente  $w(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)}$ ,

(2) se transforma num problema do tipo estudado nessa seção (exercício 7) seguindo-se que a proposição 4 ainda é válida nêsse caso.

Veja os exercícios 16 e 18 para generalizações da proposição 4.

#### 4. O problema da corda vibrante

O objetivo dessa seção é dar um exemplo que ilustre a maneira como as equações de Sturm-Liouville aparecem na Física Matemática. Escolhemos para isso a descrição das oscilações de uma corda com extremidades fixas em dois pontos  $a$  e  $b$ . Apesar de sua relativa simplicidade êste problema já levanta uma série de questões fundamentais da teoria de Sturm-Liouville, como a existência de autovalores e a possibilidade de expansão de uma função em série de autofunções.

Se as oscilações são suficientemente pequenas, elas podem ser descritas por meio de uma função  $y(x, t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $a \leq x \leq b$ , pois nesse caso é razoável supor que o movimento de cada ponto da corda é vertical. (isto é, as oscilações são transversais).

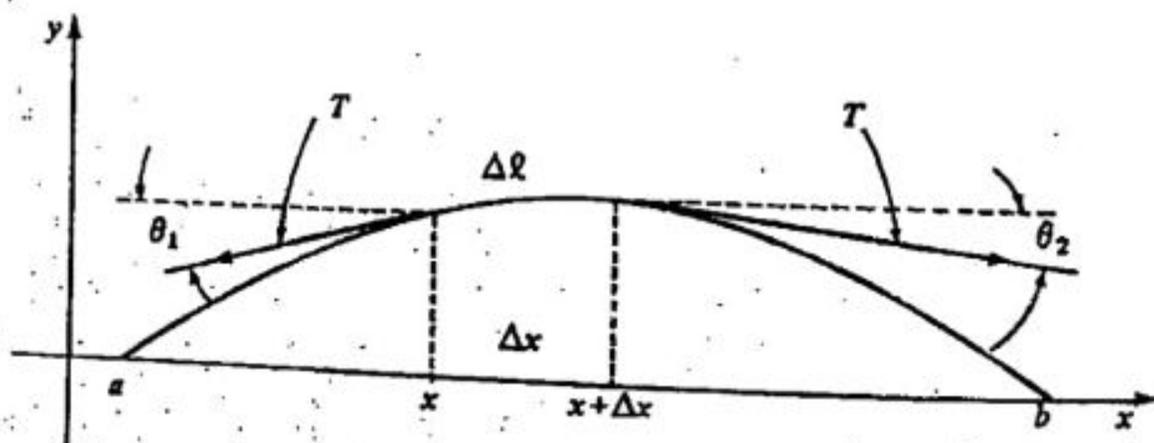


Figura 1

Consideremos agora um elemento  $\Delta\ell$  da corda correspondente aos pontos entre  $x$  e  $x + \Delta x$ . Como as oscilações são transversais, a

resultante  $F$  de todas as forças que agem sobre  $\Delta l$  é vertical. Pela segunda lei de Newton  $F$  é dada por

$$F = \rho(x) \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

onde  $\rho(x) > 0$ ,  $a \leq x \leq b$  é a densidade linear de massa da corda.

Suponhamos agora que a oscilação da corda é devida unicamente à tensão que atua sobre ela pelo fato de suas extremidades estarem fixas e que esta seja constante  $T$ . Em cada ponto  $T$  age segundo a tangente à corda (pois esta é flexível), logo

$$F = T \operatorname{sen} \theta_2 - T \operatorname{sen} \theta_1$$

Como as oscilações são pequenas podemos fazer as aproximações  $\operatorname{sen} \theta_1 \simeq \operatorname{tg} \theta_1 = \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_x$  e  $\operatorname{sen} \theta_2 \simeq \operatorname{tg} \theta_2 = \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x+\Delta x}$ , donde

$$F = T \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x+\Delta x} - T \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_x$$

$$F = T \Delta \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$$

Usando (1) obtemos então

$$T \frac{\Delta}{\Delta x} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

que por passagem ao limite nos dá a equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho(x)}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

Se no instante  $t = 0$  a corda está em repouso na posição descrita por uma função  $f(x)$  de classe  $C^2$  então o seu movimento para  $t > 0$  é obtido resolvendo-se (2) com as condições

$$\left. \begin{aligned} y(a, t) = y(b, t) &= 0 & 0 \leq t \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) &= 0 & a \leq x \leq b \\ y(x, 0) &= f(x) & a \leq x \leq b \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Deixemos de lado, por enquanto, a condição  $y(x, 0) = f(x)$  e apliquemos o método das variáveis separáveis, ou seja, procuremos soluções de (2) da forma

$$y(x, t) = u(x) v(t).$$

Substituindo em (2) resulta

$$\frac{1}{\rho(x)} \frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{T} \frac{v''(t)}{v(t)}$$

e como cada um dos lados é função de uma variável diferente segue-se que ambos devem ser iguais a uma constante que denotaremos  $-\lambda$ .

Dai  $u$  e  $v$  devem satisfazer

$$\left. \begin{aligned} u'' + \lambda \rho(x) u &= 0 \\ u(a) = u(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

e

$$\left. \begin{aligned} v'' + \lambda T v &= 0 \\ v'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Pela seção anterior sabemos que o problema de Sturm-Liouville (4) admite uma seqüência infinita de autovalores  $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$  ( $\lambda_0 > 0$  resulta da proposição 1.4). Sabemos também que as autofunções correspondentes  $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$  satisfazem

$$\int_a^b u_m(x) u_n(x) \rho(x) dx = 0$$

e podemos supor que elas estão normalizadas, ou seja,

$$\int_a^b u_n(x)^2 \rho(x) dx = 1.$$

Para cada  $n$  a solução de (5) com  $\lambda = \lambda_n$  é múltiplo de  $v_n(t) = \cos(\sqrt{\lambda_n T} t)$ . Dai segue-se que as funções

$$y_n(t) = u_n(x) \cos(\sqrt{\lambda_n T} t)$$

são soluções da equação (2) e verificam as duas primeiras condições em (3). Como isso também é válido para as combinações lineares dessas funções, procuramos uma solução de (2) que satisfaça todas as condições em (3) na forma de uma série

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x) \cos(\sqrt{\lambda_n T} t) \quad (6)$$

onde  $a_n \in \mathbb{R}$ . Se isso é possível, de  $f(x) = y(x, 0)$  resulta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x) \quad (7)$$

e como a seqüência  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  é ortonormal em  $[a, b]$  em relação ao peso  $\rho(x)$  devemos ter

$$a_n = \int_a^b f(x) u_n(x) \rho(x) dx. \quad (8)$$

Na seção seguinte mostraremos que para toda função  $f$  de classe  $C^2$  satisfazendo as condições  $u(a) = u(b) = 0$  a expansão (7) é válida, sendo a convergência uniforme em  $[a, b]$ .

Pode-se provar também que a função  $y(x, t)$  definida em (6) é de classe  $C^2$  sendo realmente uma solução para o problema da corda vibrante.

## 5. Expansão em séries de autofunções

Consideremos a equação diferencial

$$p(x)u'' + r(x)u' + q(x)u = \lambda u \quad (1)$$

onde os coeficientes são contínuos num intervalo  $[a, b]$  e  $\lambda$  é um parâmetro real.

Se  $C^0[a, b]$  é o espaço das funções reais contínuas em  $[a, b]$ ,  $C^2[a, b]$  é o subespaço das funções de classe  $C^2$  e  $L : C^2[a, b] \rightarrow C^0[a, b]$  é o operador (aplicação linear) dado por

$$L(u) = p(x)u'' + r(x)u' + q(x)u \quad (2)$$

então (1) assume a forma

$$L(u) = \lambda u. \quad (3)$$

Isto nos sugere utilizar a teoria dos operadores lineares para estudar a equação (1) e realmente, sob certas condições isto é possível. Vejamos rapidamente as definições e os resultados desta teoria que utilizaremos.

Uma *norma*  $\| \cdot \|$  num espaço vetorial  $E$  é uma aplicação  $\| \cdot \| : E \rightarrow [0, \infty)$  tal que

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| & \lambda \in \mathbb{R}, x \in E \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| & x, y \in E \\ \|x\| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Um espaço vetorial  $E$  no qual está definida uma norma é dito um *espaço normado* sendo sempre considerado como um espaço métrico com a distância canônica  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

Se  $E, F$  são espaços normados um operador  $T: E \rightarrow F$  é dito *compacto* se para toda seqüência limitada  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  em  $E$ , a seqüência  $Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n, \dots$  admite uma subseqüência que converge a um ponto de  $F$ . Vê-se facilmente que todo operador compacto é contínuo.

Um espaço vetorial real  $H$  no qual está definido um *produto interno*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , ou seja uma forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle & x, y \in H \\ \langle x, x \rangle &\geq 0 & x \in H \\ \langle x, x \rangle &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

é dito um *espaço pré-Hilbertiano*.

Todo espaço pré-Hilbertiano  $H$  é um espaço normado com a norma canônica

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

que satisfaz a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*.

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad x, y \in H$$

Dois vetores  $x, y \in H$  com  $\langle x, y \rangle = 0$  são ditos *ortogonais*. Uma seqüência finita ou infinita  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$  de vetores de  $H$  dois a dois ortogonais é dita *ortonormal* se  $\|e_n\| = 1$  para todo  $n$ . Uma seqüência ortonormal de vetores de um subespaço  $H_1 \subset H$  é dita uma *base ortonormal* para  $H_1$  se as combinações lineares finitas dos vetores da seqüência formam um subespaço denso de  $H_1$ .

**1. PROPOSIÇÃO.** Se  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$  é uma base ortonormal para um espaço pré-Hilbertiano  $H$  então

$$x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

para todo  $x \in H$ .

*Demonstração.* Ver a proposição 1 do apêndice. ■

Um operador  $T: H \rightarrow H$  é dito *auto-adjunto* se  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$  para todo  $x, y \in H$ .

Se  $E$  é um espaço vetorial dizemos que  $\lambda \in R$  é um *autovalor* de um operador  $T: E \rightarrow E$  se existe  $x \in E, x \neq 0$  tal que  $Tx = \lambda x$ . Então  $x$  é dito um *autovetor* de  $T$  associado a  $\lambda$ .

Notemos que se  $x, y$  são autovetores de um operador auto-adjunto associados a autovalores distintos  $\lambda, \gamma$  então  $x$  e  $y$  são ortogonais. Pois temos  $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \gamma \langle x, y \rangle$ , o que implica  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Enunciemos agora o resultado fundamental que utilizaremos e que é uma versão, adaptada aos nossos interesses, do teorema espectral para operadores compactos auto-adjuntos.

**2. TEOREMA.** *Seja  $H$  um espaço pré-Hilbertiano de dimensão infinita e  $T: H \rightarrow H$  um operador compacto auto-adjunto com  $T(H)$  denso em  $H$ . Então  $H$  admite uma base ortonormal  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$  tal que cada  $e_n$  é um autovalor de  $T$ . Além disso a seqüência correspondente  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  de autovalores tende para 0 e  $\lambda_n \neq 0$  para todo  $n$ .*

*Demonstração.* Ver corolário 8 do apêndice. ■

Precisaremos também do seguinte lema:

**3. LEMA.** *Seja  $(H, \langle, \rangle)$  um espaço pré-Hilbertiano e  $T: (H, \langle, \rangle) \rightarrow (H, \langle, \rangle)$  um operador autoadjunto. Seja  $(H, \| \cdot \|_1)$  uma outra estrutura de espaço normado em  $H$  tal que a identidade  $Id: (H, \| \cdot \|_1) \rightarrow (H, \langle, \rangle)$  seja contínua. Se  $T: (H, \langle, \rangle) \rightarrow (H, \| \cdot \|_1)$  é compacto então  $T: (H, \langle, \rangle) \rightarrow (H, \langle, \rangle)$  também o é. Além disso, para todo  $y \in T(H)$  a expansão*

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n$$

*na base ortonormal dada pelo teorema 2, converge na norma  $\| \cdot \|_1$ .*

*Demonstração.*  $T: (H, \langle, \rangle) \rightarrow (H, \langle, \rangle)$  é composição de  $T: (H, \langle, \rangle) \rightarrow (H, \| \cdot \|_1)$  com  $Id: (H, \| \cdot \|_1) \rightarrow (H, \langle, \rangle)$  logo é um operador compacto.

Dado  $x \in H$  temos  $Tx = \sum_{l=1}^n \langle Tx, e_l \rangle e_l$  em  $(H, \langle, \rangle)$ . Consideremos a seqüência  $x_n$  dada por  $x_n = \sum_{l=1}^n \langle x, e_l \rangle e_l$ . Temos que

$$\begin{aligned} Tx_n &= \sum_{l=1}^n \langle x, e_l \rangle Te_l = \sum_{l=1}^n \langle x, e_l \rangle \lambda_l e_l = \\ &= \sum_{l=1}^n \langle x, \lambda_l e_l \rangle e_l = \sum_{l=1}^n \langle x, Te_l \rangle e_l = \\ &= \sum_{l=1}^n \langle Tx, e_l \rangle e_l. \end{aligned}$$

Suponhamos que  $Tx_n$  não convirja para  $Tx$  em  $(H, \| \cdot \|_1)$ . Então existe uma subseqüência  $Tx_{n_k}$  tal que  $\| Tx_{n_k} - Tx \|_1 > \varepsilon$  para algum  $\varepsilon > 0$ . Como a seqüência  $x_{n_k}$  é limitada em  $(H, \langle, \rangle)$  e  $T: (H, \langle, \rangle) \rightarrow (H, \| \cdot \|_1)$  é compacto, segue-se que existe uma subseqüência de  $x_{n_k}$ , que continuaremos denotando por  $x_{n_k}$ , tal que  $Tx_{n_k}$  converge em  $(H, \| \cdot \|_1)$  a um ponto  $y$ . Claramente  $y \neq Tx$ . Mas isto é um absurdo pois  $Tx_{n_k}$  converge a  $Tx$  em  $(H, \langle, \rangle)$  e  $\text{Id}: (H, \| \cdot \|_1) \rightarrow (H, \langle, \rangle)$  é contínua. ■

Consideremos agora  $C^0[a, b]$  com a estrutura de espaço pré-Hilbertiano dada pelo produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

e denotemos a norma canônica associada por  $\| \cdot \|_2$ .

Voltando ao operador  $L: C^2[a, b] \rightarrow C^0[a, b]$  definido em (2), suponhamos que  $p(x) > 0$  em  $[a, b]$ . Pelo teorema de existência de soluções de uma equação diferencial linear segue-se que  $L$  é sobrejetivo. Daí não podemos sequer tentar aplicar o teorema 2 a  $L$  pois sua imagem está num espaço que contém propriamente o seu domínio.

Fazemos então o seguinte. Fixamos um complemento  $M$  do núcleo  $N = \{f \in C^2[a, b] : Lf = 0\}$  de  $L$ . A restrição de  $L$  a  $M$  é um operador  $L/M: M \rightarrow C^0[a, b]$  injetivo e sobrejetivo, daí sua inversa  $(L/M)^{-1}$  é um operador  $(L/M)^{-1}: C^0[a, b] \rightarrow C^0[a, b]$ . Tentamos agora aplicar o teorema 2 a  $(L/M)^{-1}$ .

Para encontrar um  $M$  conveniente procuramos condições em  $L$  para que tenhamos  $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$  para todo  $f, g \in C^2[a, b]$ .

Integrando por partes temos

$$\begin{aligned}
 \langle Lf, g \rangle &= \int_a^b pf''g \, dx + \int_a^b rf'g \, dx + \int_a^b qfg \, dx = \\
 &= pgf' \Big|_a^b - \int_a^b f'(pg)' \, dx + rgf \Big|_a^b - \int_a^b f'(rg)' \, dx + \int_a^b qfg \, dx = \\
 &= pgf' \Big|_a^b - f'(pg)' \Big|_a^b + \int_a^b f'(pg)'' \, dx + rgf \Big|_a^b - \\
 &\quad - \int_a^b f'(rg)' \, dx + \int_a^b qfg \, dx \\
 &= \int_a^b f'[(pg)'' - (rg)'] + qg \, dx + [pgf' - f'(pg)' + rgf] \Big|_a^b = \\
 &= \int_a^b f'[pg'' + (2p' - r)g' + (p'' - r' + q)g] \, dx + \\
 &\quad + [pgf' - f'(pg)' + rgf] \Big|_a^b
 \end{aligned}$$

Definindo por  $L^*$  o operador

$$L^*g = pg'' + (2p' - r)g' + (p'' - r' + q)g$$

e por  $B$  a aplicação bilinear

$$B(f, g) = pgf' - f'(pg)' + rgf$$

temos que  $\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^*g \rangle + B(f, g) \Big|_a^b$ .

O operador  $L^*$  é dito o adjunto formal de  $L$ . Se  $L = L^*$  dizemos que  $L$  é formalmente auto-adjunto. Para isso devemos ter  $2p' - r = r$  isto é,  $r = p'$ . Então  $L$  é formalmente auto-adjunto se e só se é da forma

$$Lf = pf'' + p'f' + qf = (pf')' + qf$$

e neste caso

$$B(f, g) = p(f'g - fg')$$

Resulta que  $L$  é formalmente auto-adjunto se e só se  $L$  é um operador de Sturm-Liouville.

Para que tenhamos  $\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle$  para todo  $f, g \in C^2[a, b]$ , além de  $L$  ser um operador de Sturm-Liouville devemos impor a  $f$  e  $g$  condições nos pontos  $a$  e  $b$  tais que  $B(f, g) \Big|_a^b = 0$ , isto é, temos que restringir  $L$  a um subespaço de  $C^2[a, b]$  cujos elementos satisfaçam certas condições de contorno (chamadas condições de contorno auto-adjuntas) que anulem  $B(f, g) \Big|_a^b$ . Em alguns casos provaremos que subespaços desse tipo nos dão o complemento de  $N$  que procuramos.

Vejam alguns exemplos de espaços cujas funções satisfazem condições de contorno auto-adjuntas:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \{f \in C^2[a, b] \mid f(a) = f(b) = 0\} \\
 M_2 &= \{f \in C^2[a, b] \mid f'(a) = f'(b) = 0\}
 \end{aligned}$$

Se  $p(a) = p(b)$  podemos considerar também

$$M_3 = \{f \in C^2[a, b] \mid f(a) = f(b) \text{ e } f'(a) = f'(b)\}.$$

Notemos que os espaços  $M_1, M_2, M_3$  tem codimensão 2 pois cada um deles é o núcleo de uma aplicação linear sobrejetiva de  $C^0[a, b]$  em  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo,  $M_3$  é o núcleo da aplicação linear  $f \rightarrow (f(a) - f(b), f'(a) - f'(b))$ .

4. *Observação.* Os espaços  $M_1$  e  $M_2$  são casos particulares do espaço  $M_4 = \{f \in C^2[a, b] : k_1 f(a) + \ell_1 f'(a) = 0 \text{ e } k_2 f(b) + \ell_2 f'(b) = 0\}$  onde  $k_1, k_2, \ell_1, \ell_2$  são constantes fixas tais que  $k_1$  e  $\ell_1$  (resp.  $k_2$  e  $\ell_2$ ) não se anulam ao mesmo tempo. Os resultados que vamos obter nesta seção também são válidos com as condições de contorno dadas por  $M_4$  mas a demonstração é mais complexa e não a faremos aqui.

O lema seguinte mostra que substituindo  $L$  por um operador da forma  $(L - \mu)f = Lf - \mu f$  os subespaços  $M_1, M_2$  e  $M_3$  são complementos de  $N$ .

5. LEMA. *Seja  $M$  um dos espaços  $M_1, M_2$  ou  $M_3$  acima e sejam  $\mu \geq 1 + \sup_{x \in [a, b]} q(x)$  e  $m = \inf_{x \in [a, b]} p(x)$ .*

- i)  $\langle (\mu - L)f, f \rangle \geq m \|f'\|_2^2 + \|f\|_2^2$  para todo  $f \in M$   
 ii)  $(L - \mu): M \rightarrow C^0[a, b]$  é injetiva e sobrejetiva.

*Demonstração.* i) Se  $f \in M$  temos

$$\begin{aligned} \langle (\mu - L)f, f \rangle &= - \int_a^b (pf')' f dx + \int_a^b (\mu - q)f^2 dx = \\ &= [-pf'f]_a^b + \int_a^b p(f')^2 dx + \\ &+ \int_a^b (\mu - q)f^2 dx \geq \\ &\geq m \|f'\|_2^2 + \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

pois se  $f \in M$ , as condições de contorno implicam  $[-pf'f]_a^b = 0$ .

ii) por (i) sai que se  $(L - \mu)f = 0$  então  $\|f\|_2 = 0$  isto é,  $f = 0$ . Logo  $L - \mu$  é injetiva.

O teorema de existência de soluções nos garante que  $(L - \mu): C^2[a, b] \rightarrow C^0[a, b]$  é sobrejetiva e sabemos também que  $N = \{f \in C^2[a, b] : (L - \mu)f = 0\}$  tem dimensão 2. Como  $M$  tem codimensão 2 e  $M \cap N = \{0\}$  segue-se que  $(L - \mu): M \rightarrow C^0[a, b]$  é sobrejetiva. ■

No lema seguinte denotaremos por  $\| \cdot \|_\infty$  a norma uniforme em  $C^0[a, b]$ , isto é,  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

6. LEMA. Nas condições do lema 5 temos que a inversa  $S$  de

$$(L - \mu): M \rightarrow C^0[a, b]$$

é um operador compacto

$$S: (C^0[a, b], \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (C^0[a, b], \| \cdot \|_\infty)$$

*Demonstração.* Seja  $g_n$  seqüência em  $C^0[a, b]$  tal que  $\|g_n\|_2 \leq 1$  e consideremos a única função  $f_n \in M$  tal que  $(L - \mu)f_n = g_n$ .

Por (i) do lema 5 e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz resulta

$$\|g_n\|_2 \|f_n\|_2 \geq |\langle (L - \mu)f_n, f_n \rangle| \geq m \|f'_n\|_2^2 + \|f_n\|_2^2$$

e em consequência

$$\begin{aligned} \|f_n\|_2^2 &\leq \|g_n\|_2 \|f_n\|_2 \text{ isto é, } \|f_n\|_2 \leq 1 \text{ e} \\ \|f'_n\|_2^2 &\leq \frac{1}{m} \|g_n\|_2 \|f_n\|_2 \text{ isto é, } \|f'_n\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \end{aligned}$$

Dai se  $x, y \in [a, b]$  temos

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq \int_x^y |f'_n(z)| dz \\ &\leq \sqrt{\int_x^y |f'_n(z)|^2 dz} \sqrt{\int_x^y dz} \leq \|f'_n\|_2 |x - y|^{1/2} \end{aligned}$$

isto é,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{m}} |x - y|^{1/2} \quad (*)$$

Logo, a seqüência  $f_n$  é equicontínua em  $[a, b]$ .

Para cada  $n$  seja  $x_n \in [a, b]$  tal que  $|f_n(x)| \geq |f_n(x_n)|$  para todo  $x \in [a, b]$ . Então

$$\begin{aligned} \|f_n\|_2 &\geq |f_n(x_n)| (b - a)^{1/2} \text{ e} \\ |f_n(x_n)| &\leq \frac{\|f_n\|_2}{(b - a)^{1/2}} \leq \frac{1}{(b - a)^{1/2}} \end{aligned}$$

Usando (\*) vem que

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq |f_n(x_n)| + |f_n(x) - f_n(x_n)| \\ &\leq \frac{1}{(b - a)^{1/2}} + \frac{1}{\sqrt{m}} (b - a)^{1/2} \end{aligned}$$

provando que a seqüência  $f_n$  é uniformemente limitada.

Pelo teorema de Arzela-Ascoli segue-se que existe uma subsequência de  $f_n$  convergindo uniformemente em  $C^0[a, b]$ . Isto encerra o lema. ■

Notemos que se  $v, w \in C^0[a, b]$  e  $f, g \in M$  com  $(L - \mu)f = v$  e  $(L - \mu)g = w$  então

$$\begin{aligned}\langle Sv, w \rangle &= \langle f, (L - \mu)g \rangle \\ &= \langle (L - \mu)f, g \rangle = \langle v, Sw \rangle\end{aligned}$$

provando que o operador  $S$  é auto-adjunto no espaço pré-Hilbertiano  $C^0[a, b]$ .

Apliquemos agora o que foi feito até aqui a alguns problemas de contorno.

### 7. PROPOSIÇÃO. Seja a equação de Sturm-Liouville

$$(p(x)u')' + q(x)u + \lambda u = 0, \quad (*)$$

onde  $p, p'$  e  $q$  são contínuas e  $p > 0$  em  $[a, b]$ , com uma das condições de contorno seguintes:

- a)  $u(a) = u(b) = 0$
- b)  $u'(a) = u'(b) = 0$

e, caso tenhamos  $p(a) = p(b)$ ,

- c)  $u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)$ .

Então podemos afirmar:

- i) Em cada um dos três casos, os autovalores formam uma seqüência  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  que tende para  $\infty$ .
- ii) Em cada um dos três casos existe uma base ortonormal  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  de  $C^0[a, b]$  formada por autofunções.
- iii) Se  $f \in C^2[a, b]$  satisfaz uma das condições de contorno indicadas então a expansão de  $f$  na base ortogonal correspondente dada em (ii)

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n$$

converge uniformemente em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Consideremos  $L, \mu, S$  e  $M$  como definidos anteriormente. Notemos que os autovalores de (\*) são os negativos dos autovalores de  $L$ .

Como  $S$  é compacto, auto-adjunto e  $M$  é denso no espaço pré-Hilbertiano  $C^0[a, b]$  segue-se pelo teorema 2 que existe uma base ortonormal  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  para  $C^0[a, b]$  formada de autovetores de  $S$  e tal que a seqüência correspondente  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$  de autovalores tende para 0 com  $\mu_n \neq 0$ . Pelos lemas 6 e 3 vemos que se  $f \in M$  então a expansão  $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n$  converge uniformemente em  $[a, b]$ .

De  $Sf_n = \mu_n f_n$  resulta  $Lf_n = \left(\mu + \frac{1}{\mu_n}\right) f_n$  provando que  $f_n$  é autovalor de  $L$ . A desigualdade (i) do lema 5 aplicada a  $f_n$  mostra que  $\mu_n < 0$ . Segue-se que a seqüência  $\lambda_n = \mu + \frac{1}{\mu_n}$  de autovalores de  $L$  tende para  $-\infty$ . ■

8. *Observação.* i) A proposição 7 é válida se substituirmos (\*) por  $(p(x)u')' + q(x)u + \lambda\rho(x)u = 0$  onde  $\rho(x) > 0$  em  $[a, b]$ . A prova dada aí mantém-se válida se em  $C^0[a, b]$  consideramos o produto interno  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$  e estudamos o operador  $f \rightarrow \rho^{-1}Lf$ .

ii) Com as condições de contorno dadas por (a) ou (b) no teorema 7, para cada autovalor  $\lambda_n$  existe apenas uma autofunção, módulo uma constante multiplicativa não nula. Pois não podemos ter duas soluções linearmente independentes de  $(py')' + qy + \lambda_n y = 0$  satisfazendo ao mesmo tempo uma das condições (a) ou (b). Isto não acontece no caso (c) onde o espaço das autofunções associadas a um autovalor pode ser bidimensional, como veremos no exemplo 9-(ii).

9. EXEMPLOS. (i) Para o problema

$$\begin{aligned} u'' + \lambda u &= 0 \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{aligned}$$

os autovalores são  $1, 4, \dots, n^2, \dots$  com autofunções normalizadas correspondentes dadas por

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx.$$

Segue-se que se  $f \in C^2[0, \pi]$  com  $f(0) = f(\pi) = 0$  então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx$$

onde  $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \operatorname{sen} nt \, dt$  e a série converge uniformemente em  $[0, \pi]$ .

ii) Para o problema

$$\begin{aligned} u'' + \lambda u &= 0 \\ u(-\pi) &= u(\pi) \\ u'(-\pi) &= u'(\pi) \end{aligned}$$

os autovalores são  $0, 1, 4, \dots, n^2, \dots$ . Para  $n = 0$  podemos pegar como autofunção normalizada  $u_0(x) \equiv \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ . Para cada  $n \geq 1$  o espaço das autofunções associadas a  $n^2$  é bi-dimensional; duas autofunções normalizadas linearmente independentes são

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \quad v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx$$

Logo, se  $f \in C^2[-\pi, \pi]$  com  $f(-\pi) = f(\pi)$  e  $f'(-\pi) = f'(\pi)$  então

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx + c_n \operatorname{sen} nx)$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt$$

e a série converge uniformemente em  $[-\pi, \pi]$ .

## EXERCÍCIOS

1. Mostre que os zeros de qualquer solução não trivial de  $u'' + a(x)u' + b(x)u = 0$  são isolados.
2. Prove as afirmações feitas nos exemplos dados em 2.2.
3. Determine os valores próprios do problema dado pela equação  $u'' + \lambda u = 0$  no intervalo  $[0, \pi]$  com as condições de contorno  $u(0) = u(\pi)$ ,  $u'(0) = 2u'(\pi)$ .
4. Dada uma equação da forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (*)$$

mostre que existe uma mudança da variável dependente  $y(x) = u(x)v(x)$ , onde  $v(x) \neq 0$  para todo  $x$ , que transforma (\*) na equação

$$u'' + \left( Q(x) - \frac{1}{4} (P(x))^2 - \frac{1}{2} P'(x) \right) u = 0,$$

(Sugestão: Substitua  $y(x) = u(x)v(x)$  em (\*) e identifique o coeficiente de  $u'$  na equação obtida a zero).

5. Mostre que entre dois zeros consecutivos de qualquer solução real não trivial da equação

$$(P(x)u')' + Q(x)u = 0$$

onde  $Q(x) > 0$ , existe exatamente um ponto de máximo ou um ponto de mínimo.\*

6. Seja  $y(x)$  uma solução não trivial de

$$y'' + q(x)y = 0$$

onde  $q(x) > 0$  para todo  $x > 0$ . Se

$$\int_0^{\infty} q(x) dx = \infty$$

mostre que  $u$  tem um número infinito de zeros positivos.

(Sugestão: Por contradição suponha que existe  $x_0$  tal que  $y(x_0) = 0$  e se  $x > x_0$  então  $y(x) \neq 0$ . Mostre que existe  $x_1 > 0$  tal que  $y'(x_1)$  e  $y'(x_0)$  tem sinais distintos e que isto implica a existência de um zero de  $y$  depois de  $x_0$ . Para provar a existência de  $x_1$  faça

$$\frac{y''}{y} = -q$$

e use integração por partes).

7. Considere a equação de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} [p(x)u'] + (\lambda \rho(x) + q(x))u = 0 \quad (*)$$

num intervalo  $[a, b]$  no qual  $p(x) > 0$ ,  $\rho(x) > 0$ . Mostre que a mudança da variável independente dada por

$$\omega(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)}$$

transforma (\*) numa equação do tipo

$$\frac{d^2u}{dw^2} + (\lambda \rho_1(w) + q_1(w)) = 0$$

definida em  $[0, w(b)]$  no qual  $\rho_1(w) > 0$ . Use isso para provar a proposição 3.4 para (\*).

8. (i) Mostre que toda solução da equação de Airy  $u'' + xu = 0$  possui um número infinito de zeros no eixo positivo e no máximo um no eixo negativo.  
 (ii) Mostre que se  $u(x)$  satisfaz a equação de Airy então  $y(x) = u(kx)$  satisfaz a equação  $u'' + k^2xu = 0$ .  
 (iii) Mostre que o problema de Sturm-Liouville definido pela equação de Airy no intervalo  $[0, 1]$  com as condições  $u(0) = u(1) = 0$  não tem nenhum autovalor negativo.
9. Calcule os autovalores para o problema dado por  $u'' + \lambda u = 0$  no intervalo  $[0, \pi]$  com as condições de contorno  $u(0) = u(\pi) + u'(\pi) = 0$ .
10. Para o problema de Sturm-Liouville  $u'' + (\lambda - q(x))u = 0$  num intervalo  $[a, b]$  com condições de contorno  $\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0$  e  $\beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$  mostre que todos os autovalores são positivos se  $q(x) > 0$ ,  $\alpha\alpha' < 0$  e  $\beta\beta' > 0$ .
11. Para toda solução de  $u'' + q(x)u = 0$  mostre que o produto  $u(x)u'(x)$  é uma função crescente. Use isso para dar uma nova prova de que as soluções não triviais dessa equação tem no máximo um zero. Aqui supomos  $q(x) \leq 0$ .
12. Sejam  $u(x), v(x)$  respectivamente soluções de

$$\begin{aligned} (P(x)u')' + Q(x)u &= 0 \\ (P_1(x)v')' + Q_1(x)v &= 0 \end{aligned}$$

num intervalo  $[a, b]$ . Se  $v(x)$  não se anula em  $(a, b)$  mostre que nesse intervalo temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{u}{v} (P(x)u'v - P_1(x)uv') \right] &= (Q_1 - Q)u^2 + (P - P_1)(u')^2 + \\ &+ P_1 \frac{(u'v - uv')^2}{v^2}. \end{aligned}$$

Além disso, mostre que se  $u(a) = u(b) = 0$  então

$$\int_a^b (Q_1 - Q)u^2 dx + \int_a^b (P - P_1)(u')^2 dx + \int_a^b P_1 \frac{(u'v - uv')^2}{v^2} = 0$$

(Sugestão: Para mostrar a segunda fórmula use a regra de L'Hospital, caso  $v$  se anule nas extremidades).

13. Se  $u(x)$  e  $v(x)$  são soluções reais não triviais de

$$\begin{aligned} (P(x)u')' + Q(x)u &= 0 \\ (P_1(x)v')' + Q_1(x)v &= 0 \end{aligned}$$

onde  $Q_1(x) \geq Q(x)$  e  $P(x) \geq P_1(x) > 0$  mostre que se  $x_1 < x_2$  são zeros consecutivos de  $u(x)$  então  $v(x)$  se anula pelo menos uma vez em  $(x_1, x_2)$  a menos que exista  $d \neq 0$  tal que  $v(x) = du(x)$  nesse intervalo. Nesse último caso mostre que devemos ter  $Q(x) \equiv Q_1(x)$  em  $(x_1, x_2)$ .

(Sugestão: Use o exercício 12 notando que se  $v$  não é múltiplo de  $u$  em  $(x_1, x_2)$  então  $u'v - uv'$  não se anula nesse intervalo).

14. Seja  $u(x)$  uma solução não trivial de

$$(P(x)u')' + Q(x)u = 0 \quad (*)$$

num intervalo  $I$ . Se  $0 < c_1 \leq P(x) \leq c_2$  e  $k_1 \leq Q(x) \leq k_2$  prove que:

- (i) Se  $k_2 \leq 0$  então  $u(x)$  tem no máximo um zero em  $I$ .  
 (ii) Se  $k_2 > 0$  e  $x_1 < x_2$  são zeros consecutivos de  $u(x)$  então

$$x_2 - x_1 \geq \pi \sqrt{\frac{c_1}{k_2}}.$$

(iii) Se  $k_1 > 0$ , em qualquer subintervalo de  $I$  de comprimento maior ou igual a  $\pi \sqrt{\frac{c_2}{k_1}}$  existe pelo menos um zero de  $u(x)$ .

(Sugestão: Para (ii) use o exercício 13 e compare (\*) com a equação  $\frac{d}{dx}(c_1 v') + k_2 v = 0$ . Faça a mesma coisa nos outros casos).

15. Sejam  $u(x)$  e  $v(x)$  soluções reais não triviais de

$$\begin{aligned} (P(x)u')' + Q(x)u &= 0 \\ (P_1(x)v')' + Q_1(x)v &= 0 \end{aligned}$$

num intervalo  $[a, b]$  no qual  $P(x) \geq P_1(x)$  e  $Q_1(x) > Q(x)$ . Suponhamos ainda que se  $u(a) \neq 0$  então  $v(a) \neq 0$  e

$$P(a) \frac{u'(a)}{u(a)} \geq P_1(a) \frac{v'(a)}{v(a)}.$$

(i) Mostre que se  $u(x)$  tem  $m$  zeros em  $(a, b]$  então  $v(x)$  tem pelo menos  $m$  zeros em  $(a, b)$  e o  $n$ -ésimo zero de  $v(x)$  é menor que o  $n$ -ésimo zero de  $u(x)$ .

(ii) Se  $c \in (a, b]$  é tal que  $u(c) \neq 0$ ,  $v(c) \neq 0$  e  $u(x)$  e  $v(x)$  tem o mesmo número de zeros em  $(a, c)$  então

$$P(c) \frac{u'(c)}{u(c)} > P_1(c) \frac{v'(c)}{v(c)}.$$

(Sugestão: (i) Se  $x_1$  é o primeiro zero de  $u(x)$  em  $(a, b)$  use o exercício 12 para provar que  $v(x)$  tem um zero em  $(a, x_1)$ . Veja a sugestão para esse exercício.

(ii) Se o número de zeros de  $u(x)$  e  $v(x)$  em  $(a, b)$  é  $m > 0$  e  $x_m$  é o  $m$ -ésimo zero de  $u(x)$  use (i) para provar que  $v(x)$  não se anula em  $[x_m, c]$ . Aplique então o exercício 12).

16. O objetivo desse exercício é provar que os autovalores do problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{aligned} (p(x)u')' + (\lambda\rho(x) - q(x))u &= 0 & (*) \\ \alpha u(a) + \alpha' u'(a) &= 0 & \alpha' \neq 0 \\ u(b) &= 0 \end{aligned}$$

formam uma seqüência  $v_0 < v_1 < \dots < v_n < \dots$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \infty$

e que a autofunção  $u_n$  associada a  $v_n$  tem exatamente  $n$  zeros em  $(a, b)$ . Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  seja  $u_\lambda$  a única solução de (\*) tal que  $u_\lambda(a) = 1$

e  $u'_\lambda(a) = h = -\frac{\alpha}{\alpha'}$ . Defina então a função  $\lambda \rightarrow N(\lambda)$  onde  $N(\lambda)$

é o número de zeros de  $u_\lambda$  em  $(a, b]$ . Prove:

(i) Se  $u_\lambda(b) = 0$  mostre que  $N$  é descontínua em  $\lambda$ .

(ii)  $\lambda > v$  implica  $N(\lambda) \geq N(v)$ .

(Sugestão para (i) e (ii): Igual a (i) do exercício 15).

(iii)  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} N(\lambda) = \infty$

(Sugestão: Se  $\lambda$  é tal que  $\lambda\rho(x) - q(x) \geq \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} c_2$  para todo  $x \in [a, b]$  onde  $c_2 = \sup_{a \leq x \leq b} \rho(x)$  use (iii) do exercício 14 para provar que  $N(\lambda) \geq n$ ).

(iv)  $0 \in N(\mathbb{R})$ .

(Sugestão: Para  $\gamma > 0$  suficientemente grande e  $c > 0$  mostre que a solução de  $\frac{d}{dx}(cv') - \gamma v = 0$  tal que  $v(a) = 1$ ,  $v'(a) = h$ , não se anula em  $[a, b]$ . Compare então esta equação com (\*) usando (i) do exercício 15).

(v) Mostre que  $N$  é contínua à direita e  $\lambda$  é descontinuidade de  $N$  se e só se  $u_\lambda(b) = 0$ . Mostre que nesse caso,

$$N(\lambda) - \lim_{\nu \uparrow \lambda} N(\nu) = 1.$$

(Sugestão: proceda como no lema 3.3).

Prove agora as afirmações feitas no início do exercício.

17. Sejam  $\nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_n < \dots$  os autovalores do problema de Sturm Liouville regular

$$(p(x)u')' + (\lambda\rho(x) - q(x))u = 0$$

num intervalo  $[a, b]$  com condições de contorno

$$\begin{aligned} \alpha u(a) + \alpha' u'(a) &= 0 & \alpha' &\neq 0 \\ u(b) &= 0 \end{aligned}$$

(Veja o exercício anterior). Prove:

(i) A função  $\lambda \rightarrow p(b) \frac{u'_\lambda(b)}{u_\lambda(b)}$  (onde  $u_\lambda$  é a função definida no exercício anterior) é estritamente decrescente em  $(-\infty, \nu_0)$  e quando  $\lambda \rightarrow -\infty$  (resp.  $\lambda \rightarrow \nu_0$ ) ela tende para  $\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

(Sugestão: Use (ii) do exercício 15. Para mostrar que quando  $\lambda \rightarrow -\infty$ ,  $p(b) \frac{u'_\lambda(b)}{u_\lambda(b)} \rightarrow \infty$  compare (\*) com a equação  $(c_1 v')' - \gamma v = 0$  onde  $c_1 = \inf_{a \leq x \leq b} p(x)$  e  $\gamma > 0$ . A única solução  $v_\gamma$  desta equação com condições iniciais  $v_\gamma(a) = 1$ ,  $v'_\gamma(a) = -\frac{\alpha}{\alpha'}$  satisfaz  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{v'_\gamma(b)}{v_\gamma(b)} = \infty$ ).

(ii) A função  $\lambda \rightarrow p(b) \frac{u'_\lambda(b)}{u_\lambda(b)}$  é estritamente decrescente em cada intervalo  $(\nu_i, \nu_{i+1})$  e quando  $\lambda \rightarrow \nu_i$  (resp.  $\lambda \rightarrow \nu_{i+1}$ ) ela tende para  $\infty$  (resp.  $-\infty$ ).

(Sugestão: Use (ii) do exercício 15).

18. Mostre que os autovalores do problema de Sturm-Liouville regular

$$(p(x)u')' + (\lambda\rho(x) - q(x))u = 0$$

num intervalo  $[a, b]$ , com condições de contorno

$$\begin{aligned} \alpha u(a) + \alpha' u'(a) &= 0 & \alpha' &\neq 0 \\ \beta u(b) + \beta' u'(b) &= 0 & \beta' &\neq 0 \end{aligned}$$

formam uma seqüência  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ . Além disso, a autofunção  $u_n$  associada ao autovalor  $\lambda_n$  tem exatamente  $n$  zeros em  $(a, b)$ .

(Sugestão: Fazendo  $\frac{u'(b)}{u(b)} = -\frac{\beta}{\beta'}$  use (i) do exercício anterior para

provar que existe um único  $\lambda_0 \in (-\infty, v_0)$  tal que  $\frac{u'_{\lambda_0}(b)}{u_{\lambda_0}(b)} =$

$-\frac{\beta}{\beta' p(b)}$ . Da mesma forma, use (ii) para encontrar o único

$\lambda_n \in (v_{n-1}, v_n)$  tal que  $\frac{u'_{\lambda_n}(b)}{u_{\lambda_n}(b)} = -\frac{\beta}{\beta' p(b)}$ )

19. Mostre que se
- $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$
- é a seqüência dos zeros positivos de uma solução real não trivial da equação
- $u'' + Q(x)u = 0$
- , onde
- $Q(x) > 0$
- , então
- $x_n - x_{n-1} < x_{n+1} - x_n$
- .

20. Considere um problema de Sturm-Liouville regular dado por uma equação

$$(p(x)u')' + (\lambda\rho(x) - q(x))u = 0 \quad (*)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} \alpha u(a) + \alpha' u'(a) &= 0 \\ \beta u(b) + \beta' u'(b) &= 0 \end{aligned}$$

- Mostre que se consideramos o mesmo problema mas com uma função  $q_1(x) > q(x)$  então os autovalores do novo problema são menores que os do problema original.
- Mostre que se consideramos o mesmo problema mas com uma função  $\rho_1(x) > \rho(x)$  então os autovalores negativos aumentam e os positivos decrescem.

## O TEOREMA ESPECTRAL

Seja  $H$  um espaço vetorial sobre o corpo  $K$ , onde  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Um *produto interno* em  $H$  é uma aplicação  $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$  de  $H \times H$  em  $K$  tal que para todo  $x, y, z \in H$  e  $\lambda \in K$  valem

- (i)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- (ii)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- (iii)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- (iv)  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (v)  $\langle x, x \rangle = 0$  se e só se  $x = 0$

Um espaço vetorial  $H$  no qual está definido um produto interno é dito um *espaço pré-Hilbertiano*. Notemos que se  $K = \mathbb{R}$  caímos na situação da seção IV.5. As definições feitas nessa seção são também válidas para o caso complexo e não as repetiremos aqui.

Durante todo este apêndice suporemos que  $H$  é um *espaço pré-Hilbertiano separável*, isto é, admite seqüência densa.

Dados  $x, y \in H$  temos a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

e a *identidade do paralelogramo*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

que o leitor pode verificar por computação direta.

Todo subespaço  $E \subset H$  admite uma base ortonormal. Isto pode ser provado de maneira semelhante ao caso finito, pelo método de ortogonalização de Gram-Schmidt. Além disso, seja  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  seqüência de subespaços dois a dois ortogonais cuja união gera  $E$ , ou seja, tal que as combinações lineares finitas de elementos de  $\bigcup_{n \geq 1} E_n$  são densas em  $E$ . Então uma base ortonormal para esse espaço é obtida escolhendo-se uma base ortonormal em cada um dos  $E_n$ .

1. PROPOSIÇÃO. Seja  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$  seqüência ortonormal em  $H$ .

i) (*Desigualdade de Bessel*). Para todo  $x \in H$  temos

$$\|x\|^2 \leq \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2$$

ii) Suponhamos que a seqüência seja uma base ortonormal para  $E \subset H$ . Então para todo  $x \in \bar{E}$  temos

$$x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

$$\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2$$

Além disso se  $y \in E$ ,

$$\langle x, y \rangle = \sum_n \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

onde a série converge absolutamente.

*Demonstração.* Se  $z \in H$  temos

$$0 \leq \|z - \sum_{n=1}^N \langle z, e_n \rangle e_n\|^2 = \|z\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle z, e_n \rangle|^2,$$

ou seja,  $\sum_{n=1}^N |\langle z, e_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2$  o que implica (i).

Agora, se  $x \in \bar{E}$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe um vetor  $x_\varepsilon = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \alpha_n e_n$  com  $N(\varepsilon) < \infty$  tal que  $\|x - x_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Mas  $\langle x_\varepsilon, e_n \rangle = \alpha_n$ , isto é,  $x_\varepsilon = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \langle x_\varepsilon, e_n \rangle e_n$  e daí se  $N \geq N(\varepsilon)$ ,

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n\| &\leq \|x - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n\| = \\ &= \|x - x_\varepsilon\| + \|\sum_{n=1}^N \langle x_\varepsilon - x, e_n \rangle e_n\| \end{aligned}$$

Porém  $\|\sum_{n=1}^N \langle x_\varepsilon - x, e_n \rangle e_n\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x_\varepsilon - x, e_n \rangle|^2 \leq$   
 $\leq \|x_\varepsilon - x\|^2$  por (i) logo,

$$\|x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n\| < \varepsilon \text{ para todo } N \geq N(\varepsilon).$$

Isto acarreta  $x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n$  e  $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2$ .

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em  $\mathbb{R}^N$  obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}| &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N |\langle y, e_n \rangle|^2} \\ &\leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

provando que a série converge absolutamente. O resultado segue-se se notarmos que

$$\left\langle \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{n=1}^N \langle y, e_n \rangle e_n \right\rangle = \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}. \blacksquare$$

Dado um operador  $T: H \rightarrow H$  denotaremos o seu núcleo por  $N(T) = \{x \in H: Tx = 0\}$  e sua imagem por  $ImT = \{Tx: x \in H\}$ . Notemos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  é autovalor de  $T$  se e só se  $N(T - \lambda) \neq \{0\}$  onde  $(T - \lambda)x = Tx - \lambda x$  para todo  $x \in H$ . Nesse caso  $N(T - \lambda)$  é formado pelos autovetores de  $T$  associado a  $\lambda$  mais o vetor zero.

O operador  $T$  é contínuo se e só se existe  $c > 0$  tal que  $\|Tx\| \leq c \|x\|$  para todo  $x \in H$ . Daí uma norma no espaço vetorial formado por esses operadores é dada por

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

que satisfaz  $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$  se  $x \in H$ .

**2. PROPOSIÇÃO.** Se  $T: H \rightarrow H$  é um operador auto-adjunto contínuo, então

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$$

*Demonstração.* Seja  $\gamma = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$ .

Se  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} 4 \langle Tx, y \rangle &= \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle \text{ e} \\ 4 \langle Tx, y \rangle &= \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle + \\ &\quad + i \langle T(x+iy), x+iy \rangle - i \langle T(x-iy), x-iy \rangle \end{aligned}$$

como o leitor pode verificar computando os termos à direita em ambas as equações.

Dai, em qualquer dos casos vale

$$4 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle = \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle \text{ e}$$

$$4 |\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle| \leq \gamma (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$$

$$\leq 2\gamma (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

pela identidade do paralelogramo.

Se  $\|x\| = \|y\| = 1$  segue-se que  $|\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle| \leq \gamma$ . Fazendo  $\gamma = \frac{Tx}{\|Tx\|}$  obtemos  $\|Tx\| \leq \gamma$  para todo  $x$  com  $\|x\| = 1$ , e em consequência,  $\|T\| \leq \gamma$ .

Por outro lado, se  $\|x\| = 1$

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \text{ e daí } \gamma \leq \|T\|. \blacksquare$$

Enfim, dizemos que um subespaço  $E \subset H$  é *invariante* por um operador  $T: H \rightarrow H$  se  $x \in E$  implica  $Tx \in E$ .

De agora em diante,  $T$  designará um operador compacto auto-adjunto em  $H$ .

3. LEMA. Existe um autovalor  $\lambda$  de  $T$  com  $|\lambda| = \|T\|$ .

*Demonstração.* Pela proposição 2 temos  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$  daí

existe uma seqüência  $x_n \in H$  com  $\|x_n\| = 1$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle Tx_n, x_n \rangle| = \|T\|$ . Como a seqüência  $\langle Tx_n, x_n \rangle$  é limitada e  $T$

é compacto existe subsequência  $x_{n_k}$  tal que  $\langle Tx_{n_k}, x_{n_k} \rangle$  converge a um  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $Tx_{n_k}$  tende para um ponto  $y \in H$ . Notemos que  $|\lambda| = \|T\|$ . Mas

$$\|(T - \lambda)x_{n_k}\|^2 = \|Tx_{n_k}\|^2 - 2\lambda \langle Tx_{n_k}, x_{n_k} \rangle + |\lambda|^2$$

$$\leq 2|\lambda|^2 - 2\lambda \langle Tx_{n_k}, x_{n_k} \rangle$$

e daí  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda x_{n_k}$ . Isto prova que  $y \neq 0$ . Além disso,  $Ty = T(\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda x_{n_k}) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = \lambda y$ .  $\blacksquare$

4. LEMA. (i) Os autovalores de  $T$  são todos reais e estão contidos no intervalo  $[-\|T\|, \|T\|]$ .

(ii) Se  $x, y$  são autovetores de  $T$  associados aos autovalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2$ , então  $\langle x, y \rangle = 0$ .

(iii) Se  $\lambda \neq 0$  é um autovalor de  $T$  então  $\dim N(T - \lambda) < \infty$ .

*Demonstração.* (i) Seja  $x \in H$  com  $\|x\| = 1$  um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$ . Então  $\lambda = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda}$  provando que  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Além disso  $\|T\| \geq \|Tx\| = |\lambda|$ .

(ii) Temos  $\lambda_1 \langle x, y \rangle = \langle \lambda_1 x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle x, \lambda_2 y \rangle = \lambda_2 \langle x, y \rangle$  mostrando que  $\langle x, y \rangle = 0$ .

(iii) Se  $\dim N(T - \lambda) = \infty$  podemos encontrar uma seqüência ortonormal infinita  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  em  $N(T - \lambda)$ . Segue-se que se  $i \neq j$ ,  $\|Tx_i - Tx_j\|^2 = \|\lambda x_i - \lambda x_j\|^2 = 2|\lambda|^2$  ou seja,  $\|Tx_i - Tx_j\| = \sqrt{2} |\lambda|$ . Daí a seqüência  $Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n, \dots$  não pode admitir subseqüência convergente, o que é absurdo. ■

5. LEMA. Os autovalores não nulos de  $T$  ou são em número finito ou formam uma seqüência que tem zero como único ponto de acumulação.

*Demonstração.* Por (i) do lema 3 sabemos que o conjunto dos autovalores de  $T$  é limitado. Logo, para provar o lema é suficiente mostrar que se esse conjunto possui um ponto de acumulação  $\lambda$  então  $\lambda = 0$ . Por contradição suponhamos que  $\lambda \neq 0$ . Nesse caso existe uma seqüência  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  de autovalores de  $T$  com  $|\lambda_n| > \frac{|\lambda|}{2}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ . Se  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  são autovetores associados

a esses autovalores com  $\|x_n\| = 1$ ,  $1 \leq n$ , então se  $i \neq j$ ,  $\|Tx_i - Tx_j\|^2 = \|\lambda_i x_i - \lambda_j x_j\|^2 = |\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2 \geq |\lambda|^2$ . Resulta que a seqüência  $Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n, \dots$  não admite subseqüência convergente, o que é impossível. ■

Dado um subespaço  $E \subset H$ , definimos o subespaço ortogonal a  $E$  por  $E^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in E\}$ . Notemos que  $E^\perp$  é fechado.

Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  são os autovalores não nulos de  $T$  seja  $E$  o subespaço fechado de  $H$  gerado pelos subespaços dois a dois ortogonais  $N(T - \lambda_1), N(T - \lambda_2), \dots, N(T - \lambda_n), \dots$ .

Como  $N(T)$  é o subespaço dos autovetores associados ao autovalor zero, segue-se por (ii) do lema 4 que  $N(T) \subset E^\perp$ .

Por outro lado,  $E$  é invariante por  $T$  e em consequência  $E^\perp$  também o é. Como a restrição de  $T$  a  $E^\perp$  não tem autovalores não nulos (pois todos os autovetores de  $T$  associados a autovalores não nulos estão em  $E$ ) segue-se que  $T \equiv 0$  em  $E^\perp$  pelo lema 3. Obtemos então que  $E^\perp \subset N(T)$ , o que acarreta  $E^\perp = N(T)$ .

Além disso, como  $N(T - \lambda_i) \subset \text{Im } T$  temos  $E \subset \overline{\text{Im } T}$ . Se  $x \in H$  e  $y \in N(T)$  vemos que  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0$  isto é,  $\overline{\text{Im } T} \subset N(T)^\perp$ . Daí  $N(T) \subset (\text{Im } T)^\perp \subset E^\perp = N(T)$ , ou seja,  $N(T) = (\text{Im } T)^\perp$ .

Como  $E$  é gerado pelos  $N(T - \lambda_n)$  segue-se que existe uma base ortonormal  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$  de  $E$  tal que  $e_n$  é autovetor associado ao autovalor  $\lambda_n$ , onde estamos repetindo  $\lambda_n$  um número de vezes igual a  $\dim N(T - \lambda_n)$ .

## 6. LEMA. $E = \overline{\text{Im } T}$

*Demonstração.* Já sabemos que  $E \subset \overline{\text{Im } T}$ . Dado  $x \in H$  se definimos  $y_m \in E$  por

$$y_m = \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle e_i$$

vemos que  $\|y_m\|^2 \leq \|x\|^2$  e

$$\begin{aligned} Ty_m &= \sum_{i=1}^m \langle x, e_i \rangle Te_i = \sum_{i=1}^m \langle x, \lambda_i e_i \rangle e_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \langle x, Te_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^m \langle Tx, e_i \rangle e_i \end{aligned}$$

Como  $T$  é compacto, existe subsequência  $y_{m_k}$  tal que  $Ty_{m_k}$  converge a um ponto  $y \in E$ . Mas

$$\begin{aligned} \langle Tx - y, e_j \rangle &= \langle Tx, e_j \rangle - \lim_{k \rightarrow \infty} \langle Ty_{m_k}, e_j \rangle \\ &= \langle Tx, e_j \rangle - \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{i=1}^{m_k} \langle Tx, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que acarreta  $Tx - y \in E^\perp = N(T) = (\text{Im } T)^\perp$ . Mas  $Tx - y \in \overline{\text{Im } T}$  logo  $Tx - y = 0$ . Isto prova que  $Tx \in E$ . ■

Podemos agora enunciar a seguinte proposição.

**7. PROPOSIÇÃO.** *Os autovalores de  $T$  ou são em número finito ou formam uma seqüência limitada cujo único ponto de acumulação é 0. Além disso,  $\text{Im } T$  admite uma base ortonormal formada por autovetores de  $T$  associados aos autovalores não nulos.*

*Demonstração.* Segue do que já foi feito. ■

8. **COROLÁRIO.** Se  $\dim H = \infty$  e  $\text{Im } T$  é densa em  $H$  então os autovalores de  $T$  formam uma seqüência infinita  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  com  $\lambda_n \neq 0$  para todo  $n$ , e existe uma base ortonormal de  $H$  formada por autovetores de  $T$ .

*Demonstração.* Como  $N(T) = (\text{Im } T)^\perp$ , se  $\overline{\text{Im } T} = H$  resulta que  $T$  é injetiva e daí 0 não é autovalor. Como  $\dim N(T - \lambda_n) < \infty$ , se  $\dim H = \infty$  a seqüência dos autovalores deve ser infinita. ■

O corolário 8 é suficiente para os propósitos da seção 5 do capítulo IV.

Se  $H$  for um espaço de Hilbert, isto é, se ele for completo, como  $N(T) = (\text{Im } T)^\perp$ , segue-se que  $H = N(T) \oplus \overline{\text{Im } T}$  pela proposição abaixo.

9. **PROPOSIÇÃO.** Seja  $E$  um subespaço completo dum espaço pré-Hilbertiano  $H$ . Então  $H = E \oplus E^\perp$ .

*Demonstração.* Dado  $x \notin E$  provemos que existem  $y \in E, v \in E^\perp$  com  $x = y + v$ . Temos  $d = d(x, E) > 0$  e podemos encontrar uma seqüência  $y_n \in E$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$ . Pela identidade do paralelogramo,

$$\|y_n - y_m\|^2 + \|y_n + y_m - 2x\|^2 = 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2).$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) = 4d^2$  e  $\|y_n + y_m - 2x\|^2 = 4 \left\| \frac{y_n + y_m}{2} - x \right\|^2 \geq 4d^2$  segue-se que  $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|y_n - y_m\| = 0$  e daí existe  $y \in E$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  pois  $E$  é completo. Claramente  $\|x - y\| = d(x, E)$ . Agora, se  $z \in E, z \neq 0$ ,

$$\left\| (x - y) - \frac{\langle x - y, z \rangle}{\|z\|^2} z \right\|^2 = \|x - y\|^2 - \frac{|\langle x - y, z \rangle|^2}{\|z\|^2}$$

e como  $y + \frac{\langle x - y, z \rangle}{\|z\|^2} z \in E$  segue-se que  $\|x - y\|^2 \leq \|x - (y + \frac{\langle x - y, z \rangle}{\|z\|^2} z)\|^2$  o que acarreta  $\langle x - y, z \rangle = 0$ . Daí  $x = y + (x - y)$  com  $y \in E, x - y \in E^\perp$ . ■

Pelo lema 6 existe uma base ortonormal de  $\overline{\text{Im } T}$  formada por autovalores de  $T$ . Se pegamos agora uma base ortonormal de  $N(T)$ , como  $N(T) = (\text{Im } T)^\perp$  (veja discussão antes do lema 6) usando a proposição 9 podemos concluir:

10. PROPOSIÇÃO. *Suponhamos que  $H$  é um espaço de Hilbert. Então  $H$  admite uma base formada por autovetores de  $T$ . ■*

## EQUAÇÕES LINEARES NO CAMPO COMPLEXO

Equações lineares da forma

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = 0 \quad (1)$$

chamadas equações de Bessel aparecem em muitos problemas da Física-Matemática. Por exemplo, na seção 10 discutiremos as oscilações de uma membrana circular utilizando as soluções de (1), chamadas funções de Bessel.

Notemos entretanto que para estudar as propriedades destas funções num intervalo que contém 0, não podemos aplicar a teoria desenvolvida no capítulo III, pois dividindo por  $t^2$ , os coeficientes da equação resultante apresentam descontinuidades. Pontos desse tipo chamam-se singulares, como é usual nos problemas matemáticos em que a teoria geral não se aplica.

Há porém uma relação entre as soluções de (1) nos eixos positivo e negativo, oculta pela ação separadora do ponto singular. Para exemplificar esse fenômeno, consideremos o caso mais simples, porém revelador, da equação de Euler de primeira ordem

$$x' = t^{-1} \alpha x \quad (2)$$

As soluções de (2) no eixo positivo são da forma  $c\varphi_+$  onde  $c \in \mathbb{C}$  e  $\varphi_+(t) = t^\alpha$ . Analogamente para o eixo negativo, com  $\varphi_-(t) = |t|^\alpha$ . Entretanto, por continuação analítica de  $\varphi_+$  ao plano complexo obtemos  $\varphi(z) = t^\alpha e^{i\theta\alpha}$  para  $z = te^{i\theta}$ , que no eixo negativo ( $\theta = \pi$ ) nos dá  $t^\alpha e^{i\pi\alpha}$  que é um múltiplo não trivial de  $\varphi_-$  e portanto a determina.

Isto mostra a conveniência de estudarmos a equação (2) na vizinhança de zero diretamente no plano complexo. Notemos porém que se partimos de uma solução qualquer  $\psi(t)$  no eixo positivo e efetuamos uma volta completa em torno da origem, obtemos uma nova solução de (2) dada por  $e^{2\pi i \alpha} \psi(t)$  que é distinta de  $\psi(t)$ , a menos que  $\alpha$  seja inteiro.

Então, mesmo que uma equação tenha coeficientes analíticos (não multiformes) fora da origem, as suas soluções podem ter 0 como ponto de ramificação.

Este fenômeno será estudado para um sistema qualquer na seção 1. Na seção 2 introduzimos os pontos singulares simples, que correspondem ao caso em que a matriz dos coeficientes do sistema tem um pólo de ordem um. Em torno dessas singularidades, as soluções podem ser descritas de maneira bastante satisfatória e isto será feito nas seções 3 e 4. Na seção 5 analisamos os pontos singulares de uma equação diferencial de ordem  $n$  à luz dos resultados obtidos. Na seção 6 estudamos as equações de segunda ordem cujas singularidades no plano complexo são todas simples, chamadas equações Fuchsianas. Mostramos aí que se o número dessas singularidades não supera três então seu estudo se reduz ao da equação hipergeométrica (seção 8). As soluções dessa equação serão obtidas pelo método de Frobenius (seção 7) que também será aplicado no estudo da equação de Bessel na seção 9. Enfim, como foi dito no início, na seção 10 utilizaremos as funções de Bessel na descrição das oscilações de uma membrana circular.

## 1. Pontos singulares de um sistema linear

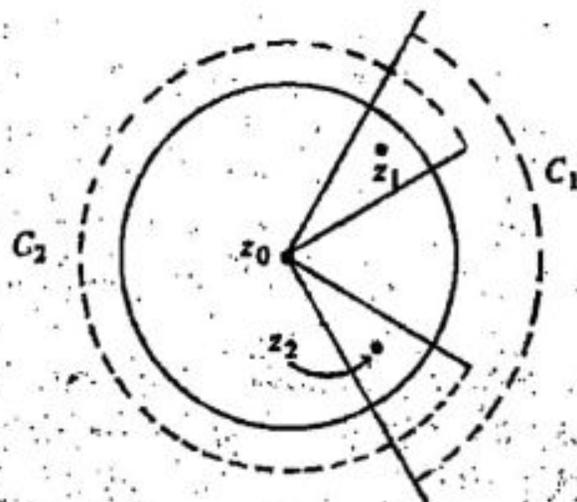
Consideremos o sistema linear

$$\omega' = A(z)\omega \quad (1)$$

onde  $A(z)$  é matriz  $n \times n$  de funções analíticas num conjunto da forma  $0 < |z - z_0| < a$ . Dizemos que  $z_0$  é *ponto regular* ou *ponto singular* de (1) conforme  $A(z)$  seja ou não analítica em  $z_0$ .

Da proposição III.7.1 resulta que se  $z_0$  é ponto regular então o sistema (1) possui uma matriz fundamental analítica em  $|z - z_0| < a$ .

Por outro lado, se  $z_0$  é ponto singular não podemos aplicar diretamente a proposição III.7.1 pois o conjunto  $0 < |z - z_0| < a$  não é simplesmente conexo.



Tentamos então obter uma matriz fundamental de (1) em  $0 < |z - z_0| < a$  em duas etapas da seguinte maneira. Fixamos dois setores circulares  $C_1, C_2$  como na figura e em  $C_1$  escolhemos uma matriz fundamental  $\phi(z)$  de (1). Depois pegamos em  $C_2$  a matriz fundamental  $\tilde{\phi}(z)$  de (1) tal que  $\tilde{\phi}(z_1) = \phi(z_1)$ . Acontece porém que podemos ter  $\tilde{\phi}(z_2) \neq \phi(z_2)$ .

1. EXEMPLO. Seja o sistema com um ponto singular em zero,  $\omega' = z^{-1}R\omega$  onde  $R$  é a matriz constante

$$R = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Para esse sistema uma matriz fundamental em qualquer conjunto simplesmente conexo contido em  $\mathbb{C} - \{0\}$  é dada por

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} z^\lambda & z^\lambda \log z \\ 0 & z^\lambda \end{pmatrix}$$

Notemos que  $\log z$  e (se  $\lambda$  não é inteiro)  $z^\lambda$  não podem ser definidos de maneira contínua e unívoca em torno do ponto zero.

Em geral este é o comportamento das soluções de um sistema na vizinhança de um ponto singular. Se fixamos  $z_1$  em  $0 < |z - z_0| < a$  e um vetor  $v \in \mathbb{C}^n$ , é óbvio que localmente existe sempre uma solução unívoca  $\omega(z)$  de (1) com  $\omega(z_1) = v$ . Mas se fazemos uma volta completa ao redor de  $z_0$  ao mesmo tempo que estendemos  $\omega(z)$ , o valor  $\omega(z_1)$  após o percurso não é necessariamente igual a  $v$ .

Por causa disso, sempre que estudamos um sistema em torno de um ponto singular, é conveniente abandonar a restrição de univocidade imposta até aqui a definição de solução e permitir que estas sejam multiformes.

Daí o procedimento efetuado acima, repetido sucessivas vezes, nos garante a existência de uma matriz fundamental (possivelmente multiforme)  $\phi(z)$  de (1) em  $0 < |z - z_0| < a$ .

Além disso, há uma relação bastante simples entre os diversos ramos de  $\phi(z)$ . Suponhamos, para facilitar a notação, que  $z_0 = 0$ . Então como  $\phi(ze^{2\pi i})$  é ainda uma matriz fundamental de (1) a proposição III.2.6 nos garante a existência de uma (única) matriz constante não singular  $C$  tal que

$$\phi(ze^{2\pi i}) = \phi(z)C$$

para todo  $z$  em  $0 < |z| < a$ . Claramente  $\phi(z)$  é unívoca se e só se  $C$  é a matriz identidade.

Se  $\psi(z)$  é outra matriz fundamental de (1) em  $0 < |z| < a$  e  $B$  é a matriz constante tal que  $\psi(ze^{2\pi i}) = \psi(z)B$ , considerando a matriz constante não singular  $T$  para qual  $\psi(z) = \phi(z)T$  (novamente a proposição III.2.6 segue-se que  $B = T^{-1}CT$ , isto é,  $B$  e  $C$  são semelhantes. Isto também pode ser provado diretamente se notarmos que  $B$  e  $C$  são, respectivamente, as matrizes em relação às bases formadas pelas colunas de  $\psi(z)$  e  $\phi(z)$ , da aplicação linear que transforma cada solução  $\omega(z)$  de (1) em  $0 < |z| < a$  na solução  $\omega(ze^{2\pi i})$ .

A matriz  $C$  definida (a menos de uma semelhança) é dita *matriz de monodromia* de (1) no ponto  $z_0$ .

Como as funções unívocas e as funções multiformes aparecem juntas com frequência, para evitar confusão, durante todo o resto deste capítulo sempre que dissermos que uma função é analítica estaremos nos referindo a funções analíticas unívocas.

Se  $P$  é uma matriz constante, definimos  $z^P$  por  $z^P = e^{(\log z)P}$  isto é,

$$z^P = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(P \log z)^n}{n!}$$

**2. PROPOSIÇÃO.** Toda matriz fundamental do sistema (1) em  $0 < |z - z_0| < a$  é do tipo

$$\phi(z) = S(z)(z - z_0)^P, \quad 0 < |z - z_0| < a$$

onde  $S(z)$  é matriz analítica em  $0 < |z - z_0| < a$  e  $P$  é matriz constante.

*Demonstração.* Podemos supor que  $z_0 = 0$ . Se  $\phi(z)$  é matriz fundamental de (1) em  $0 < |z| < a$  seja  $C$  matriz constante não singular tal que  $\phi(ze^{2\pi i}) = \phi(z)C$ . Como  $C$  é não singular, existe matriz constante  $P$  tal que  $C = e^{2\pi i P}$ . Definindo  $S(z) = \phi(z)z^{-P}$  temos

$$S(ze^{2\pi i}) = \phi(ze^{2\pi i})z^{-P}e^{-2\pi i P} = \phi(z)z^{-P}$$

isto é,  $S(ze^{2\pi i}) = S(z)$ , provando que  $S(z)$  é analítica em  $0 < |z| < a$ . ■

Se  $P$  é a matriz constante dada pela proposição 2 sejam  $T$  sua forma de Jordam e  $T$  matriz não singular tal que  $TJ = PT$ . Como  $\psi(z) = \phi(z)T$  é matriz fundamental de (1) e  $\psi(z) = S(z)(z - z_0)^P T = S(z)T(z - z_0)^J T^{-1}T = S(z)T(z - z_0)^J$  segue-se que fazendo  $V(z) = S(z)T$  temos

$$\psi(z) = V(z)(z - z_0)^J$$

onde  $V(z)$  é analítica em  $0 < |z - z_0| < a$ .

Se  $\lambda$  é autovalor de  $P$  e  $J(\lambda)$  é um bloco de Jordan de  $J$  associado a  $\lambda$ ,  $(z - z_0)^{J(\lambda)}$  é da forma

$$(z - z_0)^\lambda \begin{pmatrix} 1 & \log(z - z_0) & \frac{(\log(z - z_0))^2}{2!} & \dots & \frac{(\log(z - z_0))^s}{s!} \\ 0 & 1 & \log(z - z_0) & \dots & \frac{(\log(z - z_0))^{s-1}}{(s-1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \log(z - z_0) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Resulta que toda solução de (1) em  $0 < |z - z_0| < a$  é combinação linear de funções do tipo  $v(z)(z - z_0)^\lambda (\log(z - z_0))^m$  onde  $\lambda$  é autovalor de  $P$ ,  $0 \leq m \leq n - 1$  é inteiro e  $v(z)$  é analítica em  $0 < |z - z_0| < a$  com valores em  $\mathbb{C}^n$ .

Segue-se também que associado a cada autovalor  $\lambda$  de  $P$  existe pelo menos uma solução não nula de (1) da forma  $v(z)(z - z_0)^\lambda$  onde  $v(z)$  é analítica em  $0 < |z - z_0| < a$  com valores em  $\mathbb{C}^n$ .

Mesmo que  $z_0$  seja ponto singular de (1) pode ocorrer que toda solução do sistema seja analítica em  $z_0$ . Por exemplo, as soluções do sistema unidimensional  $\omega' = z^{-1}\omega$  são todas da fórmula  $\omega(z) = cz$ ,  $c \in \mathbb{C}$ . Temos porém o seguinte resultado.

**3. PROPOSIÇÃO.** Se  $z_0$  é ponto singular de (1) e  $\phi(z)$  é matriz fundamental analítica do sistema em  $0 < |z - z_0| < a$  tal que  $\phi(z)$  é contínua em  $z_0$ , então  $\det \phi(z_0) = 0$ .

*Demonstração.* Se  $\det \phi(z_0) \neq 0$  então  $\phi^{-1}(z)$  existe e é analítica em  $|z - z_0| < a$  e daí  $A(z) = \phi'(z)\phi(z)^{-1}$  é analítica em  $z_0$ , o que é absurdo. ■

## 2. Pontos singulares simples

Na seção anterior obtivemos alguns resultados válidos para as soluções de um sistema linear na vizinhança de um ponto singular qualquer. Daqui em diante vamos limitar o nosso estudo à classe dos pontos singulares que permite um tratamento mais direto, que são os pontos singulares simples, cuja definição damos a seguir.

Seja então o sistema linear

$$\omega' = A(z)\omega \quad (1)$$

onde  $A(z)$  é analítica em  $0 < |z - z_0| < a$ .

1. DEFINIÇÃO. O ponto  $z_0$  é dito um *ponto singular simples* para o sistema (1) se  $A(z)$  tem um pólo de ordem um em  $z_0$ . Dizemos que  $z_0$  é no máximo um *ponto singular simples* de (1) se  $A(z)$  tem no máximo um pólo em  $z_0$ , isto é, se  $z_0$  é ponto regular ou ponto singular simples de (1).

Notemos que se  $z_0$  é ponto singular simples então podemos escrever (1) na forma

$$\omega' = (z - z_0)^{-1} \tilde{A}(z) \omega$$

onde  $\tilde{A}(z)$  é analítica em  $|z - z_0| < a$  e  $\tilde{A}(z_0) \neq 0$ .

O sistema mais elementar com um ponto singular simples em  $z = z_0$  é o da forma

$$\omega' = (z - z_0)^{-1} R\omega \quad (2)$$

onde  $R$  é matriz constante, para o qual uma matriz fundamental é  $\phi(z) = (z - z_0)^R$ .

A proposição seguinte nos dá uma condição suficiente para que um sistema possa ser transformado num do tipo (2)

2. PROPOSIÇÃO. Suponhamos que o sistema (1) tem uma matriz fundamental  $\phi(z) = S(z)(z - z_0)^R$ , onde  $S(z)$  é analítica em  $z = z_0$  com  $\det S(z_0) \neq 0$ . Então  $z_0$  é no máximo ponto singular simples de (1) e a mudança da variável dependente  $\omega = S(z)u$  transforma (1) em  $u' = (z - z_0)^{-1} Ru$

*Demonstração.* Temos  $S'(z)(z - z_0)^R + (z - z_0)^{-1} S(z) R(z - z_0)^R = A(z) S(z) (z - z_0)^R$  e daí  $A(z) = S'(z) S(z)^{-1} + (z - z_0)^{-1} S(z) R S(z)^{-1}$  provando que  $A(z)$  tem no máximo um pólo de ordem um em  $z_0$ . Como  $\omega' = S'(z)u + S(z)u'$  segue-se que  $u' = [S(z)^{-1}A(z)S(z) - S(z)^{-1}S'(z)]u$  e usando a expressão de  $A(z)$  resulta que  $u' = (z - z_0)^{-1} Ru$ . ■

A definição de ponto singular simples é baseada no comportamento da matriz  $A(z)$  dos coeficientes do sistema (1) na vizinhança

de  $z_0$ . A definição de ponto singular regular, que damos a seguir, é baseada no comportamento das soluções de (1) na vizinhança de  $z_0$ . Recordemos que toda matriz fundamental de (1) em  $0 < |z - z_0| < a$  é de forma  $\phi(z) = S(z)(z - z_0)^P$  onde  $P$  é matriz constante e  $S(z)$  é matriz analítica em  $0 < |z - z_0| < a$ .

3. DEFINIÇÃO. Se  $z_0$  é um ponto singular de (1) dizemos que  $z_0$  é um ponto singular regular se  $S(z)$  tem no máximo um pólo em  $z_0$ . Dizemos que  $z_0$  é no máximo um ponto singular regular de (1) se  $z_0$  é um ponto regular ou um ponto singular regular de (1).

Logo, se  $z_0$  é no máximo ponto singular regular de (1) podemos escrever

$$\phi(z) = \tilde{S}(z)(z - z_0)^{P - kI}$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ ,  $k$  é um inteiro e  $\tilde{S}(z)$  é analítica em  $|z - z_0| < a$ , com  $\tilde{S}(z_0) \neq 0$ .

Em consequência, utilizando a forma de Jordan de  $P$  como na seção anterior, concluímos que toda solução de (1) em torno de  $z_0$  é combinação linear de funções do tipo  $v(z)(z - z_0)^{\lambda - k}(\log(z - z_0))^m$ , com  $\lambda$  autovalor de  $P$ ,  $0 \leq m \leq n - 1$  inteiro e  $v(z)$  analítica em  $|z - z_0| < a$  com valores em  $\mathbb{C}^n$ .

Sai também que associado a cada autovalor  $\lambda$  de  $P$  existe uma solução não nula de (1) de forma  $v(z)(z - z_0)^{\lambda - k}$  com  $v(z)$  analítica em  $|z - z_0| < a$ .

Para provar que todo ponto singular simples é singular regular precisamos de um lema. Antes fixemos a notação que será usada tanto na demonstração do lema como na do teorema.

Se  $B = (b_{ij})$  é matriz  $n \times n$ , definimos as normas

$$\|B\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2} \quad \text{e} \quad |B| = \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|.$$

Então se  $A = (a_{ij})$  temos  $|AB| \leq |A| |B|$  e  $\|B\| \leq |B| \leq n \|B\|$ . Além disso, como  $|I| = n$  resulta  $|e^B| \leq (n-1) + e^{|B|}$ .

4. LEMA. Seja  $J$  um intervalo da reta e  $r \rightarrow B(r)$  uma aplicação diferenciável onde  $B(r)$  é matriz  $n \times n$  não nula para todo  $r \in J$ .

Então  $\left| \frac{d \|B(r)\|}{dr} \right| \leq \|B'(r)\|$  para todo  $r \in J$ .

*Demonstração.* Se  $B(r) = (b_{ij}(r))$  temos

$$\frac{d \|B(r)\|}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \sqrt{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(r) \overline{b_{ij}(r)}} \right) = \frac{\operatorname{Re} \left( \sum_{i,j=1}^n b'_{ij}(r) \overline{b_{ij}(r)} \right)}{\|B(r)\|}$$

e daí, usando a desigualdade de Cauchy em  $\mathbb{R}^{n^2}$ ,  $\left| \frac{d \|B(r)\|}{dr} \right| \leq \|B'(r)\|$ . ■

5. TEOREMA. Se  $z_0$  é ponto singular simples de (1) então  $z_0$  é ponto singular regular.

*Demonstração.* Se  $\phi(z) = S(z)(z - z_0)^p$  é matriz fundamental de (1) com  $S(z)$  analítica em  $0 < |z - z_0| < a$ , precisamos provar que  $S(z)$  tem no máximo um pólo em  $z_0$ , isto é, que existe um inteiro não negativo  $m$  tal que  $S(z)(z - z_0)^m$  é limitada numa vizinhança de  $z_0$ .

Como  $z_0$  é ponto singular simples de (1) podemos escrever  $A(z) = (z - z_0)^{-1} \tilde{A}(z)$  com  $\tilde{A}(z)$  analítica em  $|z - z_0| < a$ . Fixando  $0 \leq \theta < 2\pi$  seja  $f(r) = \|\phi(z_0 + re^{i\theta})\|$  para  $0 < r < a$ . Como  $\frac{d}{dr} \phi(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{d\phi}{dz}(z_0 + re^{i\theta}) e^{i\theta}$ , usando o lema sai que

$$\left| \frac{df}{dr}(r) \right| \leq \left\| \frac{d\phi}{dz}(z_0 + re^{i\theta}) \right\| \leq \frac{n^2}{r} f(r) \|\tilde{A}(z_0 + re^{i\theta})\|$$

Daí se  $\|\tilde{A}(z)\| \leq \frac{c}{n^2}$  para  $|z - z_0| < r_1 < a$  segue-se que

$$\left| \frac{df}{dr}(r) \right| \leq c \frac{f(r)}{r}, \quad 0 < r < r_1.$$

Então  $\frac{df}{dr}(r) + c \frac{f(r)}{r} \geq 0$  ou seja,

$\frac{df}{dr}(r) + \frac{c}{r} f(r) \geq 0$  se  $0 < r \leq r_1$ . Integrando entre  $r$  e  $r_1$  resulta

$$\log \left( \frac{f(r_1)r_1^c}{f(r)r^c} \right) \geq 0 \text{ e em conseqüência, } f(r) \leq \frac{f(r_1)r_1^c}{r^c}.$$

Se  $d = \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} (r_1^c \|\phi(z_0 + r_1 e^{i\theta})\|)$  obtemos para  $0 < r < r_1$ ,

$$\|\phi(z_0 + re^{i\theta})\| \leq \frac{d}{r^c} \quad (*)$$

Por outro lado, se  $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$  temos  $|(z - z_0)^{-P}| \leq |e^{-(\log \rho)^P}| |e^{-i\theta P}|$  e  $|e^{-i\theta P}| \leq (n-1) + e^{2\pi|P|}$ . Além disso, se  $\rho < 1$ ,  $|e^{-(\log \rho)^P}| \leq (n-1) + e^{|\log \rho| |P|} = (n-1) + \rho^{-|P|} = (n-1) + \rho^{-|P|} \leq n\rho^{-|P|}$ . Nestas condições temos

$$|(z - z_0)^{-P}| \leq n((n-1) + e^{2\pi|P|}) \rho^{-|P|} \quad (**)$$

Como  $S(z) = \phi(z)(z - z_0)^{-P}$ , se  $m \geq c + |P|$  então por (\*) e (\*\*) resulta que para  $0 < |z - z_0| < \min(1, r_1)$ ,  $S(z)(z - z_0)^m$  é limitado. ■

A recíproca do teorema 4 não é válida em geral Pois se

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2z^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

vê-se que zero não é ponto singular simples para o sistema  $\omega' = A(z)\omega$  embora seja ponto singular regular. Isto porque

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} z^2 & z^{-1} \\ 2z & -z^{-2} \end{pmatrix}$$

é uma matriz fundamental para o sistema.

Na seção 5 veremos porém que os conceitos de ponto singular simples e ponto singular regular são equivalentes para equações diferenciais de ordem qualquer.

Se o sistema linear

$$\omega' = A(z)\omega \quad (3)$$

é tal que  $A(z)$  é analítica para todo  $z$  suficientemente grande, podemos estudar o seu comportamento no ponto  $z = \infty$  introduzindo a variável

$$\xi = \frac{1}{z}.$$

Então se  $\tilde{\omega}(\xi) = \omega\left(\frac{1}{\xi}\right)$  e  $\tilde{A}(\xi) = A\left(\frac{1}{\xi}\right)$ , (3) se transforma no sistema

$$\tilde{\omega}' = -\frac{\tilde{A}(\xi)}{\xi^2} \tilde{\omega} \quad (4)$$

e por hipótese existe  $a > 0$  tal que  $-\frac{\tilde{A}(\xi)}{\xi^2}$  é analítica em  $0 < |\xi| < a$ .

Dizemos que  $z = \infty$  é um ponto regular, singular, singular simples, singular regular, etc para o sistema (3) se o ponto  $\xi = 0$  tem as mesmas propriedades para o sistema (4).

6. PROPOSIÇÃO. Uma condição necessária e suficiente para que o sistema (3) tenha no máximo um ponto singular simples em  $z = \infty$  é que  $A(z)$  seja analítica em  $z = \infty$  e  $A(\infty) = 0$ .

*Demonstração.* Para que  $z = \infty$  seja no máximo um ponto singular simples de (3), o ponto  $\xi = 0$  deve ser regular ou singular simples para o sistema (4). Daí  $\frac{A(\xi)}{\xi^2}$  deve ter no máximo um pólo de ordem um em  $\xi = 0$  e isto obriga  $A(\xi)$  a ser analítica em  $\xi = 0$  tendo aí pelo menos um zero de ordem um. ■

### 3. Soluções formais em pontos singulares simples

Consideremos o sistema, regular em  $z_0$

$$\omega' = \left( \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k B_k \right) \omega \quad (1)$$

onde  $B_0, B_1, \dots$  são matrizes constantes e  $\sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k B_k$  converge para  $|z - z_0| < a$ . Sabemos pela seção III.7 que se uma série formal (isto é, uma série da qual em princípio não sabemos se converge em algum ponto  $z \neq z_0$ )

$$\sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k a_k \quad a_k \in \mathbb{C}^n \quad (2)$$

satisfaz formalmente

$$\begin{aligned} &(a_1 + 2(z - z_0)a_1 + 3(z - z_0)^2 a_2 + \dots) = \\ &= (B_0 + (z - z_0)B_1 + (z - z_0)^2 B_2 + \dots)(a_0 + (z - z_0)a_1 + (z - z_0)^2 a_2 + \dots) \end{aligned}$$

no sentido de que as identidades

$$\begin{aligned} a_1 &= B_0 a_0 \\ k a_k &= \sum_{j=0}^{k-1} B_j a_{k-j-1} \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

são válidas, então (2) converge em  $|z - z_0| < a$  e é efetivamente uma solução do sistema.

Nesta seção desejamos provar um resultado semelhante para o caso em que  $z_0$  é ponto singular simples de um sistema linear. Como as soluções em torno desses pontos envolvem termos da forma  $(z - z_0)^{\lambda} (\log(z - z_0))^m$  vamos considerar séries mais gerais que as séries de potências.

Uma *série logarítmica formal* é uma expressão

$$p(z) = \sum_{i,j=0}^{\infty} (z - z_0)^{\lambda_i} (\log(z - z_0))^j p_{i,j}(z) \quad (3)$$

onde  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,  $j$  é inteiro não negativo e  $p_{i,j}(z)$  é uma série de potências formal  $p_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k$  com  $a_{i,j}^{(k)} \in \mathbb{C}^n$  e  $p_{i,j}(z) = 0$  (isto é  $a_{i,j}^{(k)} = 0$  para  $k \geq 0$ ) exceto para um número finito de índices.

Notemos que derivando (3) termo a termo resulta a série logarítmica formal

$$p'(z) = \sum_{i,j=0}^{\infty} (z - z_0)^{\lambda_i} (\log(z - z_0))^j [p'_{i,j}(z) + \lambda_i (z - z_0)^{-1} p_{i,j}(z) + (j + 1)(z - z_0)^{-1} p_{i,j+1}(z)] \quad (4)$$

Seja agora o sistema

$$\omega' = (z - z_0)^{-1} \left( B + \sum_{k=1}^{\infty} (z - z_0)^k A_k \right) \omega \quad (5)$$

onde  $B, A_1, A_2, \dots$  são matrizes constantes e  $\sum_{k=1}^{\infty} (z - z_0)^k A_k$  converge para  $|z - z_0| < a$ . Obviamente o sistema (5) tem no máximo um ponto singular simples em  $z_0$ .

Dizemos que a série logarítmica formal (3) é *solução formal* do sistema (5) se as identidades

$$B a_{i,j}^{(0)} = \lambda_i a_{i,j}^{(0)} + (j + 1) a_{i,j+1}^{(0)}$$

$$B a_{i,j}^{(k)} + \sum_{s=1}^k A_s a_{i,j}^{(k-s)} = (\lambda_i + k) a_{i,j}^{(k)} + (j + 1) a_{i,j+1}^{(k)}$$

são válidas para  $k \geq 1$  e  $i, j \geq 0$ . Para ver o motivo desta definição, basta substituir as expressões (3) e (4) em (5) e proceder formalmente.

**1. PROPOSIÇÃO.** *Se a série logarítmica formal (3) é solução formal do sistema (5) então (3) converge para  $0 < |z - z_0| < a$  e é aí uma solução efetiva de (5).*

*Demonstração.* Como a série  $\sum_{k=1}^{\infty} (z - z_0)^k A_k$  converge para  $|z - z_0| < a$  temos  $\limsup |A_k|^{1/k} \leq \frac{1}{a}$  e daí, se  $\rho > \frac{1}{a}$  vale  $|A_k| \leq \rho^k$  para todo  $k$  suficientemente grande. Logo existem  $c > 0$ ,  $\rho > 0$  tais que  $|A_k| \leq c\rho^k$  para todo  $k \geq 1$  e podemos escolher  $r > 0$  tal que  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^k < c^{-1}$ .

Se  $m$  é inteiro tal que  $|B| \leq m$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  com  $|\lambda| > m$ , então para todo  $y \in \mathbb{C}^n$ ,  $|By - \lambda y| \geq |\lambda| |y| - |By| \geq (|\lambda| - m) |y|$  ou seja,

$$|y| \leq \frac{|By - \lambda y|}{|\lambda| - m} \quad (6)$$

Considerando os expoentes  $\lambda_i$  e  $j$  que aparecem nos termos não nulos de (3) fazemos  $N = \max |\lambda_i|$  e  $M = \max j$ . Podemos então encontrar  $\gamma \geq 1$  satisfazendo

$$|a_{i,j}^{(k)}| \leq \gamma r^k$$

para todo  $i, j$  e para  $k = 1, \dots, m + M + N$ .

Fixando  $i$ , seja  $j_0$  o maior inteiro tal que  $p_{i,j_0}(z) \neq 0$ . Provemos que

$$|a_{i,j_0}^{(k)}| \leq \gamma r^k \quad (7)$$

para  $k \geq 1$ . Por indução, suponhamos que (7) é válido para todo  $s \leq k - 1$  onde  $k - 1 \geq m + M + N$ . Então

$$B a_{i,j_0}^{(k)} - (\lambda_i + k) a_{i,j_0}^{(k)} = - \sum_{s=1}^k A_s a_{i,j_0}^{(k-s)}$$

e daí

$$\begin{aligned} |B a_{i,j_0}^{(k)} - (\lambda_i + k) a_{i,j_0}^{(k)}| &\leq c\gamma \sum_{s=1}^k \rho^s r^{(k-s)} \\ &\leq c\gamma r^k \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^s \leq \gamma r^k \end{aligned}$$

e como  $|\lambda_i + k| - m \geq 1$ , por (6) segue-se que  $|a_{i,j_0}^{(k)}| \leq \gamma r^k$ , completando a indução.

Provemos agora que

$$|a_{i,j_0-1}^{(k)}| \leq \gamma r^k \quad (8)$$

para  $k \geq 1$ . Como antes suponhamos que (8) é válido para todo  $s \leq k - 1$  onde  $k - 1 \geq m + M + N$ . Então

$$Ba_{i, j_0-1}^{(k)} - (\lambda_i + k) a_{i, j_0-1}^{(k)} = - \sum_{s=1}^k A_s a_{i, j_0-1}^{(k-s)} + j_0 a_{i, j_0}^{(k)}$$

e obtemos

$$\begin{aligned} |Ba_{i, j_0-1}^{(k)} - (\lambda_i + k) a_{i, j_0-1}^{(k)}| &\leq c\gamma \sum_{s=1}^k \rho^s r^{k-s} + j_0 \gamma r^k \\ &\leq \gamma r^k + j_0 \gamma r^k = (j_0 + 1) \gamma r^k. \end{aligned}$$

Como  $|\lambda_i + k| \geq k - |\lambda_i| \geq m + 1 + M \geq m + 1 + j_0$

ou seja,  $|\lambda_i + k| - m \geq j_0 + 1$ , por (6) segue-se que

$$|a_{i, j_0-1}^{(k)}| \leq \frac{(j_0 + 1) \gamma r^k}{j_0 + 1} = \gamma r^k,$$

completando assim a indução.

Continuando com este procedimento, num número finito de etapas obtemos que

$$|a_{i, j}^{(k)}| \leq \gamma r^k$$

$i, j \geq 0$  e  $k \geq 1$ . Daí  $|a_{i, j}^{(k)}|^{1/k} \leq \gamma^{1/k} r \leq r$  e as séries  $p_{i, j}(z)$  convergem para  $|z - z_0| < \frac{1}{r}$ . Em consequência (3) converge para  $0 < |z - z_0| < \frac{1}{r}$  e é aí uma solução efetiva de (5) pois as operações formais são justificadas nesse conjunto.

Para mostrar que (3) converge em  $0 < |z - z_0| < a$  notemos que, rearranjando os termos de (3) se necessário, podemos supor que se  $p_{i_1, j}(z)$  e  $p_{i_2, j}(z)$  são não nulos então  $\lambda_{i_1} - \lambda_{i_2}$  não é inteiro (isto para que  $(z - z_0)^{\lambda_{i_1}} (\log(z - z_0))^j p_{i_1, j}(z)$  e  $(z - z_0)^{\lambda_{i_2}} (\log(z - z_0))^j p_{i_2, j}(z)$  sejam independentes). Como existe uma solução  $\omega(z)$  de (5) em  $0 < |z - z_0| < a$  cuja restrição a  $0 < |z - z_0| < \frac{1}{r}$  é igual a  $p(z)$  e como  $\omega(z)$  admite uma única expansão em série logaritmica com as propriedades acima, pois  $z_0$  é ponto singular regular de (5), segue-se que  $p(z)$  converge em  $0 < |z - z_0| < a$  e  $p(z) = \omega(z)$ . ■

**2. OBSERVAÇÃO.** Uma solução formal em torno de um ponto singular pode divergir se ele não for simples. Veja o exercício 7 para um exemplo no caso de uma equação diferencial.

## 4. Matrizes fundamentais em um ponto singular simples

Um sistema linear para o qual  $z = 0$  é ponto singular simples é do tipo

$$\omega' = B(z)\omega = \left( z^{-1}R + \sum_{m=0}^{\infty} z^m B_m \right) \omega \quad (1)$$

onde  $R, B_m$  são matrizes constantes com  $R \neq 0$  e a série  $\sum_{m=0}^{\infty} z^m B_m$  converge num conjunto  $|z| < a$ .

Como  $z = 0$  é ponto singular regular de (1) (ver seção 2) toda matriz fundamental desse sistema em  $0 < |z| < a$  é da forma

$$\phi(z) = S(z)z^Q = \left( \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m \right) z^Q \quad (2)$$

onde  $Q, P_m$  são matrizes constantes. Substituindo (2) em (1) temos

$$\begin{aligned} (P_0 + zP_1 + z^2P_2 + \dots)z^{-1}Qz^Q + (P_1 + 2zP_2 + 3z^2P_3 + \dots)z^Q = \\ = (z^{-1}R + B_0 + zB_1 + z^2B_2 + \dots)(P_0 + zP_1 + z^2P_2 + \dots)z^Q \end{aligned}$$

o que, após cancelarmos  $z^Q$  e multiplicarmos ambos os lados por  $z$ , se transforma em

$$\begin{aligned} (P_0 + zP_1 + z^2P_2 + \dots)Q + (zP_1 + 2z^2P_2 + 3z^3P_3 + \dots) = \\ = (R + zB_0 + z^2B_1 + z^3B_2 + \dots)(P_0 + zP_1 + z^2P_2 + \dots) \end{aligned}$$

Em conseqüência  $Q$  e os coeficientes  $P_m$  devem satisfazer

$$\begin{aligned} P_0Q &= RP_0 \\ P_kQ + kP_k &= RP_k + \sum_{s=0}^{k-1} B_s P_{k-s-1}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

A primeira dessas relações é satisfeita se fizermos  $P_0 = I$  e  $Q = R$ . Nêsse caso a segunda, que é uma relação de recorrência para os  $P_k$ , se transforma em

$$P_kR - RP_k + kP_k = \sum_{s=0}^{k-1} B_s P_{k-s-1}. \quad (3)$$

Notemos que (3) pode ser sempre resolvida se a aplicação linear  $P \rightarrow PR - RP$  não tiver nenhum inteiro negativo como autovalor.

1. LEMA. Se  $R$  é uma matriz  $n \times n$  constante, os  $n^2$  autovalores da aplicação linear  $T(P) \equiv PR - RP$ , definida no espaço das matrizes  $n \times n$  são exatamente os números  $\lambda_i - \lambda_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  onde  $\lambda_m$ ,  $1 \leq m \leq n$  são os autovalores de  $R$ .

*Demonstração.* Sejam  $J$  a forma de Jordan de  $R$  e  $C^i$  a matriz  $n \times n$  cujos elementos são todos nulos exceto o da linha  $i$ , coluna  $j$ , que é igual a 1. Então vê-se facilmente que

$$C^i J - J C^i = (\lambda_j - \lambda_i) C^i + \delta C^i_{i+1} + \varepsilon C^i_{i-1}$$

onde  $\lambda_m$ ,  $1 \leq m \leq n$  é o  $m$ -ésimo autovalor da diagonal de  $J$ ,  $\delta$  e  $\varepsilon$  são iguais a 0, 1 ou  $-1$  e os termos da forma  $C^i_{n+1}$  e  $C^i_j$  são nulos. Segue-se que a matriz da aplicação linear  $P \rightarrow PJ - JP$  em relação à base ordenada  $C^1_n, C^2_n, \dots, C^n_n, C^1_{n-1}, \dots, C^n_{n-1}, \dots, C^1_1$  do espaço das matrizes  $n \times n$  é triangular e os elementos da diagonal principal (que são os autovalores dessa aplicação) são exatamente os  $\lambda_i - \lambda_j$ . Agora, se  $V$  é matriz não singular tal que  $RV = VJ$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , as equações  $PR - RP + \alpha P = S$  e  $(V^{-1}PV)J - J(V^{-1}PV) + \alpha(V^{-1}PV) = V^{-1}SV$  são equivalentes, provando que os autovalores de  $T$  são os  $\lambda_i - \lambda_j$ . ■

Podemos provar agora o seguinte resultado.

2. PROPOSIÇÃO. Se no sistema (1) a matriz  $R$  não tem dois autovalores cuja diferença seja um inteiro não nulo, então o sistema admite uma matriz fundamental  $\phi(z)$  da forma

$$\phi(z) = \left( I + \sum_{m=1}^{\infty} z^m P_m \right) z^R \quad 0 < |z| < a.$$

onde  $P_m$ ,  $m \geq 1$  é matriz constante  $n \times n$ .

*Demonstração.* Pelo lema segue-se que as relações de recorrência (3) podem ser resolvidas caso  $R$  não tenha dois autovalores cuja diferença seja um inteiro não nulo. Com os  $P_k$ ,  $1 \leq k$  assim obtidos, a série  $\phi(z) = (I + zP_1 + z^2P_2 + \dots)z^R$  é uma solução formal de (1) e daí pela proposição 1 da seção anterior, é uma solução efetiva de (1) em  $0 < |z| < a$ . Se  $\phi(z)$  não fôsse matriz fundamental de (1) teríamos  $\det \phi(z) \equiv 0$  em  $0 < |z| < a$  o que é absurdo pois  $\det z^R \neq 0$  em  $0 < |z| < a$  e  $S(0) = I$ . ■

3. OBSERVAÇÕES. i) Com as hipóteses da proposição vemos então facilmente que existe uma matriz fundamental

do sistema (1) da forma  $\psi(z) = \tilde{S}(z)z^J$  com  $\tilde{S}(0) = T$  onde  $J$  é a forma de Jordan de  $R$  e  $T$  é matriz não singular tal que  $RT = TJ$ .

ii) Ainda com as hipóteses da proposição vemos (proposição 2 da seção 2) que a mudança da variável dependente  $\omega = S(z)u$  transforma (1) no sistema  $u' = z^{-1}Ru$ .

Se a matriz  $R$  possui pelo menos dois autovalores cuja diferença é um inteiro não nulo então em geral não existe nenhuma matriz fundamental de (1) da forma  $\tilde{S}(z)z^R$  com  $\tilde{S}(z)$  analítica em  $0 < |z| < a$ . Mas podemos sempre encontrar uma matriz fundamental de (1) da forma  $S(z)z^D$  onde  $S(z)$  é analítica em  $|z| < a$  e  $D$  é matriz cujos autovalores são todos também autovalores de  $R$ . Para provar isso faremos uso do seguinte lema.

4. LEMA. *Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ( $r \leq n$ ) os autovalores distintos de  $R$ . Então existe*

$$T(z) = V \begin{pmatrix} zI_s & 0 \\ 0 & I_{n-s} \end{pmatrix}$$

onde  $s$  é a multiplicidade de  $\lambda_1$  como autovalor de  $R$  e  $V$  é matriz constante não singular, tal que a mudança da variável dependente  $\omega = T(z)\varphi$  transforma (1) num sistema da forma

$$\varphi' = \left( z^{-1}\tilde{R} + \sum_{m=0}^{\infty} z^m \tilde{B}_m \right) \varphi$$

onde a série  $\sum_{m=0}^{\infty} z^m \tilde{B}_m$  converge para  $|z| < a$  e os autovalores de  $\tilde{R}$  são  $\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ .

*Demonstração.* Suponhamos primeiro que  $R$  está na forma de Jordan e escrevamos  $R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$  onde  $R_1$  é  $s \times s$  e contém todos os blocos de Jordan correspondentes ao autovalor  $\lambda_1$ . Se

$\omega = \begin{pmatrix} zI_s & 0 \\ 0 & I_{n-s} \end{pmatrix} \varphi$  o sistema (1) se transforma em

$$\varphi' = \left[ \begin{pmatrix} z^{-1}I_s & 0 \\ 0 & I_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11}(z) & B_{12}(z) \\ B_{21}(z) & B_{22}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zI_s & 0 \\ 0 & I_{n-s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z^{-1}I_s & 0 \\ 0 & I_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \varphi$$

ou seja, no sistema

$$\varphi' = \begin{pmatrix} B_{11}(z) - z^{-1}I_2 & z^{-1}B_{12}(z) \\ zB_{21}(z) & B_{22}(z) \end{pmatrix} \varphi.$$

Agora, se  $B_m = \begin{pmatrix} B_m^{(11)} & B_m^{(12)} \\ B_m^{(21)} & B_m^{(22)} \end{pmatrix}$  então  $\varphi' = (z^{-1}\tilde{R} + A(z))\varphi$  onde  $A(z)$  é analítica em  $|z| < a$  e  $\tilde{R} = \begin{pmatrix} R_1 - I_2 & B_0^{(12)} \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$ . Claramente os autovalores de  $\tilde{R}$  são  $\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ .

No caso geral, se  $J = V^{-1}RV$  é a forma de Jordan de  $V$ , a mudança de variável  $\omega = V\psi$  nos leva ao caso particular anterior. ■

**5. PROPOSIÇÃO.** O sistema (1) tem uma matriz fundamental da forma  $\phi(z) = S(z)z^D$  onde  $S(z)$  é analítica em  $|z| < a$  e  $D$  é matriz constante com as seguintes propriedades:

- i)  $D$  não tem dois autovalores cuja diferença seja um inteiro não nulo.
- ii) Todos os autovalores de  $D$  são autovalores de  $R$ .

*Demonstração.* É suficiente aplicar o lema anterior um número finito de vêzes. ■

## 5. A equação de ordem $n$

Consideremos a equação

$$\omega^{(n)} + b_1(z)\omega^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(z)\omega' + b_n(z)\omega = 0 \quad (1)$$

onde as funções  $b_1(z), \dots, b_n(z)$  são analíticas em  $0 < |z - z_0| < a$ . Se pelo menos uma das funções  $b_1(z), \dots, b_n(z)$  não é analítica em  $z_0$  dizemos que  $z_0$  é um ponto singular da equação (1); no caso contrário,  $z_0$  é dito ponto regular de (1).

Nos capítulos anteriores associamos a (1) o sistema

$$\varphi' = A(z)\varphi \quad (2)$$

onde  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ,  $\varphi_1 = \omega$  e

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_n(z) & -b_{n-1}(z) & -b_{n-2}(z) & \dots & -b_2(z) & -b_1(z) \end{pmatrix}$$

Fazendo isso, podemos concluir, usando os resultados da seção 1, que toda solução de (1) em torno de  $z_0$  é soma de funções da forma  $p(z)(z - z_0)^\lambda (\log(z - z_0))^m$  onde  $0 \leq m \leq n - 1$  é inteiro,  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $p(z)$  é analítica em  $0 < |z - z_0| < a$ ; vemos também que (1) tem pelo menos uma solução da forma  $p(z)(z - z_0)^\lambda$ ,  $\lambda$  e  $p(z)$  como acima.

Porém, se tentamos definir  $z_0$  como sendo ponto singular simples para a equação (1) se e só se o é para o sistema (2), obtemos uma definição excessivamente restrita. Pois, nêsse caso, para que  $z_0$  fôsse ponto singular simples os coeficientes  $b_1(z), \dots, b_n(z)$  deveriam ter no máximo um pólo de ordem um em  $z_0$ , condição que não é satisfeita pelas equações mais importantes.

E conveniente portanto, introduzir uma nova variável dependente  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$  tal que  $\psi_i = (z - z_0)^{i-1} \varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Então o sistema (1) se transforma no sistema

$$\psi' = (z - z_0)^{-1} \tilde{A}(z) \psi \tag{3}$$

onde

$$\tilde{A}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & \dots & 1 \\ -(z-z_0)^n b_n(z) - (z-z_0)^{n-1} \cdot b_{n-1}(z) & -(z-z_0)^{n-1} \cdot b_{n-2}(z) & \dots & -(z-z_0)^2 b_2(z) & n-1 & -(z-z_0) b_1(z) \end{pmatrix}$$

Notemos que, como  $\psi_1 = \varphi_1 = \omega$ , os elementos da primeira linha de qualquer matriz fundamental de (3) em torno de  $z_0$  formam aí uma base para o espaço das soluções da equação (1).

Dizemos então que  $z_0$  é *ponto singular simples* ou *ponto singular regular* para a equação (1) se  $z_0$  tem as mesmas propriedades em relação ao sistema (3). Isto é equivalente às seguintes definições.

1. DEFINIÇÃO. Se  $z_0$  é ponto singular de (1), dizemos que  $z_0$  é um *ponto singular simples* se  $(z - z_0)^k b_k(z)$  é analítica em  $z_0$  para  $1 \leq k \leq n$ , isto é, se  $b_k(z)$  tem no máximo um pólo de ordem  $k$  em  $z_0$ .
2. DEFINIÇÃO. Se  $z_0$  é ponto singular de (1), dizemos que  $z_0$  é um *ponto singular regular* se toda solução de (1) em torno de  $z_0$  é combinação linear de funções da forma  $p(z)(z - z_0)^\lambda (\log(z - z_0))^m$

onde  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq m \leq n-1$  é inteiro e  $p(z)$  é analítica numa vizinhança de  $z_0$ . Caso contrário, dizemos que  $z_0$  é *ponto singular irregular*.

Observemos que se  $z_0$  é ponto singular regular de (1), em torno de  $z_0$  existe pelo menos uma solução da forma  $p(z)(z-z_0)^\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $p(z)$  analítica numa vizinhança de  $z_0$ .

A mais elementar das equações de ordem  $n$  com um ponto singular simples no ponto  $z_0 = 0$  é a equação

$$\omega^{(n)} + \frac{b_1}{z} \omega^{(n-1)} + \dots + \frac{b_{n-1}}{z^{n-1}} \omega' + \frac{b_n}{z^n} \omega = 0$$

onde  $b_1, \dots, b_n$  são constantes, que na forma

$$z^n \omega^{(n)} + z^{n-1} b_1 \omega^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} z \omega' + b_n \omega = 0$$

é chamada *equação de Euler*. O sistema de tipo (3) associado à equação de Euler é  $\psi' = z^{-1} R \psi$  onde  $R$  é a matriz constante

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_2 & n-1-b_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

e uma matriz fundamental para esse sistema é  $\phi(z) = z^R$ .

Vê-se facilmente que o polinômio característico de  $R$  é  $p(\lambda) = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) + b_1 \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+2) + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n$  que é chamado *polinômio indicial* para a equação de Euler. Usando a forma de Jordan de  $R$  segue-se então que se  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ,  $s \leq n$  são as raízes do polinômio indicial, com multiplicidades  $m_1, \dots, m_s$  respectivamente, uma base para o espaço das soluções da equação de Euler é dada pelas funções  $z^{\lambda_i} (\log z)^j$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $0 \leq j \leq m_i - 1$ .

Outros exemplos de pontos singulares simples são o ponto 0 para a equação de Bessel  $z^2 \omega'' + z \omega' + (z^2 - n^2) \omega = 0$  e os pontos 1 e  $-1$  para a equação de Legendre  $(1-z^2) \omega'' - 2z \omega' + n(n+1) \omega = 0$ .

**3. PROPOSIÇÃO.** Se  $z_0$  é ponto singular simples de (1) então  $z_0$  é um ponto singular regular.

*Demonstração.* Imediato a partir das definições e do teorema 5 da seção 2. ■

Para equações diferenciais a recíproca da proposição 3 é válida.

4. TEOREMA DE FUCHS. Se  $z_0$  é ponto singular regular de (1) então  $z_0$  é um ponto singular simples.

*Demonstração.* A prova será por indução. Suponhamos que  $z_0$  é um ponto singular regular para a equação  $\omega' + b(z)\omega = 0$ . Sabemos então que esta equação admite uma solução em torno de  $z_0$  da forma  $\varphi(z) = (z - z_0)^\alpha q(z)$  onde  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $q(z)$  é analítica numa vizinhança de  $z_0$ , com  $q(z_0) \neq 0$ . Substituindo a expressão de  $\varphi(z)$  na equação vem que  $\alpha(z - z_0)^{\alpha-1}q(z) + (z - z_0)^\alpha q'(z) + b(z)(z - z_0)^\alpha q(z) = 0$  e daí  $\alpha(z - z_0)^{\alpha-1}q(z) + q'(z) + b(z)q(z) = 0$ . Resulta que

$$b(z)(z - z_0) = -\alpha - \frac{q'(z)}{q(z)}(z - z_0)$$

provando que  $b(z)(z - z_0)$  é analítica em  $z_0$ .

Suponhamos agora que o teorema é válido para equações de ordem  $n-1$  e seja a equação

$$\omega^{(n)} + b_1(z)\omega^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(z)\omega' + b_n(z)\omega = 0 \quad (*)$$

para a qual supomos que  $z_0$  é um ponto singular regular. Seja  $\varphi_1(z)$  uma solução de (\*) da forma  $\varphi_1(z) = (z - z_0)^\alpha q(z)$  onde  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $q(z)$  é analítica em uma vizinhança de  $z_0$ , com  $q(z_0) \neq 0$ . Se  $\varphi$  é solução de (\*) então  $\varphi$  é da forma  $\varphi = \varphi_1 \psi$  se e só  $\psi$  é solução da equação

$$\psi^{(n)} + \frac{c_1(z)}{\varphi_1(z)}\psi^{(n-1)} + \dots + \frac{c_{n-1}(z)}{\varphi_1(z)}\psi' + \frac{c_n(z)}{\varphi_1(z)}\psi = 0$$

onde  $c_{n-i}(z) = \binom{n-i}{n-i} \varphi_1^{(n-i)}(z) + \binom{n-i-1}{n-i-1} b_1(z) \varphi_1^{(n-i-1)}(z) + \dots + \binom{i+2}{2} b_{n-i-2}(z) \varphi_1''(z) + (i+1) b_{n-i-1}(z) \varphi_1'(z) + b_{n-i}(z) \varphi_1(z)$  para  $0 \leq i \leq n-1$ . Notemos que os coeficientes  $\frac{c_k(z)}{\varphi_1(z)}$  são analíticos em  $0 < |z - z_0| < a$ . Mas  $c_n(z) = \varphi_1^{(n)}(z) + b_1(z) \varphi_1^{(n-1)}(z) + \dots + b_{n-1}(z) \varphi_1'(z) + b_n(z) \varphi_1(z) \equiv 0$  e daí a equação acima é realmente uma equação de ordem  $n-1$  em  $\psi'$ . Fazendo  $u = \psi'$  temos que  $u$  deve satisfazer a equação

$$u^{(n-1)} + \frac{c_1(z)}{\varphi_1(z)}u^{(n-2)} + \dots + \frac{c_{n-1}(z)}{\varphi_1(z)}u = 0 \quad (**)$$

Então  $\varphi(z)$  é solução de (\*) se e só se  $\left(\frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)}\right)'$  é solução de (\*\*).

Pegando  $n-1$  soluções  $\varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z)$  de (\*) que junto com  $\varphi_1(z)$  formem uma base para as soluções de (\*) temos que  $\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)', \dots, \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right)'$

formam uma base para as soluções de (\*\*). Pois se existissem constantes  $\beta_2, \dots, \beta_n$  não todas nulas tais que  $\sum_{i=2}^n \beta_i \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}\right)' \equiv 0$  então integrando entre dois pontos  $z_1, z_2$  em  $0 < |z - z_0| < a$  obteríamos  $\sum_{i=2}^n \beta_i \varphi_i(z_2) + \left(-\sum_{i=2}^n \beta_i \frac{\varphi_i(z_1)}{\varphi_1(z_1)}\right) \varphi_1(z_2) = 0$  o que é absurdo. Como cada função  $\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}\right)'$  é combinação linear de funções da forma  $(z - z_0)^\alpha (\log(z - z_0))^m \frac{\tilde{q}(z)}{q(z)}$  onde  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq m \leq n - 1$  é inteiro e  $\tilde{q}(z), q(z)$  são analíticas numa vizinhança de  $z_0$  com  $q(z_0) \neq 0$  conclui-se que  $z_0$  é no máximo um ponto singular regular para (\*\*). Pela hipótese de indução,  $\frac{c_k(z)}{\varphi_1(z)}$  tem no máximo um pólo de ordem  $k$  em  $z_0$ .

Como  $\frac{c_1(z)}{\varphi_1(z)} = n \frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)} + b_1(z)$  segue-se que  $b_1(z)$  tem no máximo um pólo de ordem um em  $z_0$ ; como  $\frac{c_2(z)}{\varphi_1(z)} = \binom{n}{2} \frac{\varphi_1''(z)}{\varphi_1(z)} + (n-1) b_1(z) \frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)} + b_2(z)$ , segue-se que  $b_2(z)$  tem no máximo um pólo de ordem 2 em  $z_0$ ; desta forma obtemos que  $b_k(z)$  tem no máximo um pólo de ordem  $k$  em  $z_0$  para  $1 \leq k \leq n-1$ . Enfim como  $b_n(z) = -\frac{\varphi_1^{(n)}(z)}{\varphi_1(z)} - b_1(z) \frac{\varphi_1^{(n-1)}(z)}{\varphi_1(z)} - \dots - b_{n-1}(z) \frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)}$  vemos que  $b_n(z)$  tem no máximo um pólo de ordem  $n$  em  $z_0$ . ■

Se  $z_0$  é um ponto singular regular para a equação (1) então escrevemos o sistema (3) na forma

$$\psi' = (z - z_0)^{-1} \left( R + \sum_{m=0}^{\infty} (z - z_0)^m A_m \right) \psi$$

para podermos aplicar os resultados da seção anterior. Vemos que a matriz  $R$  é idêntica à matriz (4) com  $b_i = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^i b_i(z)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Ainda como no caso da equação de Euler o polinômio característico de  $R$  é dado por

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + b_1 \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 2) + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n$$

e é dito o *polinômio indicial* da equação (1) no ponto  $z_0$ . Pela proposição 5 da seção anterior podemos afirmar que toda solução de (1) em torno

de  $z_0$  é soma de funções da forma  $q(z)(z - z_0)^\alpha (\log(z - z_0))^m$  onde  $0 \leq m \leq n - 1$  é inteiro,  $\alpha$  é raiz de  $p(\lambda)$  e  $q(z)$  é analítica em  $z_0$ .

Caso  $p(\lambda)$  não tenha duas raízes diferindo por um inteiro não nulo então se  $\alpha$  é raiz de  $p(\lambda)$  existe uma solução de (1) da forma  $(z - z_0)^\alpha q(z)$ , onde  $q(z)$  é analítica em  $z_0$  e  $q(z_0) \neq 0$ . Pois pela proposição 2 da seção anterior existe uma matriz fundamental de (3) da forma  $S(z)(z - z_0)^J$  onde  $J$  é a forma de Jordan de  $R$  e  $S(z)$  é analítica em  $z_0$  com  $\det S(z_0) \neq 0$ . Logo existe uma coluna  $(u_1(z), \dots, u_n(z))$  de  $S(z)$  tal que  $((z - z_0)^\alpha u_1(z), \dots, (z - z_0)^\alpha u_n(z))$  é solução de (3) e em consequência  $f(z) = (z - z_0)^\alpha u_1(z)$  é solução de (1) com

$$f'(z) = (z - z_0)^{\alpha-1} u_2(z), \dots, f^{(n-1)}(z) = (z - z_0)^{\alpha-(n-1)} u_n(z).$$

Dai se  $u_1(z_0) = 0$ , de  $f'(z) = u_1'(z)(z - z_0)^\alpha + \alpha u_1(z)(z - z_0)^{\alpha-1} = u_2(z)(z - z_0)^{\alpha-1}$  sai que  $u_1'(z)(z - z_0) + \alpha u_1(z) = u_2(z)$  e  $u_2(z_0) = 0$ . Deste modo provamos que  $u_1(z_0) = \dots = u_n(z_0) = 0$  o que é absurdo.

Quando o polinômio indicial  $p(\lambda)$  não tem duas raízes cuja diferença seja um inteiro, para cada raiz  $\alpha$  de  $p(\lambda)$  uma solução de (1) da forma  $u(z)(z - z_0)^\alpha$  pode ser obtida pelo método dos coeficientes indeterminados exatamente como no caso regular. Faremos isso para o caso  $n = 2$  na seção 7 quando estudarmos o método de Frobenius.

Para uma equação de segunda ordem

$$w'' + b_1(z)w' + b_2(z)w = 0 \quad (5)$$

o polinômio indicial num ponto singular regular  $z_0$  é dado por  $p(\lambda) = \lambda^2 + (b_1 - 1)\lambda + b_2$  onde, como sabemos,  $b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)b_1(z)$

e  $b_2 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 b_2(z)$ . Por exemplo, para a equação de Bessel

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - n^2)w = 0 \text{ como } \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z} = 1 \text{ e } \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{z^2 - n^2}{z^2} = -n^2,$$

o polinômio indicial no ponto 0 é  $p(\lambda) = \lambda^2 - n^2$ , cujas raízes são  $n$  e  $-n$ . Para a equação de Legendre  $(1 - z^2)w'' - 2zw' + n(n + 1)w = 0$ , em ambos os pontos 1 e  $-1$  o polinômio indicial é  $p(\lambda) = \lambda^2$  como o leitor pode ver facilmente. A equação de Bessel será estudada na seção 8. A equação de Legendre será deixada para os exercícios (ver exercícios 33 a 37).

Como no caso dos sistemas, para estudar as soluções de (1) no infinito fazemos a mudança de variável  $z = \frac{1}{\xi}$  e estudamos a equação obtida no ponto  $\xi = 0$ . Se para essa equação,  $\xi = 0$  é ponto regular, singular, singular regular, etc, dizemos que  $z = \infty$  é ponto do mesmo tipo para (1).

5. PROPOSIÇÃO. Uma condição necessária e suficiente para que  $z = \infty$  seja no máximo um ponto singular regular para a equação (1) é que cada  $b_k(z)$  seja analítica em  $z = \infty$  e tenha aí pelo menos um zero de ordem  $k$ .

*Demonstração.* Fazendo  $b_k(z) = \frac{c_k(z)}{z^k}$  podemos escrever (1) na forma

$$z^n \omega^{(n)} + z^{n-1} c_1(z) \omega^{(n-1)} + \dots + z c_{n-1}(z) \omega' + c_n(z) \omega = 0. \quad (*)$$

Se  $\tilde{\omega}(\xi) = \omega\left(\frac{1}{\xi}\right)$  por indução vê-se que, para  $m \geq 1$ ,

$$(z^m \omega^{(m)}(z))_{z=1/\xi} = (-1)^m \xi^m \tilde{\omega}^{(m)}(\xi) + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{jm} \xi^j \tilde{\omega}^{(j)}(\xi)$$

onde os  $\alpha_{jm}$  são constantes e daí, se  $\tilde{c}_k(\xi) = c_k\left(\frac{1}{\xi}\right)$  a mudança de variável  $z = \frac{1}{\xi}$  transforma (\*) em

$$\xi^n \tilde{\omega}^{(n)} + \xi^{n-1} d_1(\xi) \tilde{\omega}^{(n-1)} + \dots + \xi d_{n-1}(\xi) \tilde{\omega}' + d_n(\xi) \tilde{\omega} = 0$$

com  $(-1)^n d_{n-m}(\xi) = (-1)^m \tilde{c}_{n-m}(\xi) + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{mj} \tilde{c}_{n-j}(\xi)$ ,  $0 \leq m \leq n-1$ , onde  $\tilde{c}_0(\xi) \equiv 1$ .

Mas  $\xi = 0$  é no máximo ponto singular regular para esta última equação se e só se cada  $d_k(\xi)$  é analítica em  $\xi = 0$ . Isto ocorre se e só se cada  $\tilde{c}_k(\xi) = \frac{1}{\xi^k} b_k\left(\frac{1}{\xi}\right)$  é analítica em  $\xi = 0$  o que prova a proposição. ■

A equação de segunda ordem (5) é transformada pela mudança de variável  $z = \frac{1}{\xi}$  em

$$\tilde{\omega}'' + \left(\frac{2}{\xi} - \frac{\tilde{b}_1(\xi)}{\xi^2}\right) \tilde{\omega}' + \frac{\tilde{b}_2(\xi)}{\xi^4} \tilde{\omega} = 0$$

onde

$$\tilde{\omega}(\xi) = \omega\left(\frac{1}{\xi}\right), \tilde{b}_1(\xi) = b_1\left(\frac{1}{\xi}\right) \text{ e } \tilde{b}_2(\xi) = b_2\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Em particular a equação de Bessel no infinito é

$$\tilde{\omega}'' + \frac{\tilde{\omega}'}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{1}{\xi^2} - n^2 \right) \tilde{\omega} = 0, \quad (6)$$

logo,  $z = \infty$  é ponto singular irregular para a equação de Bessel.

Já a equação de Legendre adquire a forma

$$\tilde{\omega}'' + \frac{2}{\xi^2 - 1} \tilde{\omega}' + \frac{1}{\xi^2} \frac{n(n+1)}{\xi^2 - 1} \tilde{\omega} = 0$$

tendo então  $z = \infty$  como ponto singular regular. Daí o polinômio indicial da equação de Legendre em  $z = \infty$ , isto é, o polinômio indicial de (6) em 0, é  $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - n(n+1)$ , cujas raízes são  $-n$  e  $(n+1)$

**6. PROPOSIÇÃO.** *Uma condição necessária e suficiente para que a equação*

$$\omega^{(n)} + b_1(z) \omega^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(z) \omega' + b_n(z) \omega = 0$$

*tenha no máximo singularidades regulares nos pontos distintos  $z_1, \dots, z_k, \infty$ , com todos os demais pontos regulares, é que os coeficientes  $b_j(z)$  sejam da forma*

$$b_j(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)^j \dots (z - z_k)^j}$$

onde  $f(z)$  é um polinômio de grau no máximo  $j(k-1)$ .

*Demonstração.* Como todo ponto singular regular é singular simples segue-se que se  $z_1, \dots, z_k$  são no máximo pontos singulares, com todos os outros pontos sendo regulares, então

$$f(z) = b_j(z) (z - z_1)^j \dots (z - z_k)^j$$

é inteira. Como  $b_j(z)$  não tem singularidade essencial no infinito, o mesmo é válido para  $f(z)$ , que deve portanto, ser um polinômio. Como

$$b_j(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)^j \dots (z - z_k)^j}$$

deve ter no mínimo um zero de ordem  $j$  em  $z = \infty$  e o denominador tem grau  $jk$  segue-se que  $f(z)$  deve ter no máximo grau igual a  $jk - j$ .

A recíproca é imediata. ■

As equações para as quais todos os pontos singulares são pontos singulares regulares são chamadas *equações Fuchsianas*. Na próxima seção estudaremos as equações Fuchsianas de segunda ordem.

## 6. Equações Fuchsianas de segunda ordem

Nesta seção vamos abordar as *equações Fuchsianas* de segunda ordem, ou seja, as equações de ordem dois que não possuem pontos singulares irregulares. Uma equação desse tipo é a equação de Legendre, cujos pontos singulares  $1$ ,  $-1$  e  $\infty$  são regulares. Por outro lado,  $z = \infty$  é ponto singular irregular para a equação de Bessel, que não é, portanto, Fuchsiana. Aqui vamos tratar em detalhe apenas o caso da equação Fuchsiana com no máximo três pontos singulares. Provaremos que toda equação desse tipo pode ser transformada na equação hipergeométrica, por meio de mudanças de variável.

Seja então

$$\omega'' + f(z)\omega' + g(z)\omega = 0 \quad (1)$$

uma equação Fuchsiana. Como todo ponto singular regular é isolado, os pontos singulares de (1) são em número finito. Notemos também que se (1) não tem pontos singulares finitos então  $f(z)$  e  $g(z)$  são funções inteiras e como  $z = \infty$  é no máximo ponto singular regular, devemos ter  $f(\infty) = g(\infty) = 0$ . Logo, a única equação Fuchsiana sem pontos singulares finitos é  $\omega'' = 0$ , para a qual  $z = \infty$  é ponto singular.

Suponhamos que os pontos singulares finitos de (1) estão contidos no conjunto  $\{z_1, \dots, z_k\}$ . Pela proposição 6 da seção 5 sabemos que  $f(z)$  e  $g(z)$  são da forma

$$f(z) = \frac{q(z)}{(z - z_1) \dots (z - z_k)} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{r(z)}{(z - z_1)^2 \dots (z - z_k)^2} \quad \text{onde}$$

$q(z)$  e  $r(z)$  são polinômios, de graus no máximo  $k - 1$  e  $2k - 2$  respectivamente. Por exemplo, se (1) tem um único ponto singular finito  $z_1$  então é da forma

$$\omega'' + \frac{k_1}{z - z_1} \omega' + \frac{k_2}{(z - z_1)^2} \omega = 0 \quad k_1, k_2 \in \mathbb{C}$$

que é uma equação de Euler. Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes do polinômio indicial  $p(\lambda) = \lambda^2 + (k_1 - 1)\lambda + k_2$ , as soluções desta equação são da forma  $A(z - z_1)^{\lambda_1} + B(z - z_1)^{\lambda_2}$  se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ou  $A(z - z_1)^{\lambda_1} + B(z - z_1)^{\lambda_1} \log(z - z_1)$  se  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Usando as expressões dadas acima, podemos expandir  $f(z)$  e  $g(z)$  em frações parciais. Então  $f(z) = \sum_{m=1}^k \frac{a_m}{z - z_m}$  e  $g(z) = \sum_{m=1}^k \frac{b_m}{(z - z_m)^2} + \sum_{m=1}^k \frac{c_m}{z - z_m}$  onde  $a_m, b_m, c_m$  são constantes. Notemos porém que

$\sum_{m=1}^k \frac{b_m}{(z-z_m)^2} + \sum_{m=1}^k \frac{c_m}{z-z_m}$  tem no numerador um termo em  $z^{2k-1}$

com coeficiente  $\sum_{m=1}^k c_m$ . Como  $r(z)$  é de grau no máximo  $2k-2$ ,

segue-se que  $\sum_{m=1}^k c_m = 0$ . Dito de outra maneira,  $z = \infty$  é zero de ordem no mínimo dois de  $g(z)$ , logo

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \left( \sum_{m=1}^k \frac{b_m}{(z-z_m)^2} + \sum_{m=1}^k \frac{c_m}{z-z_m} \right) = 0$$

e este limite é igual a  $\sum_{m=1}^k c_m$

Podemos então concluir que as equações Fuchsianas de segunda ordem cujos pontos singulares finitos estão contidos em  $\{z_1, \dots, z_k\}$  são exatamente as equações da forma

$$\omega'' + \left( \sum_{m=1}^k \frac{a_m}{z-z_m} \right) \omega' + \left( \sum_{m=1}^k \frac{b_m}{(z-z_m)^2} + \sum_{m=1}^k \frac{c_m}{z-z_m} \right) \omega = 0 \quad (2)$$

onde  $a_m, b_m, c_m$  são constantes arbitrárias, exceto pela condição  $\sum_{m=1}^k c_m = 0$ . Obviamente um dos pontos  $z_j$  é realmente um ponto singular se e só se pelo menos uma das constantes  $a_j, b_j, c_j$  não se anula.

Fazendo  $z = \frac{1}{\xi}$  e  $\bar{\omega}(\xi) = \omega\left(\frac{1}{\xi}\right)$  em (2) resulta a equação

$$\bar{\omega}'' + \frac{1}{\xi} \left( 2 - \sum_{m=1}^k \frac{a_m}{1-\xi z_m} \right) \bar{\omega}' + \frac{1}{\xi^2} \left( \sum_{m=1}^k \frac{b_m}{(1-\xi z_m)^2} + \sum_{m=1}^k \frac{c_m}{\xi(1-\xi z_m)} \right) \bar{\omega} = 0.$$

Como  $\frac{c_m}{\xi(1-\xi z_m)} = \frac{c_m}{\xi} + \frac{c_m z_m}{1-\xi z_m}$  e  $\sum_{m=1}^k c_m = 0$  esta equação se transforma em

$$\bar{\omega}'' + \frac{1}{\xi} \left( 2 - \sum_{m=1}^k \frac{a_m}{1-\xi z_m} \right) \bar{\omega}' + \frac{1}{\xi^2} \left( \sum_{m=1}^k \frac{b_m}{(1-\xi z_m)^2} + \sum_{m=1}^k \frac{c_m z_m}{1-\xi z_m} \right) \bar{\omega} = 0 \quad (3)$$

que é a forma conveniente para estudar a equação (2) no infinito.

1. LEMA. Uma condição necessária e suficiente para que  $z = \infty$  seja ponto regular de (2) é que tenhamos

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sum_{m=1}^k a_m = 2 \\ \text{ii)} \quad & \sum_{m=1}^k (b_m + c_m z_m) = 0 \\ \text{iii)} \quad & \sum_{m=1}^k (2z_m b_m + c_m z_m^2) = 0 \end{aligned}$$

*Demonstração.*  $\xi = 0$  é ponto regular de (3) se e só se

$$2 - \sum_{m=1}^k \frac{a_m}{1 - \xi z_m} \text{ e } \sum_{m=1}^k \frac{b_m}{(1 - \xi z_m)^2} + \sum_{m=1}^k \frac{c_m z_m}{1 - \xi z_m}$$

têm aí zeros de ordem 1 e 2 respectivamente. Mas  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \left( 2 - \sum_{m=1}^k \frac{a_m}{1 - \xi z_m} \right) = 2 - \sum_{m=1}^k a_m$  e  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \sum_{m=1}^k \frac{b_m}{(1 - \xi z_m)^2} + \sum_{m=1}^k \frac{c_m z_m}{1 - \xi z_m} \right) = \sum_{m=1}^k (b_m + c_m z_m)$ .

Além disso, como  $\frac{b_m}{\xi(1 - \xi z_m)^2} = \frac{b_m}{\xi} + \frac{z_m b_m}{1 - \xi z_m} + \frac{z_m b_m}{(1 - \xi z_m)^2}$  e  $\frac{c_m z_m}{\xi(1 - \xi z_m)} = \frac{c_m z_m}{\xi} + \frac{c_m z_m^2}{1 - \xi z_m}$  segue-se que

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \left( \sum_{m=1}^k \frac{b_m}{(1 - \xi z_m)^2} + \sum_{m=1}^k \frac{c_m z_m}{1 - \xi z_m} \right) = \sum_{m=1}^k (2z_m b_m + c_m z_m^2). \quad \blacksquare$$

Na seção 5 definimos, para cada ponto singular regular  $z_0$  de (1), o polinômio indicial em  $z_0$  por

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0$$

onde  $p_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$  e  $q_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 g(z)$ . Agora é conveni-

ente estendermos esta definição aos pontos regulares de (1). Neste caso  $p_0 = q_0 = 1$  e o polinômio indicial é sempre  $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ , cujas raízes são 0 e 1; isto reflete o fato de que em qualquer ponto regular  $z_0$  existem duas soluções de (1) linearmente independentes,  $u_1(z)$  e  $u_2(z)$ , analíticas em  $z_0$  e com  $u_1(z_0) \neq 0$ ,  $u_2(z_0) = 0$ ,  $u_2'(z_0) \neq 0$ . Se  $z_0$  é um ponto qualquer chamaremos as raízes do polinômio indicial de (1) em  $z_0$  de expoentes de (1) em  $z_0$ .

Sejam então  $\alpha_{1m}, \alpha_{2m}$  e  $\alpha_{1\infty}, \alpha_{2\infty}$  os expoentes de (2) em  $z_m$  e  $z = \infty$  respectivamente. O polinômio indicial de (2) em  $z_m$  é

$$p_m(\lambda) = \lambda^2 + (a_m - 1)\lambda + b_m$$

e daí resulta

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1m} + \alpha_{2m} &= 1 - a_m \\ \alpha_{1m} \alpha_{2m} &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Em  $z = \infty$  o polinômio indicial de (2) é

$$p_\infty(\lambda) = \lambda^2 + \left(1 - \sum_{m=1}^k a_m\right)\lambda + \sum_{m=1}^k (b_m + c_m z_m)$$

o que nos dá

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1\infty} + \alpha_{2\infty} &= \left(\sum_{m=1}^k a_m\right) - 1 \\ \alpha_{1\infty} \alpha_{2\infty} &= \sum_{m=1}^k (b_m + c_m z_m) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Combinando as primeiras equações em (4) e (5) obtemos

$$\alpha_{1\infty} + \alpha_{2\infty} + \sum_{m=1}^k (\alpha_{1m} + \alpha_{2m}) = k - 1 \quad (6)$$

Segue-se que se  $s$  é o número de pontos singulares de (2) então a soma dos expoentes de todos esses pontos é igual a  $s - 2$ . Isto porque em cada ponto regular a soma dos expoentes é um.

Notemos que a partir dos expoentes podemos determinar todas as constantes  $a_1, \dots, a_k$  e  $b_1, \dots, b_k$  mas não em geral as  $c_1, \dots, c_k$ . Para estas últimas temos apenas duas equações,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k c_m &= 0 \\ \sum_{m=1}^k z_m c_m &= \alpha_{1\infty} \alpha_{2\infty} - \sum_{m=1}^k b_m \end{aligned}$$

acrescidas de

$$\sum_{m=1}^k z_m^2 c_m = - \sum_{m=1}^k 2z_m b_m$$

quando  $z = \infty$  é ponto regular. Como essas equações são independentes, conclui-se que se (2) tem no máximo três pontos singulares (isto é,

se  $k = 2$  ou  $k = 3$  e  $z = \infty$  é regular) então a equação (2) fica determinada pelos expoentes nesses pontos. Por causa disso introduzimos o símbolo de Riemann

$$\omega = P \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & z \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \end{pmatrix}$$

para designar a equação Fuchsiana de ordem dois com pontos singulares em  $\{z_1, z_2, z_3\}$ , com expoentes respectivamente  $\alpha_{11}$  e  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{12}$  e  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{13}$  e  $\alpha_{23}$ .

**2. PROPOSIÇÃO.** Sejam  $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{1\infty}, \alpha_{2\infty} \in \mathbb{C}$ . Se  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , uma condição necessária e suficiente para que exista uma equação Fuchsiana de ordem 2 com pontos singulares em  $\{z_1, z_2, \infty\}$ , sendo os expoentes dados, pela ordem, pelas constantes acima, é que

$$\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{1\infty} + \alpha_{2\infty} = 1.$$

Nesse caso a equação com essas propriedades é

$$\omega'' + \left( \frac{1 - \alpha_{11} - \alpha_{21}}{z - z_1} + \frac{1 - \alpha_{12} - \alpha_{22}}{z - z_2} \right) \omega' + \left( \frac{\alpha_{11}\alpha_{21}}{(z - z_1)^2} + \frac{\alpha_{12}\alpha_{22}}{(z - z_2)^2} + \frac{\alpha_{1\infty}\alpha_{2\infty} - \alpha_{11}\alpha_{21} - \alpha_{12}\alpha_{22}}{(z - z_1)(z - z_2)} \right) \omega = 0$$

*Demonstração.* Se existe uma equação Fuchsiana com as propriedades acima, (6) nos diz que a soma dos expoentes em  $z_1, z_2, \infty$  deve ser igual a 1. Em termos da equação (2), as fórmulas (4) nos dão  $a_1 = 1 - \alpha_{11} - \alpha_{21}$ ,  $a_2 = 1 - \alpha_{12} - \alpha_{22}$ ,  $b_1 = \alpha_{11}\alpha_{21}$  e  $b_2 = \alpha_{12}\alpha_{22}$ . Como  $c_1 + c_2 = 0$  usando a segunda fórmula em (5) obtemos

$$c_1 = \frac{\alpha_{1\infty}\alpha_{2\infty} - \alpha_{11}\alpha_{21} - \alpha_{12}\alpha_{22}}{z_1 - z_2}, \quad \text{Dai, } \frac{c_1}{z - z_1} + \frac{c_2}{z - z_2} = \frac{\alpha_{1\infty}\alpha_{2\infty} - \alpha_{11}\alpha_{21} - \alpha_{12}\alpha_{22}}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

provando que a equação tem a forma acima.

Reciprocamente se são dadas constantes  $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{1\infty}$  e  $\alpha_{2\infty}$  cuja soma é 1, a equação acima tem as propriedades desejadas, sendo que a condição sobre a soma das constantes assegura que  $z = \infty$  é no máximo ponto singular regular. ■

Deixaremos para o exercício 41 a obtenção da forma geral da equação Fuchsiana com no máximo três pontos singulares finitos e com ponto regular em  $z = \infty$ . Não precisaremos dela aqui porque provaremos a seguir que toda equação Fuchsiana com no máximo três pontos singulares pode ser transformada numa equação Fuchsiana com no máximo dois pontos singulares finitos, por meio de uma mudança da variável independente. Essa mudança de variável será feita usando-se uma transformação linear fracional não singular.

3. LEMA. *Toda transformação linear fracional não singular*

$$v = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad AD - BC \neq 0$$

*é composição de no máximo cinco transformações lineares fracionais não singulares dos tipos*

$$v = \lambda z \quad \lambda \neq 0$$

$$v = \frac{1}{z}$$

$$v = z + \delta$$

*Demonstração.* Se  $C \neq 0$  podemos escrever  $v = \frac{A}{C} + \frac{B - \frac{AD}{C}}{Cz + D}$  e daí  $v$  pode ser construída pelas etapas sucessivas,  $v_1 = Cz$ ,  $v_2 = D + v_1$ ,  $v_3 = \frac{1}{v_2}$ ,  $v_4 = \left(B - \frac{AD}{C}\right)v_3$  e finalmente  $v = \frac{A}{C} + v_4$ .

Se  $C = 0$  então  $v = \frac{Az + B}{D}$ , e duas etapas,  $v_1 = \frac{A}{D}z$  e  $v = \frac{B}{D} + v_1$  são suficientes. ■

4. PROPOSIÇÃO. *Se*

$$\omega = P \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & z \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \end{pmatrix}$$

*e se a mudança da variável independente*

$$v = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad AD - BC \neq 0$$

transforma  $z_1, z_2, z_3$  em  $z'_1, z'_2, z'_3$  respectivamente, então

$$\omega = P \begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 & z'_3 & v \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & v \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & v \end{pmatrix}$$

*Demonstração.* É suficiente que provemos a proposição para o caso em que  $v$  assume uma das três formas elementares dadas pelo lema anterior. Faremos aqui apenas o caso em que  $v = \frac{1}{z}$  e os pontos  $z_1, z_2$  e  $z_3$  são finitos. Os demais ficam para o leitor. Escrevendo a equação original na forma (2) temos

$$\omega'' + \left( \sum_{m=1}^3 \frac{a_m}{z - z_m} \right) \omega' + \left( \sum_{m=1}^3 \frac{b_m}{(z - z_m)^2} + \sum_{m=1}^3 \frac{c_m}{z - z_m} \right) \omega = 0, \quad (*)$$

e sabemos que a mudança de variável  $z = \frac{1}{v}$  transforma-a em

$$\begin{aligned} \bar{\omega}'' + \frac{1}{v} \left( 2 - \sum_{m=1}^3 \frac{a_m}{1 - vz_m} \right) \bar{\omega}' + \frac{1}{v^2} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{b_m}{(1 - vz_m)^2} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^3 \frac{c_m z_m}{1 - vz_m} \right) \bar{\omega} = 0 \end{aligned} \quad (**)$$

onde  $\bar{\omega}(v) = \omega\left(\frac{1}{v}\right)$ . Como  $z = \infty$  é ponto regular de (\*) segue-se que  $v = 0$  é ponto regular de (\*\*). Daí os pontos singulares de (\*\*) estão em  $\{z_1^{-1}, z_2^{-1}, z_3^{-1}\}$ . Se  $z_m \neq 0$  então como

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow z_m^{-1}} \frac{v - z_m^{-1}}{v} \left( 2 - \sum_{m=1}^3 \frac{a_m}{1 - vz_m} \right) &= a_m \quad e \\ \lim_{v \rightarrow z_m^{-1}} \frac{(v - z_m^{-1})^2}{v^2} \left( \sum_{m=1}^3 \frac{b_m}{(1 - vz_m)^2} + \sum_{m=1}^3 \frac{c_m}{1 - vz_m} \right) &= b_m \end{aligned}$$

resulta que os expoentes de (\*) em  $z_m$  são os mesmos de (\*\*) em  $z_m^{-1}$ . Se um dos  $z_m$  é 0 temos que mostrar que os expoentes de (\*) em 0 são iguais aos expoentes de (\*\*) em  $z = \infty$ . Mas isto é imediato pois para estudar (\*\*) no infinito fazemos a mudança de variável  $v = \frac{1}{z}$ , o que nos traz de volta à equação (\*) no ponto 0. ■

Se  $z_1, z_2, z_3$  são finitos conclui-se, a partir da proposição anterior, que se fazemos a mudança de variável  $v = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$  então

$$\omega = P \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \end{pmatrix}$$

se transforma em

$$\omega = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & v \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \end{pmatrix}$$

Da mesma forma, se  $v = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$  então

$$\omega = P \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \infty & z \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \end{pmatrix}$$

se transforma em

$$\omega = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & v \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \end{pmatrix}$$

Vemos assim que dada uma equação Fuchsiana de segunda ordem com no máximo três pontos singulares, podemos sempre supor que estes pontos estão em  $\{0, 1, \infty\}$ . Com o auxílio da proposição seguinte podemos então reduzir qualquer equação Fuchsiana de segunda ordem com no máximo três pontos singulares a uma forma canônica, chamada equação hipergeométrica.

**5. PROPOSIÇÃO.** Com a mudança da variável dependente  $\omega = (z - z_1)^d u$  onde  $d \in \mathbb{C}$ , a equação

$$\omega = P \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \infty & z \\ a' & b' & c' & \\ a' & b' & c' & \end{pmatrix} \quad (*)$$

se transforma em

$$u = P \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \infty & z \\ a - d & b & c + d & \\ a' - d & b' & c' + d & \end{pmatrix} \quad (**)$$

*Demonstração.* Escrevamos (\*) na forma

$$\omega'' + f(z)\omega' + g(z)\omega = 0.$$

Fazendo  $\omega = (z - z_1)^d u$  esta equação se transforma em

$$u'' + \left( f(z) + \frac{2d}{z - z_1} \right) u' + \left( g(z) + \frac{df(z)}{z - z_1} + \frac{d(d-1)}{(z - z_1)^2} \right) u = 0$$

que é claramente uma equação Fuchsiana com seus pontos singulares em  $\{z_1, z_2, \infty\}$  e com os expoentes em  $z_2$  iguais a  $b, b'$ . Sejam  $a_1, a'_1$  e  $c_1, c'_1$  seus expoentes em  $z_2$  e  $\infty$  respectivamente. Então

$$1 - a_1 - a'_1 = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \left( f(z) + \frac{2d}{z - z_1} \right) = 1 - a - a' + 2d$$

e

$$\begin{aligned} a_1 a'_1 &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)^2 \left( g(z) + \frac{df(z)}{z - z_1} + \frac{d(d-1)}{(z - z_1)^2} \right) = \\ &= aa' + d(1 - a - a') + d(d-1) \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} a_1 + a'_1 &= (a - d) + (a' - d) \\ a_1 a'_1 &= (a - d)(a' - d) \end{aligned}$$

provando que podemos escrever  $a_1 = a - d$  e  $a'_1 = a' - d$ . Fazendo  $z = \frac{1}{\xi}$ ,  $\tilde{f}(\xi) = f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ ,  $\tilde{g}(\xi) = g\left(\frac{1}{\xi}\right)$  e  $\tilde{u}(\xi) = u\left(\frac{1}{\xi}\right)$  a equação assume a forma

$$\begin{aligned} \tilde{u}'' + \left( \frac{2}{\xi} - \frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi^2} - \frac{2d}{\xi(1 - \xi z_1)} \right) \tilde{u}' + \\ + \left( \frac{\tilde{g}(\xi)}{\xi^4} + \frac{d\tilde{f}(\xi)}{\xi^3(1 - \xi z_1)} + \frac{d(d-1)}{\xi^2(1 - \xi z_1)^2} \right) \tilde{u} = 0 \end{aligned}$$

Segue-se que

$$1 - c_1 - c'_1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \left( \frac{2}{\xi} - \frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi^2} - \frac{2d}{\xi(1 - \xi z_1)} \right) = 1 - c - c' - 2d \quad e$$

$$\begin{aligned} c_1 c'_1 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \left( \frac{\tilde{g}(\xi)}{\xi^4} + \frac{d\tilde{f}(\xi)}{\xi^3(1 - \xi z_1)} + \frac{d(d-1)}{\xi^2(1 - \xi z_1)^2} \right) = \\ &= cc' + d(1 + c + c') + d(d-1) \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}c_1 + c'_1 &= (c + d) + (c' + d) \\c_1 c'_1 &= (c + d)(c' + d)\end{aligned}$$

logo podemos escrever  $c_1 = c + d$  e  $c'_1 = c' + d$ . Isto mostra que a equação obtida de (\*) pela mudança de variável  $\omega = (z - z_1)^d u$  é igual a (\*\*). ■

Vimos anteriormente que por meio de uma mudança da variável independente (mudança essa que é dada por uma transformação linear fracional) podemos colocar qualquer equação Fuchsiana do segundo grau com no máximo três pontos singulares na forma

$$\omega = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & z \\ a & b & c & z \\ a' & b' & c' & z \end{pmatrix}$$

Fazendo  $\omega = z^a v$  temos

$$v = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & z \\ 0 & b & c + a & z \\ a' - a & b' & c' + a & z \end{pmatrix}$$

e se  $v = (z - 1)^b u$  resulta

$$u = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & z \\ 0 & 0 & a + b + c & z \\ a' - a & b' - b & a + b + c' & z \end{pmatrix} \quad (7)$$

Denotando  $\alpha = a + b + c$ ,  $\beta = a + b + c'$  e  $\gamma = 1 - a' + a$  a equação (7) se transforma, enfim, em

$$u = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & z \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1 - \gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta & z \end{pmatrix} \quad (8)$$

Logo, a resolução de qualquer equação Fuchsiana do segundo grau com no máximo três pontos singulares reduz-se à resolução da equação (8), que é chamada *equação hipergeométrica*.

Escrevendo explicitamente (8) por meio da proposição 2 obtemos

$$u'' + \left( \frac{\gamma}{z} + \frac{1 - (\gamma - \alpha - \beta)}{z - 1} \right) u' + \frac{\alpha\beta}{z(z - 1)} u = 0$$

ou seja,

$$z(1 - z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0.$$

Na seção 8 calcularemos as soluções desta equação em torno de seus três pontos singulares.

## 7. O método de Frobenius

O método idealizado por Frobenius destina-se a calcular as soluções de uma equação diferencial de ordem  $n$  em um ponto singular regular, mas aqui vamos nos restringir ao caso de uma equação de segunda ordem

$$u'' + f(z)u' + g(z)u = 0 \quad (1)$$

para a qual  $z = 0$  é um ponto singular regular.

Podemos então escrever  $f(z) = \frac{F(z)}{z}$  e  $g(z) = \frac{G(z)}{z^2}$  onde  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  e  $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ , transformando (1) em

$$z^2 u'' + zF(z)u' + G(z)u = 0 \quad (2)$$

Como  $z = 0$  é ponto singular regular de (1) sabemos que existe pelo menos uma solução da forma  $u(z) = z^\lambda h(z)$  com  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $h(z)$  analítica em  $z = 0$ ,  $h(0) \neq 0$ .

Fazendo  $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  podemos supor que  $a_0 = 1$ ; temos então

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\lambda+k}$$

$$u'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k) a_k z^{\lambda+k-1}$$

$$u''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k)(\lambda+k-1) a_k z^{\lambda+k-2}$$

e substituindo em (2),

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k-1)(\lambda+k) a_k z^{\lambda+k} \\ & + \left( \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k) a_k z^{\lambda+k} \right) + \\ & + \left( \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\lambda+k} \right) = 0. \end{aligned}$$

Cancelando  $z^\lambda$  obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k - 1)(\lambda + k) a_k z^k + \\ & + \left( \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k) a_k z^k \right) + \\ & + \left( \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) = 0. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes resulta, para  $k = 0$ ,  $a_0 p(\lambda) = 0$  e para  $k > 0$

$$\begin{aligned} a_k p(\lambda + k) + a_{k-1} [(\lambda + k - 1)c_1 + d_1] + a_{k-2} [(\lambda + k - 2)c_2 + d_2] + \dots \\ \dots + a_2 [(\lambda + 2)c_{k-2} + d_{k-2}] + a_1 [(\lambda + 1)c_{k-1} + d_{k-1}] + \quad (3) \\ + a_0 [\lambda c_k + d_k] = 0 \end{aligned}$$

onde  $p(\lambda) = \lambda^2 + (c_0 - 1)\lambda + d_0$  é o polinômio indicial (ver seção 5) da equação (1) no ponto zero.

Sejam agora  $\alpha$  e  $\beta$  as raízes do polinômio indicial, com  $Re \alpha \geq Re \beta$ . Como  $p(\alpha + k) \neq 0$  para  $k \geq 1$ , as relações de recorrência (3) podem ser resolvidas para  $\lambda = \alpha$ , nos dando assim uma solução  $u_1(z)$  de (1)

$$u_1(z) = z^\alpha \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha) z^k \right).$$

Para obter uma solução de (1) linearmente independente de  $u_1(z)$  devemos considerar 3 casos.

I)  $\alpha - \beta$  não é inteiro.

Neste caso se  $k$  é inteiro positivo temos  $\beta + k \neq \alpha$  e daí  $p(\beta + k) \neq 0$ , logo as relações de recorrência (3) podem ser resolvidas para  $\lambda = \beta$ . Obtemos assim uma solução

$$u_2(z) = z^\beta \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\beta) z^k \right)$$

e como  $\alpha \neq \beta$  temos que  $u_1(z)$  e  $u_2(z)$  são linearmente independentes.

II)  $\alpha = \beta$

Obviamente o procedimento do caso I não nos leva aqui a uma solução linearmente independente de  $u_1(z)$ .

Consideremos o caso particular de (2) em que  $P(z)$  e  $Q(z)$  são iguais a constantes  $a$  e  $b$ , ou seja, a equação de Euler

$$z^2 u'' + azu' + bu = 0 \quad (4)$$

Um dos métodos de resolução de (4) consiste em notar que se  $L_1(u) = z^2 u'' + azu' + bu$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  então

$$L_1(z^\lambda) = \tilde{p}(\lambda) z^\lambda \quad (5)$$

onde  $\tilde{p}(\lambda) = \lambda^2 + (a-1)\lambda + b$  é o polinômio indicial (ver seção 5) de (4). Se  $\tilde{p}(\lambda)$  tem duas raízes distintas obtemos então duas soluções linearmente independentes de (4). Mas se  $\lambda_0$  é raiz dupla de  $\tilde{p}(\lambda)$ , para obter uma solução linearmente independente de  $z^{\lambda_0}$  derivamos ambos os lados de (5) em relação a  $\lambda$  e obtemos

$$L_1(z^\lambda \log z) = \tilde{p}'(\lambda) z^\lambda + \tilde{p}(\lambda) z^\lambda \log z$$

e daí

$$L_1(z^{\lambda_0} \log z) = 0$$

o que nos dá a solução  $z^{\lambda_0} \log z$  (notemos que todos esses resultados sobre a equação de Euler já tinham sido provados por nós na seção 5, de maneira diferente).

Isto sugeriu a Frobenius fazer o seguinte para achar uma solução linearmente independente de  $u_1(z)$ .

Se  $L(u) = z^2 u'' + zF(z)u' + G(z)u$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ , procuramos uma solução formal

$$\varphi(\lambda, z) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda) z^k \quad (6)$$

com  $a_0(\lambda) = 1$  da equação

$$L(\varphi(\lambda, z)) = p(\lambda) z^\lambda \quad (7)$$

Substituindo (6) em (7) e igualando os coeficientes resulta

$$a_0(\lambda) p(\lambda) = p(\lambda)$$

e para  $k > 0$

$$\left. \begin{aligned} & a_k(\lambda) p(\lambda + k) + a_{k-1}(\lambda) [(\lambda + k - 1)c_1 + d_1] + \\ & + a_{k-2}(\lambda) [(\lambda + k - 2)c_2 + d_2] + \dots + a_2(\lambda) [(\lambda + 2)c_{k-2} + d_{k-2}] + \\ & + a_1(\lambda) [(\lambda + 1)c_{k-1} + d_{k-1}] + a_0(\lambda) [\lambda c_k + d_k] = 0 \end{aligned} \right\} (8)$$

como antes. Se  $\lambda \neq \alpha - m$  onde  $m$  é inteiro positivo, obtemos os coeficientes de (6) usando as relações de recorrência (8). Notemos que os  $a_k(\lambda)$  são funções racionais de  $\lambda$  e que  $\varphi(\alpha, z) = u_1(z)$ .

Agora, como no caso da equação de Euler, derivamos (formalmente) a equação (7). Temos então

$$L\left(\frac{\partial\varphi(\lambda, z)}{\partial\lambda}\right) = \frac{\partial L(\varphi(\lambda, z))}{\partial\lambda} = p'(\lambda)z^\lambda + p(\lambda)z^\lambda \log z$$

e em consequência,

$$L\left(\frac{\partial\varphi(\lambda, z)}{\partial\lambda}\right)\Big|_{\lambda=\alpha} = 0.$$

Usando (6) vemos que

$$\frac{\partial\varphi(\lambda, z)}{\partial\lambda} = z^\lambda \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{da_k}{d\lambda}(\lambda) z^k \right) + z^\lambda \log z \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda) z^k \right)$$

e daí obtemos

$$u_2(z) = z^\alpha \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{da_k}{d\lambda}(\alpha) z^k \right) + \log z u_1(z)$$

que é claramente linearmente independente de  $u_1(z)$ .

O processo formal pelo qual  $u_2(z)$  foi obtida é de difícil justificativa. Mas se substituirmos a expressão de  $u_2(z)$  na equação (2) e usarmos as relações de recorrência (8) derivadas no ponto  $\lambda = \alpha$  veremos que  $u_2(z)$  é solução formal e daí solução efetiva de (1).

III)  $\alpha - \beta = n > 0$ ,  $n$  inteiro.

Nêste caso, como  $p(\beta + n) = p(\alpha) = 0$ ,  $a_{n+k}(\lambda)$  tem um pólo de ordem 1 em  $\lambda = \beta$  para todo  $k \geq 0$ . Tentamos contornar isso notando que

$$L((\lambda - \beta)\varphi(\lambda, z)) = (\lambda - \beta)p(\lambda)z^\lambda \quad (9)$$

e daí

$$L((\lambda - \beta)\varphi(\lambda, z))\Big|_{\lambda=\beta} = 0$$

Definindo

$$b_k(\lambda) = (\lambda - \beta)a_k(\lambda)\Big|_{\lambda=\beta}$$

temos que

$$b_0(\beta) = \dots = b_{n-1}(\beta) = 0 \quad \text{e se } k > 0 \\ b_{n+k}(\beta) p(\beta + n + k) + b_{n+k-1}(\beta) [(\beta + n + k - 1)c_1 + d_1] + \dots \\ \dots + b_n(\beta) [(\beta + n)c_k + d_k] = 0$$

Logo os coeficientes  $b_k(\beta)$  satisfazem as relações de recorrência (3) e então  $\sum_{k=0}^{\infty} b_{n+k}(\beta) z^{\beta+n+k}$  é uma solução real de (1). Mas  $\beta + n = \alpha$  e daí esta solução é da forma  $cu_1(z)$  onde  $c = b_n(\beta) = (\lambda - \beta) a_n(\lambda) |_{\lambda=\beta}$ . Porém  $\beta$  é raiz dupla de  $(\lambda - \beta) p(\lambda)$  e derivando (formalmente) ambos os lados de (9) no ponto  $\lambda = \beta$  resulta

$$L \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda - \beta) \varphi(\lambda, z)]_{\lambda=\beta} \right) = 0$$

Usando (6) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda - \beta) \varphi(\lambda, z)] = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial(\lambda - \beta) a_k(\lambda)}{\partial \lambda} \right] z^k + \\ + z^\lambda \log z \sum_{k=0}^{\infty} [(\lambda - \beta) a_k(\lambda)] z^k$$

e daí

$$u_2(z) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda - \beta) a_k(\lambda)]_{\lambda=\beta} z^k + cu_1(z) \log z$$

onde  $c = (\lambda - \beta) a_n(\lambda) |_{\lambda=\beta}$ .

Como  $\frac{\partial(\lambda - \beta) a_0(\lambda)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\beta} = 1$  pois  $a_0(\lambda) \equiv 1$ , segue-se que  $u_1(z)$  e  $u_2(z)$  são linearmente independentes.

Fica a cargo do leitor mostrar que  $u_2(z)$  é solução formal de (1) e daí uma solução efetiva.

Nas seções 8 e 9 aplicaremos o método de Frobenius para encontrar as soluções das equações hipergeométrica e de Bessel.

## 8. A equação Hipergeométrica

Consideremos a equação hipergeométrica

$$z(1-z)\omega'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\omega' - \alpha\beta\omega = 0 \quad (1)$$

ou seja, a equação

$$\omega = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1 - \gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta & \end{pmatrix} \quad (2)$$

Como um dos expoentes em  $z = 0$  é nulo, procuramos soluções da forma

$$\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (3)$$

as quais existem, como vimos na seção 7, pelo menos quando  $\gamma$  não é zero nem inteiro negativo.

Substituindo (3) em (1) resulta

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n(\gamma + n - 1) a_n z^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\beta + n) a_n z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1) a_{n-1} z^{n-1} \end{aligned}$$

Segue-se que  $a_0$  é arbitrário e podemos fazer  $a_0 = 1$ . Para  $n \geq 1$  temos a fórmula de recorrência

$$a_n = \frac{(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)}{n(\gamma + n - 1)} a_{n-1}$$

com a qual obtemos

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1) \beta(\beta + 1) \dots (\beta + n - 1)}{n! \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1)}$$

Logo, se  $\gamma$  é diferente de zero ou inteiro negativo, uma solução não nula de (1) em  $|z| < 1$  é dada por

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1) \beta(\beta + 1) \dots (\beta + n - 1)}{n! \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1)} z^n \quad (4)$$

Como  $F(\alpha, 1, \alpha, z) = F(1, \beta, \beta, z)$  é a série geométrica, as funções  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  são chamadas funções hipergeométricas derivando daí o nome da equação (1). Notemos que se uma das constante  $\alpha$  ou  $\beta$  é zero ou inteiro negativo então  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  é um polinômio. Nos demais casos as séries hipergeométricas divergem para  $|z| > 1$ . (Veja exercício 28).

Pela seção 7 sabemos também que se  $\gamma$  é diferente de inteiro positivo, existe uma solução de (1) em  $0 < |z| < 1$  da forma  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1-\gamma}$  que pode ser obtida substituindo-se esta expressão em (1).

É mais conveniente porém utilizar as propriedades do símbolo de Riemann provadas na seção 6. Para isso notemos que a equação (1) pode ser escrita como

$$\omega = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 1-\gamma & 0 & \alpha \\ 0 & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{pmatrix} z$$

e se  $\omega = z^{1-\gamma} u$  temos (proposição 5 da seção 6)

$$u = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha+1-\gamma \\ \gamma-1 & \gamma-\alpha-\beta & \beta+1-\gamma \end{pmatrix} z$$

ou seja,

$$u = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha' \\ 1-\gamma' & \gamma'-\alpha'-\beta' & \beta' \end{pmatrix} z$$

onde  $\alpha' = \alpha + 1 - \gamma$ ,  $\beta' = \beta + 1 - \gamma$  e  $\gamma' = 2 - \gamma$ . Esta última equação está na forma (2) logo concluímos que se  $\gamma$  não é um inteiro positivo, uma solução de (1) em  $0 < |z| < 1$  é dada por

$$\omega_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z)$$

Na proposição seguinte vamos resumir o que foi feito.

**1. PROPOSIÇÃO.** i) Se  $\gamma$  não é zero nem inteiro negativo, uma solução não trivial de (1) em  $|z| < 1$  é dada por

$$\omega_{10}(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

onde  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  é definida por (4).

ii) Se  $\gamma$  não é inteiro positivo, uma solução não trivial de (1) em  $0 < |z| < 1$  é dada por

$$\omega_{20}(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z)$$

iii) Se  $\gamma$  não é inteiro,  $\omega_{10}$  e  $\omega_{20}$  formam uma base para o espaço das soluções de (1) em  $0 < |z| < 1$ . ■

Para obter as soluções em torno de  $z = 1$ , escrevemos (1) na forma

$$\omega = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ \gamma - \alpha - \beta & 1 - \gamma & \beta & \end{pmatrix}$$

Fazendo  $v = 1 - z$  temos, pela proposição 4 da seção 6

$$\omega = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha & v \\ \gamma - \alpha - \beta & 1 - \gamma & \beta & \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\omega = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha & v \\ 1 - \gamma' & \gamma' - \alpha - \beta & \beta & \end{pmatrix}$$

onde  $\gamma' = 1 - \gamma + \alpha + \beta$ . Podemos então enunciar o seguinte resultado, a partir da proposição 1.

**2. PROPOSIÇÃO.** i) Se  $\gamma - (\alpha + \beta)$  não é inteiro positivo então uma solução não trivial de (1) em  $|z - 1| < 1$  é dada por

$$\omega_{11}(z) = F(\alpha, \beta, 1 - \gamma + \alpha + \beta, 1 - z)$$

ii) Se  $\gamma - (\alpha + \beta)$  não é zero nem inteiro negativo uma solução não trivial de (1) em  $0 < |z - 1| < 1$  é dada por

$$\omega_{21}(z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, 1 + \gamma - \alpha - \beta, 1 - z)$$

iii) Se  $\gamma - (\alpha + \beta)$  não for inteiro,  $\omega_{11}$  e  $\omega_{21}$  formam uma base para o espaço das soluções de (1) em  $0 < |z - 1| < 1$ . ■

Para o ponto  $z = \infty$  fazemos a mesma coisa. Escrevemos (1) na forma

$$\omega = P \begin{pmatrix} \infty & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & z \\ \beta & \gamma - \alpha - \beta & 1 - \gamma & \end{pmatrix}$$

Fazendo  $v = \frac{1}{z}$  temos

$$\omega = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \alpha & 0 & 0 & v \\ \beta & \gamma - \alpha - \beta & 1 - \gamma & \end{pmatrix}$$

e se  $\omega = v^2 u$ ,

$$\dot{u} = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha' & v \\ 1 - \gamma' & \gamma' - \alpha' - \beta' & \beta' & \end{pmatrix}$$

onde  $\alpha' = \alpha$ ,  $\beta' = 1 - \gamma + \alpha$  e  $\gamma' = 1 + \alpha - \beta$ . Temos então.

3. PROPOSIÇÃO. i) Se  $\alpha - \beta$  não é inteiro negativo, uma solução não trivial de (1) em  $|z| > 1$  é dada por

$$\omega_{1\infty}(z) = z^{-\alpha} F(\alpha, 1 - \gamma + \alpha, 1 - \beta + \alpha, z^{-1})$$

ii) Se  $\alpha - \beta$  não é zero nem inteiro positivo, uma solução não trivial de (1) em  $|z| > 1$  é dada por

$$\omega_{2\infty}(z) = z^{-\beta} F(\beta, 1 - \gamma + \beta, 1 + \beta - \alpha, z^{-1})$$

iii) Se  $\alpha - \beta$  não é inteiro,  $\omega_{1\infty}$  e  $\omega_{2\infty}$  formam uma base para as soluções de (1) em  $|z| > 1$ . ■

Para encontrar uma solução linearmente independente de  $\omega_{10}$  em  $0 < |z| < 1$  quando  $\gamma$  é um inteiro positivo, temos que aplicar o método de Frobenius. Comparando com (7) da seção 7 segue-se que devemos procurar uma solução da forma

$$\varphi(\lambda, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda) z^{n+\lambda} \quad (5)$$

da equação

$$z(1-z)\omega'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\omega' - \alpha\beta\omega = p(\lambda)z^{\lambda-1}(1-z) \quad (6)$$

onde  $p(\lambda) = \lambda^2 - (1 - \gamma)\lambda$  é o polinômio indicial de (1) em  $z = 0$ .

Substituindo (5) em (6) obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1 + \gamma) a_n(\lambda) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + n - 1 + \alpha)(\lambda + n - 1 + \beta) a_{n-1}(\lambda) z^n = p(\lambda)(1 - z).$$

Segue-se que

$$a_1(\lambda) = \frac{(\alpha + \beta + 1 - \gamma)\lambda + \alpha\beta}{(\lambda + 1)(\lambda + \gamma)}$$

e para  $n \geq 2$  temos a relação de recorrência,

$$a_n(\lambda) \doteq \frac{(\lambda + n - 1 + \alpha)(\lambda + n - 1 + \beta)}{(\lambda + n)(\lambda + n - 1 + \gamma)} a_{n-1}(\lambda)$$

com a qual obtemos, para  $n \geq 2$ ,

$$a_n(\lambda) = \frac{(\alpha + \beta + 1 - \gamma)\lambda + \alpha\beta}{(\lambda + 1)(\lambda + \gamma)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda + k + \alpha)(\lambda + k + \beta)}{(\lambda + k + 1)(\lambda + k + \gamma)}$$

Se  $\gamma = 1$ , ou seja, se os expoentes de (1) no ponto zero são iguais, temos

$$a_1(\lambda) = \frac{(\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta}{(\lambda + 1)^2}$$

$$a_n(\lambda) = \frac{(\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta}{(\lambda + 1)^2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(\lambda + k + \alpha)(\lambda + k + \beta)}{(\lambda + k + 1)^2}$$

e sabemos (caso II do método de Frobenius) que uma solução linearmente independente de  $\omega_{01}(z) = F(\alpha, \beta, 1, z)$  em  $|z| < 1$  é dada por

$$y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{d\lambda}(0) z^n + F(\alpha, \beta, 1, z) \log z.$$

Vê-se facilmente que  $\frac{da_1}{d\lambda}(0) = \alpha + \beta - 2\alpha\beta$ . Para derivar  $a_n(\lambda)$ ,  $n \geq 2$  é conveniente notarmos que se  $f(z) = f_1(z) \dots f_m(z)$  e  $f(z) \neq 0$  então  $\log [f(z)] = \log [f_1(z)] + \dots + \log [f_m(z)]$  o que nos dá  $f'(z) = f(z) \left( \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \dots + \frac{f_m'(z)}{f_m(z)} \right)$ . Para aplicar esta expressão a  $a_n(\lambda)$  em  $\lambda = 0$  devemos impor a condição de que nem  $\alpha$  nem  $\beta$  sejam zero ou inteiro negativo. Então temos

$$\frac{da_n}{d\lambda}(\lambda) = a_n(\lambda) \left[ \frac{\alpha + \beta}{(\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta} - \frac{2}{\lambda + 1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\lambda + k + \alpha} + \frac{1}{\lambda + k + \beta} - \frac{2}{\lambda + k + 1} \right) \right]$$

e daí

$$\frac{da_n}{d\lambda}(0) = \left[ \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k + \alpha)(k + \beta)}{(k + 1)^2} \right] \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{k + \alpha} + \frac{1}{k + \beta} - \frac{2}{k + 1} \right) \right]$$

Como  $\frac{da_1}{d\lambda}(0)$  é desta forma podemos enunciar

4. PROPOSIÇÃO. Se  $\gamma = 1$  e se nem  $\alpha$  nem  $\beta$  são iguais a zero ou a um inteiro negativo então uma base para as soluções de (1) em  $0 < |z| < 1$  é dada por

$$\begin{aligned} \omega_{01}(z) &= F(\alpha, \beta, 1, z) \\ y(z) &= F(\alpha, \beta, 1, z) \log z + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+1)^2} \right] \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{k+\alpha} + \frac{1}{k+\beta} - \frac{2}{k+1} \right) \right] z^n \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5. Observações. i) Se uma das constantes  $\alpha$  ou  $\beta$  for igual a zero ou a um inteiro negativo o que temos a fazer é escrever, sempre que necessário,  $a_n(\lambda) = g(\lambda) h(\lambda)$ , onde  $h(\lambda)$  contém os termos que se anulam em  $\lambda = 0$ . Então  $a'_n(\lambda) = g(\lambda)h'(\lambda) + g'(\lambda)h(\lambda)$  e a fórmula que deduzimos acima para a derivada do produto de várias funções é aplicada apenas a  $g(\lambda)$ . Por exemplo, seja  $\alpha$  inteiro negativo e  $\beta$  diferente de zero ou inteiro negativo. Se  $n < 1 - \alpha$  os termos de  $a_n(\lambda)$  não se anulam em  $\lambda = 0$  logo  $a'_n(0)$  é dado pela fórmula (7). Se  $n \geq 1 - \alpha$ , escrevemos

$$a_n(\lambda) = \left( \frac{(\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta}{(\lambda + 1)^2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \alpha}}^{n-1} \frac{(\lambda + k + \alpha)(\lambda + k + \beta)}{(\lambda + k + 1)^2} \right) \frac{\lambda(\lambda - \alpha + \beta)}{(\lambda - \alpha + 1)^2}$$

e procedemos como foi explicado.

ii) Usando  $y(z)$  e procedendo como nas proposições 2 e 3, obtemos uma solução linearmente independente de  $\omega_{11}(z)$  em  $0 < |z - 1| < \forall$  quando  $\gamma = \alpha + \beta$  e uma solução linearmente independente de  $\omega_{1\infty}(z)$  em  $|z| > 1$  quando  $\alpha = \beta$ , sempre que nem  $\alpha$  nem  $\beta$  forem iguais a zero ou a um inteiro negativo.

Se  $\gamma \geq 2$  caímos no caso III do método de Frobenius. Uma solução de (1) linearmente independente de  $\omega_{10}(z)$  é dada então por

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1-\gamma} + c F(\alpha, \beta, \gamma, z) \log z \quad (7)$$

onde

$$c = [(\lambda - (1 - \gamma)) a_n(\lambda)]_{\lambda=1-\gamma}$$

$$b_n = \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda - (1 - \gamma)) a_n(\lambda)]_{\lambda=1-\gamma}$$

Vê-se imediatamente que

$$c = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{\gamma - 1} \prod_{k=0}^{\gamma-3} \frac{(1 - \gamma + k + \alpha)(1 - \gamma + k + \beta)}{(2 - \gamma + k)(k + 1)}$$

e supondo que  $\alpha$  e  $\beta$  não são inteiros menores que  $\gamma$  (isto será necessário mais adiante) segue-se que  $c \neq 0$ , o que nos permite considerar, ao invés de (7), a solução

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^{-1} b_n z^{n+1-\gamma} + F(\alpha, \beta, \gamma, z) \log z.$$

Se  $n = 0, 1, \dots, \gamma - 2$  temos

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda - (1 - \gamma)) a_n(\lambda)]_{\lambda=1-\gamma} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(1 - \gamma + \alpha + k)(1 - \gamma + \beta + k)}{(2 - \gamma + k)(k + 1)}$$

e daí

$$c^{-1} b_n = \frac{\gamma - 1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \sum_{k=n}^{\gamma-3} \frac{(2 - \gamma + k)(k + 1)}{(1 - \gamma + \alpha + k)(1 - \gamma + \beta + k)}$$

Logo, fazendo  $s = \gamma - k - 1$  e  $m = \gamma - n - 2$  podemos escrever

$$c^{-1} \sum_{n=0}^{\gamma-2} b_n z^{n+1-\gamma} \text{ na forma}$$

$$= \sum_{m=0}^{\gamma-2} \left( m! \prod_{s=1}^{m+1} \frac{(s - \gamma)}{(s - \alpha)(s - \beta)} \right) \frac{1}{z^{m+1}}$$

Se  $n \geq \gamma - 1$  temos

$$\begin{aligned} & (\lambda - (1 - \gamma)) a_n(\lambda) = \\ & = \frac{(\alpha + \beta + 1 - \gamma)\lambda + \alpha\beta}{(\lambda + 1)(\lambda + \gamma)} \left( \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \gamma-2}}^{n-1} \frac{(\lambda + k + \alpha)(\lambda + k + \beta)}{(\lambda + k + 1)(\lambda + k + \gamma)} \right) \\ & \quad \cdot \left( \frac{(\lambda + \gamma + \alpha - 2)(\lambda + \gamma + \beta - 2)}{\lambda + 2\gamma - 2} \right) \end{aligned}$$

Como estamos supondo que nem  $\alpha$  nem  $\beta$  são inteiros menores que  $\gamma$ , podemos usar a fórmula de derivação de um produto de funções que foi obtida acima. Resulta que

$$c^{-1} b_n = \left( \prod_{k=\gamma-1}^{n-1} \frac{(1 - \gamma + k + \alpha)(1 - \gamma + k + \beta)}{(2 - \gamma + k)(k + 1)} \right) \cdot \left( d + \sum_{k=\gamma-1}^{n-1} \left( \frac{1}{1 - \gamma + k + \alpha} + \frac{1}{1 - \gamma + k + \beta} - \frac{1}{k + 1} - \frac{1}{2 - \gamma + k} \right) \right)$$

onde  $d$  é uma constante.

Dai, fazendo  $s = k + 1 - \gamma$  e  $m = n - \gamma + 1$  podemos escrever  $c^{-1} \sum_{n=\gamma+1}^{\infty} b_n z^{n+1-\gamma}$  como

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)}{m! \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m-1)} \cdot \left( d + \sum_{s=0}^{m-1} \left( \frac{1}{s+\alpha} + \frac{1}{s+\beta} - \frac{1}{s+\gamma} - \frac{1}{s+1} \right) \right) z^m$$

O termo

$$d \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)}{m! \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m-1)} z^m$$

é igual a  $dF(\alpha, \beta, \gamma, z)$  e pode ser omitido. Obtemos então o seguinte resultado.

6. PROPOSIÇÃO. Se  $\gamma \geq 2$  é um inteiro e se nem  $\alpha$  nem  $\beta$  são inteiros menores que  $\gamma$  então uma base para as soluções de (1) em  $0 < |z| < 1$  é dada por

$$\begin{aligned} \omega_{10}(z) &= F(\alpha, \beta, \gamma, z) \\ v(z) = \log z F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \sum_{m=0}^{\gamma-2} \left( m! \prod_{s=1}^{m+1} \frac{s-\gamma}{(s-\alpha)(s-\beta)} \right) \frac{1}{z^{m+1}} + \\ &+ \sum_{m=\gamma}^{\infty} \frac{\alpha \dots (\alpha+m-1) \beta \dots (\beta+m-1)}{m! \gamma \dots (\gamma+m-1)} \cdot \\ &\cdot \left( \sum_{s=0}^{m-1} \left( \frac{1}{s+\alpha} + \frac{1}{s+\beta} - \frac{1}{s+\gamma} - \frac{1}{s+1} \right) \right) z^m \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7. Observações. (i) Se denotamos  $v(z) = G(\alpha, \beta, \gamma, z)$  então se  $\gamma \leq 0$  é um inteiro, uma solução de (1) linearmente independente de  $\omega_{20}(z)$  é dada por

$$u(z) = z^{1-\gamma} G(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, z)$$

se nem  $\alpha$  nem  $\beta$  são inteiros menores que 1. O procedimento para se mostrar isso é o mesmo que foi usado na obtenção de  $\omega_{20}(z)$  a partir de  $\omega_{10}(z)$  (ver proposição 1)

(ii) Com as mudanças convenientes, (i) e (ii) da observação 5 também se aplicam aqui.

## 9. A equação de Bessel

Consideremos a equação de Bessel

$$z^2 \omega'' + z \omega' + (z^2 - n^2) \omega = 0 \quad (1)$$

onde  $n$  é inteiro não negativo. No ponto singular regular  $z=0$  seu polinômio indicial é  $p(\lambda) = \lambda^2 - n^2$  cujas raízes são  $n$  e  $-n$ . Daí, pela seção 7 sabemos que (1) possui uma solução da forma

$$\omega(z) = z^n + \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n+j}$$

Substituindo esta expressão em (1) obtemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(n+j)^2 - n^2] a_j z^{n+j} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{n+j+2} = 0$$

Fazendo  $j=1$  segue-se  $[(n+1)^2 - n^2] a_1 = 0$ , donde  $a_1 = 0$ . Para  $j \geq 2$  temos a relação de recorrência

$$a_j = - \frac{a_{j-2}}{(n+j)^2 - n^2} \quad (2)$$

que nos permite concluir que  $a_j = 0$  se  $j$  é ímpar. Se  $j = 2k$ ,  $k \geq 1$ , em (2) resulta

$$a_{2k} = - \frac{a_{2(k-1)}}{4k(k+n)}$$

e em consequência,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k! 2^{2k}} \prod_{s=1}^k \frac{1}{s+n}$$

Logo a série

$$\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k}{k! 2^{2k}} \prod_{s=1}^k \frac{1}{s+n} \right) z^{2k+n} \quad (3)$$

é uma solução da equação de Bessel que converge em todo plano complexo. Definimos a *função de Bessel do primeiro tipo* de índice  $n$  por  $J_n(z) = \frac{\omega(z)}{n! 2^n}$ , ou seja,

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+n}}{k!(n+k)! 2^{2k+n}}$$

As funções  $J_n(z)$  satisfazem

$$\frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^n J_{n-1}(z) \quad , \quad n \geq 1 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dz} [z^{-n} J_n(z)] = -z^{-n} J_{n+1}(z) \quad , \quad n \geq 0 \quad (5)$$

Para provar (5) notemos que

$$z^{-n} J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{k!(n+k)! 2^{2k+n}}$$

e derivando termo a termo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [z^{-n} J_n(z)] &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2kz^{2k-1}}{k!(n+k)! 2^{2k+n}} \\ &= - \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s+1}}{s!(n+1+s)! 2^{2s+n+1}} \\ &= -z^{-n} J_{n+1}(z) \end{aligned}$$

que é (5). A prova de (4) é semelhante e fica para o leitor.

Efetuada as derivações em (4) e (5) sai

$$J'_n(z) + \frac{n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) \quad n \geq 1 \quad (6)$$

$$J'_n(z) - \frac{n}{z} J_n(z) = -J_{n+1}(z) \quad n \geq 1 \quad (7)$$

Somando (6) e (7) resulta

$$2J'_n(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \quad n \geq 1 \quad (8)$$

e subtraindo os mesmos termos,

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) \quad n \geq 1 \quad (9)$$

1. PROPOSIÇÃO. Para todo  $n \geq 0$ ,  $J_n(z)$  tem um número infinito de zeros na reta positiva.

*Demonstração.* Consideremos a equação de Bessel  $x^2 \omega'' + x\omega' + (x^2 - n^2)\omega = 0$  na reta positiva. Fazendo  $\omega(x) = v(x)x^{1/2}$  ela se transforma em

$$v'' + \left(1 + \frac{1 - 4n^2}{4x^2}\right) v = 0$$

(Esta mudança de variáveis é sugerida pelo exercício 4 do capítulo IV). Para todo  $x$  suficientemente grande temos  $1 + \frac{1-4n^2}{4x^2} > \frac{1}{2}$  e daí o resultado segue-se pela proposição IV.1.5. ■

No final dessa seção mostraremos que qualquer solução de (1) linearmente independente de  $J_n(z)$  é ilimitada na origem. Isto prova que as únicas soluções da equação definida na reta positiva

$$x^2 u'' + xu' + (\lambda^2 x^2 - n^2)u = 0 \quad (10)$$

limitadas próximas de zero são os múltiplos de  $J_n(\lambda x)$ . Colocando (10) na forma

$$(xu')' + \left( \lambda^2 x^2 - \frac{n^2}{x} \right) u = 0 \quad (11)$$

resulta que as autofunções do problema de Sturm-Liouville singular dado por (11) no intervalo  $(0, 1]$ , com as condições  $u(1) = 0$  e  $u(x)$  limitada, são as funções  $J_n(\lambda_j x)$  onde  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j < \dots$  são os zeros positivos de  $J_n(x)$ . Pela proposição IV.2.3,

$$\int_0^1 J_n(\lambda_i x) J_n(\lambda_j x) x dx = 0 \quad (2)$$

Por outro lado, multiplicando (11) por  $2xu'$  obtemos

$$\frac{d}{dx} (xu')^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2) \frac{d}{dx} (u^2) = 0.$$

Integrando entre 0 e 1 e usando integração por partes resulta

$$2\lambda^2 \int_0^1 (u(x))^2 x dx = [(xu')^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2)u^2]_0^1$$

Fazendo  $u(x) = J_n(\lambda_j x)$  e usando (12) sai finalmente

$$\int_0^1 (J_n(\lambda_j x))^2 x dx = \frac{1}{2} (J_{n+1}(\lambda_j))^2$$

O que foi feito acima sugere a possibilidade de expandir uma função  $f(x)$  definida em  $(0, 1]$  numa série da forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j J_n(\lambda_j x) \quad (13)$$

com

$$a_j = \frac{2}{(J_{n+1}(\lambda_j))^2} \int_0^1 f(x) J_n(\lambda_j x) x dx \quad (14)$$

Efetivamente, temos o seguinte teorema, cuja demonstração foge ao caráter elementar desta exposição.

2. TEOREMA. Suponhamos que  $f(x)$  e  $f'(x)$  tenham no máximo um número finito de descontinuidades em  $[0, 1]$  e que nesses pontos os limites laterais dessas funções existam. Se  $0 < x < 1$  então a série (13) com os coeficientes dados por (14) converge para  $f(x)$  quando  $x$  é ponto de continuidade desta função e converge para  $\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$  quando  $x$  é um ponto de descontinuidade.

*Demonstração.* Ver o livro de G.N. Watson, "A Treatise on the theory of Bessel functions", cap XVIII. ■

Para encontrar uma solução de (1) linearmente independente de  $J_n(z)$  precisamos aplicar os casos II e III do método de Frobenius. Procuramos então para a equação

$$z^2 \omega'' + z \omega' + (z^2 - n^2) \omega = p(\lambda) z^\lambda \quad (15)$$

uma solução da forma

$$\varphi(\lambda, z) = z^\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\lambda) z^{\lambda+i}$$

Substituindo em (15) obtemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} [(\lambda+i)^2 - n^2] a_i(\lambda) z^{\lambda+i} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\lambda) z^{\lambda+i+2} = p(\lambda) z^\lambda$$

e novamente resulta que os coeficientes ímpares são todos nulos. Fazendo  $i=2k$  temos a relação de recorrência para os coeficientes pares

$$a_{2k} = - \frac{a_{2(k-1)}(\lambda)}{(\lambda+2k)^2 - n^2}$$

e em consequência,

$$a_{2k}(\lambda) = (-1)^k \prod_{j=1}^k \frac{1}{(\lambda+2j)^2 - n^2}$$

Se  $n=0$  temos

$$\begin{aligned} \frac{da_{2k}}{d\lambda}(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \left[ (-1)^k \prod_{j=1}^k \frac{1}{(\lambda+2j)^2} \right] \\ &= (-1)^{k+1} \left[ \prod_{j=1}^k \frac{1}{(\lambda+2j)^2} \right] \left[ \sum_{j=1}^k \frac{2}{\lambda+2j} \right] \end{aligned}$$

logo, em  $\lambda = 0$ ,

$$\frac{da_{2k}}{d\lambda}(0) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2 2^{2k}} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right)$$

e daí, uma solução de (1) linearmente independente de  $J_0(z)$  é (ver caso II do método de Frobenius)

$$v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2 2^{2k}} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right) \right] z^{2k} + J_0(z) \log z \quad (16)$$

Se  $n > 0$  sabemos (ver caso III do método de Frobenius) que uma solução de (1) linearmente independente de  $J_n(z)$  é dada pela série

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{2k-n} + c\omega(z) \log z \quad (17)$$

onde  $b_{2k} = \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda + n) a_{2k}(\lambda)]_{\lambda = -n}$ ,  $c = [(\lambda + n) a_{2k}(\lambda)]_{\lambda = -n}$  e  $\omega(z)$  é a série (3).

Vê-se facilmente que

$$c = -\frac{1}{n!(n-1)!2^{2n-1}}$$

logo  $c \neq 0$ . Isto nos permite considerar, ao invés de (17), a solução

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{c^{-1}}{n! 2^n} b_{2k} \right) z^{2k-n} + J_n(z) \log z.$$

Se  $k = 0, \dots, n-1$  temos

$$b_{2k} = \left( (-1)^k \prod_{j=1}^k \frac{1}{(\lambda + 2j)^2 - n^2} \right)_{\lambda = -n} = \frac{(-1)^k}{k! 2^{2k}} \prod_{j=1}^k \frac{1}{j-n}$$

e daí

$$\frac{c^{-1}}{n! 2^n} b_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{(n-1)!}{k! 2^{2k-n+1}} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j-n}$$

Se  $k \geq n$  vemos que

$$a_{2k}(\lambda) = \frac{(-1)^k}{\lambda + 3n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^k \frac{1}{(\lambda + 2j)^2 - n^2}$$

e em consequência,

$$\frac{c^{-1}}{n! 2^n} b_{2k} = \frac{(-1)^{k+n+1}}{k!(k-n)! 2^{2k-n+1}} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k-n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right)$$

Fazendo  $s = k - n$  podemos então escrever

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left( \frac{c^{-1}}{n! 2^n} b_{2k} \right) z^{2k-n} \text{ na forma}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{s!(s+n)! 2^{2s+n+1}} \left( \sum_{j=1}^{s+n} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^s \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right) z^{2s+n}$$

Como o termo  $-\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{s!(s+n)! 2^{2s+n+1}} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right) z^{2s+n}$  é um múltiplo de  $J_n(z)$ , ele pode ser omitido.

Resulta enfim que uma solução de (1) linearmente independente de  $J_n(z)$  é dada por

$$v(z) = J_n(z) \log z + \left. \begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{(-1)^{k+1} (n-1)!}{k! 2^{2k-n+1}} \prod_{j=1}^k \frac{1}{j-n} \right) z^{2k-n} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{k!(n+k)! 2^{2k+n}} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k+n} \frac{1}{j} \right) z^{2k+n} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

3. *Observações.* (i) Na equação (1) obviamente não faz diferença usar  $n$  ou  $-n$ . Definimos então, se  $n$  é um inteiro negativo,  $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$ .

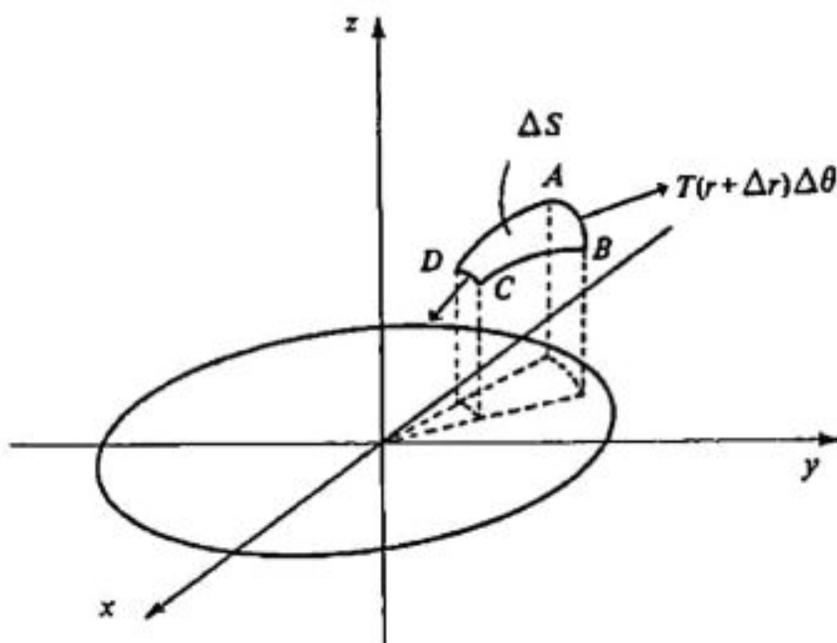
(ii) Se na equação (1)  $n = v$  é um número complexo não inteiro qualquer, então uma base para (1) é dada pelas duas séries obtidas de (3) fazendo-se  $n = v$  e  $n = -v$ .

(iii) Se  $n \geq 0$  é inteiro, costuma-se definir a *função de Bessel do segundo tipo* de índice  $n$  por  $Y_n(z) = \frac{2}{\pi} (\gamma - \log 2) J_n(z) + \frac{2}{\pi} v(z)$  onde, conforme o caso,  $v(z)$  é dada por (16) ou (18) e  $\gamma = \lim \{1 + 1/2 + \dots + 1/m - \log m\}$  (constante de Euler).

## 10. Funções de Bessel e a equação de membrana oscilante

A equação de Bessel aparece naturalmente em muitos problemas da Física Matemática. Para ilustrar isso escolhemos o problema da descrição das oscilações de uma membrana cujo contorno é o círculo

de raio 1 no plano  $xy$ . Usando coordenadas polares nêsse plano, se as oscilações são suficientemente pequenas podemos descrevê-las por uma função real  $z(r, \theta, t)$ ,  $0 < r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq t$ , pois nesse caso é razoável supor que o movimento de cada ponto é vertical (dizemos então que as oscilações são transversais)



Fixemos agora um elemento  $\Delta S$  da membrana, limitado pelos pontos do plano  $xy$  de coordenadas polares  $(r, \theta)$ ,  $(r + \Delta r, \theta)$ ,  $(r, \theta + \Delta \theta)$  e  $(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta)$ . Se a membrana tem densidade constante  $m$  então a massa de  $\Delta S$  é  $mr \Delta \theta \Delta r$ . Como as oscilações são transversais, a resultante das fôrças que agem em  $\Delta S$  é vertical, sendo dada por

$$mr \Delta r \Delta \theta \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

pela segunda lei de Newton.

Podemos também supor que a tensão (fôrça por unidade de comprimento) mantém-se todo o tempo igual a uma constante  $T$  ao longo do contôrno da membrana. Como esta é perfeitamente elástica, a tensão distribui-se de maneira uniforme ao longo de sua área. Isto significa que as tensões sobre os lados  $AB$  e  $CD$  tem módulos respectivamente  $T(r + \Delta r)\Delta \theta$  e  $Tr\Delta \theta$  sendo em ambos os casos, tangente à membrana. Aproximando os senos pelas tangentes, segue-se que a componente vertical da resultante das tensões sobre os lados  $AB$  e  $CD$  é

$$\begin{aligned}
 & T(r + \Delta r) \Delta \theta \left( \frac{\Delta z}{\Delta r} \right)_{r+\Delta r} - T r \Delta \theta \left( \frac{\Delta z}{\Delta r} \right)_r \\
 &= T \Delta \theta \left( r \frac{\Delta z}{\Delta r} \right)_{r+\Delta r} - T \Delta \theta \left( r \frac{\Delta z}{\Delta r} \right)_r = \\
 &= T \Delta \theta \Delta \left( r \frac{\Delta z}{\Delta r} \right)
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, a componente vertical da resultante das tensões sobre os lados  $BC$  e  $DA$  é

$$\begin{aligned}
 & T \Delta r \left( \frac{\Delta z}{r \Delta \theta} \right)_{\theta+\Delta \theta} - T \Delta r \left( \frac{\Delta z}{r \Delta \theta} \right)_\theta = \\
 &= T \Delta r \Delta \left( \frac{\Delta z}{r \Delta \theta} \right)
 \end{aligned}$$

Logo, devemos ter

$$T \Delta \theta \Delta \left( r \frac{\Delta z}{\Delta r} \right) + T \Delta r \Delta \left( \frac{\Delta z}{r \Delta \theta} \right) = m r \Delta \theta \Delta r \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

ou seja,

$$\frac{T}{r} \frac{\Delta \left( r \frac{\Delta z}{\Delta r} \right)}{\Delta r} + \frac{T}{r} \frac{\Delta \left( \frac{\Delta z}{r \Delta \theta} \right)}{\Delta \theta} = m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Passando ao limite, obtemos a equação da membrana oscilante,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1)$$

onde  $a^2 = T/m$ . Segue-se que se em  $t = 0$  a membrana está em repouso numa posição dada por uma função  $f(r)$  independente de  $\theta$ , então a descrição de suas oscilações para  $t > 0$  é obtida resolvendo-se a equação (1) com as condições iniciais

$$\left. \begin{aligned}
 z(1, \theta, t) &= 0 \\
 \frac{\partial z}{\partial t}(r, \theta, 0) &= 0 \\
 z(r, \theta, 0) &= f(r)
 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Para aplicar o método de separação de variáveis façamos

$$z(r, \theta, t) = u(r) v(\theta) \omega(t) \quad (3)$$

Substituindo em (1) obtemos

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} \frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = \frac{1}{a^2} \frac{\omega''(t)}{\omega(t)} \quad (4)$$

e como o lado esquerdo não depende de  $t$ , ambos os membros são iguais a uma constante  $\alpha$ . O lado direito de (4) nos dá então

$$\begin{aligned} \omega''(t) - \alpha a^2 \omega(t) &= 0 \\ \omega'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Como a membrana oscila em torno de sua posição de equilíbrio,  $\omega(t)$  deve oscilar em torno de zero. Daí  $\alpha < 0$  e podemos fazer  $\alpha = -\lambda^2$ ,  $\lambda > 0$ . Logo

$$\omega(t) = c \cos(\lambda at)$$

onde  $c$  é constante.

Do lado esquerdo de (4) sai

$$r^2 \frac{u''(r)}{u(r)} + r \frac{u'(r)}{u(r)} + \lambda^2 r^2 = - \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} \quad (5)$$

e da mesma forma que antes, ambos os membros de (5) são iguais a uma constante  $\beta$ . Resulta então a equação

$$v''(\theta) + \beta v(\theta) = 0$$

De modo geral, como  $v(\theta)$  não pode depender da particular determinação de  $\theta$ , devemos ter  $\beta = n^2$  com  $n$  inteiro não negativo. No caso particular que estamos considerando, como  $z(r, \theta, 0) = f(r)$ ,  $v(\theta)$  é igual a uma constante o que implica  $\beta = 0$ . Do lado esquerdo de (5) sai então

$$\begin{aligned} r^2 u'' + r u' + \lambda^2 r^2 u &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

cujas soluções limitadas em  $(0, 1]$  são dadas pelas funções

$$u_j(r) = J_0(\lambda_j r)$$

onde  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_j < \dots$  são os zeros positivos de  $J_0(r)$ .

Em consequência, as soluções de (1) da forma (3) satisfazendo as duas primeiras condições em (2) e independentes de  $\theta$  são dadas pelas múltiplas das funções

$$J_0(\lambda_j r) \cos(\lambda_j at)$$

Para obter uma solução  $z(r, \theta, t)$  de (1) satisfazendo todas as condições em (2) fazemos formalmente

$$z(r, \theta, t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j J_0(\lambda_j r) \cos(\lambda_j a t) \quad (6)$$

Se isso é válido, como  $f(r) = z(r, \theta, 0)$ , devemos ter

$$f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j J_0(\lambda_j r) \quad (7)$$

O teorema 9.2 nos dá condições sob as quais a expansão (7) pode ser feita, os coeficientes  $a_j$  sendo então iguais a

$$b_j = \frac{2}{(J_1(\lambda_j))^2} \int_0^1 f(r) J_0(\lambda_j r) r dr \quad (8)$$

Além disso, se  $f$  é suficientemente bem comportada, prova-se que (6) com os coeficientes dados por (8) é de classe  $C^2$  e é uma solução efetiva de (1).

## EXERCÍCIOS

1. Para as equações abaixo, encontre o polinômio indicial e suas raízes no ponto indicado:

(i)  $2z^2 \omega'' + z(2z - 1)\omega' + (5z + 1)\omega = 0 \quad z = 0$

(ii)  $18(z - 4)^2(z - 6)\omega'' + 9z(z - 4)\omega' - 32\omega = 0 \quad z = \infty$ .

Nos próximos cinco exercícios, resolva a equação em torno do ponto indicado e, sempre que possível, indique a região de validade das soluções.

2.  $2z^2 \omega'' + z(2z + 3)\omega' + (3z - 1)\omega = 0, \quad z = 0.$

(Solução:  $\omega_1 = z^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (n+1) z^{n+1/2}}{5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3)}$ ,

$$\omega_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1) z^{n-1}}{n!}.$$

3.  $2z\omega'' + 5(1 + 2z)\omega' + 5\omega = 0 \quad z = 0$

(Solução:  $\omega_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-5)^n z^n}{n!(2n+1)(2n+3)}$ ,

$$\omega_2 = z^{-3/2} - 10z^{-1/2}.$$

4.  $2z(z-1)\omega'' + 3(z-1)\omega' - \omega = 0, z = 0.$

(Solução:  $\omega_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-4n^2}, \omega_2 = z^{-1/2} - z^{1/2}$ ).

5.  $2z^2\omega'' + 3z\omega' - \omega = 0, z = 0.$

(Solução:  $\omega_1 = z^{1/2}, \omega_2 = z^{-1}$ )

6.  $2(z-4)\omega'' + (5-z)\omega' - \omega = 0 \quad z = 4$

$$\left( \text{Solução: } \omega_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4)^{n+1/2}}{2^n n!} = (z-4)^{1/2} \exp\left[\frac{1}{2}(z-4)\right] \right.$$

$$\left. \omega_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-4)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \right)$$

7. Mostre que  $z = 0$  é ponto singular irregular para a equação

$$z^2\omega'' + (3z-1)\omega' + \omega = 0 \quad (*)$$

e que a série divergente  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  é uma solução formal de (\*).8. Considere o sistema  $\omega' = A(z)\omega$ . Dados  $z_1, \dots, z_k$  números complexos distintos, uma condição necessária e suficiente para que  $z_1, \dots, z_k$  sejam pontos singulares simples,  $z = \infty$  seja no máximo ponto singular simples e todos os demais pontos sejam regulares para o sistema é que

$$A(z) = \sum_{m=1}^k (z - z_m)^{-1} A_m$$

onde  $A_m \neq 0$  é matriz constante.(Sugestão: Para cada  $1 \leq m \leq k$  defina  $A_m = \lim_{z \rightarrow z_m} \frac{A(z)}{z - z_m}$ . Mostreentão que  $F(z) = A(z) - \sum_{m=1}^k (z - z_m)^{-1} A_m$  é analítica e limitada em  $\mathbb{C}$ , e aplique o teorema de Liouville).*Nos próximos seis exercícios, resolva a equação em torno da origem e se possível indique a região de validade das soluções.*

9.  $z^2\omega'' - z(1+z)\omega' + \omega = 0$

(Solução:  $\omega_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} = ze^z,$

$$\omega_2 = \omega_1 \log z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) z^{n+1}.$$

10.  $4z^2\omega'' + (1 - 2z)\omega = 0$

(Solução:  $\omega_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1/2}}{(n!)^2 2^n}$ .

$$\omega_2 = \omega_1 \log z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2 2^{n-1}} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} \right) z^{n+1/2}.$$

11.  $z^2\omega'' + 3z\omega' + (1 + 4z^2)\omega = 0$

(Solução:  $\omega_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(n!)^2}$

$$\omega_2 = \omega_1 \log z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) z^{2n-1}.$$

12.  $z\omega'' + (3 + 2z)\omega' + 4\omega = 0$

(Solução:  $\omega(z) = az^{-2} + 2b \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-2}}{n(n-2)!} z^{n-2}$  onde  $a, b$  são constantes).

13.  $z\omega'' - (3 + z)\omega' + 2\omega = 0$

(Solução:  $\omega(z) = a \left( 1 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2 \right) + b \sum_{n=4}^{\infty} \frac{24(n-3)}{n!} z^n$  onde  $a, b$  são constantes).

14.  $2z\omega'' + 6\omega' + \omega = 0$

(Solução:  $\omega_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{n-2}}{2^n n!(n-2)!}$ ,

$$\omega_2(z) = \omega_1 \log z + z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!(n-2)!} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - 1 \right) z^{n-2}$$

15. Seja a equação hipergeométrica confluenta

$$z\omega'' + (\gamma - z)\omega' - \alpha\omega = 0 \quad (*)$$

onde  $\alpha, \beta$  são constantes.

(i) Mostre que  $z = \infty$  é ponto singular irregular de (\*).

(ii) Mostre que  $z = 0$  é ponto singular regular de (\*) com expoentes 0 e  $1 - \gamma$ . Se  $\gamma$  não é zero nem inteiro negativo, mostre que a solução de (\*) correspondente ao expoente 0 é

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} z^n$$

que é denotada  $F(\alpha, \gamma, z)$  e chamada função confluyente hipergeométrica.

### 16. A equação

$$z\omega'' + (1-z)\omega' + p\omega = 0 \quad (*)$$

onde  $p$  é constante, é chamada equação de Laguerre. Use o problema 15 para provar que as únicas soluções de (\*) limitadas em torno da origem são múltiplos de  $F(-p, 1, z)$ . Mostre que se  $p = n$  é inteiro não negativo, então  $L_n(z) = F(-n, 1, z)$ ,  $n \geq 0$ , são polinômios, chamados polinômios de Laguerre.

Em cada um dos três exercícios seguintes encontre o símbolo de Riemann para a equação Fuchsiana indicada e coloque-o na forma canônica.

17.  $z^2(z-2)\omega'' + z\omega' - (6z+1)\omega = 0$

18.  $2z(z-4)\omega'' + (3z+2)\omega' - \omega = 0$

19.  $z(z+2)\omega'' + (4z+1)\omega' + 2\omega = 0$

Nos próximos sete exercícios, resolva a equação Fuchsiana correspondente, no ponto indicado.

20.  $z = 1$

$$\omega = P \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & \\ 2 & -1 & 3 & z \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \end{pmatrix}$$

21.  $z = 2$

$$\omega = P \begin{pmatrix} 2 & 6 & \infty & \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & z \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \end{pmatrix}$$

22.  $z = 6$ , símbolo do exercício 21.

23.  $z = 2$

$$\omega = P \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & \\ 2 & \frac{2}{3} & 2 & z \\ \frac{1}{3} & -1 & -3 & \end{pmatrix}$$

24.  $z = 4$ ; símbolo do exercício 23

25.  $z = 3$

$$\omega = P \begin{pmatrix} 3 & 5 & \infty & \\ 2 & 0 & -\frac{3}{2} & z \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} & \end{pmatrix}$$

26.  $z = \infty$

$$\omega = P \begin{pmatrix} 1 & 2 & \infty & \\ 2 & 3 & -3 & z \\ \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -3 & \end{pmatrix}$$

27.  $z = 1$

$$\omega = P \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \\ 0 & 4 & \frac{1}{2} & z \\ -3 & 1 & -\frac{3}{2} & \end{pmatrix}$$

28. Mostre que se  $\alpha$  e  $\beta$  são ambos diferentes de zero ou inteiro negativo, então o raio de convergência da série  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  é igual a um.

(Sugestão: Use o teste do quociente).

29. Considere a equação de Chebyshev

$$(1 - z^2)\omega'' - z\omega' + p^2\omega = 0,$$

onde  $p$  é constante não negativa. Fazendo  $v = \frac{1-z}{2}$  transforme-a numa equação hipergeométrica e prove que sua solução geral em torno de  $z = 1$  é

$$\omega(z) = c_1 F\left(p, -p, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right) + \\ + c_2 \left(\frac{1-z}{2}\right)^{1/2} F\left(p + \frac{1}{2}, -p + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1-z}{2}\right)$$

onde  $c_1, c_2$  são constantes. Os polinômios

$$T_n(z) = F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right)$$

são chamados polinômios de Chebyshev.

30. Mostre que  $F'(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, z)$

31. Mostre que:

(i)  $(1+z)^{\alpha} = F(-\alpha, \beta, \beta, -z)$

(ii)  $\log(1+z) = z F(1, 1, 2, -z)$

(iii)  $\arcsen z = z F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right)$

(iv)  $\arctg z = z F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -z^2\right)$

(Sugestão: Verifique as expansões em série dos termos à esquerda).

32. Mostre que

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z)$$

se  $|z| < 1$ .

(Sugestão: Na equação (1) da seção 8 faça  $\omega = u(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}$ . Note que a solução da equação em  $u$  obtida, com  $u(0) = 1$ , é  $F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z)$ ).

33. Considere a equação de Legendre

$$(1-z^2)\omega'' - 2z\omega' + p(p+1)\omega = 0 \quad (*)$$

onde  $p$  é constante complexa, para a qual  $z = 0$  é ponto regular.

(i) Mostre que a solução geral em  $|z| < 1$  é dada por

$$\omega(z) = a_0 \left[ 1 - \frac{p(p+1)}{2!} z^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!} z^4 - \frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!} z^6 + \dots \right] + a_1 \left[ z - \frac{(p-1)(p+2)}{3!} z^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!} z^5 - \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p+2)(p+4)(p+6)}{7!} z^7 + \dots \right]$$

onde  $a_0$  e  $a_1$  são constantes arbitrárias.

(ii) Se  $p$  não é inteiro, mostre que ambas as séries em (i) tem raio de convergência igual a um.

(iii) Seja  $p = n$  inteiro  $\geq 0$ . Mostre então que existe um único polinômio  $P_n(z)$  que satisfaz (\*) tal que  $P_n(1) = 1$ . Além disso,  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ . Estes polinômios são chamados polinômios de Legendre.

(Sugestão: para (ii): use o teste do quociente).

34. (i) Mostre que o símbolo de Riemann para a equação de Legendre (ver exercício 33) é:

$$\omega = P \begin{pmatrix} 1 & -1 & \infty \\ 0 & 0 & -p & z \\ 0 & 0 & p+1 & \end{pmatrix}$$

(ii) Fazendo  $v = \frac{1-z}{2}$  mostre que ela se transforma em

$$\omega = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -p & v \\ 0 & 0 & p+1 & \end{pmatrix}$$

Conclua que uma solução da equação de Legendre em  $|z-1| < 2$  é dada por  $F\left(-p, p+1, 1, \frac{1-z}{2}\right)$ .

(iii) Mostre que os polinômios de Legendre são dados por  $P_n(z) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-z}{2}\right)$ .

35. (i) Use (iii) do exercício anterior para provar que o coeficiente de  $z^n$  no polinômio de Legendre  $P_n(z)$  é dado por  $\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$ .
- (ii) Use (i) e (i) do exercício 33 para provar que

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} z^{n-2k}$$

onde  $r = \frac{n}{2}$  se  $n$  é par e  $r = \frac{n-1}{2}$  se  $n$  é ímpar.

- (iii) Usando (ii) prove a fórmula de Rodrigues

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

(Sugestão para (iii): Como  $\frac{d^n}{dx^n} (z^{2n-2k}) = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} z^{n-2k}$

$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left( \sum_{k=0}^r \binom{n}{k} (z^2)^{n-k} (-1)^k \right)$ . Note que pode-se acrescentar os demais membros da série binomial, pois sua  $n$ -ésima derivada é nula.)

36. Usando a fórmula de Rodrigues (exercício 35) calcule  $P_0(z)$ ,  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$  e  $P_3(z)$ .
37. Considere os polinômios de Legendre definidos na reta.
- (i) Use a fórmula de Rodrigues (exercício 35) para provar que

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0$$

se  $0 \leq k < n$ . Deduza que

$$\int_{-1}^1 P^n(x) P_m(x) dx = 0$$

se  $m \neq n$ .

- (ii) Use a fórmula de Rodrigues e integração por partes  $n$  vezes para provar que

$$\int_{-1}^1 x^n P_n(x) dx = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Deduza que

$$\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

38. Seja a equação de Legendre associada

$$(1 - z^2)\omega'' - 2z\omega' + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] \omega = 0. \quad (*)$$

(i) Mostre que seu símbolo de Riemann é

$$\omega = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \infty & \\ \frac{m}{2} & \frac{m}{2} & -n & z \\ -\frac{m}{2} & -\frac{m}{2} & n+1 & \end{array} \right)$$

(ii) Conclua que uma solução de (\*) é

$$\omega(z) = (z^2 - 1)^{m/2} F\left(m - n, m + n + 1, 1 + m, \frac{1 - z}{2}\right)$$

39. Seja  $J_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , a função de Bessel de primeiro tipo (ver seção 9). Prove que os zeros positivos de  $J_n(x)$  e  $J_{n+1}(x)$  são alternados.

40. Expresse  $J_2(z)$ ,  $J_3(z)$  e  $J_4(z)$  em função de  $J_0(z)$  e  $J_1(z)$ .

41. Mostre que a equação Fuchsiana

$$\omega = P \left( \begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ a' & b' & c' & z \\ a'' & b'' & c'' & \end{array} \right) \quad (*)$$

onde  $a, b, c$  são finitos é dada por

$$\begin{aligned} \omega'' + \left[ \frac{1 - a' - a''}{z - a} + \frac{1 - b' - b''}{z - b} + \frac{1 - c' - c''}{z - c} \right] \omega' + \\ + \left[ \frac{a' a'' (a - b)(a - c)}{z - a} + \frac{b' b'' (b - a)(b - c)}{z - b} + \right. \\ \left. + \frac{c' c'' (c - a)(c - b)}{z - c} \right] \frac{\omega}{(z - a)(z - b)(z - c)} = 0. \end{aligned}$$

(Sugestão: Escreva (\*) na forma

$$\omega'' + \frac{P(z)}{(z - a)(z - b)(z - c)} \omega' + \frac{Q(z)}{(z - a)^2(z - b)^2(z - c)^2} \omega = 0 \quad (**)$$

Use o fato de  $z = \infty$  ser ponto regular de (\*) para obter as expansões (note que o grau de  $Q(z)$  é suficientemente baixo)

$$\frac{P(z)}{(z-a)(z-b)(z-c)} = \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{z-b} + \frac{A_3}{z-c}$$

$$\frac{Q(z)}{(z-a)(z-b)(z-c)} = \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{z-b} + \frac{B_3}{z-c}$$

onde  $A_1 + A_2 + A_3 = 2$ . Daí (\*\*) se transforma em

$$\omega'' + \left[ \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{z-b} + \frac{A_3}{z-c} \right] \omega' + \left[ \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{z-b} + \frac{B_3}{z-c} \right] \frac{\omega}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0.$$

Calcule agora os valores de  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  usando os polinômios indiciais. Por exemplo, o polinômio indicial em  $z = a$  é

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (A_1 - 1)\lambda + \frac{B_1}{(a-b)(a-c)}$$

PARTE C

**TEORIA QUALITATIVA**

## ELEMENTOS DA TEORIA QUALITATIVA DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Iniciaremos neste capítulo o estudo de sistemas de equações diferenciais da forma

$$\begin{cases} x_1' = X_1(x_1, \dots, x_n), \\ x_2' = X_2(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x_n' = X_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1)$$

chamados autônomos (isto é, independentes de  $t$ ). Não procuraremos soluções na forma explícita ou mesmo aproximada, mas propomo-nos a determinar, pelo estudo direto das funções  $X_i$ , o retrato de fase de (1), isto é, a forma global da família de soluções máximas de (1). No capítulo III fizemos uma descrição completa do retrato de fase de um sistema linear hiperbólico por meio do estudo da exponencial  $e^{tA}$ . Entretanto, quando os  $X_i$ 's são não lineares, a determinação do retrato de fase de (1) tem real interesse, pois na maioria das vezes não é possível encontrar explicitamente as soluções, e por outro lado as soluções aproximadas convergem para soluções verdadeiras somente em intervalos finitos, sendo a convergência tanto mais lenta quanto maior for o intervalo.

O pioneiro no estudo do retrato de fase de um sistema de equações diferenciais foi Poincaré, que encontrou em problemas da Mecânica Celeste a motivação inicial. Um dos problemas que recebeu sua particular atenção foi o da estabilidade do sistema solar.

Várias questões são relevantes para o estudo global das soluções de (1). Deseja-se saber, por exemplo, quais soluções  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  de (1) são periódicas ou permanecem em uma região limitada do espaço. Ou então se convergem para um ponto de equilíbrio (que é uma solução constante) ou para uma órbita periódica quando  $t \rightarrow +\infty$ . Os métodos desenvolvidos para responder estas questões constituem um corpo de resultados que Poincaré chamou de Teoria Qualitativa. Atualmente esta teoria é significativa para muitos problemas não lineares que transcendem à Mecânica Celeste. Assim, no

estudo matemático da dinâmica das populações aparecem equações do tipo (1), onde cada  $x_i$  denota a densidade da população de uma espécie e as funções  $X_i$  exprimem a lei de interação entre as espécies. Nestas registram-se fatos como a competição pelo mesmo alimento e espaço ou a ação predatória de uma espécie sobre outra. Se as soluções  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  tendem para um ponto de equilíbrio  $(a_1, \dots, a_n)$  quando  $t \rightarrow +\infty$  e  $a_i > 0$  para  $i = 1, \dots, n$ , interpreta-se este comportamento dizendo que as populações evoluem para uma situação de coexistência. Se as soluções tendem para uma solução periódica, tem-se uma flutuação no sentido de que uma espécie sucede outra no domínio do habitat em um ciclo ininterrupto.

Os pontos singulares ou de equilíbrio desempenham um papel crucial na descrição do retrato de fase. Poincaré fez um catálogo destes pontos para  $n = 2$ , classificando sua estrutura local por comparação com os sistemas lineares (são o foco, a sela, o nó, etc.). De igual importância são as soluções periódicas, cujo estudo é mais sutil. Poincaré idealizou métodos geométricos e analíticos para analisar a existência e estabilidade de soluções periódicas.

Neste capítulo apresentamos os fundamentos da Teoria Qualitativa e discutimos, sem pretender esgotá-los, os problemas mais importantes.

## 1. Campos vetoriais e fluxos

Seja  $\Delta$  um subconjunto aberto do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$  em  $\Delta$  é uma aplicação  $X: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$ . Ao campo vetorial  $X$  associamos a equação diferencial

$$(1) \quad x' = X(x).$$

As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis  $\varphi: I \rightarrow \Delta$  ( $I$  intervalo da reta) tais que

$$(2) \quad \frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t))$$

para todo  $t \in I$ , são chamadas *trajetórias* ou *curvas integrais* de  $X$  ou da equação diferencial (1).

Um ponto  $x \in \Delta$  é dito *ponto singular* de  $X$  se  $X(x) = 0$  e *ponto regular* de  $X$  se  $X(x) \neq 0$ .

Se  $X$  é ponto singular então  $\varphi(t) = x$ ,  $-\infty < t < \infty$  é solução de (1). Reciprocamente, se  $\varphi(t) = x$ ,  $-\infty < t < \infty$  é solução de (1) então  $x$  é ponto singular de  $X$ , pois

$$0 = \varphi'(t) = X(\varphi(t)) = X(x).$$

Uma curva integral  $\varphi: I \rightarrow \Delta$  de  $X$  chama-se *máxima* se para toda curva integral  $\psi: J \rightarrow \Delta$  tal que  $I \subseteq J$  e  $\varphi = \psi/I$  então  $I = J$  e conseqüentemente  $\varphi = \psi$ . Neste caso  $I$  chama-se *intervalo máximo*.

A equação (1) (ou (2)) admite a seguinte interpretação geométrica:  $\varphi$  é uma curva integral de  $X$  se e só se seu vetor velocidade  $\varphi'(t)$  em  $t$  coincide com o valor do campo  $X$  em  $\varphi(t)$ . Veja a figura 1.

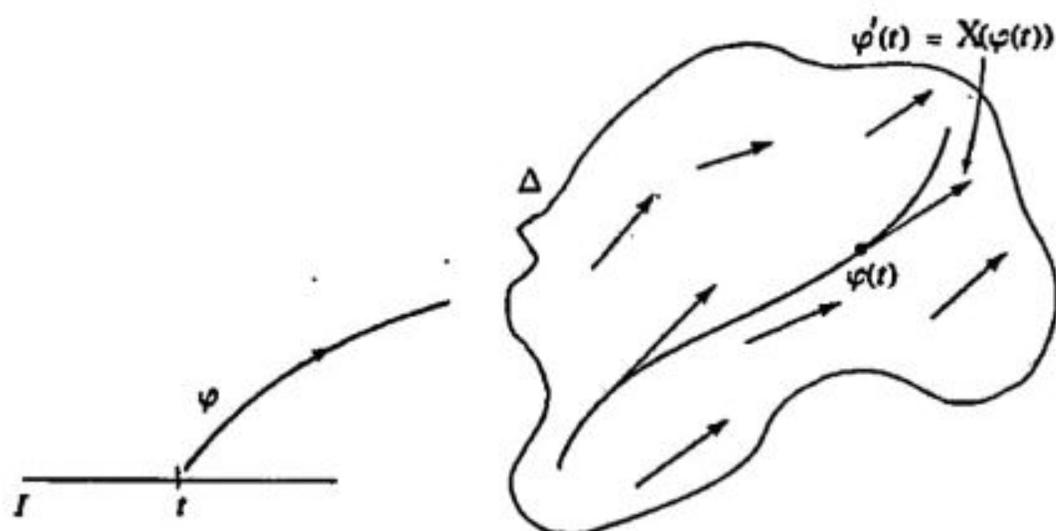


Figura 1

Uma equação diferencial do tipo (1) é chamada *equação diferencial autônoma*, isto é, independente de  $t$ . Para colocá-la no contexto do capítulo I, podemos definir  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(t, x) = X(x)$ , onde  $\Omega = \mathbb{R} \times \Delta$ . Por outro lado, toda equação  $x' = f(t, x)$  não autônoma em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  pode ser considerada como uma equação autônoma  $z' = F(z)$  em  $\Omega$ , onde  $z = (s, x)$  e  $F(z) = (1, f(z))$ . É fácil verificar a correspondência biunívoca entre as soluções da equação não autônoma  $x' = f(t, x)$  e as soluções da equação autônoma associada  $z' = F(z)$ .

Podemos aplicar (II; 3, 1) e (II; 3, 6) às equações autônomas e concluir o seguinte:

## 1. TEOREMA

a) (*Existência e unicidade de soluções máximas*): Para cada  $x \in \Delta$  existe um intervalo aberto  $I_x$  onde está definida a única solução máxima  $\varphi_x$  de (1) tal que  $\varphi_x(0) = x$ .

b) (*Propriedade de grupo*). Se  $y = \varphi_x(t)$  e  $t \in I_x$ , então  $I_y = I_x - t = \{r - t; r \in I_x\}$  e  $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$  para todo  $s \in I_y$ .

c) (*Diferenciabilidade em relação às condições iniciais*). O conjunto  $D = \{(t, x); x \in \Delta, t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e a aplicação  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$  é de classe  $C^r$ . Mais ainda,  $\varphi$  satisfaz à equação

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) \cdot D_2 \varphi(t, x)$$

para todo  $(t, x) \in D$ .

2. DEFINIÇÃO. A aplicação  $\varphi: D \rightarrow \Delta$  chama-se *fluxo gerado* por  $X$ .

Note-se que as condições da definição de fluxo de classe  $C^r$  estão satisfeitas, isto é,  $\varphi(0, x) = x$  e  $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$ , sendo que a última condição é válida apenas nas condições da parte b do teorema 1. É claro que se  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x$ , o fluxo gerado por  $X$  é um fluxo de classe  $C^r$  em  $\Delta$ . Entretanto, muitas vezes  $I_x \neq \mathbb{R}$ . Por este motivo o fluxo gerado por  $X$  é chamado freqüentemente de *fluxo local* ou *grupo local a um parâmetro gerado por  $X$* . Esta última denominação decorre do fato de que a condição b do teorema 1 define, quando  $D = \mathbb{R} \times \Delta$ , um homomorfismo do grupo aditivo dos reais no grupo dos difeomorfismos de classe  $C^r$  de  $\Delta$  munido da operação de composição. Ou seja, o homomorfismo é  $t \rightarrow \varphi_t$ , e temos  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ , e  $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$ , para  $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ . É válida assim a imagem de que os pontos de  $\Delta$  fluem ao longo das trajetórias de  $X$  do mesmo modo que um fluido desloca-se ao longo de suas linhas de corrente.

3. *Observação*. A parte b do teorema 1 não está explicitamente demonstrada no capítulo II, mas decorre da unicidade de soluções e do fato da equação ser autônoma. Pois neste caso  $\varphi_y(s)$  e  $\varphi_x(t + s)$  são soluções do mesmo problema de Cauchy.

4. COROLÁRIO. Seja  $X$  um campo vetorial  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , em  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se  $x \in \Delta$  e  $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$  é tal que  $\omega_+(x) < \infty$  (resp.  $\omega_-(x) > -\infty$ ) então  $\varphi_x(t)$  tende a  $\partial\Delta$ , quando  $t \rightarrow \omega_+(x)$  (resp.  $t \rightarrow \omega_-(x)$ ), isto é, para todo compacto  $K \subseteq \Delta$  existe  $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$  tal que se  $t \in [\omega_+(x) - \varepsilon, \omega_+(x))$  (resp.  $t \in (\omega_-(x), \omega_-(x) + \varepsilon]$ ) então  $\varphi_x(t) \notin K$ .

*Demonstração*. Por contradição suponhamos que exista um compacto  $K \subseteq \Delta$  e uma seqüência  $t_n \rightarrow \omega_+(x) < \infty$  tal que  $\varphi_x(t_n) \in K$  para todo  $n$ . Passando a uma subseqüência se necessário

podemos supor que  $\varphi_x(t_n)$  converge a um ponto  $x_0 \in K$ . Sejam  $b > 0$  e  $\alpha > 0$  tais que  $B_b \times I_\alpha \subseteq D$ , onde  $B_b = \{y \in \mathbb{R}^n, |y - x_0| \leq b\} \subseteq \Delta$  e  $I_\alpha = \{t \in \mathbb{R}, |t| < \alpha\}$ . Pela parte c do teorema 1,  $D$  é aberto. Pela parte b,  $\varphi_x(t_n + s)$  está definido para  $s < \alpha$  e coincide com  $\varphi_{x_0}(s)$  para  $n$  suficientemente grande, onde  $y = \varphi_x(t_n)$ . Mas então  $t_n + s > \omega_+(x)$ , contradição. ■

**5. COROLÁRIO.** Se  $\Delta = \mathbb{R}^n$  e  $|X(x)| < c$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $I_x = \mathbb{R}$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $\omega_+(x) < \infty$  para algum  $x \in \mathbb{R}^n$ . Como  $|x - \varphi_t(x)| = \left| \int_0^t X(\varphi_s(x)) ds \right| \leq ct \leq c\omega_+(x)$ , resulta que para todo  $t \in [0, \omega_+(x))$ ,  $\varphi_t(x)$  está na bola fechada de centro  $x$  e raio  $c\omega_+(x)$ , o que contradiz o corolário 4. Logo  $\omega_+(x) = \infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Do mesmo modo, prova-se que  $\omega_-(x) = -\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . ■

**6. COROLÁRIO.** Se  $\varphi$  é uma solução de (1) definida no intervalo máximo  $I$  e  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$  para  $t_1 \neq t_2$ , então  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi(t+c) = \varphi(t)$  para todo  $t$ , onde  $c = t_2 - t_1$ . Isto é,  $\varphi$  é periódica.

*Demonstração.* Definindo  $\psi: [t_2, t_2 + c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\psi(t) = \varphi(t + c)$ , tem-se  $\psi'(t) = \dot{\varphi}(t + c) = X(\varphi(t + c)) = X(\psi(t))$  e  $\psi(t_2) = \varphi(t_2 + c) = \varphi(t_2)$ . Em virtude da unicidade das soluções, tem-se  $[t_2, t_2 + c] \subseteq I$  e  $\varphi(t) = \varphi(t + c)$  se  $t \in [t_2, t_2 + c]$ . Prosseguindo desta maneira, obtemos  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi(t + c) = \varphi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . ■

## 2. Diferenciabilidade dos fluxos gerados por campos vetoriais

Nesta seção daremos uma demonstração autosuficiente do teorema 1. Usamos um método baseado em uma elaboração muito útil do lema da contração (I; 4, 1). O leitor familiarizado com os resultados do capítulo II poderá omitir a leitura desta seção. Entretanto, os resultados nela contidos são úteis e de fácil compreensão.

**1. TEOREMA DA CONTRAÇÃO NAS FIBRAS.** Sejam  $(X, d)$  e  $(\dot{X}, d)$  espaços métricos completos e  $\hat{F}: X \times \dot{X} \rightarrow X \times \dot{X}$  uma aplicação da forma  $\hat{F}(x, \dot{x}) = (F(x), \dot{F}(x, \dot{x}))$ . Suponha que:

a)  $F: X \rightarrow X$  tem um ponto fixo atrator  $p$ . Isto é,  $F(p) = p$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = p$  para todo  $x \in X$ .

b) A aplicação  $x \rightarrow \hat{F}(x, \dot{x})$  é contínua em  $X$  para todo  $\dot{x} \in \dot{X}$ .

c) Para todo  $x \in X$ , a aplicação  $\hat{F}_x: \dot{X} \rightarrow \dot{X}$  definida por  $\hat{F}_x(\dot{x}) = \hat{F}(x, \dot{x})$  é uma  $\lambda$ -contração, com  $\lambda < 1$ , isto é,  $d(\hat{F}_x(\dot{x}), \hat{F}_x(\dot{y})) \leq \lambda d(\dot{x}, \dot{y})$  para todo  $\dot{x}, \dot{y} \in \dot{X}$ .

Então, se  $\hat{p}$  denota o único ponto fixo atrator de  $\hat{F}_p$ , o ponto  $\hat{p} = (p, \hat{p})$  é um ponto fixo atrator de  $\hat{F}$ .

A demonstração deste teorema depende dos seguintes lemas.

LEMA 1. Seja  $\{c_n\}$ ,  $n \geq 0$ , uma seqüência de números reais não negativos tal que  $c_n \rightarrow 0$ , e seja  $\lambda$  tal que  $0 < \lambda < 1$ . Então  $\sigma_n \rightarrow 0$ , onde

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} c_i$$

Demonstração. Seja  $M_k = \sup\{c_i, i \geq k\}$ , temos  $M_k \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , pois  $c_i \rightarrow 0$ . Tomemos  $k = \left[ \frac{n}{2} \right]$ , (parte inteira de  $\frac{n}{2}$ ); temos:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{i=0}^n \lambda^{n-i} c_i = \sum_{i=0}^k \lambda^{n-i} c_i + \sum_{i=k+1}^n \lambda^{n-i} c_i \\ &\leq M_0 \sum_{i=0}^k \lambda^{n-i} + M_k \sum_{i=k+1}^n \lambda^{n-i} \leq M_0 (\lambda^{n-k}/1 - \lambda) + M_k / 1 - \lambda \end{aligned}$$

Quando  $n$  tende para  $\infty$ ,  $n - k$  e  $k$  também tendem a  $\infty$ , logo  $\lambda^{n-k}$  e  $M_k$  tendem para 0 e, portanto,  $\sigma_n \rightarrow 0$ . ■

LEMA 2. Seja  $F_n$  uma seqüência de  $\lambda$ -contrações de um espaço métrico completo  $(Y, d)$ .

Se para todo  $y \in Y$  a seqüência  $F_n(y)$  converge para  $F_\omega(y)$ ,  $F_\omega$  também é uma  $\lambda$ -contração, denotemos por  $y_\omega$  seu único ponto fixo atrator, então para todo  $y_0 \in Y$ , a seqüência  $\{y_n\}$  definida por

$$y_1 = F_1(y_0), y_2 = F_2(y_1), \dots, y_n = F_n(y_{n-1})$$

converge para  $y_\omega$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Demonstração.** Temos  $y_n = F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_0)$  e

$$\begin{aligned} d(y_n, y_\omega) &\leq d(F_n \circ \dots \circ F_1(y_0), F_n \circ \dots \circ F_1(y_\omega)) + \\ &\quad + d(F_n \circ \dots \circ F_1(y_\omega), y_\omega) \leq \\ &\leq \lambda d(F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_0), F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_\omega)) + \\ &\quad + d(F_n \circ \dots \circ F_1(y_0), F_n(y_\omega)) + d(F_n(y_\omega), y_\omega) \leq \\ &\leq \lambda^n d(y_0, y_\omega) + \lambda d(F_{n-1} \circ \dots \circ F_1(y_0), y_\omega) + d(F_n(y_\omega), y_\omega) \leq \\ &\leq \lambda^n d(y_0, y_\omega) + d(F_n(y_\omega), y_\omega) + \lambda d(F_{n-1}(y_\omega), y_\omega) + \\ &\quad + \lambda^2 d(F_{n-2}(y_\omega), y_\omega) + \dots + \lambda^{n-1} d(F_{n-1}(y_\omega), y_\omega) = \\ &= \lambda^n d(y_0, y_\omega) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i d(F_{n-i}(y_\omega), y_\omega). \end{aligned}$$

O primeiro termo desta última parcela tende para 0 pois  $0 < \lambda < 1$ ; o segundo termo também tende para 0, pelo Lema 1, aplicado a  $c_n = d(F_n(y_\omega), y_\omega)$ . Observe que  $c_n \rightarrow 0$ , por hipótese  $F_n(y_\omega) \rightarrow y_\omega$ . Consequentemente,

$$d(y_n, y_\omega) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

**Demonstração do Teorema 1.** Seja  $\hat{x}_0 = (x_0, \dot{x}_0)$  e  $x_n = F^n(x_0)$ , temos

$$\hat{F}^n(\hat{x}_0) = (x_n, \hat{F}_{x_{n-1}} \circ \dots \circ \hat{F}_{x_1} \circ \hat{F}_{x_0}(\dot{x}_0)).$$

Logo, fazendo  $F_n = \hat{F}_{x_{n-1}}$ , resulta pelo Lema 2, que  $\hat{F}^n(\hat{x}_0) \rightarrow (p, \dot{p})$ .  $\blacksquare$

## 2. TEOREMA LOCAL DE DIFERENCIABILIDADE

Seja  $f$  uma aplicação de classe  $C^1$  definida num aberto  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ . Para todo ponto  $x_0 \in \Delta$  existem números positivos  $\alpha, \beta$  e uma única aplicação  $\varphi$  de classe  $C^1$  em

$$I_\alpha \times B_\beta = \{(t, x); |t| < \alpha, |x - x_0| < \beta\}$$

com valores em  $A$  tal que

$$(*) \quad D_1 \varphi(t, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = f(\varphi(t, x)), \quad \varphi(0, x) = x, \text{ e}$$

$$(*)' \quad D_1 D_2 \varphi(t, x) = Df(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x)$$

para todo  $(t, x) \in I_\alpha \times B_\beta$ .

**Demonstração.** Seja  $b > 0$  tal que  $\bar{B}_b = \{x; |x - x_0| \leq b\} \subseteq \Delta$  e sejam  $m = \sup |f(x)|, \ell = \sup \|Df(x)\|$ , para  $x \in \bar{B}_b$ . Tomamos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha_m + \beta < b$  e  $\lambda = \ell \alpha < 1$ .

Seja  $X$  o espaço de aplicações contínuas de  $I_a \times B_\beta$  em  $\bar{B}_b$ , munido da métrica

$$d(\varphi, \psi) = \sup |\varphi(t, x) - \psi(t, x)|, \quad (t, x) \in I_a \times B_\beta.$$

Denotemos por  $\mathcal{L}$  o espaço de aplicações lineares de  $R^n$  em  $R^n$  com a norma  $\|L\| = \sup \{|Lx|; |x| = 1\}$ . Seja  $\dot{X}$  o espaço de aplicações contínuas e limitadas de  $I_a \times B_\beta$  em  $\mathcal{L}$  munido da métrica

$$d(\dot{\varphi}, \dot{\psi}) = \sup \{\|\dot{\varphi}(t, x) - \dot{\psi}(t, x)\|, (t, x) \in I_a \times B_\beta\}.$$

Definimos  $F: X \rightarrow X$  por  $F(\varphi)(t, x) = x + \int_0^t f(\varphi(s, x)) ds$  e  $\hat{F}: X \times \dot{X} \rightarrow \dot{X}$  por  $\hat{F}(\varphi, \dot{\varphi})(t, x) = E + \int_0^t Df(\varphi(s, x)) \cdot \dot{\varphi}(s, x) ds$ , onde  $E$  denota a identidade em  $\mathcal{L}$ .

A aplicação  $\hat{F} = (F, \hat{F})$  satisfaz as hipóteses do Teorema 1. De fato:

a)  $F$  é uma  $\lambda$ -contração:

$$\begin{aligned} d(F(\varphi), F(\psi)) &= \sup \left| \int_0^t [f(\varphi(s, x)) - f(\psi(s, x))] ds \right| \leq \\ &\leq \sup \left| \int_0^t \ell |\varphi(s, x) - \psi(s, x)| ds \right| \leq \alpha \ell d(\varphi, \psi) = \lambda d(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Portanto  $F$  tem um único ponto fixo atrator  $\varphi \in X$ .

b) É imediata, por ser  $Df$  uniformemente contínua em  $\bar{B}_b$ .

c)  $d(\hat{F}_\bullet(\dot{\varphi}), \hat{F}_\bullet(\dot{\psi})) = \sup \left\| \int_0^t Df(\varphi(s, x)) [\dot{\varphi}(s, x) - \dot{\psi}(s, x)] ds \right\| \leq \lambda d(\dot{\varphi}, \dot{\psi})$ .

O ponto fixo atrator de  $\hat{F}$  é da forma  $\hat{\varphi} = (\varphi, \dot{\varphi})$ , onde  $F(\varphi) = \varphi$ . Donde resulta, derivando com respeito a  $t$ , que (\*) é satisfeita:  $\varphi$  é única, por ser único o ponto fixo de  $F$ , e contínua em  $I_a \times B_\beta$ , por ser elemento de  $X$ .

Provamos que  $\varphi$  é de classe  $C^1$  com respeito a  $x$  e que  $D_2\varphi = \dot{\varphi}$ ; obviamente  $D_1\varphi = f \circ \varphi$  é contínua. Dai resulta que  $\varphi$  é de classe  $C^1$  em  $I_a \times B_\beta$ . De fato, seja  $\hat{\varphi}_n = (\varphi_n, \dot{\varphi}_n) = \hat{F}^n(\hat{\varphi}_0)$ , onde  $\varphi_0(t, x) = x$  e  $\dot{\varphi}_0(t, x) = E$ . Claramente  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  e  $\dot{\varphi}_n \rightarrow \dot{\varphi}$  uniformemente em  $I_a \times B_\beta$ . Mais ainda, toda  $\varphi_n$  é de classe  $C^1$  e  $D_2\varphi_n = \dot{\varphi}_n$ , para todo  $n$ , como se verifica por indução. Portanto, por ser  $\dot{\varphi}_n = D_2\varphi_n$  contínua, pois pertence a  $\dot{X}$ , temos, pelo teorema de intercâmbio da ordem entre as operações de limite uniforme e diferenciação, que  $D_2\varphi$  existe e é igual a  $\dot{\varphi}$ , que é contínua em  $I_a \times B_\beta$ .

A igualdade (\*)' decorre imediatamente por derivação da relação

$$D_2\varphi(t, x) = \hat{F}(\varphi, D_2\varphi(t, x)) = E + \int_0^t Df(\varphi(s, x)) D_2\varphi(s, x) ds. \blacksquare$$

3. TEOREMA GLOBAL DE DIFERENCIABILIDADE. *Seja  $f$  um campo vetorial de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , num aberto  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ .*

a) *Para cada ponto  $x \in \Delta$  existe um intervalo aberto  $I_x$ , onde está definida uma única curva integral máxima  $\varphi_x: I_x \rightarrow \Delta$ , do campo  $f$  passando por  $x$ ; i.e.,  $\varphi_x$  satisfaz em  $I_x$  a equação  $\frac{dy}{dt} = f(y)$ ,  $y(0) = x$ .*

b) *Se  $y = \varphi_x(t)$ ,  $t \in I_x$ , então*

$$I_y = I_x - t = \{\tau - t; \tau \in I_x\},$$

*e  $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$ , para todo  $s \in I_y$ .*

c) *O conjunto  $D = \{(t, x); x \in M, t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , e a aplicação  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por  $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$  é de classe  $C^r$ .*

A menos de notação este é o enunciado do Teorema 1.1. A demonstração do Teorema 3 é dividida em três partes.

PROPOSIÇÃO 1. *Seja  $f$  um campo vetorial  $C^1$  em um aberto  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Dado  $x \in \Delta$ , seja  $I_x = \cup I_\psi$ , onde  $\psi: I_\psi \rightarrow \Delta$  percorre o conjunto das soluções de  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x$ .*

*Então*

a)  *$\varphi_x: I_x \rightarrow \Delta$  definida por  $\varphi_x(t) = \psi(t)$  se  $t \in I_\psi$  é a única curva integral máxima de  $f$  por  $x$ ;*

b) *se  $t \in I_x$  e  $y = \varphi_x(t)$ , então  $I_y = I_x - t = \{s - t; s \in I_x\}$  e para todo  $s \in I_y$  tem-se  $\varphi_x(t + s) = \varphi_y(s)$ .*

*Demonstração.* a) É suficiente verificar que  $\varphi_x$  está bem definida. Isto é, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são soluções de  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x$ , então  $\psi_1 = \psi_2$  no intervalo  $(a, b) = I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$ . De fato, seja  $A = \{t \in (a, b); \psi_1(t) = \psi_2(t)\}$ . É claro que  $A$  é fechado em  $(a, b)$  e não vazio. Vamos provar que  $A$  é aberto. Sejam  $t' \in A$  e  $y = \psi_1(t') = \psi_2(t')$ . Então, pelo teorema 2, existe uma única curva integral  $\psi$  de  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = y$ , definida em um certo intervalo aberto  $I$ . Notemos que  $\tilde{\psi}_1(s) = \psi_1(t' + s)$  é também uma solução de  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = y$ . De fato,  $\frac{d}{ds} \tilde{\psi}_1(s) = \frac{d}{ds} \psi_1(t' + s) = f(\psi_1(t' + s)) = f(\tilde{\psi}_1(s))$ . Portanto, por unicidade,  $\psi_1 = \psi$  em  $(a, b) \cap (I + t')$ . Do mesmo modo  $\tilde{\psi}_2(s) = \psi_2(t' + s)$  coincide com  $\psi$  em  $(a, b) \cap (I + t')$ . Logo  $\psi_1 = \psi_2$  em  $(a, b) \cap (I + t')$ , e isto prova que  $A$  é aberto. Por conexidade,  $A = (a, b)$ .

b) temos  $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$ ; logo,  $\varphi_y(s)$  está definida para  $s \in I_x - t$ , donde  $I_x - t \subset I_y$ . Por outro lado,  $\varphi_x(-t) = x$  e  $\varphi_x(s) = \varphi_y(-t + s)$ , donde  $\varphi_x(s)$  está definida para todo  $s \in I_y + t$ . Logo,  $I_y + t \subseteq I_x$  e daí  $I_y \subset I_x - t$ . Fica provado que  $I_y = I_x - t$ . ■

**PROPOSIÇÃO 2.** *Seja  $f$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em um aberto  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^n$ . Então  $D = \{(t, x); x \in \Delta \text{ e } t \in I_x\}$  é aberto em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ainda,  $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$  é uma aplicação de classe  $C^1$  em  $D$  e*

$$(*) \quad D_1 D_2 \varphi(t, x) = Df(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x)$$

para todo  $(t, x) \in D$ .  $I_x$  é o intervalo maximal da solução  $\varphi_x$  de  $x' = f(x)$ ,  $x(0) = x$ .

*Demonstração.* Seja  $C$  o conjunto dos pontos  $t \in I_{x_0}$ ,  $t > 0$  tais que existe uma vizinhança  $B_t$  de  $x_0$  tal que  $[0, t] \times B_t \subseteq D$  e  $\varphi$  é de classe  $C^1$  e satisfaz (\*) em  $(0, t) \times B_t$ . Pelo teorema 2,  $C \neq \emptyset$ . Seja  $s$  o supremo de  $C$ . Provaremos que  $s$  é o extremo superior de  $I_x$ . De fato, se for  $s \in I_x$ , seja  $x_1 = \varphi(s, x_0)$ . Pelo teorema 2 existe  $I \times B$ , vizinhança de  $(0, x_1)$ , na qual  $\varphi$  satisfaz (\*). Sejam  $d$  o comprimento do intervalo  $I$ ,  $u$  tal que  $u < s$  e  $s - u < d/2$  e  $\tilde{B}$  uma vizinhança de  $x_0$  tal que  $\varphi(u, y) \in B$  para todo  $y \in \tilde{B}$ . Se  $y \in \tilde{B}$  e  $t \in [0, u + d/2]$  temos, pela proposição 1, que  $\varphi(t, y) = \varphi(t - u, \varphi(u, y))$ . Portanto,  $\varphi$  é de classe  $C^1$  em  $(0, u + d/2) \times \tilde{B}$ . Vamos verificar que  $\varphi$  satisfaz (\*) neste conjunto. A partir de  $\varphi(t, x) = \varphi(t - u, \varphi(u, x))$ , temos que

$$D_2 \varphi(t, x) = [D_2 \varphi(t - u, \varphi(u, x))] D_2 \varphi(u, x).$$

Portanto, derivando com respeito a  $t$  e usando o fato de que  $t - u \in C$ , temos

$$\begin{aligned} D_1 D_2 \varphi(t, x) &= [D_1 D_2 \varphi(t - u, \varphi(u, x))] D_2 \varphi(u, x) = \\ &= [Df(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t - u, \varphi(u, x))] D_2 \varphi(u, x) = \\ &= Df(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x). \end{aligned}$$

Portanto,  $u + d/2 \in C$  é maior do que  $s$ , o que é uma contradição. Logo  $s = \sup I_x$ . Tomando agora pontos  $t \in I_{x_0}$ ,  $t < 0$  conclui-se a demonstração. ■

*Demonstração do teorema 3.* Procedemos por indução em  $r$ . A proposição 2 prova o caso  $r = 1$ . Supomos válido o teorema para  $r - 1$ . Consideremos o campo  $F = (f, Df)$ , que é de classe  $C^{r-1}$  em  $\Delta \times \mathbb{R}^{n^2}$ , definido por  $F(x, L) = (f(x), Df(x) \cdot L)$ ,

onde  $L$  é uma matriz  $n \times n$  identificada canonicamente com uma aplicação linear de  $\mathcal{L}$  ou com um ponto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Pela proposição 2 e a hipótese de indução aplicadas a  $F$ , temos que o seu fluxo  $\Phi(t, y, Y) = (\varphi(t, y), D_2\varphi(t, y) \cdot Y)$  é de classe  $C^{r-1}$  em  $D' = D \times \mathbb{R}^{n^2}$ . Portanto,  $D_2\varphi$  é de classe  $C^{r-1}$  em  $D$ . Também  $D_1\varphi = f \circ \varphi$  é de classe  $C^{r-1}$ , pois  $f$  é  $C^r$  e  $\varphi$  é  $C^{r-1}$ . Logo,  $\varphi$  é de classe  $C^r$  em  $D$ . Isto termina a demonstração do teorema 3. ■

### 3. Retrato de fase de um campo vetorial

1. DEFINIÇÃO. O conjunto  $\gamma_p = \{\varphi(t, p), t \in I_p\}$ , isto é, a imagem da curva integral de  $X$  pelo ponto  $p$ , chama-se *órbita de  $X$  pelo ponto  $p$* .

Observe que  $q \in \gamma_p \Leftrightarrow \gamma_q = \gamma_p$ . De fato, se  $q \in \gamma_p$ ,  $q = \varphi(t_1, p)$  e  $\varphi(t, q) = \varphi(t + t_1, p)$  e  $I_p - t_1 = I_q$ .

Em outros termos, duas órbitas de  $X$  coincidem ou são disjuntas. Isto é,  $\Delta$  fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser:

- imagem biunívoca de um intervalo de  $\mathbb{R}$ ,
- um ponto, ou
- difeomorfa a um círculo,

correspondendo cada caso a uma das alternativas do Teorema 2 a seguir.

No caso b)  $p = \gamma_p$ ; a órbita chama-se *ponto singular*; no caso c) a órbita chama-se *fechada* ou *periódica*.

2. TEOREMA. Se  $\varphi$  é uma solução máxima de (1) em  $I$ , verifica-se uma única das seguintes alternativas:

- $\varphi$  é 1-1
- $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é constante.
- $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi$  é periódica, isto é, existe um  $\tau > 0$  tal que  $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e  $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$  se  $|t_1 - t_2| < \tau$ .

*Demonstração.* Se  $\varphi$  não é biunívoca,  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$  para algum  $t_1 \neq t_2$ .

Logo, pelo corolário 6 da seção 1,  $I = \mathbb{R}$  e  $\varphi(t + c) = \varphi(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $c = t_2 - t_1 \neq 0$ .

Provaremos que o conjunto

$$C = \{c \in \mathbb{R}; \varphi(t + c) = \varphi(t) \text{ para todo } t \in \varphi\}$$

é um subgrupo aditivo fechado de  $\mathbb{R}$ . De fato, se  $c, d \in C$ , então  $c + d, -c \in C$ , pois  $\varphi(t + c + d) = \varphi(t + c) = \varphi(t)$  e  $\varphi(t - c) = \varphi(t - c + c) = \varphi(t)$  e portanto,  $C$  é um subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$ .

Por outro lado, se  $c_n \in C$  e  $c_n \rightarrow c$  temos que  $c \in C$ , pois

$$\begin{aligned}\varphi(t + c) &= \varphi(t + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} (t + c_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t + c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(t).\end{aligned}$$

Como demonstraremos no lema seguinte, todo subgrupo aditivo  $C$  de  $\mathbb{R}$  é descrito na forma  $\tau Z$ ,  $\tau \geq 0$ ,  $Z = \{\text{inteiros}\}$ , ou  $C$  é denso em  $\mathbb{R}$ .

Por ser  $C \neq \{0\}$  e fechado, segue que  $C = \mathbb{R}$  ou  $C = \tau Z$ ,  $\tau > 0$ . Cada uma destas alternativas corresponde, respectivamente, aos casos b) e c) do enunciado.

3. LEMA. *Todo subgrupo aditivo  $C \neq \{0\}$  de  $\mathbb{R}$  é da forma  $C = \tau Z$ , onde  $\tau > 0$ , ou  $C$  é denso em  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração:* Supor que  $C \neq \{0\}$ . Então  $C \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$ , onde  $\mathbb{R}_+$  denota os reais positivos, pois existe  $c \in C$ ,  $c \neq 0$ , o que implica que  $c$  ou  $-c$  está em  $C \cap \mathbb{R}_+$ .

Seja  $\tau = \inf[C \cap \mathbb{R}_+]$ . Se  $\tau > 0$ ,  $C = \tau Z$ , pois se  $c \in C - \tau C$ , existe um único  $K \in Z$  tal que  $K\tau < c < (K + 1)\tau$  e portanto,  $0 < c - K\tau < \tau$  e  $c - K\tau \in C \cap \mathbb{R}_+$ . Contradição com  $\tau = \inf[C \cap \mathbb{R}_+]$ .

Se  $\tau = 0$ , verificamos que  $C$  é denso em  $\mathbb{R}$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$  e  $t \in \mathbb{R}$ , existe  $c \in C$  tal que  $|c - t| < \varepsilon$ . Para ver isto é suficiente tomar  $c_0 \in C \cap \mathbb{R}_+$  tal que  $0 < c_0 < \varepsilon$ . Todo número real  $t$  dista menos  $\varepsilon$  de um ponto  $c_0 Z \subseteq C$ , pois este conjunto divide  $\mathbb{R}$  em intervalos de comprimento  $c_0 < \varepsilon$ , com extremos nele.

4. DEFINIÇÃO. O conjunto aberto  $\Delta$ , munido da decomposição em órbitas de  $X$ , chama-se *retrato de fase* de  $X$ . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo  $X$ ; os pontos singulares são munidos da orientação trivial.

Nas figuras indicamos o sentido positivo de percurso por meio de setas.

5. EXEMPLOS. a) Descrevamos o retrato de fase de um campo  $X$  em  $\mathbb{R}$ , onde  $X$  tem um número finito de pontos singulares. Sejam  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  esses pontos e façamos  $a_0 = -\infty$  e  $a_{n+1} = \infty$ .

Em cada intervalo  $(a_i, a_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$   $X$  tem sinal constante. Fixemos um intervalo  $(a_i, a_{i+1})$  no qual  $X$  é positivo. Então, se  $x \in (a_i, a_{i+1})$  temos que  $\varphi(t, x)$  é estritamente crescente no seu intervalo máximo  $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ .

Além disso podemos afirmar que:

i) Quando  $t \rightarrow \omega_-(x)$ ,  $\varphi(t, x) \rightarrow a_i$  e quando  $t \rightarrow \omega_+(x)$ ,  $\varphi(t, x) \rightarrow a_{i+1}$ .

Pois se  $\varphi(t, x) \rightarrow b > a_i$  quando  $t \rightarrow \omega_-(x)$ , como  $\varphi(t, b)$  é estritamente crescente segue-se que as órbitas  $\gamma_x$  e  $\gamma_b$  interceptam-se; em consequência  $\gamma_x = \gamma_b$  o que é uma contradição. Isto mostra que  $\varphi(t, x) \rightarrow a_i$  se  $t \rightarrow \omega_-(x)$ . Da mesma forma vê-se que  $\varphi(t, x) \rightarrow a_{i+1}$  se  $t \rightarrow \omega_+(x)$ .

ii) se  $i \geq 1$  temos que  $\omega_-(x) = -\infty$ .

Pois, para todo  $t \in I_x$  temos  $\varphi(t, x) > a_i > -\infty$  e isto implica, devido à proposição 7 da seção 2, que  $\omega_-(x) = -\infty$ .

iii) se  $i < n$  temos que  $\omega_+(x) = \infty$ .

A prova é idêntica à de (ii). O leitor deve formular e provar o caso em que  $X$  é negativo no intervalo  $(a_i, a_{i+1})$ .

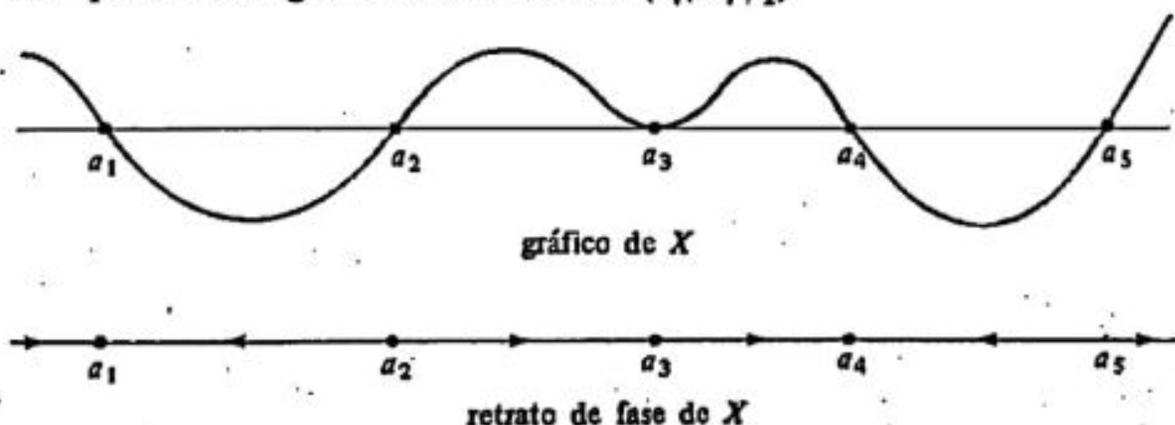


Figura 2

b) Sistemas bidimensionais simples e sistemas hiperbólicos: ver os espaços de fase no capítulo III.

c) Sejam  $X = (X_1, X_2)$  e  $\Delta = \mathbb{R}^2$  onde  $X_1 = x$  e  $X_2 = -y + x^3$ . O fluxo de  $X$  é dado por

$$\varphi(t, (a; b)) = \left( ae^t, \left( b - \frac{a^3}{4} \right) e^{-t} + \frac{a^3}{4} e^{3t} \right)$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  e  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Seja  $\psi(t, p)$  o fluxo da "sela"  $Y = (x, -y)$ . O leitor deve verificar que  $h: (x, y) \rightarrow \left( x, y + \frac{x^3}{4} \right)$  satisfaz  $h(\psi(t, p)) = \varphi(t, h(p))$ .

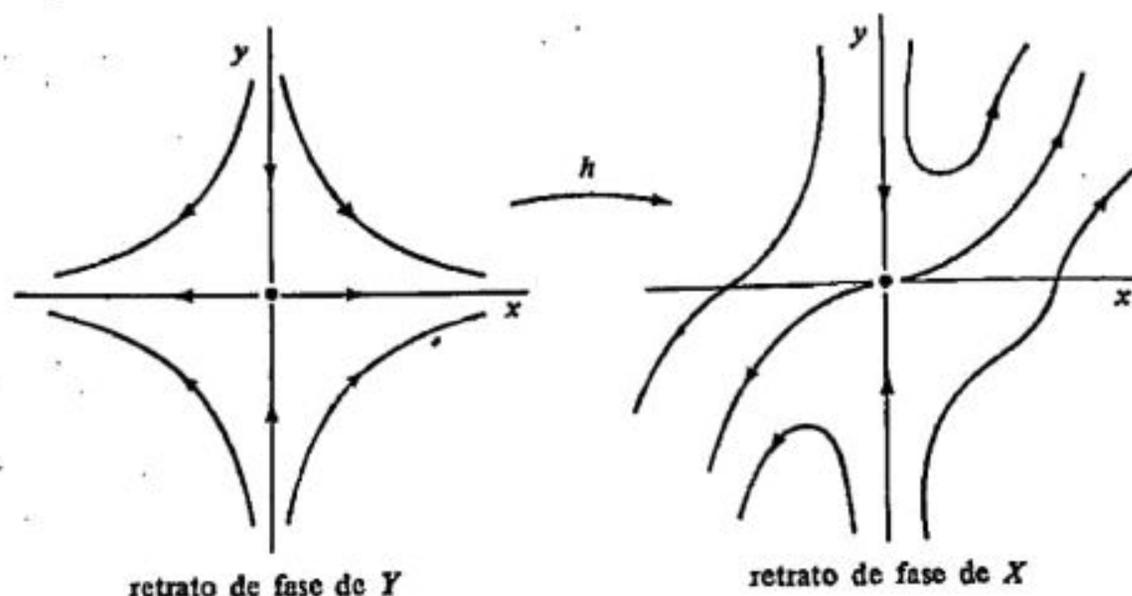


Figura 3

#### 4. Equivalência e conjugação de campos vetoriais

Introduzimos a seguir várias noções de equivalência entre dois campos vetoriais, as quais permitem comparar seus retratos de fase.

1. **DEFINIÇÃO.** Sejam  $X_1, X_2$  campos vetoriais definidos nos abertos de  $\mathbb{R}^n$   $\Delta_1, \Delta_2$  respectivamente. Diz-se que  $X_1$  é *topologicamente equivalente* (resp.  *$C^r$ -equivalente*) a  $X_2$  quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe  $C^r$ )  $h: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  que leva órbita de  $X_1$  em órbita de  $X_2$  preservando a orientação. Mais precisamente, sejam  $p \in \Delta_1$  e  $\gamma^1(p)$  a órbita orientada de  $X_1$  passando por  $p$ ; então  $h(\gamma^1(p))$  é a órbita orientada  $\gamma^2(h(p))$  de  $X_2$  passando por  $h(p)$ .

Observe que esta definição estabelece uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de  $\mathbb{R}^n$ . O homeomorfismo  $h$  chama-se *equivalência topológica* (resp. *diferenciável*) entre  $X_1$  e  $X_2$ .

2. **DEFINIÇÃO.** Sejam  $\varphi_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\varphi_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  os fluxos gerados pelos campos  $X_1: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $X_2: \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  respectivamente. Diz-se que  $X_1$  é *topologicamente conjugado* (resp.  *$C^r$ -conjugado*) a  $X_2$  quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe  $C^r$ )  $h: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  tal que  $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$  para todo  $(t, x) \in D_1$ .

Neste caso, tem-se necessariamente  $I_1(x) = I_2(h(x))$ . O homeomorfismo  $h$  chama-se conjugação topológica (resp.  $C^r$ -conjugação) entre  $X_1$  e  $X_2$ .

3. *Observações.* Esta definição estende a campos vetoriais quaisquer os conceitos de conjugação topológica e diferenciável definidos no capítulo III para campos lineares. A relação de conjugação é também uma relação de equivalência entre campos definidos em abertos de  $\mathbb{R}^n$ . É claro que toda conjugação é uma equivalência. Uma equivalência  $h$  entre  $X_1$  e  $X_2$  leva ponto singular em ponto singular e órbita periódica em órbita periódica. Se  $h$  for uma conjugação, o período das órbitas periódicas também é preservado.

4. EXEMPLOS. a)  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $h(x, y) = \left(x, y + \frac{x^3}{4}\right)$  é uma  $C^\infty$ -conjugação entre  $X(x, y) = (x, -y)$  e  $Y(x, y) = (x, -y + x^3)$ . Veja o exemplo c) da seção anterior.

b) Sejam  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$  matrizes de  $\mathbb{R}^2$  com  $a > 0$  e  $b > 0$ . Os sistemas  $x' = Ax$  e  $x' = Bx$  definem centros cujas órbitas periódicas têm período  $2\pi/a$  e  $2\pi/b$ , respectivamente. Se  $a \neq b$ , estes sistemas não são conjugados. Por outro lado,  $h =$  identidade de  $\mathbb{R}^2$  é uma  $C^\infty$ -equivalência.

O lema seguinte fornece uma caracterização para a conjugação diferenciável.

5. LEMA. *Sejam  $X_1: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $X_2: \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  campos  $C^r$  e  $h: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  um difeomorfismo de classe  $C^r$ . Então  $h$  é uma conjugação entre  $X_1$  e  $X_2$  se e somente se*

$$(*) \quad Dh_p X_1(p) = X_2(h(p)), \quad \forall p \in \Delta_1.$$

*Demonstração.* Sejam  $\varphi_1: D_1 \rightarrow \Delta_1$  e  $\varphi_2: D_2 \rightarrow \Delta_2$  os fluxos de  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente. Suponhamos que  $h$  satisfaz (\*). Dado  $p \in \Delta_1$ , seja  $\psi(t) = h(\varphi_1(t, p))$ ,  $t \in I_1(p)$ . Então  $\psi$  é solução de  $x' = X_2(x)$ ,  $x(0) = h(p)$ , pois

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= Dh(\varphi_1(t, p)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi_1(t, p) = Dh(\varphi_1(t, p)) X_1(\varphi_1(t, p)) = \\ &= X_2(h(\varphi_1(t, p))) = X_2(\psi(t)). \end{aligned}$$

Portanto,  $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$ . Reciprocamente, suponhamos que  $h$  seja uma conjugação. Dado  $p \in \Delta_1$ , tem-se  $h(\varphi_1(t, p)) = \varphi_2(t, h(p))$ .

$t \in I_1(p)$ . Derivando esta relação com respeito a  $t$  em  $t = 0$ , obtém-se (\*). ■

6. *Definição.* Sejam  $X: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ,  $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto e  $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  um aberto. Uma aplicação diferenciável  $f: A \rightarrow \Delta$  de classe  $C^r$  chama-se *seção transversal local* de  $X$  (de classe  $C^r$ ) quando, para todo  $a \in A$ ,  $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$  e  $X(f(a))$  geram o espaço  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma = f(A)$  munido da topologia induzida. Se  $f: A \rightarrow \Sigma$  for um homeomorfismo, diz-se que  $\Sigma$  é uma *seção transversal* de  $X$ .

7. *Observação.* Sejam  $p \in \Delta$  não singular e  $\{v_1, \dots, v_{n-1}, X(p)\}$  uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $B(0, \delta)$  uma bola de  $\mathbb{R}^{n-1}$  com centro na origem e raio  $\delta > 0$ . Para  $\delta$  suficientemente pequeno,  $f: B(0, \delta) \rightarrow \Delta$  dada por  $f(x_1, \dots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$  é uma seção transversal local de  $X$  em  $p$ .

8. **TEOREMA (do fluxo tubular).** *Seja  $p$  um ponto não singular de  $X: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  e  $f: A \rightarrow \Sigma$  uma seção transversal local de  $X$  de classe  $C^r$  com  $f(0) = p$ . Então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\Delta$  e um difeomorfismo  $h: V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$  de classe  $C^r$ , onde  $\varepsilon > 0$  e  $B$  é uma bola aberta em  $\mathbb{R}^{n-1}$  de centro na origem  $0 = f^{-1}(p)$  tal que*

a)  $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ ;

b)  $h$  é uma  $C^r$ -conjugação entre  $X|_V$  e o campo contante  $Y: (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ .

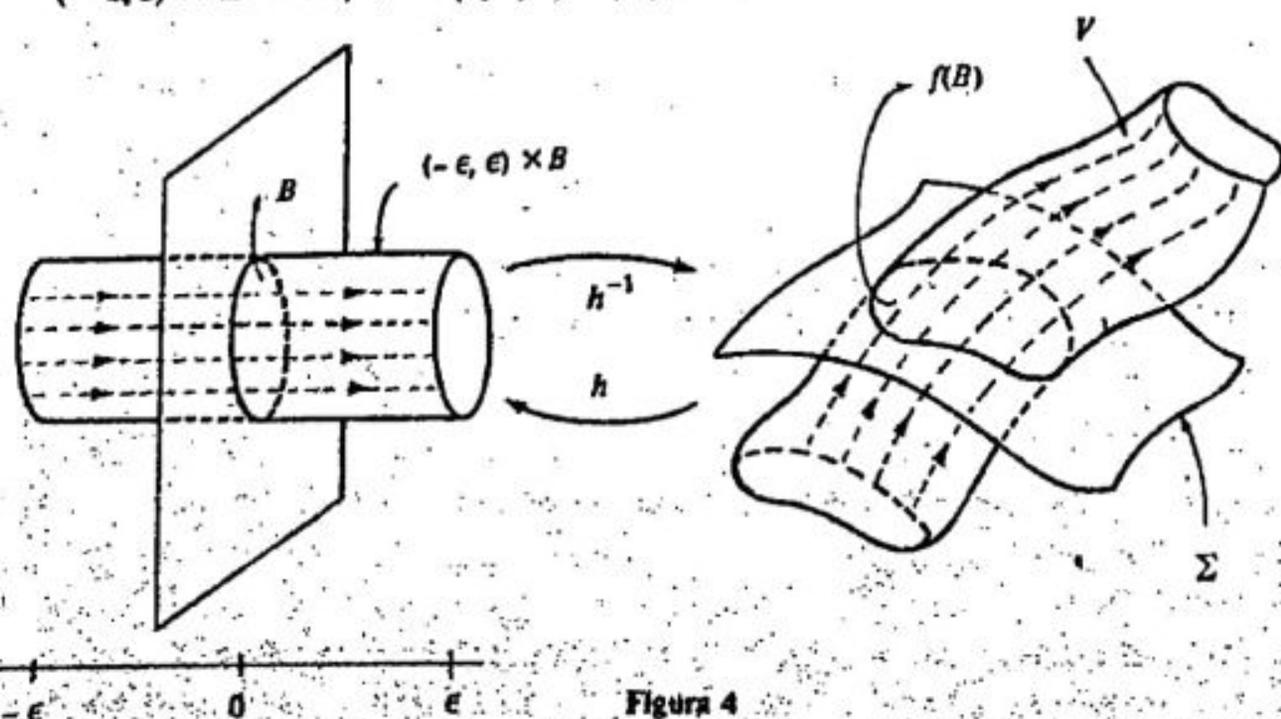
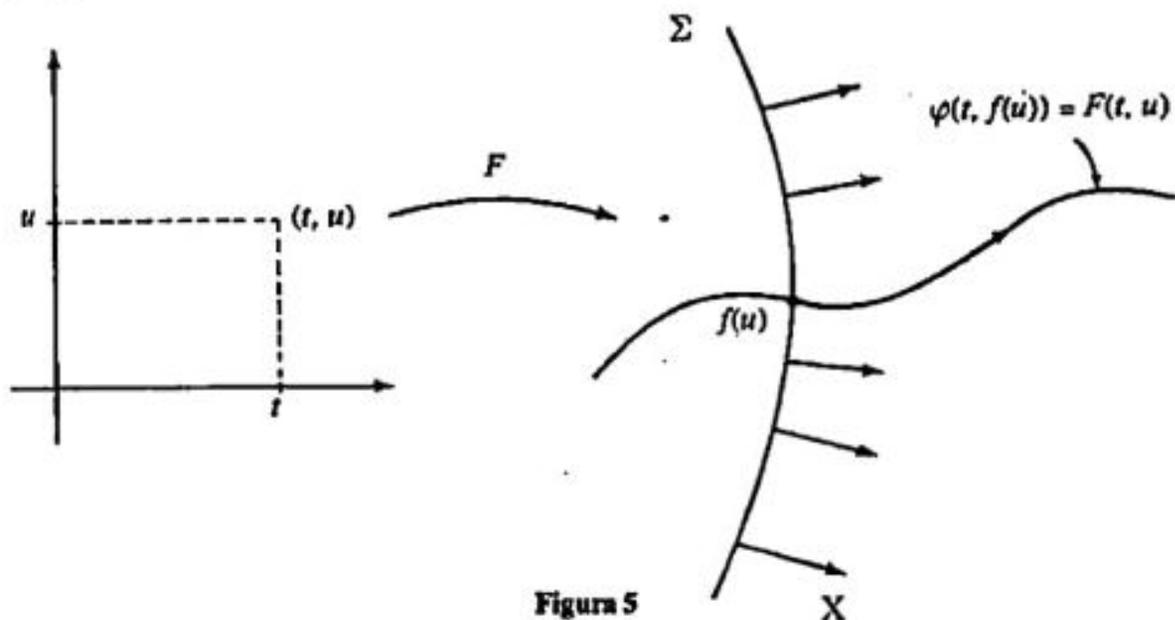


Figura 4

**Demonstração.** Seja  $\varphi: D \rightarrow \Delta$  o fluxo de  $X$ . Seja  $F: D_A = \{(t, u); (t, f(u)) \in D\} \rightarrow \Delta$  definida por  $F(t, u) = \varphi(t, f(u))$ .  $F$  aplica linhas paralelas em curvas integrais de  $X$ . Vamos mostrar que  $F$  é um difeomorfismo local em  $0 = (0, \bar{0}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Pelo teorema da função inversa, é suficiente provar que  $DF(0)$  é um isomorfismo.



Temos 
$$D_1F(0) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(t, f(0)) \right|_{t=0} = X(\varphi(0, p)) = X(p)$$

e  $D_jF(0) = D_{j-1}f(\bar{0})$  para todo  $j = 2, \dots, n$ , pois  $\varphi(0, f(u)) = f(u) \forall u \in A$ . Portanto, os vetores  $D_jF(0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , geram  $\mathbb{R}^n$  e  $DF(0)$  é um isomorfismo.

Pelo teorema da função inversa, existem  $\varepsilon > 0$  e uma bola  $B$  em  $\mathbb{R}^{n-1}$  com centro na origem  $0$  tais que  $F/(-\varepsilon, \varepsilon) \times B$  é um difeomorfismo sobre o aberto  $V = F((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$ . Seja  $h = (F/(-\varepsilon, \varepsilon) \times B)^{-1}$ . Então  $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ , pois  $F(0, u) = f(u) \in \Sigma \forall u \in B$ . Isto prova a). Por outro lado,  $h^{-1}$  conjuga  $Y$  e  $X$ :

$$\begin{aligned} Dh^{-1}(t, u) \cdot Y(t, u) &= DF(t, u) \cdot (1, 0, \dots, 0) = D_1F(t, u) = \\ &= X(\varphi(t, f(u))) = X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u)), \end{aligned}$$

para todo  $(t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ . Isto termina a demonstração. ■

**9. COROLÁRIO.** Seja  $\Sigma$  uma seção transversal de  $X$ . Para todo ponto  $p \in \Sigma$  existem  $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ , uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$  e uma função  $\tau: V \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tais que  $\tau(V \cap \Sigma) = 0$  e a) para todo  $q \in V$ , a curva integral  $\varphi(t, q)$  de  $X/V$  é definida e biunívoca em  $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$ .

- b)  $\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$  é o único ponto onde  $\varphi(\cdot, q)|_{J_q}$  intercepta a  $\Sigma$ . Em particular,  $q \in \Sigma \cap V$  se e só se  $\tau(q) = 0$ .
- c)  $\xi: V \rightarrow \Sigma$  é de classe  $C^k$  e  $D\xi(q)$  é sobrejetiva para todo  $q \in V$ . Mais ainda,  $D\xi(q) \cdot v = 0$  se e só se  $v = \alpha X(q)$  para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Sejam  $h, V$  e  $v$  como no teorema 8. Ponhamos  $h = (-\tau, \eta)$ . O campo  $Y$  daquele teorema satisfaz a todas as afirmações acima. Como  $h$  é uma  $C^r$ -conjugação, conclue-se que  $X$  também satisfaz estas afirmações. ■

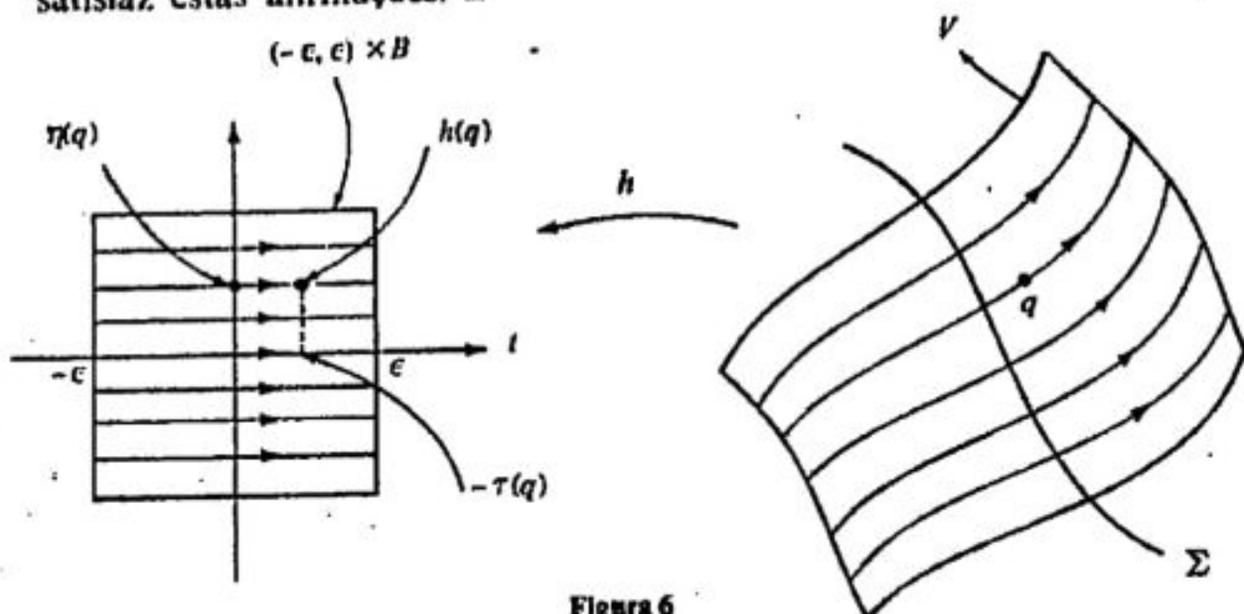


Figura 6

10. *Observação.* Gostaríamos de enfatizar o caráter local deste teorema. Nem todo campo sem singularidades no plano admite um homeomorfismo que trivialize suas órbitas. Um exemplo é dado na figura 7.

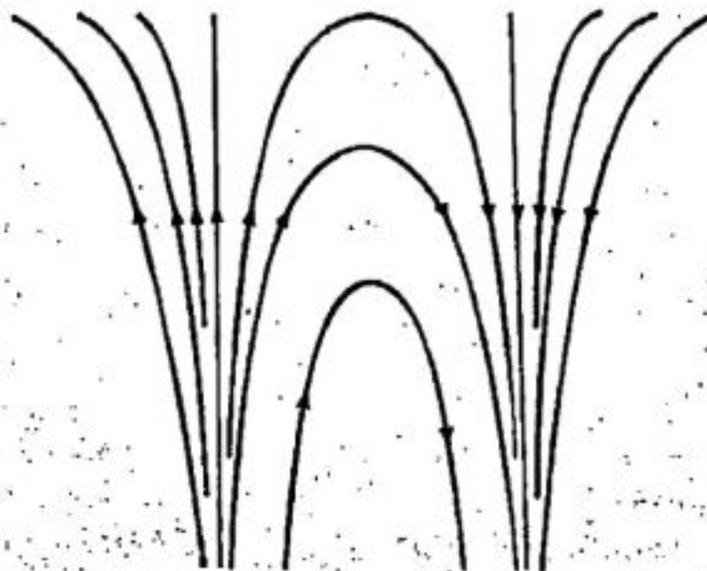


Figura 7

## 5. Estrutura local dos pontos singulares hiperbólicos

Seja  $p$  um ponto regular de um campo vetorial  $X$ , de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Pelo teorema do fluxo tubular, sabemos que existe um difeomorfismo de classe  $C^r$  que conjuga  $X$ , em uma vizinhança de  $p$  com o campo constante  $Y \equiv (1, 0, \dots, 0)$ . Consequentemente, dois campos  $X$  e  $Y$  são localmente  $C^r$ -conjugados em torno de pontos regulares. Por causa desta observação podemos considerar satisfatório o conhecimento qualitativo local das órbitas de um campo vetorial em torno de pontos regulares, sendo que existe apenas uma classe de conjugação diferenciável local.

Se  $p$  é um ponto singular, a situação é bem mais complexa. Mesmo nos sistemas lineares estudados no Capítulo III já se apresentam várias classes diferentes de conjugação diferenciável. Em  $\mathbb{R}^2$  temos a sela, o centro, o nó, etc.

Nesta seção estudaremos os pontos singulares hiperbólicos.

1. **DEFINIÇÃO.** Um ponto singular  $p$  de um campo vetorial  $X$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , chama-se hiperbólico se todos autovalores de  $DX(p)$  têm parte real diferente de zero.

2. **Observação.** É fácil ver que esta definição não depende da classe de conjugação local  $C^2$  de  $X$  em  $p$ . Sejam  $X$  e  $Y$  campos de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$  e  $h$  uma  $C^2$ -conjugação entre  $X$  e  $Y$  em torno de uma singularidade  $p$  de  $X$ ;  $q = h(p)$  é uma singularidade de  $Y$  e pelo lema 5 da seção 4 tem-se  $Y = Dh \circ h^{-1} \circ X \circ h^{-1}$ . Daí

$$DY(q) = D^2 h(h^{-1}(q)) Dh^{-1}(q) X(h^{-1}(q)) + Dh(h^{-1}(q)) DX(h^{-1}(q)).$$

$$Dh^{-1}(q) = Dh(p) DX(p) [Dh(p)]^{-1}.$$

2. **DEFINIÇÃO.** Com a notação da definição 1, o número de autovalores de  $DX(p)$  que têm parte real menor do que 0 chama-se *índice de estabilidade* de  $X$  em  $p$ .

A observação 2 acima mostra que é o mesmo o índice de dois campos  $C^2$ -conjugados em torno de uma singularidade hiperbólica. Entretanto, vale mais do que isto: o índice determina a classe de conjugação topológica local. Este é o conteúdo do teorema de Hartman.

4. TEOREMA DE HARTMAN. *Sejam  $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^1$  e  $p$  um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças  $V$  de  $p$  em  $\Delta$  e  $W$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $X|_V$  é topologicamente conjugado a  $DX(p)/W$ .*

A demonstração deste teorema é dada no capítulo IX. Por enquanto limitar-nos-emos a dar sua interpretação geométrica na figura 8. O Teorema 4 e III.6 permitem classificar localmente os pontos singulares hiperbólicos.

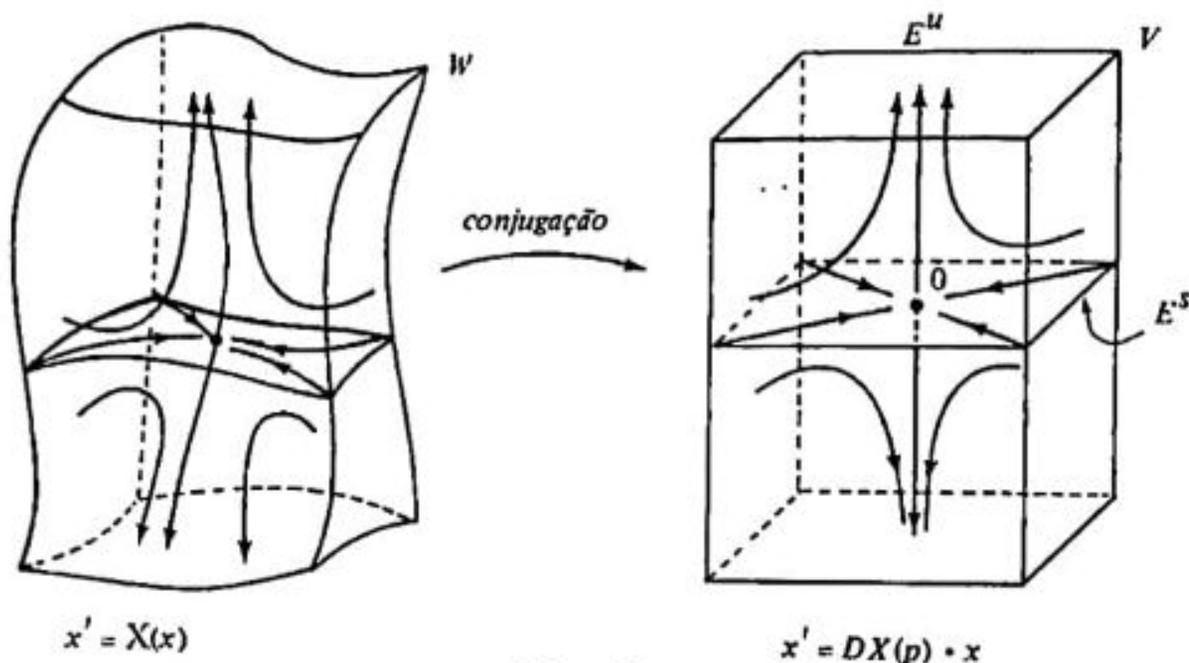


Figura 8

## 6. Estrutura local de órbitas periódicas

### 1. A transformação de Poincaré.

A transformação de Poincaré associada a uma órbita fechada  $\gamma$  de um campo vetorial é um difeomorfismo  $\pi$  que definiremos a seguir. Esta transformação descreve o comportamento do campo em uma vizinhança de  $\gamma$ .

Seja então  $\gamma = \{\varphi(t, p), 0 \leq t \leq \tau_0\}$  uma órbita periódica de período  $\tau_0$  de um campo  $X$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , definido em  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma$  uma seção transversal a  $X$  em  $p$ . Em virtude da continuidade do fluxo  $\varphi$  de  $X$ , para todo ponto  $q \in \Sigma$  próximo de  $p$  a trajetória  $\varphi(t, q)$  permanece próxima a  $\gamma$ , com  $t$  em um intervalo compacto pré-fixado, por exemplo,  $[0, 2\tau_0]$ . Define-se  $\pi(q)$  como o primeiro ponto onde esta órbita intercepta  $\Sigma$ . Seja  $\Sigma_0$  o domínio de  $\pi$ . Naturalmente  $p \in \Sigma_0$  e  $\pi(p) = p$ .

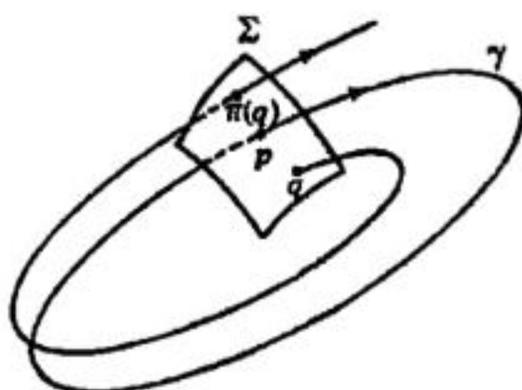


Figura 9

Muitas propriedades de  $X$  perto de  $\gamma$  se refletem em  $\pi$ . Por exemplo, as órbitas periódicas de  $X$  vizinhas de  $\gamma$  correspondem aos pontos periódicos de  $\pi$ , que são pontos  $q \in \Sigma_0$  para os quais  $\pi^n(q) = q$  para algum inteiro  $n \geq 1$ . O comportamento assintótico das órbitas de  $X$  perto de  $\gamma$  também é descrito por  $\pi$ . Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(q) = p$  implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ .

1. **DEFINIÇÃO.** Com as notações acima, a órbita fechada  $\gamma$  é um *atrator periódico* (ou então  $\gamma$  diz-se orbitalmente estável) quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q$  em uma vizinhança de  $\gamma$ .

2. **Observação.** A seção  $\Sigma$  tomada acima é uma hipersuperfície ou uma subvariedade diferenciável  $(n - 1)$  - dimensional do aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ . Pode-se supor que a variedade  $\Sigma$  que aqui aparece é um disco de um subespaço vetorial ou afim de  $\mathbb{R}^n$ , sem que isto constitua uma restrição séria.

A seguir, demonstraremos que  $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  é um difeomorfismo de classe  $C^r$  sobre sua imagem  $\Sigma_1$ . Vamos usar o teorema do fluxo tubular e seu corolário 13 para dar precisão à definição de  $\pi$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $p$  dada pelo corolário 13. Como  $\varphi(\tau_0, p) = p$ , existe uma vizinhança  $\Sigma_0$  de  $p$  em  $\Sigma$  tal que  $\varphi(\tau_0, q) \in V$  para todo  $q \in \Sigma_0$ . Seja  $\zeta: V \rightarrow \Sigma$  a aplicação definida em 13. Pomos  $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ ,  $\pi(q) = \zeta(\varphi(\tau_0, q))$ .

Outra expressão para  $\pi$  é  $\pi(q) = \varphi(\tau_0 + \tau(\varphi(\tau_0, q)), q)$ , onde  $\tau: V \rightarrow \mathbb{R}$  é o tempo  $\tau(x)$  que leva a órbita por  $x$  em  $V$  para interceptar  $\Sigma$ . Do teorema das funções implícitas,  $\tau$  é de classe  $C^r$ .

Destas expressões resulta que  $\pi$  é da mesma classe de diferenciabilidade que  $X$ . A inversa  $\pi^{-1}: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$  de  $\pi$  é definida tomando-se o campo  $-X$ . Fica provado que  $\pi$  é um difeomorfismo  $C^r$ .

## 2. Ciclos limites no plano.

1. DEFINIÇÃO. Sejam  $\Delta$  um aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $X: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Uma órbita periódica  $\gamma$  de  $X$  chama-se *ciclo limite* se existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  tal que  $\gamma$  é a única órbita fechada de  $X$  que intercepta  $V$ .

2. PROPOSIÇÃO. Com as notações da definição acima, existem apenas os seguintes tipos de ciclos limites (diminuindo  $V$  se necessário):

a) Estável, quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V$ ;

b) Instável, quando  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V$ ;

c) Semi-estável, quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V \cap \text{Ext}\gamma$

e  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$  para todo  $q \in V \cap \text{Int}\gamma$ , ou o contrário.

*Demonstração.* Diminuindo a vizinhança  $V$  se necessário, podemos supor que ela não contém singularidades. Sejam  $p \in \gamma$  e  $\Sigma$  uma seção transversal a  $X$  em  $p$ . Seja  $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a transformação de Poincaré (veja a figura 10). Suponhamos que  $\Sigma$  esteja orde-

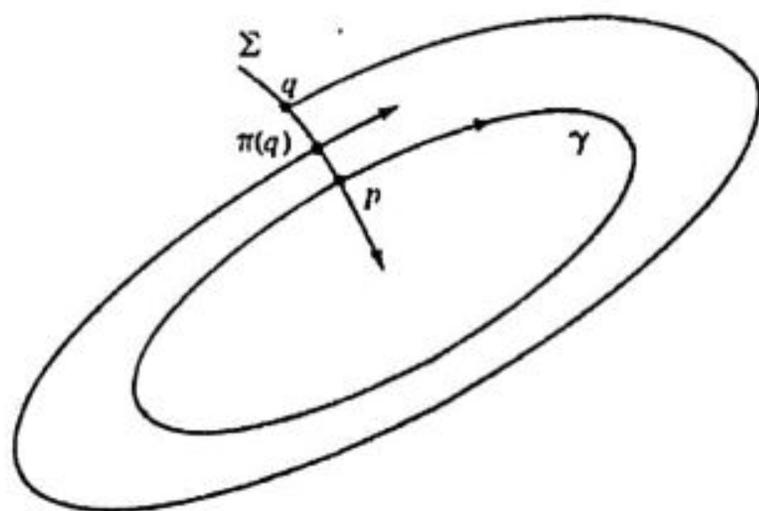


Figura 10

nado, sendo o sentido positivo de  $\text{Ext}\gamma$  para  $\text{Int}\gamma$ . Dado  $q \in \Sigma_0 \cap \text{Ext}\gamma$ , temos  $\pi(q) > q$  ou  $\pi(q) < q$ . Suponhamos  $\pi(q) > q$ . Considere a região  $A$  limitada por  $\gamma$ , pelo arco de trajetória  $\widehat{q\pi(q)}$  e pelo segmento  $\overline{q\pi(q)} \in \Sigma_0$ .  $A$  é positivamente invariante, isto é, dado  $x \in A$ ,  $\varphi(t, x) \in A$  para todo  $t \geq 0$ . Ainda,  $\varphi(t, x)$  intercepta  $\Sigma$  em uma seqüência estrí-

tamente monótona de pontos  $x_n$  que converge para  $p$ . Conclui-se que  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0$ .

Se  $\pi(q) < q$ , considerando o campo  $-X$ , fica provado que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, x), \gamma) = 0$  para todo  $x \in A$ .

As mesmas considerações podem ser feitas em  $\text{Int}\gamma$ . Combinando todas as possibilidades podemos provar a proposição. ■

3. *Observação.* Com as notações da proposição, temos que  $\gamma$  é um ciclo limite se e só se  $p$  é um ponto fixo isolado de  $\pi$ .

Ainda

a)  $\gamma$  é estável se e somente se  $|\pi(x) - p| < |x - p|$  para todo  $x \neq p$  próximo de  $p$ ;

b)  $\gamma$  é instável se e somente se  $|\pi(x) - p| > |x - p|$  para todo  $x \neq p$  próximo de  $p$ ;

c)  $\gamma$  é semi-estável se e somente se  $|\pi(x) - p| < |x - p|$  para todo  $x \in \Sigma \cap \text{Ext}\gamma$  próximo de  $p$  e  $|\pi(x) - p| > |x - p|$  para todo  $x \in \Sigma \cap \text{Int}\gamma$  próximo de  $p$ , ou o contrário.

Em particular, se  $\pi'(p) < 1$ , podemos aplicar o teorema do valor médio e concluir que  $\gamma$  é estável. Por outro lado,  $\gamma$  é instável se  $\pi'(p) > 1$ . Veja a figura 11.

O teorema abaixo estabelece uma condição suficiente para que uma órbita periódica seja um ciclo limite estável.

4. **TEOREMA.** *Sejam  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $X = (X_1, X_2): \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Seja  $\gamma$  uma órbita periódica de  $X$  de período  $T$  e  $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a transformação de Poincaré em uma seção transversal  $\Sigma$  em  $p \in \gamma$ . Então*

$$(*) \quad \pi'(p) = \exp \left[ \int_0^T \text{div } X(\gamma(t)) dt \right],$$

onde  $\text{div } X(x) = D_1 X_1(x) + D_2 X_2(x)$ . Em particular, se  $\int_0^T \text{div } X(\gamma(t)) dt < 0$  então  $\gamma$  é estável, e se  $> 0$ ,  $\gamma$  é instável.

*Demonstração.* Para cada  $t$ , ponhamos  $A(t) = DX(\gamma(t))$ . Seja  $\Phi(t)$  a matriz fundamental de  $x' = A(t)x$ , com  $\Phi(0) = E$ ; pela fórmula de Liouville,

$$\det \Phi(T) = \exp \left[ \int_0^T \text{div } X(\gamma(t)) dt \right].$$

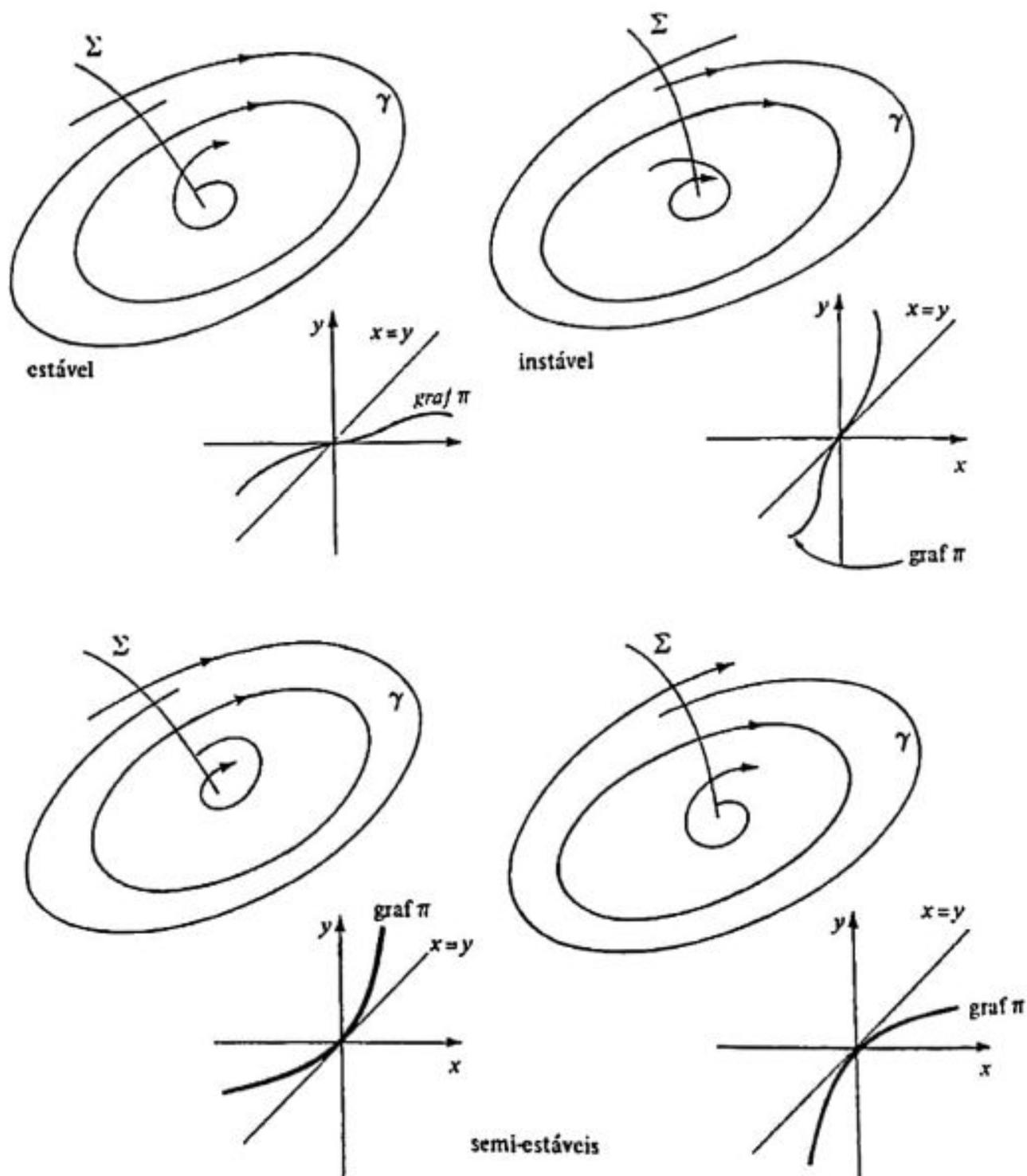


Figura 11

Vamos provar que  $\pi'(p) = \det \phi(T)$ . Seja  $\varphi$  o fluxo de  $X$ . Pelo teorema 3 seção 2 temos  $\phi(T) = D_2\varphi(T, p)$ . Notemos primeiro que  $D_2\varphi(T, p) \cdot X(p) = X(p)$ . De fato, como  $\frac{d}{dt} \varphi(t, p) \Big|_{t=0} = X(p)$ , vem

$$\begin{aligned} D_2\varphi(T, p) \cdot X(p) &= \left. \frac{d}{dt} \varphi(T, \varphi(t, p)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi(T + t, p) \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \varphi(t, p) \right|_{t=0} = X(p). \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $g: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  é uma parametrização de  $\Sigma$  tal que  $g(0) = p$ , o conjunto  $B = \{X(p), g'(0)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$ . Por definição,  $\pi(g(s)) = \varphi(T + \tau(\varphi(T, s)), g(s))$ , donde

$$\begin{aligned} \pi'(p) \cdot g'(0) &= \left. \frac{d}{ds} \pi \circ g(s) \right|_{s=0} = D_1\varphi(T, p) \cdot a + D_2\varphi(T, p) \cdot g'(0) = \\ &= aX(p) + D_2\varphi(T, p) \cdot g'(0), \end{aligned}$$

onde  $a$  é a derivada de  $\tau(\varphi(T, g(s)))$  em  $s = 0$ . Portanto, a matriz de  $D_2\varphi(T, p)$  na base  $B$  é

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & \pi'(p) \end{pmatrix},$$

e obtemos  $\det \phi(T) = \pi'(p)$ . As últimas afirmações do teorema seguem da observação 3. ■

## 7. Fluxos lineares no toro

Os fluxos de campos vetoriais lineares com valores próprios puramente imaginários conduzem ao estudo de fluxos em superfícies toroidais. Assim, consideremos em  $\mathbb{R}^4$  o seguinte sistema de equações diferenciais

$$(1) \quad \begin{cases} x_1' = -\alpha x_2, \\ x_2' = \alpha x_1, \\ x_3' = -\beta x_4, \\ x_4' = \beta x_3. \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0$$

Usando coordenadas complexas  $z_1 = x_1 + ix_2$  e  $z_2 = x_3 + ix_4$ , o sistema (1) se escreve

$$(2) \quad \begin{cases} z_1' = i\alpha z_1, \\ z_2' = i\beta z_2, \end{cases}$$

cujo fluxo é  $\varphi(t, z_1, z_2) = (\varphi_1(t, z_1), \varphi_2(t, z_2)) = (z_1 e^{i\alpha t}, z_2 e^{i\beta t})$ . Fixemos  $r_1, r_2 > 0$ , e sejam  $(z_1^0, z_2^0) \in \mathbb{C}^2 \approx \mathbb{R}^4$  tais que  $|z_1^0| = r_1$  e  $|z_2^0| = r_2$ . A curva  $t \rightarrow \varphi_i(t, z_i^0)$  (isto é, a imagem desta curva) está contida em  $C_i = \{z \in \mathbb{C}; |z| = r_i\}$ ,  $i = 1, 2$ . Portanto, o toro  $T^2 = C_1 \times C_2$  de  $\mathbb{R}^4$

é invariante pelo fluxo  $\varphi$ . As soluções de (1) que estão contidas em  $T^2$  são imagens pela aplicação  $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2, R(\theta_1, \theta_2) = (r_1 e^{2\pi i \theta_1}, r_2 e^{2\pi i \theta_2})$ , das soluções do seguinte sistema de equações em  $\mathbb{R}^2$

$$(3) \quad \begin{cases} \theta_1' = \alpha/2\pi, \\ \theta_2' = \beta/2\pi. \end{cases}$$

Desejamos observar que o toro  $T^2$  pode ser obtido de outras maneiras. Uma delas consiste em identificar os lados opostos do quadrado  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ . Isto equivale a tomar a aplicação quociente  $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , onde  $\mathbb{Z}$  é o grupo aditivo dos inteiros. Outra maneira consiste em tomar no espaço  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$  o círculo de raio 1 e centro  $(0, 2)$  contido no plano  $(x, z)$  e rodá-lo em torno do eixo  $z$ . A superfície obtida desta maneira é a imagem da aplicação  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$(\theta_1, \theta_2) \rightarrow ((2 + \cos 2\pi\theta_2) \cos 2\pi\theta_1, (2 + \cos 2\pi\theta_2) \sin 2\pi\theta_1, \sin 2\pi\theta_1)$$

Veja a figura 12 como ilustração.

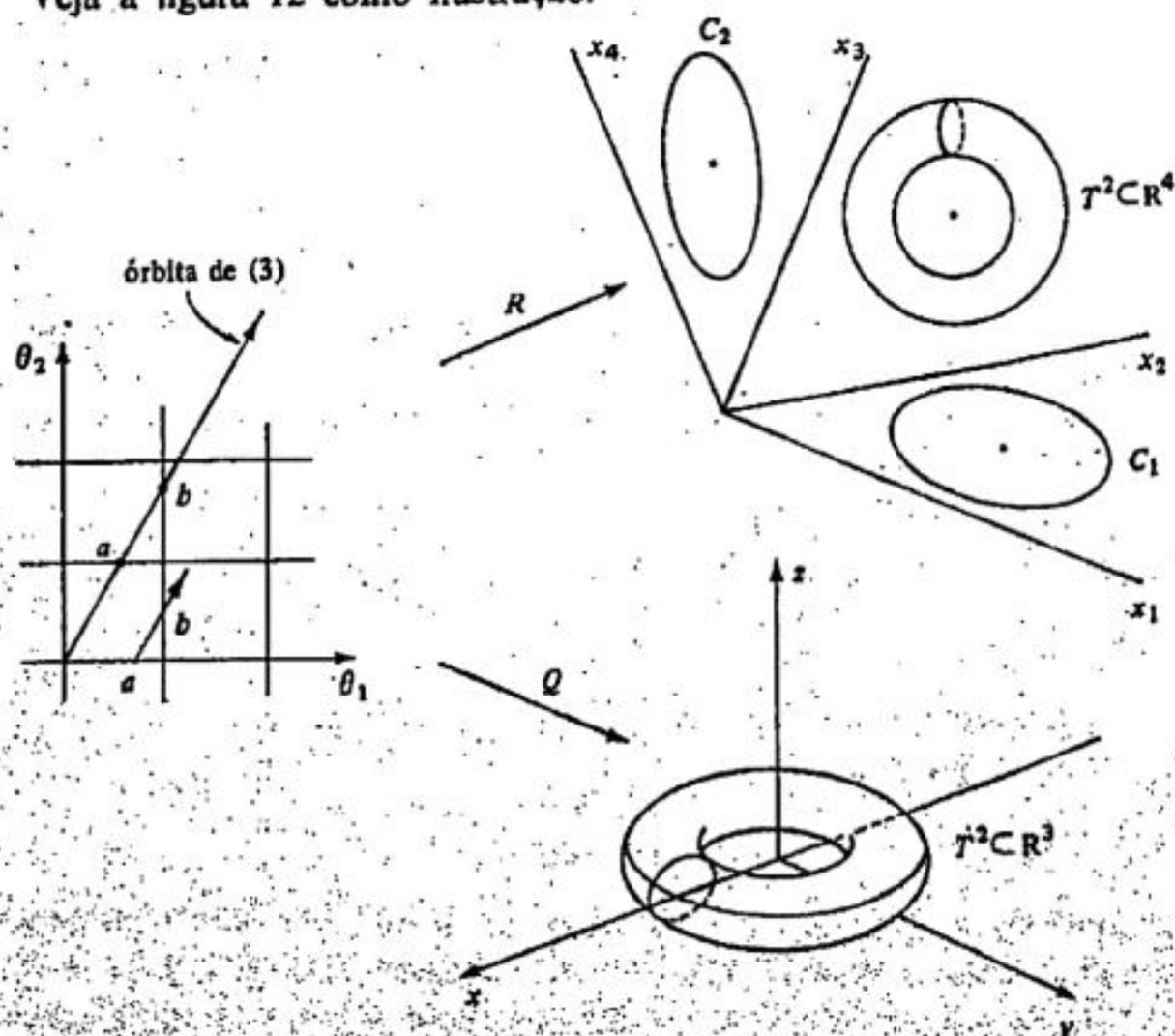


Figura 12

Seja  $C = 1 \times C_2 \subset \mathbb{C}^2$ . Para todo  $(1, z_2^0) \in C$  a órbita  $\varphi(t, 1, z_2^0)$  intercepta  $C$  numa seqüência de pontos  $(1, z_2^{(n)})$  dada por  $z_2^{(n)} = z_2^0 e^{2\pi n i \beta/\alpha}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Na realidade estes pontos são os iterados  $\pi^n(z_2^0)$  pela transformação de Poincaré  $\pi: C \rightarrow C$ ,  $\pi(z) = z e^{2\pi i \beta/\alpha}$ .

1. **TEOREMA.** Se  $\beta/\alpha$  é racional, todas as órbitas de (2) contidas em  $T^2$  são periódicas. Se  $\beta/\alpha$  é irracional, elas são densas em  $T^2$ .

*Demonstração.* Seja  $\beta/\alpha = p/q$ , onde  $p$  e  $q$  são inteiros primos entre si e  $q > 0$ . Então, todas as órbitas de  $\pi$  têm período  $q$ , o que significa que as órbitas de (2) são periódicas de período  $2\pi/q$ .

Suponhamos  $\beta/\alpha$  irracional. Para provar a afirmação acima basta fixar  $z_2^0 \in C_2$  e provar que a seqüência  $\pi^n(z_2^0)$  é densa no círculo. Para isto é suficiente mostrar que o subgrupo de  $\mathbb{R}$  gerado por  $\{1, \beta/\alpha\}$  é denso em  $\mathbb{R}$ . Mas esta afirmação decorre do lema 3.3. ■

2. *Observação.* Os iterados  $\pi^n(z_2^0)$  são as imagens pela aplicação  $R$  dos pontos de abscissa inteira da órbita correspondente de (3) em  $\mathbb{R}^2$ . Observe que esta órbita é uma reta de inclinação  $\beta/\alpha$ .

## EXERCÍCIOS

1. Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^1$  num aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ . Uma função contínua  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se integral primeira de  $X$  em  $\Delta$  se:

- (a)  $f$  é constante ao longo de toda órbita de  $X$
- (b)  $f$  não é constante em nenhum aberto de  $\Delta$ .

Resolva as seguintes questões:

- (i) Seja  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $Df(p) \cdot X(p) = 0$  e  $Df(p) \neq 0$  para todo  $p \in \Delta$ . Então  $f$  é uma integral primeira de  $X$ .
- (ii) Se  $p \in \Delta$  não é ponto singular de  $X$  então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que  $X|_V$  tem  $n - 1$  integrais primeiras  $f_1, \dots, f_{n-1}$  de classe  $C^1$  funcionalmente independentes (isto é, tais que  $df_1(q), \dots, df_{n-1}(q)$  são linearmente independentes para todo  $q \in V$ ).

(Sugestão: Use o corolário do teorema do fluxo tubular, pensando primeiro em um campo paralelo  $(1, 0, \dots, 0)$ .)

(iii) Encontre uma integral primeira do centro dado por

$$\begin{aligned}x'_1 &= -\beta x_2 \\x'_2 &= \beta x_1\end{aligned}$$

e da sela

$$\begin{aligned}x'_1 &= \lambda_1 x_1 \\x'_2 &= \lambda_2 x_2\end{aligned}$$

onde  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

(iv) Não existe nenhuma integral primeira em  $\mathbb{R}^2$  nem para os nós nem para os focos definidos na seção 4 do capítulo III.

(v) Generalize (iii) e (iv) para sistemas lineares em  $\mathbb{R}^n$ .

(vi) Seja  $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$ . Suponha que os pontos onde  $dH_q$  é nula são isolados e encontre uma integral primeira para o campo

$$X = \left( \frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right)$$

(Tal campo é conhecido como Hamiltoniano).

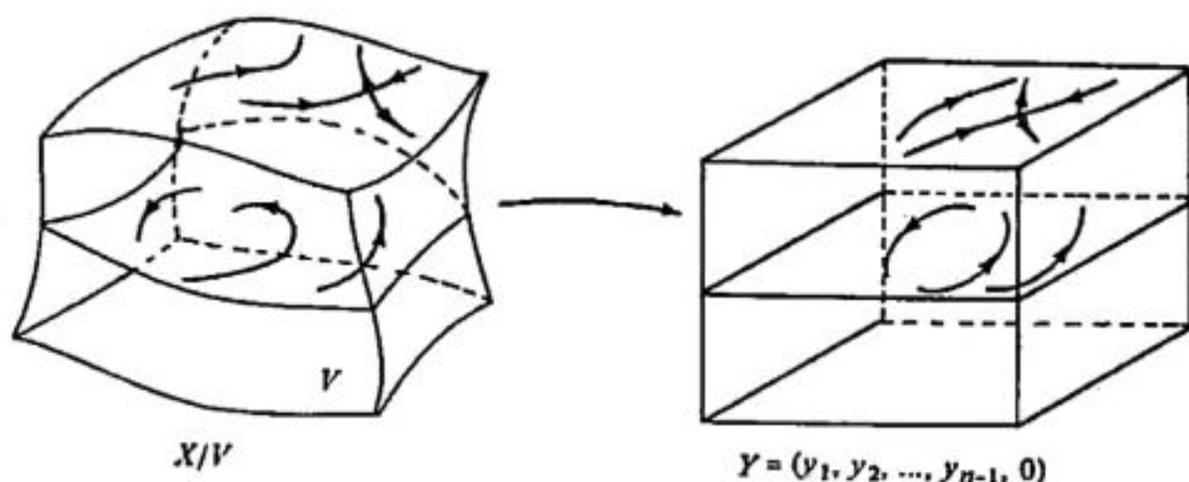
(vii) Dada uma função  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ , tal que  $df$  não se anula em nenhum aberto, encontre um campo  $X$  cuja integral primeira seja  $f$ . Suponha  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ .

(viii) Se  $X_1$  e  $X_2$  em  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ , respectivamente, são topologicamente equivalentes e  $X_1$  tem uma integral primeira, então o mesmo é válido para  $X_2$ .

(ix) Se  $f$  é uma integral primeira de  $X$ , então  $M_c = f^{-1}(c)$  é invariante por  $X$ . Em particular, como  $M_c$  não contém abertos, podemos considerar as órbitas contidas em  $M_c$  como um "subsistema", com dimensão inferior em uma unidade à do sistema definido por  $X$ .

(x) Se  $X$  tem uma integral primeira  $f$  e  $df(p) \neq 0$  então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que  $X/V$  é diferenciavelmente conjugado a um sistema da forma

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, 0).$$



- (xi) Generalize este último resultado para o caso em que  $X$  possui  $k$  integrais primeiro funcionalmente independentes (ver ii) em um ponto  $p \in \Delta$ .

*Sugestão:* Compare com o teorema do fluxo tubular e imite a prova, usando o teorema da função inversa.)

2. Sejam  $\Sigma_1, \Sigma_2$  hiperplanos transversais a um campo  $X$  de classe  $C^r$  num aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $p_i = \varphi(t_i) \in \Sigma_i$  ( $i = 1, 2$ ) e  $t_1 < t_2$ , existe uma vizinhança  $V_1$  de  $p_1$  e uma função  $\tau: V_1 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^r$  tal que

$$f: q \rightarrow \varphi(\tau(q), q)$$

é um difeomorfismo de  $V_1 \cap \Sigma_1$  sobre  $V_2 \cap \Sigma_2$ .  
(*Sugestão:* Use o teorema do fluxo tubular.)

3. Seja  $f(x, \lambda)$  de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tal que

$$x' = f(x, 0)$$

tem uma única solução periódica  $p(t)$  não constante. Se  $\omega$  é o período desta solução, suponhamos que as únicas soluções de

$$\begin{aligned} y' &= D_x f(p(t), 0) \\ y(0) &= y(\omega) \end{aligned}$$

são as funções da forma  $ap'(t)$  com  $a \in \mathbb{R}$ .

Prove que existe  $\delta > 0$  e uma única função  $\tau(\lambda)$  de classe  $C^1$  em  $|\lambda| < \delta$  tal que  $\tau(0) = \omega$  e

$$x' = f(x, \lambda)$$

tem uma única solução  $p(t, \lambda)$  de classe  $C^1$  periódica de período  $\tau(\lambda)$  com  $p(t, 0) = p(t)$ .

(Sugestão: Seja  $H$  o hiperplano normal à curva  $p(t)$  no ponto  $p(0)$ . Sem perda de generalidade, pode-se supor que  $p(0) = 0$  e  $p'(0) = (1, 0, \dots, 0)$  e daí  $H = \mathbb{R}^{n-1}$ . Para  $h = (h_2, \dots, h_n) \in H$  seja a solução  $\varphi(t, h, \lambda)$  do problema de valores iniciais

$$x' = f(x, \lambda) \quad x(0) = h.$$

Aplique o teorema das funções implícitas à equação  $\varphi_1(t, h, \lambda) = 0$  ( $\varphi_1$  é a primeira coordenada de  $\varphi$ ) para obter  $\xi(h, \lambda)$  com  $\xi(0, 0) = \omega$  e  $\varphi(\xi(h, \lambda), h, \lambda) \in H$ . Fica assim definida uma transformação de Poincaré de  $H$  em  $H$  de classe  $C^1$ . Para encontrar  $p(t, \lambda)$  resolva a equação  $\varphi(\xi(h, \lambda), h, \lambda) = h$  usando o teorema das funções implícitas).

4. Sejam  $f_1, f_2$  de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Dado  $a > 0$  prove que uma condição necessária para que o sistema

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_2 + \mu f_1(x_1, x_2) \\ x_2' &= -x_1 + \mu f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \right\} (*)$$

tenha uma solução periódica  $\varphi(t, a, \mu)$  de período  $\tau(\mu)$  para todo  $\mu$  suficientemente pequeno tal que  $\varphi_a = \varphi(t, a, 0) = a(\cos t, -\sin t)$  e  $\tau(\mu)$  é diferenciável com  $\tau(0) = 2\pi$ , e que

$$\beta(a) = \int_{\varphi_a} f_1 dx_2 + f_2 dx_1 = 0.$$

Prove que se  $\beta(a) = 0$  e  $\beta'(a) \neq 0$  então (\*) tem de fato as propriedades acima.

(Sugestão: Introduza coordenadas polares

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

transformando (\*) em

$$\begin{aligned} r' &= \mu R_1(r, \theta, \mu) \\ \theta' &= 1 + R_2(r, \theta, \mu) \end{aligned}$$

que é equivalente à uma equação do tipo

$$\frac{dr}{d\theta} = \mu R(r, \theta, \mu) \quad (**)$$

Prove que a solução de (\*\*) com  $\rho(r, 0, \mu) = r$  é da forma  $\rho(r, \theta, \mu) = r + \mu\beta(r) + \varepsilon(r, \theta, \mu)$ .

5. Use o exercício 4 para mostrar que a equação de van der Pol

$$x'' = -x + \varepsilon x'(1 - x^2)$$

possui, para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, um único ciclo limite estável na vizinhança do círculo  $x^2 + (x')^2 = 4$ . Prove também que quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  este ciclo tende para o círculo mencionado.

6. Que condições deverão satisfazer  $a$  e  $b$  para que a curva  $\gamma(t) = (A \cos \sqrt{a}t, B \cos \sqrt{b}t)$  seja densa no retângulo  $[-A, A] \times [-B, B]$ ?

(Sugestão: Considere o sistema de osciladores harmônicos  $x'' + ax = 0$ ,  $y'' + by = 0$ . Analise a possibilidade das curvas integrais em  $\mathbb{R}^4(x, x', y, y')$  serem densas em toros.)

7. Sistemas conservativos unidimensionais: Considere a equação

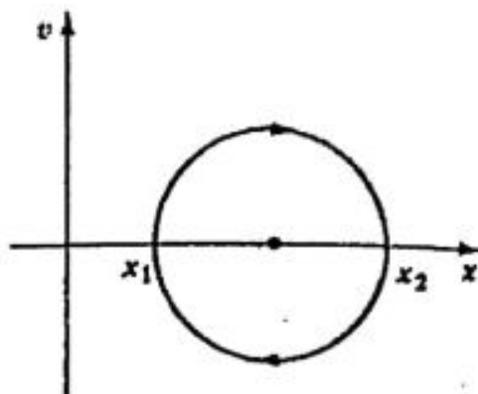
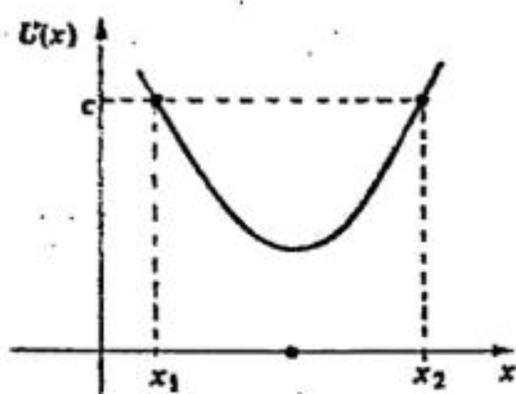
$$x'' = F(x)$$

num intervalo da reta. Claramente ela é equivalente ao sistema

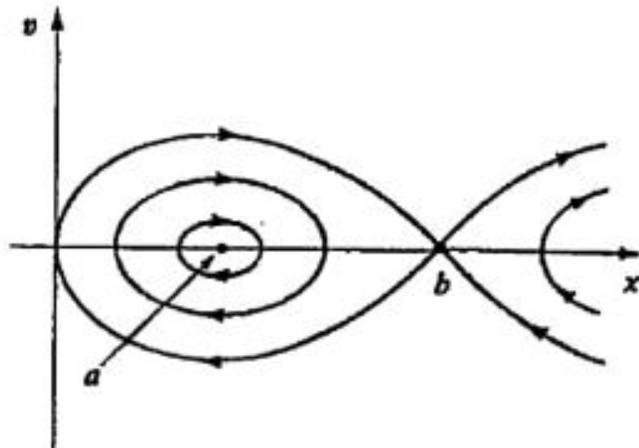
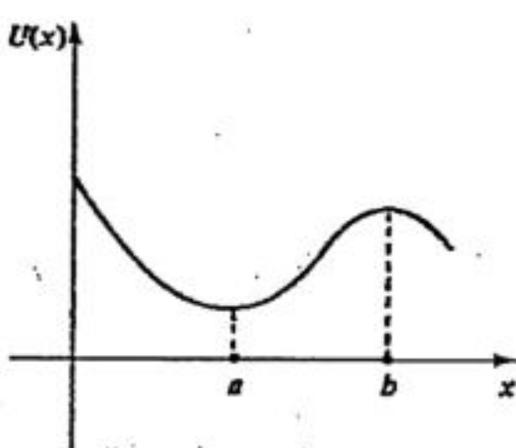
$$\left. \begin{array}{l} x' = v \\ v' = F(x) \end{array} \right\} (*)$$

- (i) Mostre que a energia total  $E = T + U$  é uma integral primeira de (\*) onde  $T(v) = \frac{v^2}{2}$  é a energia cinética e  $U(x) = -\int_{x_0}^x F(\xi)d\xi$  é a energia potencial.
- (ii) Mostre que todos os pontos de equilíbrio de (\*) estão no eixo dos  $x$ . Mostre também que todas as órbitas periódicas de (\*) interceptam o eixo dos  $x$  e são simétricas em relação a ele.
- (iii) Mostre que se  $U(x_1) = U(x_2) = c$  e  $U(x) < c$  para  $x_1 < x < x_2$  então (\*) tem uma órbita periódica passando pelos pontos  $(x_1, 0)$  e  $(x_2, 0)$ .

Sugestão: A órbita que passa por  $(x_0, 0)$  é dada por  $\frac{v^2}{2} + V(x) = E$  onde  $E$  é sua energia. Use o fato de  $\frac{dv}{dx} = \frac{F(x)}{v}$  para concluir que esta órbita torna a encontrar o eixo dos  $x$  e que isto deve acontecer em  $(x_2, 0)$ . Use então (ii.)



- (iv) Suponha que  $F(x) \neq 0$  para  $0 < |x - x_0| < a$ . Mostre que (\*) tem um centro ou uma sela em  $(x_0, 0)$  conforme  $U(x_0)$  seja um mínimo ou um máximo relativo.



8. Com base no exercício anterior, determine o espaço de fase das seguintes equações:

- (i)  $x'' = -x$  (mola)  
 (ii)  $x'' = -\sin x$  (pêndulo)  
 (iii)  $x'' = -\frac{1}{x^2}$  (gravitação)

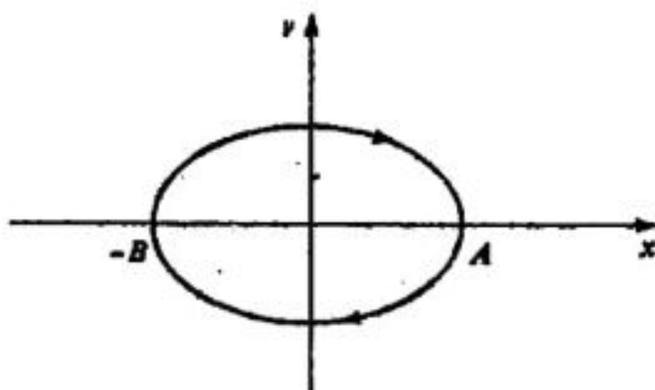
9. Considere a equação (ver exercício 7).

$$x'' + q(x) = 0$$

onde  $q \in C^1$ ,  $q(0) = 0$  e  $xq(x) > 0$  se  $x \neq 0$ . Interprete-a como a equação do movimento de uma massa unitária presa a uma mola elástica que reage a um deslocamento  $x$  com uma força  $q(x)$ . Defina a rigidez  $h(x)$  da mola por  $h(x) = \frac{q(x)}{x}$ . Por (iv) do exercício 7 sabemos que  $(0, 0)$  é um centro no espaço de fase  $(x, v)$ .

- (i) Dada uma órbita na vizinhança de 0, com energia  $E$  e limites de oscilação  $-B$  e  $A$  (ver figura), mostre que seu período é

$$T = 2 \int_{-B}^A \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}$$



(Sugestão: Note que  $x' = v = \sqrt{2(E - U(x))}$ .)

- (ii) Considere duas molas com  $h_1(x) \geq h(x)$  que oscilam dentro dos mesmos limites (ver (i)). Se  $T_1, T$  são seus períodos de oscilação, então  $T \geq T_1$ .

(Sugestão: Note que no ponto  $A$ ,  $E = U(A) = \int_0^A q(u) du$  e daí  $E - U(x) = \int_x^A q(u) du$ . Use isso para provar que  $E - U(x) \leq E - U_1(x)$ . Aplique então (i).)

- (iii) Uma mola para a qual  $h(x) = h(-x)$  é dita simétrica. Neste caso,  $U(x) = U(-x)$  e  $B = A$  em (i). O número  $A$  é dito amplitude da oscilação. Dizemos que uma mola simétrica é *dura* se  $h''(0) > 0$ , e *macia* se  $h''(0) < 0$ . Mostre que o período de uma mola dura (resp. macia) decresce (resp. cresce) quando a amplitude das oscilações cresce.

(Sugestão: Seja  $A_1 = cA$  com  $c > 1$ . Por simetria é preciso considerar apenas o tempo que a mola gasta para oscilar entre 0 e  $A$  (resp. 0 e  $A_1$ ). Faça  $x = cy$  e obtenha a equação  $y'' + yh(cy) = 0$ . Note que a oscilação de amplitude  $A$  para esta equação corresponde à oscilação de amplitude  $A_1 = cA$  para a equação original, ambas com o mesmo período. Use então (ii).

10. No enunciado do Teorema 3 da seção 2 substitua a classe  $C^1$  de  $f$  pela classe  $C^\infty$  (analítica real) em  $A$ . Prove que  $\varphi$ , o fluxo gerado por  $f$ , é analítico em  $D$ .

Lembramos que uma função real (resp. complexa) num domínio  $n$ -dimensional real (resp. complexo) é analítica se cada ponto do domínio tem uma vizinhança onde ela é a soma de uma série de potências uniformemente convergente. O Teorema de Montel garante que uma seqüência de funções analíticas complexas convergente uniformemente em partes compactas do seu domínio, tem como limite uma função analítica complexa.

(Sugestão: Prove uma versão do Teorema 2 da seção 2 para  $f$  analítica complexa em  $I \subset \mathbb{C}^n$  e obtenha  $\varphi$  analítica complexa. Para o caso real extenda a função para uma vizinhança complexa de seu domínio e aplique a idéia anterior.)

11. Duas espécies animais  $A$  e  $B$  coexistem num meio ideal onde o alimento para  $A$  é ilimitado. Esta espécie, porém, constitui o alimento principal de  $B$ . Denotemos por  $x$  e  $y$  as densidades (elementos por unidade de área) de  $A$  e  $B$  respectivamente. Segundo Volterra temos que a evolução destas densidades obedece ao sistema

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta xy \\ y' &= -\gamma y + \delta xy \end{aligned} \right\} (*)$$

onde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  são números positivos. Justifica-se o sinal de  $\alpha$  a partir da lei de Malthus segundo a qual a população de uma espécie  $A$  em condições ideais cresce exponencialmente. Este crescimento é inibido pela presença da espécie  $B$ . A inibição é, nesse caso, proporcional aos encontros por unidade de área entre predadores  $B$  e vítimas  $A$ ; isto acarreta o sinal negativo antes de  $\beta$ . Analogamente para  $\gamma$  e  $\delta$ .

Prove que (\*) tem uma integral primeira  $E$  que possui em  $(\gamma/\delta, \beta/\alpha)$  um ponto de mínimo não degenerado. ( $D^2E$  é definida positiva nesse ponto). Conclua que todas as soluções de (\*) no quadrante positivo são periódicas. Interprete os resultados obtidos em termos de oscilações ininterruptas das densidades das espécies. (Sugestão: Transforme (\*) numa equação de variáveis separáveis e encontre  $E = -y^2 x^\gamma e^{-\beta y} e^{-\delta x}$ ).

12. Seja  $X$  um campo vetorial analítico em  $\mathbb{R}^2$ . Prove que uma órbita fechada de  $X$  é um ciclo limite ou é interior ao conjunto  $P_x$  de órbitas fechadas de  $X$ .  
(Sugestão: Use o exercício 10 e prove que a transformação de Poincaré associada à órbita fechada de um campo analítico é analítica.)

13. Sejam  $a, b, c, d$  números reais e  $f, g: B \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $C^1$  definidas em uma bola  $B$  de centro na origem  $(0, 0)$  de  $\mathbb{R}^2$  e raio  $r$ . O sistema

$$(1) \quad \begin{cases} x' = ax + by + f(x, y), \\ y' = cx + dy + g(x, y), \end{cases}$$

chama-se *sistema perturbado* do sistema linear

$$(2) \quad \begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy. \end{cases}$$

a) Prove que se  $f = 0(r)$ ,  $g = 0(r)$  e  $ad - bc \neq 0$  então a origem  $(0, 0)$  é um ponto singular isolado de (1).

b) Suponha que  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$  e  $Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$ . Determine condições sobre  $a, b, c, d$  para que  $(0, 0)$  seja uma singularidade hiperbólica de (1). Neste caso, descreva o espaço de fase (1) em uma vizinhança da origem. Existem três tipos topológicos.

c) Desenhe o espaço de fase dos sistemas abaixo. Mostre que não são topologicamente equivalentes entre si ou a um dos tipos encontrados em b.

$$(3) \quad z' = z^2, \quad z = x + iy,$$

$$(4) \quad x' = x^2, \quad y' = -y.$$

$$(5) \quad x' = e^{-1/x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad y' = -y$$

d) Dê exemplo de um sistema (1) tal que a origem é um ponto singular e toda vizinhança da origem possui uma órbita fechada.

14. Sejam  $\Sigma, \Lambda$  espaços métricos, o primeiro deles completo. Seja  $\phi: \Sigma \times \Lambda \rightarrow \Sigma$  tal que existe  $0 < \lambda < 1$  satisfazendo

$$d(\phi(x_1, \tau), \phi(x_2, \tau)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$$

para todo  $(x_1, \tau), (x_2, \tau) \in \Sigma \times \Lambda$ . Se  $\tau \in \Lambda$  seja  $x_\tau(\tau)$  o único ponto fixo da função  $\phi_\tau: \Sigma \rightarrow \Sigma$  definida por  $\phi_\tau(x) = \phi(x, \tau)$ .

(i) Prove que  $x_\tau(\tau)$  depende continuamente de  $\tau$ .

(ii) Seja agora  $\hat{\Sigma}$  espaço métrico completo e  $\hat{\Phi}: \Sigma \times \hat{\Sigma} \times \Lambda \rightarrow \Sigma \times \hat{\Sigma}$  uma aplicação continua da forma  $\hat{\Phi}(x, \hat{x}, \tau) = (\phi(x, \tau), \hat{\phi}(x, \hat{x}, \tau))$  com  $d(\hat{\phi}(x, \hat{x}_1, \tau), \hat{\phi}(x, \hat{x}_2, \tau)) \leq \lambda d(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . Prove que o ponto fixo  $(x_\tau(\tau), \hat{x}_\tau(\tau))$  de  $\hat{\phi}_\tau: \Sigma \times \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma \times \hat{\Sigma}$  dada por  $\hat{\phi}_\tau(x, \hat{x}) = (\phi(x, \tau), \hat{\phi}(x, \hat{x}, \tau))$  depende continuamente de  $\tau$ .

(Sugestão: Note que  $\dot{x}_\infty(\tau)$  é ponto fixo da aplicação  $\dot{\phi}_1: \dot{\Sigma} \rightarrow \dot{\Sigma}$ ,  $\dot{\phi}_1(\dot{x}) = \dot{\phi}(x_\infty(\tau), \dot{x}, \tau)$  e por (a)  $x_\infty(\tau)$  depende continuamente de  $\tau$ .)

- (iii) Aplique as conclusões de (ii) e o método da seção 2 para provar que se  $f_0, f_1, f_2, \dots$ , são campos vetoriais de classe  $C^1$  em  $\Delta$  tais que  $f_n \rightarrow f_0$  e  $Df_n \rightarrow Df_0$  uniformemente em partes compactas de  $\Delta$  então  $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$  e  $D\varphi_n \rightarrow D\varphi_0$  uniformemente em partes compactas de  $D_0 \subset \Delta \times \mathbb{R}$  onde  $D_0$  é o domínio do fluxo gerado por  $f_0$ . Generalize este resultado para classe  $C^r, r > 1$ . Compare com os exercícios pertinentes do capítulo II.
15. Prove que a definição de ponto singular hiperbólico (5, 1), depende apenas da classe de  $C^1$ -conjugação local.  
(Sugestão: Ao contrário do feito na observação (5.2). Trabalhe com a equação de conjugação entre os fluxos de  $X$  e  $Y$ .)

## O TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

1. Conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite de uma órbita

Sejam  $\Delta$  um subconjunto aberto do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  e  $X: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ .

Seja  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  a curva integral de  $X$  passando pelo ponto  $p$ , definida no seu intervalo máximo  $I_p$ ,  $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$ . Se  $\omega_+(p) = \infty$  define-se o conjunto

$$\omega(p) = \{q \in \Delta; \exists (t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

Analogamente, se  $\omega_-(p) = -\infty$ , define-se o conjunto

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta; \exists (t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

Os conjuntos  $\omega(p)$  e  $\alpha(p)$  são chamados respectivamente de *conjunto  $\omega$ -limite* e *conjunto  $\alpha$ -limite* de  $p$ .

## 1. EXEMPLOS.

a) Seja  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o campo  $C^\infty$  dado por:

$$X(x, y) = (x, -y)$$

As curvas integrais de  $X$  são representadas pela sela da Figura 1, em  $\mathbb{R}^2$ .

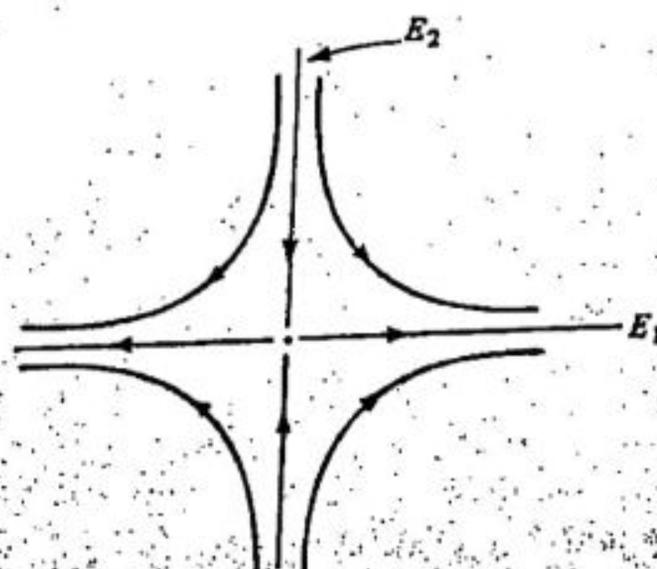


Figura 1

- Se  $p = 0$ ,  $\alpha(p) = \omega(p) = \{0\}$   
 Se  $p \in E_1 - \{0\}$ ,  $\omega(p) = \phi$  e  $\alpha(p) = \{0\}$   
 Se  $p \in E_2 - \{0\}$ ,  $\omega(p) = \{0\}$  e  $\alpha(p) = \phi$   
 Se  $p \notin E_1 \cup E_2$ ,  $\omega(p) = \alpha(p) = \phi$

b) Se  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  é periódica de período  $\tau$ , então

$$\omega(p) = \gamma_p = \{\varphi(t, p) \text{ tal que } 0 \leq t \leq \tau\} = \alpha(p)$$

De fato, se  $q \in \gamma_p$  existe  $t' \in [0, \tau]$  tal que  $\varphi(t', p) = q$ . Definir a seqüência  $t_n = t' + n\tau$ . Tem-se que  $t_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t_n) = \varphi(t' + n\tau, p) = \varphi(t') = q$ .

Para provar que  $\alpha(p) = \gamma_p$  basta tomar a seqüência  $t_n = t' - n\tau$ .

c) Seja  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com  $X(x, y) = (X_1(x, y), X_2(x, y))$  um campo  $C^k$  cujas órbitas são espirais exteriores e interiores ao círculo  $C$  de centro na origem e raio 1, como mostra a figura 2.

Por exemplo, se

$$\begin{aligned} X_1(x, y) &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ X_2(x, y) &= -x + y(1 - x^2 - y^2), \end{aligned}$$

então  $X$  satisfaz a condição acima.

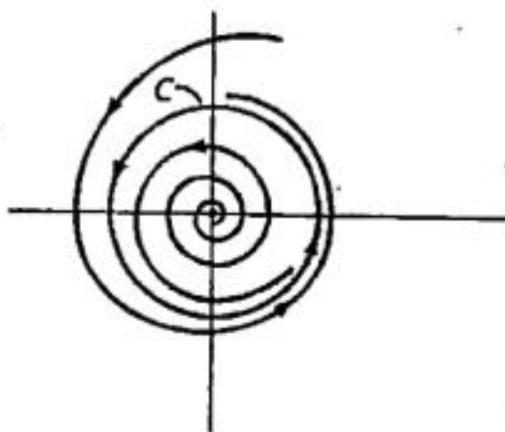


Figura 2

Então:

- $\alpha(p) = \{0\}$  se  $p$  é interior a  $C$ .  
 $\alpha(p) = \phi$  se  $p$  é exterior a  $C$ .  
 $\alpha(p) = C$  se  $p \in C$ .  
 $\omega(p) = C$  qualquer que seja o ponto  $p$  diferente da origem.

## 2. Observações.

a) Se  $p$  é um ponto singular do campo  $X$ , então qualquer que seja o ponto  $p$ ,  $\alpha(p), \omega(p) = \{p\}$ , pois neste caso  $\varphi(t) = p$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

b) Se  $\gamma_p$  é a órbita de  $X$  pelo ponto  $p$  e  $q \in \gamma_p$ , então  $\omega(p) = \omega(q)$ .  
Com efeito, se  $q \in \gamma_p$  existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t, p) = \varphi(t + c, q)$ .  
Analogamente,  $\alpha(p) = \alpha(q)$ .

Em virtude da observação b, podemos definir

3. DEFINIÇÃO. O conjunto  $\omega$ -limite de uma órbita  $\gamma$  é o conjunto  $\omega(p)$ , para qualquer  $p \in \gamma$ .

O conjunto  $\alpha$ -limite de uma órbita  $\gamma$  é o conjunto  $\alpha(p)$ , para qualquer  $p \in \gamma$ .

4. Observação. Sejam  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  a curva integral do campo  $X$  pelo ponto  $p$  e  $\psi(t) = \psi(t, p)$  a curva integral do campo  $-X$  pelo ponto  $p$ , então  $\psi(t, p) = \varphi(-t, p)$ .

Segue-se daí que o  $\omega$ -limite de  $\psi(t)$  é igual ao  $\alpha$ -limite de  $\varphi(t)$  e reciprocamente, o  $\omega$ -limite de  $\varphi(t)$  é igual ao  $\alpha$ -limite de  $\psi(t)$ . Por este motivo, para estudarmos as propriedades gerais dos conjuntos  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite de órbitas é suficiente nos restringirmos ao estudo do conjunto  $\omega$ -limite.

5. TEOREMA. Sejam  $X: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ) definido num aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  e  $\gamma^+(p) = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$  (respectivamente,  $\gamma^-(p) = \{\varphi(t, p); t \leq 0\}$ ) a semi-órbita positiva (respectivamente, a semi-órbita negativa) do campo  $X$  pelo ponto  $p$ . Se  $\gamma^+(p)$  (respectivamente,  $\gamma^-(p)$ ) está contida num subconjunto compacto  $K \subset \Delta$ , então:

- $\omega(p) \neq \emptyset$  (respectivamente,  $\alpha(p)$ )
- $\omega(p)$  é compacto (respectivamente,  $\alpha(p)$ )
- $\omega(p)$  é invariante por  $X$ , (respectivamente,  $\alpha(p)$ ), isto é, se  $q \in \omega(p)$ , então a curva integral de  $X$  por  $q$  está contida em  $\omega(p)$ .
- $\omega(p)$  é conexo (respectivamente,  $\alpha(p)$ ).

Demonstração. Pela observação anterior é suficiente mostrar o teorema para o conjunto  $\omega(p)$ .

a)  $\omega(p) \neq \emptyset$ .

Seja  $t_n = n \in \mathbb{N}$ . Temos por hipótese que  $\{\varphi(t_n)\} \subset K$  compacto. Existe então uma subsequência  $\{\varphi(t_{n_k})\}$  que converge para um ponto  $q \in K$ .

Temos então:

$t_{n_k} \rightarrow \infty$ , quando  $n_k \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t_{n_k}) \rightarrow q$ . Logo, por definição,  $q \in \omega(p)$ .

b)  $\omega(p)$  é compacto.

Temos que  $\omega(p) \subset \overline{\gamma^-(p)} \subset K$ , por conseguinte é suficiente mostrar que  $\omega(p)$  é fechado.

Seja  $q_n \rightarrow q$ ,  $q_n \in \omega(p)$ . Vamos mostrar que  $q \in \omega(p)$ . Desde que  $q_n \in \omega(p)$  existe para cada  $q_n$ , uma seqüência  $(t_m^{(n)})$  tal que  $t_m^{(n)} \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t_m^{(n)}, p) \rightarrow q_n$ , quando  $m \rightarrow \infty$ .

Escolhamos para cada seqüência  $(t_m^{(n)})$  um ponto  $t_n = t_{m(n)}^{(n)} > n$  e tal que  $d(\varphi(t_n, p), q_n) < \frac{1}{n}$ .

Temos então:

$$d(\varphi(t_n, p), q) \leq d(\varphi(t_n, p), q_n) + d(q_n, q) < \frac{1}{n} + d(q_n, q).$$

Segue-se, então que  $d(\varphi(t_n, p), q) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , isto é,  $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ .

Como  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , segue-se que  $q \in \omega(p)$ .

c)  $\omega(p)$  é invariante por  $X$ .

Seja  $q \in \omega(p)$  e  $\psi: I(q) \rightarrow \Delta$  a curva integral de  $X$  passando no ponto  $q$ . Seja  $q_1 = \varphi(t_0, q) = \psi(t_0)$  e vamos mostrar que  $q_1 \in \omega(p)$ .

Como  $q \in \omega(p)$ , existe uma seqüência  $(t_n)$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $\varphi$  é contínua, segue-se que:

$$\begin{aligned} q_1 = \varphi(t_0, q) &= \varphi(t_0, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_0, \varphi(t_n, p)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_0 + t_n, p). \end{aligned}$$

Temos então a seqüência  $(s_n) = (t_0 + t_n)$  tal que  $s_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(s_n, p) \rightarrow q_1$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , isto é,  $q_1 \in \omega(p)$ .

Para uma ilustração geométrica, ver figura 3 abaixo.

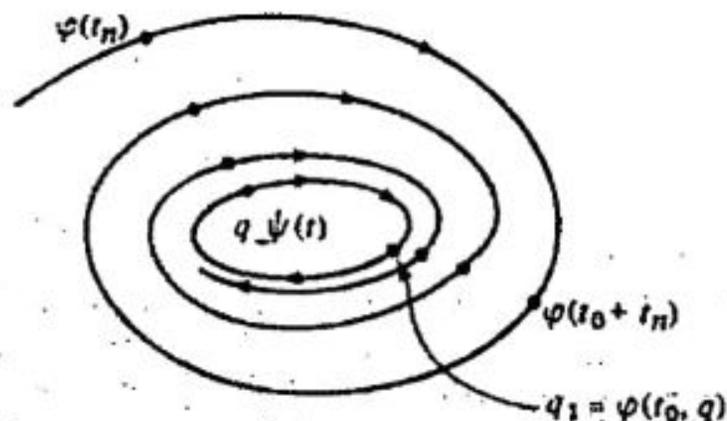


Figura 3

d)  $\omega(p)$  é conexo.

Suponhamos que  $\omega(p)$  não é conexo. Então  $\omega(p) = A \cup B$ , onde  $A$  e  $B$  são fechados, não vazios e  $A \cap B = \emptyset$ . Sendo  $A \neq \emptyset$ , existe uma seqüência  $(t'_n)$  tal que  $t'_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t'_n) \rightarrow a \in A$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Analogamente, existe uma seqüência  $(t''_n)$  tal que  $t''_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t''_n) \rightarrow b \in B$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo podemos construir uma seqüência  $(t_n)$ ,  $t_n \rightarrow \infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e tal que  $d(\varphi(t_n), A) < d/2$  e  $d(\varphi(t_{n+1}), A) > d/2$ , (onde  $d = d(A, B) > 0$ ) para todo  $n$  ímpar.

Como a função  $g(t) = d(\varphi(t), A)$ ,  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$  para todo  $n$  ímpar é contínua e  $g(t_n) < d/2$  e  $g(t_{n+1}) > d/2$ , segue-se, do teorema do valor intermediário, que existe  $t_n^*$ ,  $t_n < t_n^* < t_{n+1}$  tal que

$$g(t_n^*) = d(\varphi(t_n^*), A) = d/2.$$

Desde que a seqüência  $(\varphi(t_n^*))$  está contida no conjunto compacto  $Q = \{x \in \Delta; d(x, A) = d/2\}$ ,  $(\varphi(t_n^*))$  possui uma subsequência convergente, que denotaremos também por  $(\varphi(t_n^*))$ . Seja  $p^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n^*)$ .

Então  $p^* \in \omega(p)$ . Mas,  $p^* \notin A$ , pois  $d(p^*, A) = d/2 > 0$ ; também,  $p^* \notin B$ , pois  $d(p^*, B) \geq d(A, B) - d(p^*, A) = d/2 > 0$ . Chegamos portanto a uma contradição. ■

**6. COROLÁRIO.** Nas condições do teorema anterior, se  $q \in \omega(p)$ , então a curva integral de  $X$ , pelo ponto  $q$ , está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Como  $\omega(p)$  é compacto e invariante, segue-se que a órbita de  $X$  passando por  $q$  está contida no compacto  $\omega(p)$ . O resultado segue-se do Corolário VI; 1,4. ■

Os exemplos (a) e (b) abaixo mostram que a existência de um compacto  $K \subset \Delta$  contendo  $\gamma^+(p)$  não pode ser retirada do teorema 5.

(a)

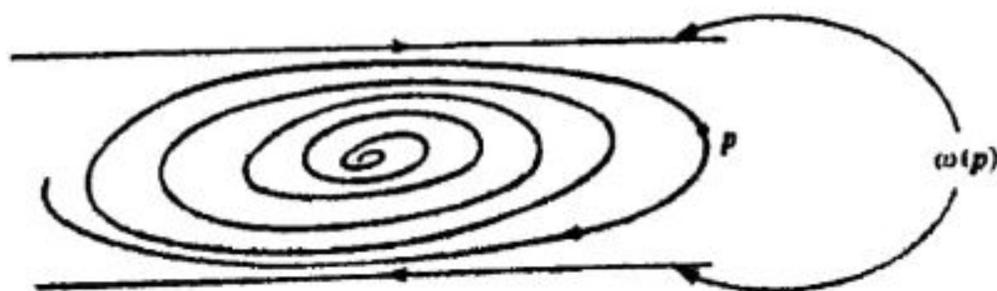


Figura 4

(b) Consideremos  $X$  o campo do exemplo 1-c restrito ao aberto  $\Delta = \mathbb{R}^2 - \{p_1, p_2\}$ , onde  $p_1$  e  $p_2$  são pontos distintos sobre o círculo unitário. Se  $p \neq 0$  e  $p \notin C - \{p_1, p_2\}$ ,  $\omega(p)$  é o círculo unitário menos os pontos  $p_1$  e  $p_2$ , mostrando que  $\omega(p)$  é desconexo.

## 2. O Teorema de Poincaré-Bendixson

No que se segue, vamos supor  $\Delta$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $X$  um campo vetorial de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  em  $\Delta$ .  $\gamma_p^+$  denota a semi-órbita positiva por  $p$

$$\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}.$$

**1. TEOREMA (POINCARÉ-BENDIXSON).** *Seja  $\varphi(t) = \varphi(t, p)$  uma curva integral de  $X$ , definida para todo  $t \geq 0$ , tal que  $\gamma_p^+$  esteja contida num compacto  $K \subset \Delta$ .*

*Suponha que o campo  $X$  possua um número finito de singularidades em  $\omega(p)$ . Têm-se as seguintes alternativas:*

a) *Se  $\omega(p)$  contém somente pontos regulares, então  $\omega(p)$  é uma órbita periódica.*

b) *Se  $\omega(p)$  contém pontos regulares e singulares, então  $\omega(p)$  consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando  $t \rightarrow \pm \infty$ .*

c) *Se  $\omega(p)$  não contém pontos regulares, então  $\omega(p)$  é um ponto singular.*

Os lemas seguintes facilitarão a demonstração do teorema.

**LEMA 1.** *Se  $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$ , sendo  $\Sigma$  uma seção transversal a  $X$  e  $\gamma = \{\varphi(t)\}$  uma órbita de  $X$ , então  $p$  pode ser expresso como limite de uma seqüência de pontos,  $\varphi(t_n)$ , de  $\Sigma$ , onde  $t_n \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\gamma = \{\varphi(t)\} = \{\varphi(t, q)\}$  e  $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$ , como mostra a Figura 5.

Consideremos a vizinhança  $V$  e a aplicação  $\tau: V \rightarrow \mathbb{R}$  dadas pelo corolário VI, 4.9.

Como  $p \in \omega(\gamma)$  existe uma seqüência  $(t_n)$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$  e  $\varphi(t_n) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

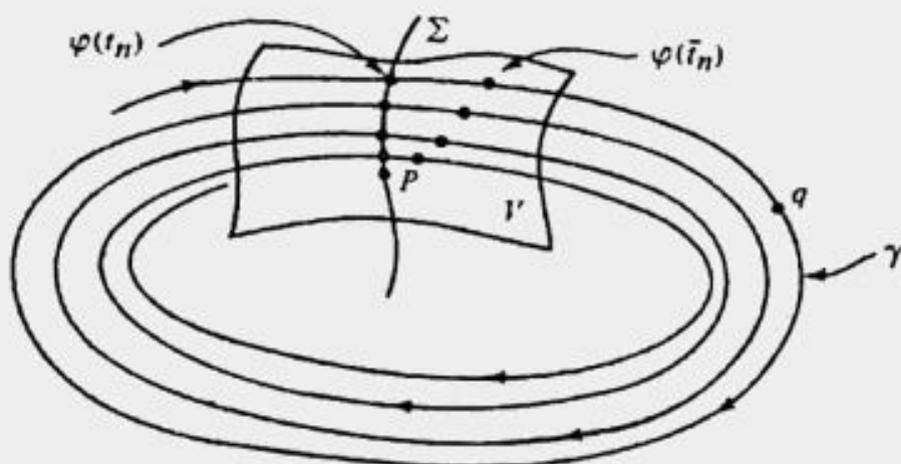


Figura 5

Logo, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\varphi(\tilde{t}_n) \in V$  para todo  $n \geq n_0$ . Se  $t_n = \tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n))$  para  $n \geq n_0$ . Temos

$$\begin{aligned} \varphi(t_n) &= \varphi(\tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n)), q) \\ &= \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)) \end{aligned}$$

e por definição de  $\tau$  resulta que  $\varphi(t_n) \in \Sigma$ .

Como  $\tau$  é contínua segue-se que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)) \\ &= \varphi(0, p) = p. \end{aligned}$$

pois  $\varphi(\tilde{t}_n) \rightarrow p$  e  $\tau(\varphi(\tilde{t}_n)) \rightarrow \tau(p) = 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Isto prova o lema. ■

Observemos que uma seção transversal  $\Sigma$  a um campo  $X$  tem dimensão um, pois estamos considerando o campo  $X$  em  $\mathbb{R}^2$ . Logo, localmente,  $\Sigma$  é a imagem difeomorfa de um intervalo da reta. Consideraremos daqui por diante, que toda seção transversal  $\Sigma$  é a imagem difeomorfa de um intervalo. Assim,  $\Sigma$  tem uma ordenação total " $\leq$ " induzida pela ordenação total do intervalo. Podemos, pois, falar em seqüências monótonas em  $\Sigma$ .

**LEMA 2.** *Seja  $\Sigma$  uma seção transversal a  $X$  contida em  $\Delta$ . Se  $\gamma$  é uma órbita de  $X$  e  $p \in \Sigma \cap \gamma$ , então,  $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p); t \geq 0\}$  intercepta  $\Sigma$  numa seqüência monótona  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ .*

*Demonstração.* Seja  $D = \{t \in \mathbb{R}^+; \varphi(t, p) \in \Sigma\}$ . Decorre do teorema do fluxo tubular que  $D$  é discreto. Podemos portanto, ordenar o conjunto

$$D = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}.$$

Seja  $p_1 = p$ . Definamos, caso exista,  $p_2 = \varphi(t_1, p)$ . Por indução, definiremos  $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$ .

Se  $p_1 = p_2$ , então  $\gamma$  é uma trajetória fechada de período  $\tau = t_1$ , e  $p = p_n$  para todo  $n$ .

Se  $p_1 \neq p_2$ , digamos,  $p_1 < p_2$  e se existir  $p_3$ , vamos mostrar que  $p_3 > p_2$ .

Orientemos a seção  $\Sigma$ , segundo a Figura 6-a e observemos que devido ao fato de  $\Sigma$  ser conexo e à continuidade do campo, as órbitas de  $X$  cruzam a seção sempre no mesmo sentido, digamos, da "esquerda" para a "direita", como mostra a figura 6-b.



Figura 6

Lembramos também que em  $\mathbb{R}^2$  vale o Teorema da Curva de Jordan, ou seja:

"Se  $J$  é uma curva fechada, contínua e simples, ( $J$  é a imagem homeomorfa de um círculo), então  $\mathbb{R}^2 - J$  tem duas componentes conexas:  $S_i$  (limitada) e  $S_e$  (não limitada) as quais tem  $J$  como fronteira comum".

Consideremos então a curva de Jordan formada pela união do segmento  $\overline{p_1 p_2} \subset \Sigma$  com o arco  $\widehat{p_1 p_2}$  da órbita,  $\widehat{p_1 p_2} = \{\varphi(t, p); 0 \leq t \leq t_1\}$ , como mostra a Figura 7.

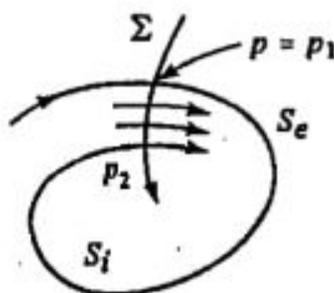


Figura 7

Em particular, a órbita  $\gamma$ , a partir de  $p_2$ , isto é, para valores de  $t > t_1$ , fica contida em  $S_i$ . De fato, ela não pode interceptar o arco  $\widehat{p_1 p_2}$  devido à unicidade das órbitas (Fig. 8-a) e não pode interceptar o segmento  $\overline{p_1 p_2}$  porque contraria o sentido do fluxo. (Fig. 8-b).



Figura 8

Pelo que foi visto acima, caso  $p_3$  exista, devemos ter  $p_1 < p_2 < p_3$ , como mostra a Figura 9. Continuando com este raciocínio, obteremos  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < \dots$

Portanto,  $\{p_n\}$  é uma seqüência monótona.

Se  $p_2 < p_1$ , a demonstração é análoga. ■

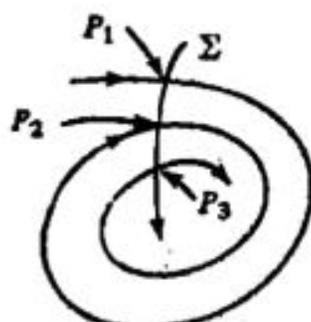


Figura 9

**LEMA 3.** Se  $\Sigma$  é uma seção transversal ao campo  $X$  e  $p \in \Delta$ , então  $\Sigma$  intercepta  $\omega(p)$  no máximo em um ponto.

*Demonstração.* Em virtude do lema anterior, o conjunto de pontos de  $\gamma_p^+$  em  $\Sigma$  tem no máximo um ponto limite pois, o mesmo forma uma seqüência monótona. Daí o resultado segue do lema 1. ■

**LEMA 4.** Sejam  $p \in \Delta$ , com  $\gamma_p^+$  contida num compacto, e  $\gamma$  uma órbita de  $X$  com  $\gamma \subset \omega(p)$ . Se  $\omega(\gamma)$  contém pontos regulares então  $\gamma$  é uma órbita fechada e  $\omega(p) = \gamma$ .

*Demonstração.* Seja  $q \in \omega(\gamma)$  ponto regular e sejam  $V$  vizinhança de  $q$  dada por VI: 4,9 e  $\Sigma_q$  a seção transversal correspondente. Pelo lema 1 existe seqüência  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\gamma(t_n) \in \Sigma_q$ . Como  $\gamma(t_n) \in \omega(p)$  a seqüência  $\{\gamma(t_n)\}$  reduz-se a um ponto, pelo lema 3. Isto prova que  $\gamma$  é periódica.

Provemos agora que  $\gamma = \omega(p)$ . Como  $\omega(p)$  é conexo e  $\gamma$  é fechado e não vazio, basta provar que  $\gamma$  é aberto em  $\omega(p)$ .

Sejam  $\bar{p} \in \gamma$ ,  $V_{\bar{p}}$  uma vizinhança de  $\bar{p}$  dada por VI; 4, 9 e  $\Sigma_{\bar{p}}$  a seção transversal correspondente. Mostraremos que  $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ .

Obviamente  $V_{\bar{p}} \cap \gamma \subset V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ . Por contradição, suponhamos que exista  $\bar{q} \in V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$  tal que  $\bar{q} \notin \gamma$ . Pelo teorema do fluxo tubular e pela invariância de  $\omega(p)$ , existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t, \bar{q}) \in \omega(p) \cap \Sigma_{\bar{p}}$  e  $\varphi(t, \bar{q}) \neq \bar{p}$ . Daí existem dois pontos distintos de  $\omega(p)$  em  $\Sigma_{\bar{p}}$  o que é impossível pelo lema 3. Logo,  $V_{\bar{p}} \cap \gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ .

Seja  $U = \bigcup_{\bar{p} \in \gamma} V_{\bar{p}}$ .  $U$  é aberto em  $M$ ,  $\gamma \subset U$  e  $U \cap \omega(p) = U \cap \gamma = \gamma$ , isto é,  $\gamma$  é a interseção de um aberto de  $\mathbb{R}^2$  com  $\omega(p)$ . Então  $\gamma$  é aberto em  $\omega(p)$ . ■

*Demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson.*

i) Se acontece a hipótese de a) e  $q \in \omega(p)$ , então a órbita  $\gamma_q \subset \omega(p)$ . Sendo  $\omega(p)$  compacto resulta  $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$ . Decorre imediatamente do Lema 4, que  $\omega(p) = \gamma_q =$  órbita fechada. Ver Figura 10.

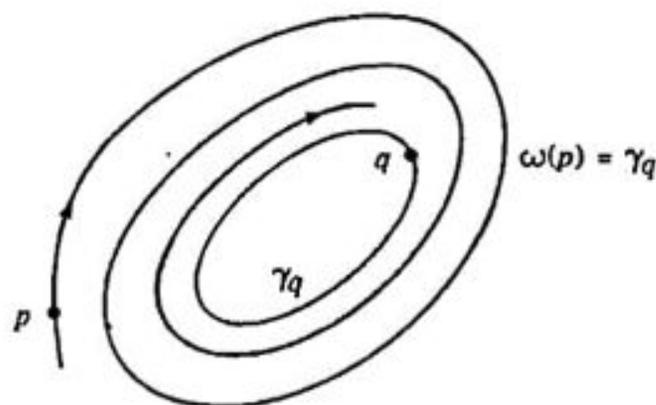


Figura 10

ii) Se acontece a hipótese de b) e  $\gamma$  é uma órbita contida em  $\omega(p)$ ,  $\gamma$  não reduzida a um ponto singular, então, pelo lema 4 e por  $\alpha(\gamma)$  e  $\omega(\gamma)$  serem conexos sai que  $\alpha(\gamma)$  e  $\omega(\gamma)$  são ambos pontos singulares do campo  $X$ . (Lembre-se que  $X$  tem somente um número finito de singularidades em  $\omega(p)$ ). Ver Figuras 11-a, 11-b e 11-c.

iii) O caso c) decorre diretamente do fato de ser  $\omega(p)$  conexo e do fato de  $X$  possuir somente um número finito de singularidades, em  $\omega(p)$ . Ver figura 12. ■

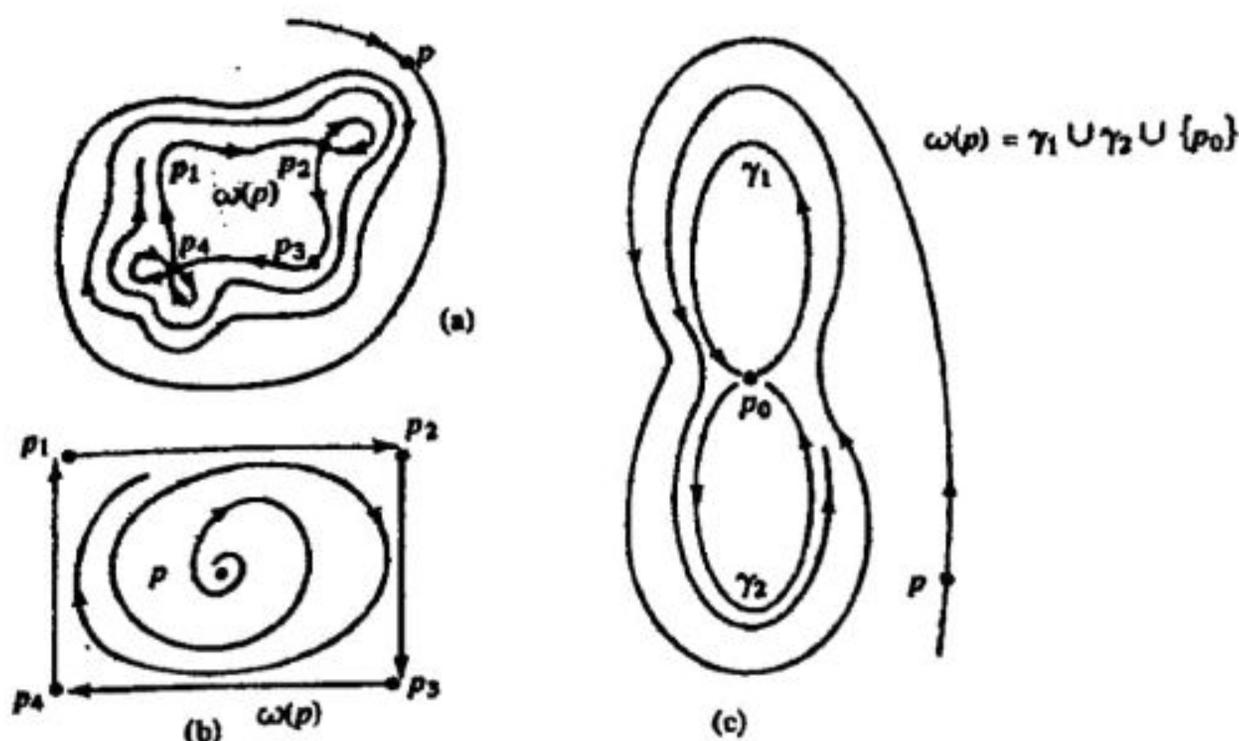


Figura 11

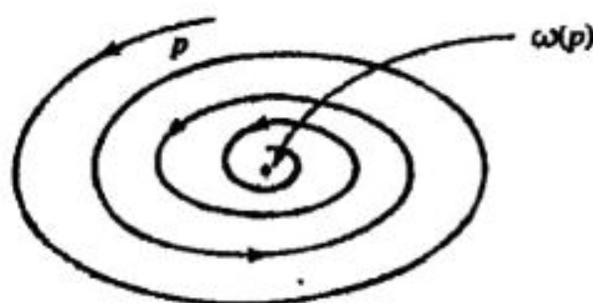


Figura 12

2. EXEMPLO.

1) Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que em  $B_r = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq r\}$  não possui pontos singulares. Se  $X$  aponta para o interior de  $B_r$  em todo ponto da fronteira de  $B_r$ , então  $X$  tem uma órbita periódica em  $B_r$ . Isto pelo Teorema de Poincaré-Bendixon aplicado a qualquer semi-órbita positiva por um ponto da fronteira de  $B_r$ .

3. TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON EM  $S^2$

Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que se  $x \in S^2 = \{(x_1, x_2, x_3); x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$  então  $\varphi(t, x) \in S^2$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Para isto é necessário e suficiente que  $X(x) \in TS_x^2$  para todo  $x \in S^2$ . Aqui  $TS_x^2$  denota o plano tangente a  $S^2$  em  $x$ . O leitor justificará este fato.

Se  $X$  tem um número finito de pontos singulares em  $S^2$  então o conjunto  $\omega$ -limite de uma órbita por  $x \in S^2$  apresenta as mesmas possibilidades a), b), c) que no Teorema de Poincaré-Bendixson em  $\mathbb{R}^2$ .

A demonstração deste fato é similar à dada para  $\mathbb{R}^2$ , usando o fato que uma curva de Jordan  $J$  em  $S^2$  divide  $S^2 - J$  em duas componentes conexas cujas fronteiras coincidem com  $J$ . O leitor dará os detalhes da prova.

### 3. Aplicações do teorema de Poincaré-Bendixson

1. TEOREMA. *Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^1$  num conjunto aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ . Se  $\gamma$  é uma órbita fechada de  $X$  tal que  $\text{Int } \gamma \subset \Delta$ , então existe um ponto singular de  $X$  contido em  $\text{Int } \gamma$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que não existem pontos singulares em  $\text{Int } \gamma$ . Consideremos o conjunto  $\Gamma$  de órbitas fechadas de  $X$  contidas em  $\overline{\text{Int } \gamma}$ , ordenadas segundo a seguinte ordem parcial

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \rightarrow \overline{\text{Int } \gamma_1} \supseteq \overline{\text{Int } \gamma_2}.$$

Mostraremos que todo subconjunto  $S$  totalmente ordenado de  $\Gamma$  (i.e.  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  em  $S$  implica que  $\gamma_1 < \gamma_2$  ou  $\gamma_2 < \gamma_1$ ), admite uma cota superior; isto é um elemento maior ou igual que qualquer elemento de  $S$ . Um conjunto ordenado nestas condições chama-se indutivo.

De fato, seja  $\sigma = \{\cap \overline{\text{Int } \gamma_i}, \gamma_i \in S\}$ . Notemos que  $\sigma \neq \emptyset$ , pois cada  $\overline{\text{Int } \gamma_i}$  é compacto e a família  $\{\overline{\text{Int } \gamma_i}; \gamma_i \in S\}$  tem a Propriedade da Interseção Finita. Isto é, qualquer interseção finita de elementos da família é não vazia. Seja  $q \in \sigma$ . Pelo Teorema de Poincaré-Bendixson  $\omega(q)$  é uma órbita fechada contida em  $\sigma$ , pois este conjunto é invariante por  $X$  e não contém pontos singulares. Esta órbita é uma cota superior de  $S$ .

Pelo Lema de Zorn,  $\Gamma$  tem um elemento maximal,  $\mu$ , pois  $\Gamma$  é indutivo. Portanto não existe nenhuma órbita fechada de  $\Gamma$  contida em  $\text{Int } \mu$ . Mas se  $p \in \text{Int } \mu$ ,  $\alpha(p)$  e  $\omega(p)$  são órbitas fechadas pelo Teorema de Poincaré-Bendixson (pois não existem pontos singulares). Como  $\alpha(p)$  e  $\omega(p)$  não podem ser ambas iguais a  $\mu$  (Por quê?), uma delas estará contida em  $\text{Int } \mu$ . Esta contradição prova que devem existir pontos singulares em  $\text{Int } \gamma$ . ■

*Exemplo.* A equação  $x'' + x^4 + 3 = 0$  não tem soluções periódicas. De fato, o sistema bi-dimensional associado é  $x' = y, y' = -x^4 - 3$ , que não tem pontos singulares.

## 2. As equações de Lienard e van der Pol.

Seja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tal que

- a)  $G(u) = \int_0^u g(s) ds$  é ímpar em  $u$ ; isto é,  $G(-u) = -G(u)$ .
- b)  $G(u) \rightarrow \infty$  se  $u \rightarrow \infty$  e existe  $\beta > 0$  tal que se  $u > \beta$ ,  $G$  é crescente.
- c) Existe  $\alpha > 0$  tal que  $G(u) < 0$  se  $0 < u < \alpha$ .

### 2.1 TEOREMA DE LIENARD. Nas condições acima, a equação de segunda ordem

- (1)  $u'' + g(u)u' + u = 0$  (Equação de Lienard) admite uma solução periódica não constante.

*Demonstração.* A equação (1) é equivalente ao sistema

$$(2) \quad \begin{cases} u' = v - G(u) \\ v' = -u \end{cases}$$

Anotemos as seguintes propriedades do sistema (2).

a) O único ponto singular de (2) é  $0 = (0, 0)$  pois  $G(0) = 0$ .

b) Vê-se de (2) que toda solução  $(u(t), v(t))$  é tal que  $u(t)$  é crescente onde  $v(t) > G(t)$  e decrescente onde  $v(t) < G(t)$ . Também  $v(t)$  é decrescente se  $u(t) > 0$  e crescente se  $u(t) < 0$ . Além disso, o campo  $(v - G(u), -u)$  é horizontal no eixo  $v$  e vertical na curva  $v = G(u)$ .

Segue-se que qualquer solução de (2) saindo do ponto  $A = (0, v_0)$ , com  $v_0$  suficientemente grande tem uma órbita com um arco  $ABCD$  tal como o mostrado na Figura 13.

c) As soluções de (2) são invariantes por reflexões  $(u, v) \rightarrow (-u, -v)$ ; isto é,  $(u(t), v(t))$  é solução de (2) se e somente se  $(-u(t), -v(t))$  também o for. Isto decorre de  $G$  ser ímpar. Portanto se conhecemos um arco de trajetória  $ABCD$  como na Figura 13, então sua reflexão com respeito à origem também é um arco de trajetória. Em particular se  $A = (0, v_0)$ ,  $D = (0, -v_1)$  e  $v_1 < v_0$ , então a semiórbita positiva que passa por  $A$  será limitada, e, de fato, contida na região limitada pela curva de Jordan  $J$  formada pelo arco  $ABECD$ , sua reflexão com respeito à origem e os segmentos do eixo  $v$  que ligam os extremos destes arcos. Ver Figura 14.

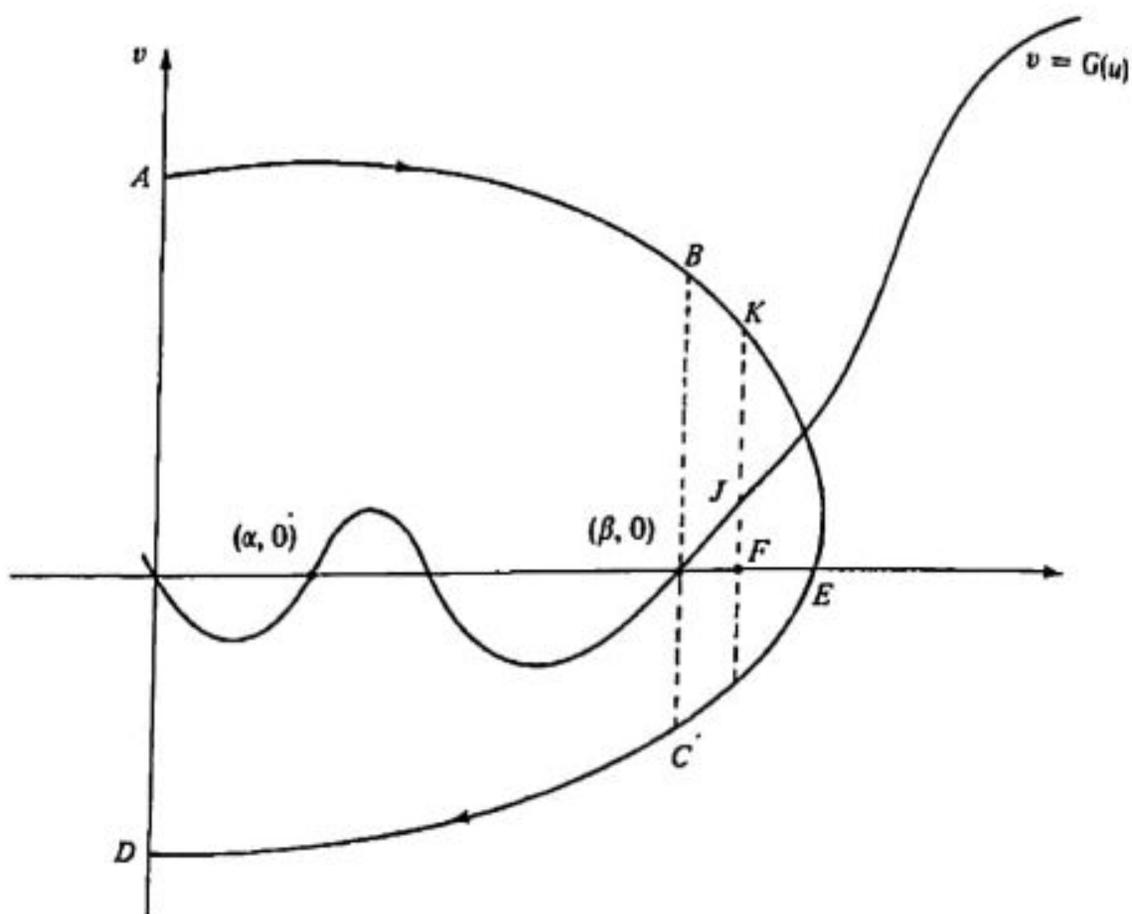


Figura 13

A seguir provaremos que se  $v_0$  é suficientemente grande,  $v_1 < v_0$  e o conjunto  $\omega(A)$  estará contido na região limitada por  $J$ . Logo verificaremos que  $0$  é uma fonte de (2) portanto  $\omega(A) \neq 0$  e pelo Teorema de Poincaré-Bendixson  $\omega(A)$  será uma órbita fechada. Isto terminará a prova.

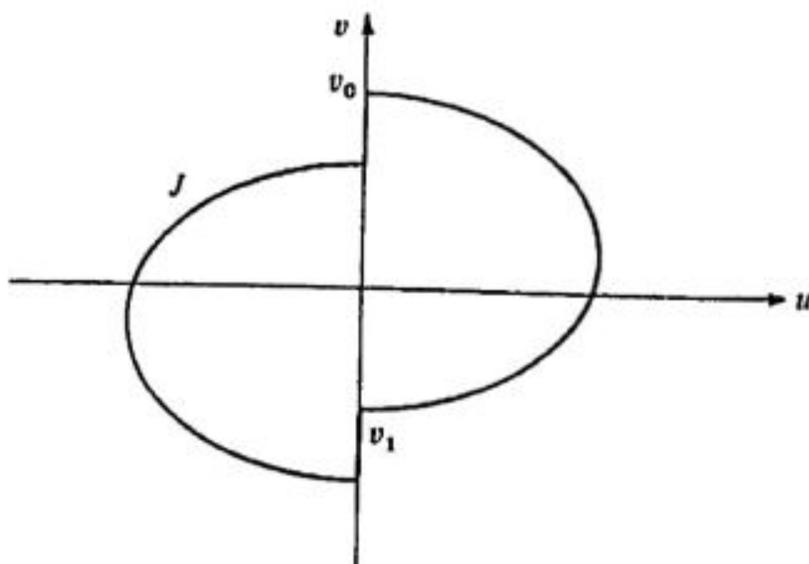


Figura 14

Consideremos a função  $R(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ . Para uma solução  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  de (2) temos

$$(3) \quad \frac{dR(u(t), v(t))}{dt} = -u(t) G(u(t))$$

Com referência à Figura 13, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) &= R(D) - R(A) = \int_{ABECD} dR = [\int_{AB} + \int_{CD}] dR + \\ &\int_{BEC} dR = [\int_{AB} + \int_{CD}] \frac{dR}{dt} \frac{dt}{du} du + \int_{BEC} \frac{dR}{dt} \frac{dt}{dv} dv = \\ &= [\int_{AB} + \int_{CD}] \frac{-uG(u)}{v - G(u)} du + \int_{BEC} G(u) dv. \end{aligned}$$

As primeiras duas integrais tendem monotonicamente a zero quando  $v_0 \rightarrow \infty$ , pois o denominador do integrando tende uniformemente para  $\infty$ . Se  $F$  (veja a Figura 13), é um ponto qualquer no eixo  $u$ , entre  $(\beta, 0)$  e  $E$ , temos que

$$\begin{aligned} \phi(v_0) &= \int_{BEC} G(u) dv \text{ satisfaz a } -\phi(v_0) = -\int_{BEC} G(u) dv = \\ &= \int_{CEB} G(u) dv > \int_{EK} G(u) dv > FJ \times FK \end{aligned}$$

A última desigualdade resulta de que  $G$  é crescente e seus valores à direita de  $F$  são maiores do que  $FJ$ . Como  $FK \rightarrow \infty$  se  $v_0 \rightarrow \infty$  isto prova que  $\phi(v_0) \rightarrow -\infty$  se  $v_0 \rightarrow \infty$ . Portanto,  $v_1^2 < v_0^2$ , se  $v_0$  é grande.

Por (3) se  $0 < |u| < \alpha$ ,  $\frac{dR}{dt}(t) > 0$  portanto 0 é uma fonte de (2); isto é, 0 é o  $\alpha$ -limite de todo ponto numa vizinhança de 0. ■

**2.2 Observação.** Não é difícil provar que se  $\alpha = \beta$  então (2) admite uma única órbita periódica, que, necessariamente, será estável. Ver exercício 15.

**2.3 COROLÁRIO.** A equação de van der Pol  $x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$  com  $\varepsilon > 0$  tem uma única solução periódica não constante que é estável.

**Demonstração.** Imediata pelo Teorema de Lienard e Observação anterior. ■

## EXERCÍCIOS

1. Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ . Prove que se  $\varphi(t)$  é uma trajetória de  $X$  definida no intervalo máximo  $(\omega_-, \omega_+)$  com  $\lim_{t \rightarrow \omega_+} \varphi(t) = p \in \Delta$ , então  $\omega_+ = \infty$  e  $p$  é uma singularidade de  $X$ .
2. Seja  $X = \nabla f = \text{grad } f$ , onde  $f$  é uma função de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , definida num aberto  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ . Prove que  $X$  não possui órbitas periódicas. Se  $X$  tem pontos singulares isolados, então, para todo  $p \in \Delta$ , o conjunto  $\omega$ -limite de  $p$  é vazio ou é um ponto singular.  
(Sugestão: Se  $\varphi(t)$  é uma trajetória de  $X$  note que  $\frac{df(\varphi(t))}{dt} > 0$  isto é,  $f \circ \varphi$  é crescente.)
3. Seja  $\varphi(t, x)$  o fluxo gerado por um campo vetorial  $X$  de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^n$ . Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  não vazio, chama-se *minimal* (de  $X$ ), se ele é *invariante*, (i.e.  $x \in S \rightarrow \varphi(t, x) \in S, \forall t \in \mathbb{R}$ ), *compacto* e não contém subconjuntos próprios com estas propriedades.  
Prove que em  $\mathbb{R}^2$  (i.e.  $n = 2$ ), os únicos subconjuntos minimais de  $X$  são os pontos singulares e as órbitas periódicas de  $X$ .  
Se  $n > 2$ , é válido este resultado? Justificar.
4. Determinar  $\omega(p)$  e  $\alpha(p)$ , para  $p \in \mathbb{R}^2$ , no caso do campo  $Y = (Y_1, Y_2)$  dado por

$$Y_1 = -y_2 + y_1(y_1^2 + y_2^2) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right)$$

$$Y_2 = y_1 + y_2(y_1^2 + y_2^2) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right)$$

(Sugestão: Estude o produto interno  $\langle x, Y(x) \rangle = x_1 Y_1 + x_2 Y_2$ .)

5. Determine o conjunto  $\omega(p)$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ , no caso do sistema:

$$\begin{cases} x' = y[y^2 + (x^2 - 1)^2] + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x[y^2 + (x^2 - 1)^2] + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

(Sugestão: idêntica à do exercício 4.)

6. (Critério de Bendixson). Se  $X = (X_1, X_2)$  é um campo de classe  $C^1$  em  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Delta$  conjunto simplesmente conexo, com

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \neq 0$$

para todos os pontos de  $\Delta$ , então  $X$  não tem órbitas periódicas em  $\Delta$ .

(Sugestão: Suponha que  $\gamma$  tem órbita periódica e aplique o teorema da divergência ao conjunto limitado por  $\gamma$ .)

7. Determine os pontos singulares do seguinte sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -b \operatorname{sen} x - ay, \quad a, b > 0 \end{cases}$$

Prove que ele não tem órbitas periódicas. Faça um esboço do espaço de fase deste sistema. Compare com o caso em que  $b = 0$ . (Sugestão: Use o exercício 6.)

8. Verifique se as seguintes equações diferenciais possuem soluções periódicas.

a)  $x'' + (x^6 - x^2)x' + x = 0$

b)  $x'' - (x')^2 - (1 + x^2) = 0$

(Sugestão: Use o Teorema de Lienard ou o Teorema sobre existência de pontos singulares.)

9. Sejam  $X_1$  e  $X_2$  campos em  $\Delta_1, \Delta_2$ , abertos do  $\mathbb{R}^n$ . Então, para toda conjugação topológica

$$h: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$$

temos que  $h(\omega(p)) = \omega(h(p))$ , para todo  $p$  em  $\Delta_1$ .

10. Dê um exemplo de um campo  $X$  em  $\mathbb{R}^3$  tal que o conjunto  $\omega$ -limite de um seus pontos é compacto, conexo e não contém singularidades mas não é uma órbita periódica.

11. Prove que

$$\begin{cases} x' = 2x - x^5 - y^4x \\ y' = y - y^3 - yx^2 \end{cases}$$

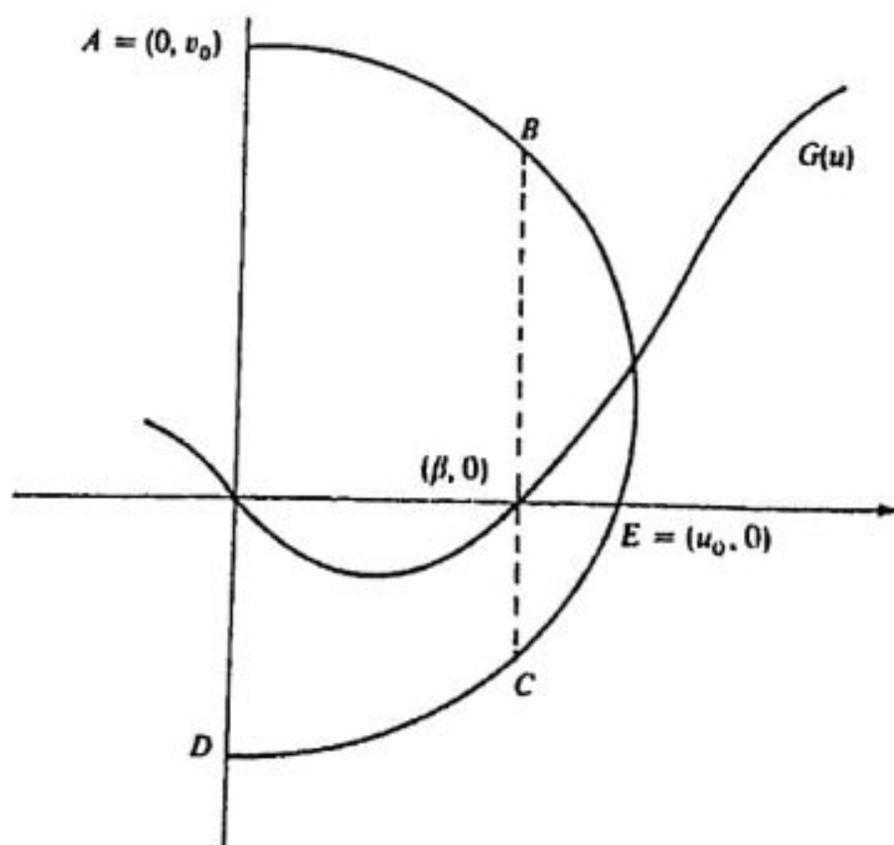
não tem órbitas periódicas.

(Sugestão: Mostre que o campo acima só possui singularidades nos eixos coordenados. Considere o espaço de fase deste campo restrito a estes eixos e procure demonstrar que a existência de uma órbita fechada leva a uma contradição.)

12. Seja  $X$  um campo em  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$ . Se  $p$  é um ponto regular de  $X$  tal que  $p \in \omega(p)$  então  $\omega(p)$  é órbita periódica.
13. Seja  $X$  um campo em  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  e  $\gamma$  uma órbita de  $X$ . Prove que se  $\gamma$  não é singularidade nem órbita periódica então  $\omega(\gamma) \cap \alpha(\gamma) = \emptyset$ , ou então  $\omega(\gamma) \cap \alpha(\gamma)$  é ponto singular.
14. Seja  $X$  um foco linear em  $\mathbb{R}^2$ .
- a) Prove que existe  $\delta > 0$  tal que se  $Y$  é um campo  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  com  $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \|DX(x)\| \leq \delta$  então  $X + Y$  não possui órbitas periódicas.
- b) Prove que existe  $\delta > 0$  tal que se  $Y$  é um campo  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  com  $\sup_{|x| \leq 1} \|DY(x)\| \leq \delta$  e  $\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |Y(x)| < \delta$  então  $X + Y$  não tem órbitas periódicas.  
(Sugestão: Use o exercício 6.)
15. Com as hipóteses do teorema de Lienard mostre que se  $\alpha = \beta$ , então o sistema

$$\begin{aligned} u' &= v - G(u) \\ v' &= -u \end{aligned}$$

admite uma única solução periódica, que é estável.



(Sugestão: Com a notação usada na prova do Teorema de Lienard mostre que se  $u_0 \leq \beta$  então

$$R(D) - R(A) = \int_{ABECD} G(u) dv > 0$$

e que se  $u_0 > \beta$  então

$$R(D) - R(A) = [\int_{AB} + \int_{CD}] \left( \frac{-u G(u)}{v - G(u)} \right) + \int_{BEC} G(u) dv$$

tende monotonicamente para  $-\infty$  quando  $v_0 \rightarrow \infty$ . Para provar esta última afirmação analise separadamente cada uma das três integrais acima.)

16. Seja  $X = (X_1, X_2)$  campo em  $\mathbb{R}^2$ , onde

$$\begin{aligned} X_1 &= x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ X_2 &= -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

Prove que este campo tem uma única órbita periódica  $\gamma$ . Calcule a Transformação de Poincaré  $\pi$ , associada a  $\gamma$  e prove que  $\pi' \neq 1$ .

(Sugestão: Em coordenadas polares o sistema acima se transforma no sistema

$$\begin{aligned} r' &= r(1 - r^2) \\ \theta' &= -1 \end{aligned}$$

Usando que

$$\int \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \frac{1}{2} \log \left( \frac{r^2}{1 - r^2} \right)$$

conclua que  $\pi$ : eixo positivo  $x \rightarrow$  eixo positivo  $x$  é dada por

$$\pi(r) = \frac{re^{\pi}}{\sqrt{1 - r^2 + r^2 e^{2\pi}}}$$

17. Seja  $X$  um campo de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  tal que existe uma vizinhança  $V$  de 0 onde  $X/V$  é o campo linear

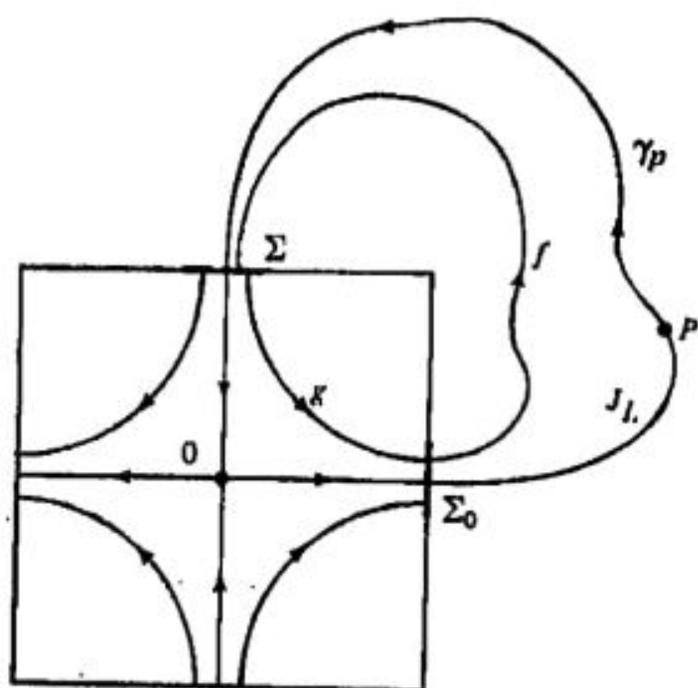
$$(x_1, x_2) \rightarrow (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$$

com  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ .

Suponha que existe  $p \in \mathbb{R}^2$ ,  $p \neq 0$  tal que  $\alpha(p) = \omega(p) = \{0\}$ .

Prove que se  $L = \gamma_p \cup \{0\}$  então existe uma vizinhança  $W_L$  de  $L$  tal que, para todo  $q \in W_L \cap J_L$ , onde  $J_L$  é a componente conexa limitada de  $\mathbb{R}^2 - L$ , tem-se  $\omega(q) = L$ .

(Sugestão: Considere a figura:



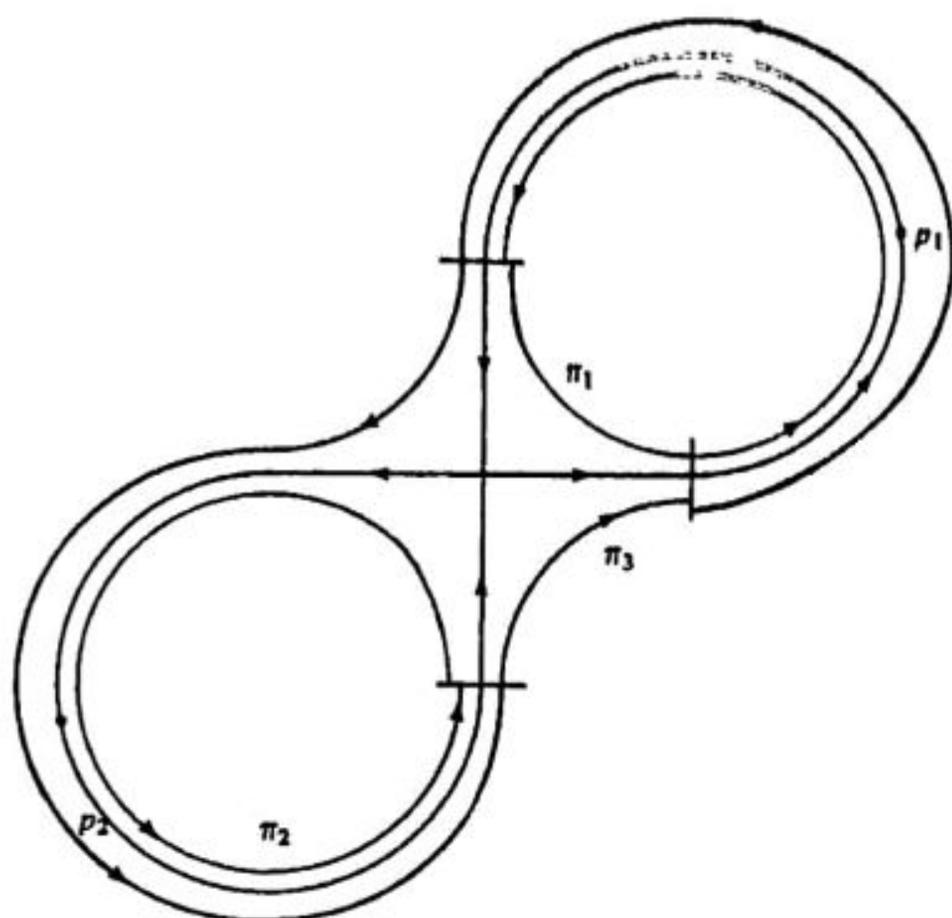
Note que se pode definir uma transformação de Poincaré  $\pi$  para o laço  $L$  usando o segmento da seção  $\Sigma$  que está contido no quadrado superior direito. Mostre que  $\pi = f \circ g$  onde  $g$  leva pontos deste segmento em  $\Sigma_0$  e  $f: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ . Prove que  $g(x) = x^\theta$  com  $\theta > 1$  e conclua que  $\pi'(x) < 1$ .

18. Seja um campo  $X$  com as hipóteses do exercício 17 mas suponha agora que existem dois pontos  $p_1, p_2$  diferentes de  $0$ , com  $\gamma_{p_1} \neq \gamma_{p_2}$  e tal que

$$\omega(p_1) = \alpha(p_1) = \omega(p_2) = \alpha(p_2) = \{0\}$$

Se  $L = \gamma_{p_1} \cup \gamma_{p_2} \cup \{0\}$  prove que existe uma vizinhança  $W_L$  de  $L$  tal que se  $q \in W_L$  então  $\omega(q) \subset L$ .

(Sugestão: Considere a figura



Estude as transformações de Poincaré  $\pi_1, \pi_2$  e  $\pi_3$ .)

19. Analise o caso  $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$  para os exercícios 17 e 18.
20. Seja  $X_\lambda = X(x, \lambda)$  um campo de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$  para cada  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  tal que  $X : (x, \lambda) \rightarrow X(x, \lambda)$  é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Se  $X_0$  tem uma órbita periódica  $\gamma_0$  com  $\int_{\gamma_0} \text{div } X_0 \neq 0$ , prove que existe uma vizinhança  $W$  de  $\gamma_0$  e uma vizinhança  $V$  de 0 em  $\mathbb{R}^n$  tal que para todo  $\lambda \in V$ ,  $X_\lambda$  tem uma única órbita periódica  $\gamma_\lambda \subset W$ ; além disso  $\gamma_\lambda$  tem com respeito a  $X_\lambda$  o mesmo caráter de estabilidade que  $\gamma_0$  com respeito a  $X_0$ .  
(Sugestão: Aplique o teorema das funções implícitas a  $\pi(x, \lambda) - x = 0$  onde  $\pi(\cdot, \lambda)$  é a transformação de Poincaré em relação ao campo  $X_\lambda$  por uma seção transversal a  $\gamma_0$ .)
21. Seja  $\gamma$  uma órbita periódica estável de  $X = (X_1, X_2)$ . Seja

$$X_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Este é o campo vetorial obtido a partir de  $X$  dando-lhe uma rotação de um ângulo  $\theta$ .

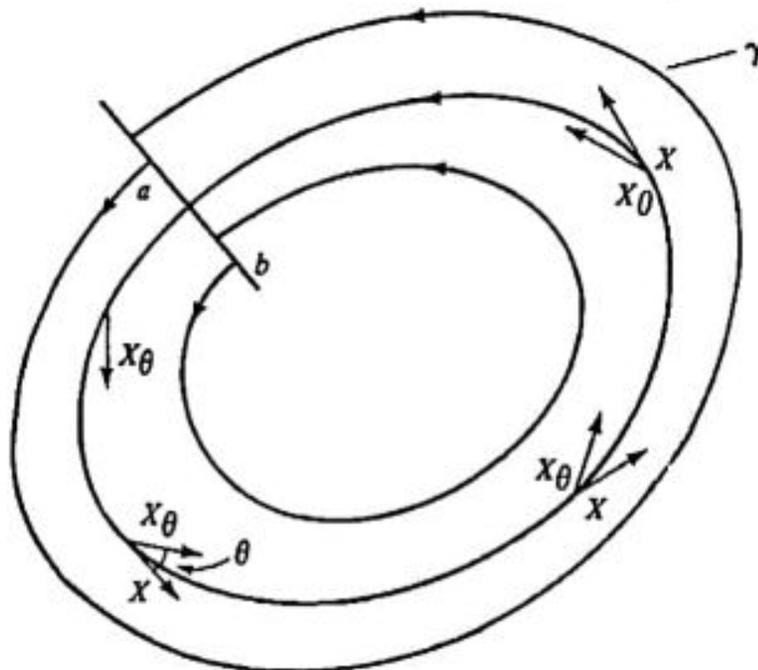
- (i) Prove que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $X_\theta$  com  $|\theta| < \varepsilon$  tem uma órbita periódica  $\gamma_\theta$  tal que  $\gamma_\theta \rightarrow \gamma$  quando  $\theta \rightarrow 0$ .  
 (ii) Prove que as  $\gamma_\theta$  são todas disjuntas, isto é,

$$\gamma_{\theta_1} \cap \gamma_{\theta_2} = \emptyset \text{ se } \theta_1 \neq \theta_2 \text{ e}$$

prove que  $\bigcup_{|\theta| \leq \varepsilon} \gamma_\theta$  é uma região anular do plano.

- (iii) Se  $\gamma$  é estável, prove uma versão análoga.  
 (iv) Se  $\gamma$  é semi-estável prove que para  $\theta$  com sinal apropriado (positivo ou negativo, conforme o caso), existem duas órbitas periódicas  $\gamma_{1\theta}$  e  $\gamma_{2\theta}$  com  $\gamma_{i\theta} \rightarrow \gamma$ , quando  $\theta \rightarrow 0$ , com  $i = 1, 2$ .  
 (v) No caso do laço  $L$  do exercício n.º 17, prove que a rotação, em sentido apropriado, produz uma órbita fechada  $\gamma_\theta$  tal que  $\gamma_\theta \rightarrow L$ , quando  $\theta \rightarrow 0$ .

(Sugestão: (i), (ii) e (iii) podem ser tratados usando a sugestão do exercício anterior. Para (iv) veja na figura que se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são órbitas



de  $X$  então o  $\alpha$ -limite da órbita de  $X_\theta$  passando por  $a$  e o  $\omega$ -limite da órbita de  $X_\theta$  passando por  $b$  são órbitas periódicas distintas. Para (v) procure pensar de maneira semelhante.)

22. Um cientista tem uma amostra de líquido que contém várias espécies misturadas de "platelmintos fototrópicos" i.e. "minhoquinhas" que reagem à luz e nadam em direção à ela. Sabe-se que cada espécie nada a diferente velocidade. Para isolar e extrair aquela espécie de velocidade  $v$ , o cientista coloca o líquido num

recipiente cilíndrico, de cristal, de raio  $R$ . Depois, submete este recipiente à rotação, perto de uma fonte luminosa, com uma velocidade angular  $\alpha > v/R$ . Ver figura 1. Os platelmintos nadam em direção à luz, contra o sentido de rotação do líquido. O cientista tem a esperança de que os platelmintos que ele procura, se acumulem num ponto  $P$  do recipiente, quando  $t \rightarrow +\infty$  (o experimento inicia com  $t = 0$ ), de modo que possam ser retirados do recipiente, mergulhando uma colher nesse ponto. Prove que, com as condições acima especificadas, o ponto  $P$  existe.

*Esboço da Prova:*

As trajetórias dos platelmintos de velocidade  $v$  são soluções do sistema  $X$  de equações diferenciais:

$$(1) \quad X = \begin{cases} x' = -\alpha y + v \frac{R-x}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2}} \\ y' = \alpha x - v \frac{y}{\sqrt{(R-x)^2 + y^2}} \end{cases}$$

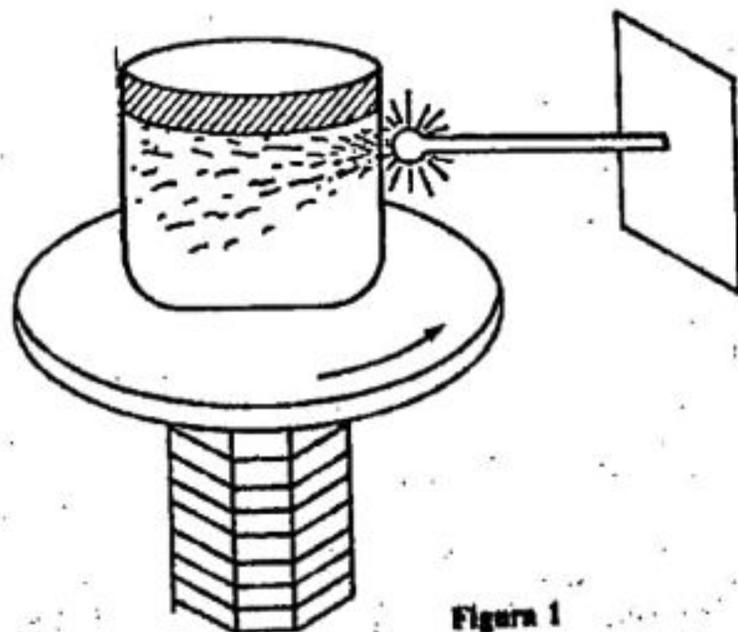


Figura 1

se  $(x(t), y(t))$  é solução de (1) seja  $U(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ . Prove que  $U' = \frac{dU}{dt} < 0$  se e somente se o ponto  $(x, y)$  está fora do círculo

$$C: \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

Prove que uma solução  $\varphi(t)$  com condição inicial em  $G = \{x^2 + y^2 < R\}$  permanece em  $G$ , para todo  $t \geq 0$ , e se  $\varphi(t) \rightarrow (R, 0)$  quando  $t \rightarrow \xi_+$ , onde  $\xi_+$  é o extremo superior do intervalo máximo, então  $\xi_+ < +\infty$ .

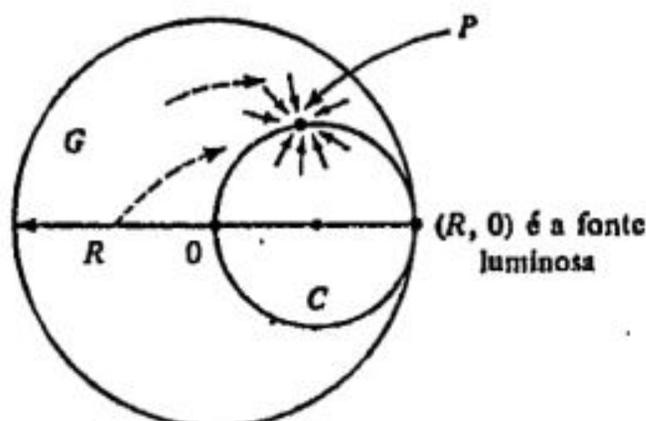


Figura 2

Prove que não existem órbitas periódicas de  $X$ , em  $G$  (Usar o critério de Bendixson: se  $\text{div } X \neq 0$  em uma região  $G$ , simplesmente conexa, não existem órbitas periódicas de  $X$ , em  $G$ ).

a) Introduzir coordenadas polares em torno de  $(R, 0)$ , com  $(R, 0)$  como polo, e conclua que as trajetórias do sistema acima correspondem a Fig. 2.

b) Prove que  $P = P(v, \alpha)$  varia continuamente com  $v$  e  $\alpha$ , e que, quando  $\alpha \rightarrow v/R$ ,  $P$  tende ao ponto  $(R, 0)$ , o foco luminoso.

23. Mostre que toda equação da forma

$$ax'' + b(x^2 - 1)x' + cx = 0 \quad a, b, c > 0$$

pode ser transformada numa equação de van der Pol por uma mudança de variável independente.

24. Mostre que  $y(t)$  é solução da equação de Rayleigh

$$y'' - \varepsilon(1 - (y')^2)y' + y = 0 \quad \varepsilon > 0 \quad (*)$$

se e só se  $x(t) = \sqrt{3} y'(t)$  é solução da equação de van der Pol. (Sugestão: Diferencie (\*).)

25. Mostre que se  $g$  satisfaz as condições do Teorema de Lienard e  $f \in C^1$  é função ímpar com  $f(u) > 0$  se  $u > 0$  então as conclusões daquele teorema são válidas para a equação

$$u'' + g(u)u' + f(u) = 0$$

(Sugestão: Considere o sistema

$$\begin{aligned}u' &= v - G(u) \\v' &= -f(u)\end{aligned}$$

e proceda como no teorema de Lienard.)

26. Mostre que as equações

$$\begin{aligned}x'' + (5x^4 - 9x^2)x' + x^5 &= 0 \\x'' + (x^6 - x^2)x' + x &= 0\end{aligned}$$

possuem uma órbita periódica.

## ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LIAPOUNOV

Considere uma solução  $x(t)$ , periódica ou singular, de um sistema de equações diferenciais. A *grosso modo* dizemos que  $x(t)$  é estável quando toda solução com valores iniciais próximos aos de  $x(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$  e permanece próxima a  $x(t)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Se o sistema de equações descreve a evolução de um processo natural ou um mecanismo, as soluções estáveis adquirem uma importância especial para o estudo do mesmo. Um exemplo simples é o funcionamento do relógio com pêndulo, que possui dois regimes estacionários estáveis: um é o funcionamento normal, quando o pêndulo se movimenta com uma amplitude bem determinada  $\theta$ , durante um tempo, pode-se dizer, infinito; no outro regime estacionário temos ausência de movimento. Os dois regimes são estáveis. De fato, afastemos o pêndulo de sua posição vertical com a força de um impulso. Se esta força for pequena, o pêndulo para depois de um certo número de oscilações. Se a força for suficiente para dar ao pêndulo um movimento de amplitude próxima a  $\theta$ , ele funcionará normalmente após um pequeno intervalo de tempo. Portanto, toda solução se confunde com um dos dois regimes estacionários após certo tempo.

Neste capítulo desenvolvemos os elementos básicos da teoria de estabilidade.

### 1. Estabilidade de Liapounov

Consideremos o sistema

$$(1) \quad x' = f(t, x),$$

onde  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua,  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  aberto.

2. DEFINIÇÃO. Seja  $\varphi(t)$  uma órbita de (1) definida para  $t \geq 0$ . Diz-se que  $\varphi(t)$  é estável se para todo  $\varepsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que se  $\psi(t)$  é solução de (1) e  $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta$  então  $\psi(t)$

está definida para todo  $t \geq 0$  e  $|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \forall t \geq 0$ . Se além disso existir  $\delta_1$  tal que  $|\psi(0) - \varphi(0)| < \delta_1$  implica  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0$ , então  $\varphi$  diz-se *assintoticamente estável*.

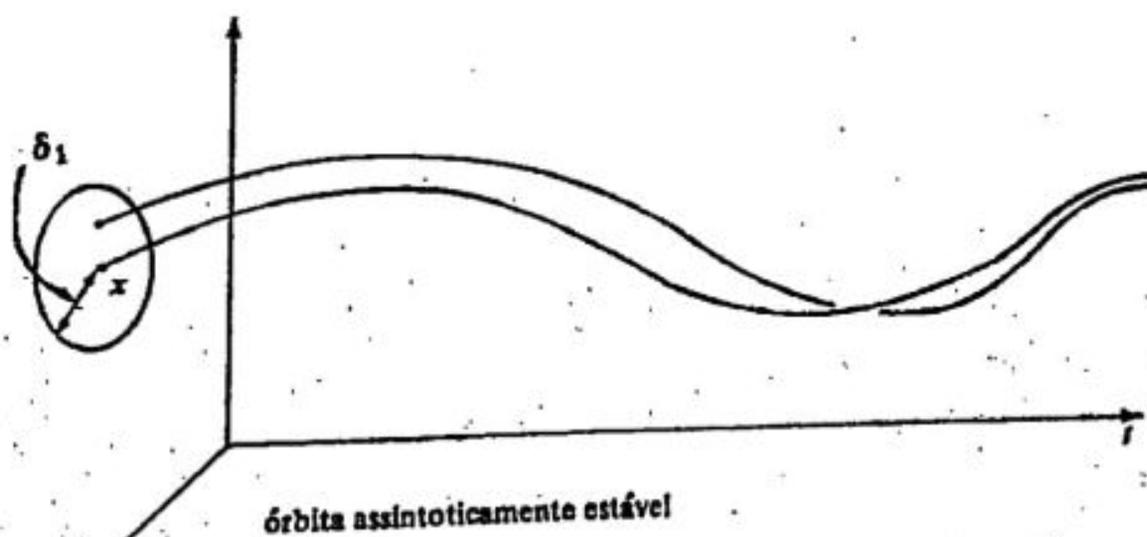
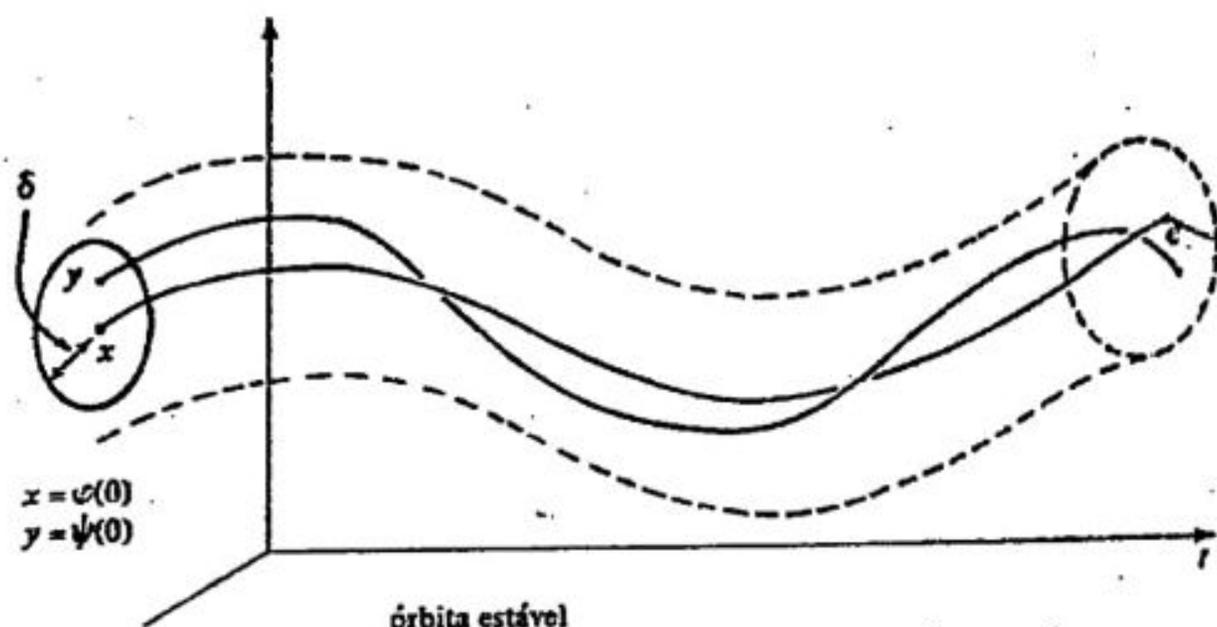


Figura 1

Um ponto singular  $x_0$  de um sistema autônomo

$$(3) \quad x' = f(x), \quad x \in \Delta \subset \mathbb{R}^n,$$

é estável quando para toda vizinhança  $U$  de  $x_0$  existe uma vizinhança  $U_1$  de  $x_0$  tal que toda solução  $\varphi(t)$  de (1) com  $\varphi(0) \in U_1$  está definida e em  $U$  para todo  $t \geq 0$ . Se além disso  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = x_0$ , diminuindo  $U_1$ , se necessário, então  $x_0$  é assintoticamente estável.

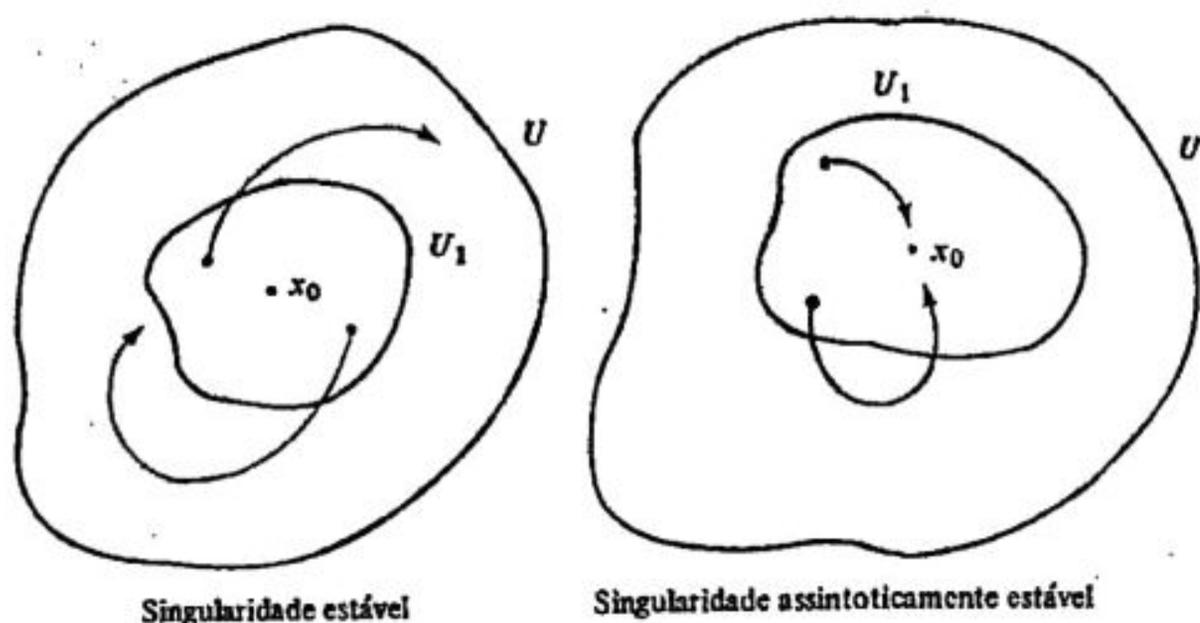


Figura 2

4. EXEMPLO. Seja  $A$  um operador linear em  $\mathbb{R}^n$  cujos autovalores têm todos parte real  $< 0$ . Existem  $K$  e  $\mu > 0$  tais que

$$|e^{At}| \leq K e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Conclui-se que  $0 \in \mathbb{R}^n$  é um ponto singular assintoticamente estável do sistema  $x' = Ax$ . Ver Teorema III; 5, 10.

5. EXEMPLO. Seja  $x' = Ax$  um centro em  $\mathbb{R}^2$ ;  $0 \in \mathbb{R}^2$  é uma singularidade estável mas não assintoticamente estável.

Seja  $\varphi(t)$  uma solução de (1). Verificar a estabilidade de  $\varphi$  equivale a testar a estabilidade da solução nula de  $x' = f(x + \varphi(t), t) - f(\varphi(t), t)$ . O leitor pode constatar facilmente esta afirmação. Suponhamos então que (1) tenha solução nula e  $f$  seja  $C^1$ . O desenvolvimento de Taylor de  $f(t, x)$  em torno de  $x = 0$  nos fornece o sistema

$$(6) \quad x' = A(t)x + g(t, x),$$

onde  $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ,  $g(t, 0) \equiv 0$  e  $g(t, x) = o(|x|)$  quando  $x \rightarrow 0$ , para cada  $t$ . Um sistema deste tipo chama-se quase-linear. O teorema abaixo estabelece uma condição suficiente para que a solução nula seja assintoticamente estável em (6).

7. TEOREMA. Consideremos o sistema quase-linear

$$(8) \quad x' = Ax + g(t, x), \quad (t, x) \in \Omega_b,$$

onde  $\Omega_b = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, |x| < b\}$ ,  $A$  é um operador linear em  $\mathbb{R}^n$  cujos autovalores têm parte real  $< 0$ ,  $g$  é contínua e  $g(t, x) = o(|x|)$

uniformemente em  $t$ . Suponhamos ainda que (8) tenha soluções únicas em todo ponto. Então a solução nula de (8) é assintoticamente estável.

**Demonstração.** Provamos em (III, 5.10) que existem  $\mu > 0$  e  $K \geq 1$  tais que  $|e^{tA}| \leq K e^{-\mu t} \forall t \geq 0$ . Ainda, existe  $\delta_1 > 0$  para o qual  $|x| < \delta_1$  implica  $|g(t, x)| \leq \frac{\mu}{2K} |x|$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Dado  $|x| < \delta = \frac{\delta_1}{K}$ , seja  $\varphi(t)$  a solução de (8) em  $\Omega_{\delta_1}$ , com  $\varphi(0) = x$  e intervalo maximal  $(\omega_-, \omega_+)$ . Sabemos que

$$\varphi(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A} g(s, \varphi(s)) ds$$

para todo  $t \in (\omega_-, \omega_+)$ . Como  $|\varphi(t)| < \delta_1 \forall t$ , isto implica, para  $t \geq 0$ ,

$$|\varphi(t)| \leq K e^{-\mu t} |x| + K \int_0^t e^{-\mu(t-s)} |g(s, \varphi(s))| ds.$$

donde  $e^{\mu t} |\varphi(t)| \leq K |x| + \frac{\mu}{2} \int_0^t e^{\mu s} |\varphi(s)| ds$ .

Aplicando a desigualdade de Gronwall (II, 2.4), obtemos

$$e^{\mu t} |\varphi(t)| \leq K |x| e^{\mu/2 t}, t \geq 0.$$

Portanto,  $|\varphi(t)| \leq \delta_1 e^{-\mu/2 t}$ ,  $t \geq 0$ . Afirmo que  $\omega_+ = \infty$ . Se não, teríamos (I, 5.3)

$$\delta_1 = \lim_{t \rightarrow \omega_+} |\varphi(t)| \leq \delta_1 e^{-\mu/2 \omega_+} < \delta_1,$$

absurdo. Portanto,  $\omega_+ = \infty$ , e é imediato concluir que a solução nula é assintoticamente estável, a partir da desigualdade

$$(*) \quad |\varphi(t)| \leq \delta_1 e^{-\mu/2 t}, t \geq 0, \text{ se } |\varphi(0)| < \delta.$$

**9. COROLÁRIO.** Seja  $x_0$  um ponto singular de

$$(10) \quad x' = f(x), f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^1, \Delta \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto,}$$

e suponhamos que  $Df(x_0)$  tem todos os autovalores com parte real  $< 0$ . Então existem uma vizinhança  $U$  de  $x_0$  e constantes  $K > 0$  e  $\nu > 0$  tais que para todo  $x \in U$ , a solução  $\varphi(t)$  de (10) tal que  $\varphi(0) = x$  está definida e em  $U$  para todo  $t \geq 0$ , e  $|\varphi(t) - x_0| \leq K e^{-\nu t} |x - x_0| \forall t \geq 0$ . Em particular,  $x_0$  é assintoticamente estável.

**Demonstração.** Imediata a partir da relação (\*) da demonstração anterior.

## 2. O critério de Liapounov

Consideremos um sistema autonomo

$$(1) \quad x' = f(x), \quad f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ de classe } C^1, \quad \Delta \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto.}$$

A solução de (1) passando por  $x \in \Delta$  será sempre indicada por  $\varphi_x(t)$ , com  $\varphi_x(0) = x$ .

Seja  $V: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Ponhamos, para cada  $x \in \Delta$ ,  $\dot{V}(x) = DV_x \cdot f(x)$ , ou seja,  $\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\varphi_x(t)) \right|_{t=0}$

2. DEFINIÇÃO. Seja  $x_0$  um ponto singular de (1). Uma função de Liapounov para  $x_0$  é uma função  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável definida em um aberto  $U \ni x_0$ , satisfazendo às seguintes condições:

(a)  $V(x_0) = 0$  e  $V(x) > 0 \quad \forall x \neq x_0$ ;

(b)  $\dot{V} \leq 0$  em  $U$ .

A função de Liapounov  $V$  diz-se *estrita* quando

(c)  $\dot{V} < 0$  em  $U - \{x_0\}$ .

O critério de Liapounov para o sistema (1) é:

3. TEOREMA. Seja  $x_0$  um ponto singular de (1). Se existe uma função de Liapounov para  $x_0$ , então  $x_0$  é estável. Se a função for *estrita*,  $x_0$  é *assintoticamente estável*.

*Demonstração.* Seja  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Liapounov para  $x_0$ . Dado  $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| \leq \delta\} \subset U$ , o número  $m = \min \{V(x); |x - x_0| = \delta\}$  é  $> 0$ . Em virtude da continuidade de  $V$ , existe um aberto  $U_1 \ni x_0$ , contido em  $B$ , tal que  $V(x) < m$  para todo  $x \in U_1$ . Como  $V$  decresce ao longo das órbitas de (1), temos que  $\varphi_x(t)$  permanece no interior de  $B$  para todo  $t \geq 0$  e  $x \in U_1$ . Portanto,  $x_0$  é estável.

Vamos supor agora  $\dot{V} < 0$  em  $U - \{x_0\}$ . Sejam  $x \in U_1$  e  $(t_n) \rightarrow y \in B$ . Temos  $V(\varphi_x(t_n)) \rightarrow V(y)$  e  $V(\varphi_x(t)) > V(y) \quad \forall t \geq 0$ . Suponhamos  $y \neq x_0$ . Então  $V(\varphi_x(1)) < V(y)$ , e para todo  $z$  suficientemente próximo de  $y$ ,  $V(\varphi_z(1)) < V(y)$ . Mas então, se  $n$  for suficientemente grande,  $V(\varphi_x(t_n + 1)) < V(y)$ , absurdo. Portanto,  $y = x_0$ . Como  $B$  é compacto, isto é suficiente para provar que  $x_0$  é *assintoticamente estável*. ■

4. EXEMPLO. Consideremos o sistema

$$x' = -x + 2x(x+y)^2, \quad y' = -y + 2y^3(x+y)^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A origem  $(0, 0)$  é um ponto singular isolado. Observe que não é possível aplicar o Teorema 7 de 1. Consideremos a função  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Temos

$$V(0, 0) = 0 \text{ e } V(x, y) > 0 \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Ainda

$$\dot{V}(x, y) = x x' + y y' = [2(x+y)^2 - 1](x^2 + y^2),$$

donde  $\dot{V}(x, y) < 0$  em uma vizinhança de  $(0, 0)$  (exceto em  $(0, 0)$ ). Em virtude do teorema de Liapounov,  $(0, 0)$  é assintoticamente estável.

5. EXEMPLO.  $(0, 0)$  é uma singularidade estável do sistema

$$(*) \quad x' = y - xy^2, \quad y' = -x^3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

De fato,  $V(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$  é uma função de Liapounov do sistema (\*). Note que  $(0, 0)$  é uma singularidade não estável da parte linear  $x' = y, y' = 0$  deste sistema.

6. DEFINIÇÃO. Seja  $x_0$  uma singularidade assintoticamente estável de (1). O conjunto  $B(x_0) = \{x \in \Delta; \varphi_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_0\}$

chama-se *bacia* ou variedade estável de  $x_0$ . Observe que  $B(x_0)$  é um conjunto aberto em  $\Delta$ . Quando (1) representa um sistema físico, é importante determinar  $B(x_0)$ , pois aí todo estado confunde-se com  $x_0$  depois de certo tempo. Um conjunto  $P \subset \Delta$  diz-se *positivamente invariante* para (1) quando para cada  $x \in P$ ,  $\varphi_x(t)$  está definido e em  $P$  para todo  $t \geq 0$ .

7. TEOREMA. Sejam  $x_0$  uma singularidade de (1) e  $P \subset \Delta$  uma vizinhança de  $x_0$ , fechada e positivamente invariante. Seja  $V$  uma função  $C^1$  tal que  $\dot{V} < 0$  em  $P - \{x_0\}$ . Então  $x_0$  é assintoticamente estável e  $P \subset B(x_0)$ .

*Demonstração.* Sejam  $x \in P$  e  $\omega(x) = \{y \in \Delta; \exists t_n \rightarrow \infty \text{ com } \varphi_x(t_n) \rightarrow y\}$  o conjunto  $\omega$ -limite de  $x$ . Como  $P$  é fechado, temos  $\omega(x) \subset P$ . Ainda, sabemos que  $\omega(x)$  é invariante. Por outro lado,  $V$  é constante em  $\omega(x)$ . De fato, como  $V$  é contínua,  $\lim_n V \varphi_x(t_n) = V(a)$

para toda seqüência  $(t_n)$  de números positivos tal que  $\lim_n \varphi_x(t_n) = a$ . Mas  $V$  decresce ao longo de  $\varphi_x(t)$ , donde

$$\lim_n V \varphi_x(t_n) = \lim_{t \rightarrow \omega} V \varphi_x(t).$$

Assim,  $V(a) = V(b)$  quaisquer que sejam  $a$  e  $b \in \omega(x)$ , e  $V$  é constante em  $\omega(x)$ . Mas então  $V \equiv 0$  em  $\omega(x)$ , donde  $\omega(x) = \{x_0\}$ , o que prova o teorema. ■

8. EXEMPLO. Consideremos a equação de van der Pol multiplicada por  $-1$ :

$$\begin{cases} x' = x^3 - x - y, \\ y' = x, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$(0, 0)$  é a única singularidade, e a parte linear do sistema em  $(0, 0)$  tem autovalores com parte real  $< 0$ . Portanto,  $(0, 0)$  é assintoticamente estável. Consideremos a função  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Temos  $V(x, y) = xx' + yy' = -x^2(1 - x)$ . Portanto,  $0 \neq |x| < 1$  implica  $\dot{V}(x, y) < 0$ . Seja  $0 < r < 1$ , e ponhamos  $P = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq r\}$ . Observe que  $P$  é fechado e  $\dot{V} < 0$  em  $P - \{(0, 0)\}$ . Vamos provar que  $P$  é positivamente invariante. Seja  $z = (x, y) \in P$ . Então  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq \frac{r}{2}$ .

Como  $V$  decresce ao longo das órbitas positivas em  $P$ , vem  $V(\varphi_z(t)) \leq \frac{r}{2}$  para todo  $t \geq 0$ , e daí  $\varphi_z(t) \in P \forall t \geq 0$ . Do teorema acima concluímos que a bola aberta de centro zero e raio 1 está contida na bacia de  $(0, 0)$ .

9. EXEMPLO. Consideremos um pêndulo de peso  $m$  oscilando na ponta de uma linha de comprimento  $\ell$ . Suponhamos que a força de fricção seja proporcional à velocidade do pêndulo, sendo  $k > 0$  a constante de proporcionalidade. O sistema que descreve o movimento do pêndulo é

$$(*) \begin{cases} x' = y, \\ y' = -\frac{1}{\ell} \operatorname{sen} x - \frac{k}{m} y. \end{cases}$$

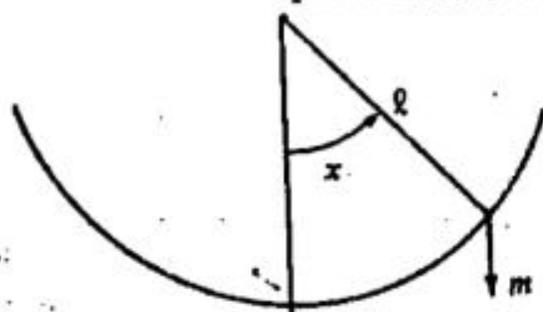


Figura 3

As singularidades de (\*) são  $(n\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $(0, 0)$  é uma singularidade assintoticamente estável, pois a parte linear de (\*) em  $(0, 0)$  tem autovalores com parte real  $< 0$ . Vamos estimar o tamanho da bacia de  $(0, 0)$ .

A energia total do sistema é  $E(x, y) = m\ell \left( \frac{1}{2} \ell y^2 + 1 - \cos x \right)$ .  $E$  é

uma função de Liapounov estrita de (\*). Ainda,  $E(\pm \pi, y) = \frac{1}{2} m\ell^2 y^2 + 2m\ell \geq 2m\ell$ . Portanto,  $E(x, y) < 2m\ell$  implica  $x \neq \pm \pi$ . Dai se conclue que é fechado o conjunto  $P_a = \{(x, y); E(x, y) \leq a \text{ e } |x| < \pi\}$  para todo  $0 < a < 2m\ell$ . Ainda,  $P_a$  é positivamente invariante. De fato, seja  $(x(t), y(t))$  uma órbita de (\*) com  $(x(0), y(0)) \in P_a$ . Como  $\dot{E} \leq 0$ , temos  $E(x(t), y(t)) \leq a$  para todo  $t \geq 0$ . Ainda,  $x(t) \neq \pm \pi \forall t \geq 0$ , donde  $|x(t)| < \pi \forall t \geq 0$ . Portanto,  $(x(t), y(t)) \in P_a$  para todo  $t \geq 0$ , e  $P_a$  é positivamente invariante. Em virtude do teorema acima,  $P_a \subset B(0, 0)$ . É claro portanto que

$$\{(x, y); E(x, y) < 2m\ell \text{ e } |x| < \pi\} \subset B(0, 0).$$

10. DEFINIÇÃO. Um ponto singular  $x_0$  do sistema (1) diz-se *instável* quando não for estável.

Por exemplo, seja  $A$  um operador linear em  $\mathbb{R}^n$  que tenha algum autovalor com parte real  $> 0$ . Então zero é um ponto singular instável do sistema linear  $x' = Ax$ .

O teorema abaixo, devido a Cetaev, fornece um critério para a instabilidade.

11. TEOREMA. Consideremos um sistema autonomo (1) admitindo um ponto singular  $x_0$ . Seja  $D$  um domínio em  $\Delta$  tal que  $x_0 \in \partial D$ . Suponhamos que exista uma função  $C^1 V: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $V > 0$  e  $\dot{V} > 0$  em  $D$  e  $V \equiv 0$  em  $\partial D$ . Então  $x_0$  é instável.

*Prova.* Seja  $B$  uma bola fechada com centro em  $x_0$  e contida em  $\Delta$ .

Seja  $x \in D \cap \text{int } B$  e suponhamos que  $\varphi_x(t)$  esteja definido e em  $B$  para todo  $t \geq 0$ . Em  $D$ ,  $V$  cresce ao longo das soluções de (1), donde  $V\varphi_x(t) \geq V(x) > 0$  para todo  $t \geq 0$  tal que  $\varphi_x(t) \in D$ . Conclui-se que  $\varphi_x(t) \in U$  para todo  $t \geq 0$  (veja Fig. 4). Ainda, em virtude da continuidade de  $V$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d(\varphi_x(t), \partial U) \geq \delta \forall t \geq 0$ . Como  $f$  e  $V$  são  $C^1$ , existe  $m > 0$  para o qual  $V\varphi_x(t) \geq m \forall t \geq 0$ . Dai  $V(\varphi_x(t)) > V(x) + \int_0^t m \, ds = V(x) + mt$ , para todo  $t \geq 0$ . Entretanto,  $V$  é limitada em  $B$ , absurdo. Então  $\varphi_x(t)$  deve sair de  $B$ , e  $x_0$  é instável.

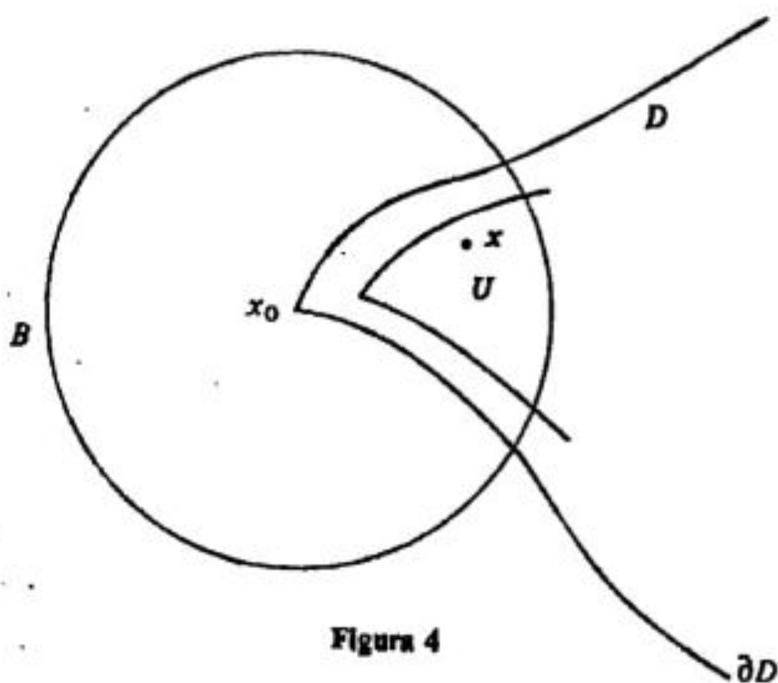


Figura 4

12. EXEMPLO. Consideremos o sistema de  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = x + ax^2 + bxy + cy^2 \\ y' = dx^2 + exy + fy^2 \end{cases}$$

Vamos provar que  $(0, 0)$  é uma singularidade instável. Sejam  $V(x, y) = x^2 - y^2$  e  $D = \{(x, y); 0 < |y| < x\}$ . Temos  $V > 0$  em  $D$  e  $V = 0$  na fronteira de  $D$ . Ainda

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= 2[x^2 + ax^3 + (b-d)x^2y + (c-e)xy^2 - fy^3] \\ &= 2x^2 \left[ 1 + ax + (b-d)y + (c-e)\frac{y}{x}y - f\frac{y^2}{x^2}y \right] \end{aligned}$$

Em  $D$ , o termo  $ax + (b-d)y + (c-e)\frac{y}{x}y - f\frac{y^2}{x^2}y$  tende para zero quando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Então existe uma bola  $B$  com centro na origem tal que  $\dot{V}(x, y) > 0$  para todo  $(x, y) \in D \cap B$ . Em virtude do teorema de Cetaev,  $(0, 0)$  é instável.

### EXERCÍCIOS

1. Prove que a origem é um ponto singular assintoticamente estável do sistema

$$\begin{cases} x' = -x - \frac{x^3}{3} - 2 \operatorname{sen} y, \\ y' = -y - \frac{y^3}{3}, \end{cases}$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

2. Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  tal que  $f(0) = 0$  e  $\langle x, f(x) \rangle < 0 \forall x \neq 0$ . Prove que  $x \rightarrow |x|^2$  é uma função de Liapounov estrita para o sistema  $x' = f(x)$  em  $x = 0$ .
3. Seja  $x_0$  uma singularidade do sistema (\*)  $x' = f(x)$ ,  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Seja  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Liapounov de  $x_0$ . Suponha que não exista trajetória de (\*) inteiramente contida em  $Z = \{x \in U; \dot{V}(x) = 0\}$ , exceto  $x_0$ . Então  $x_0$  é assintoticamente estável.
4. Considere o sistema
- $$(*) \quad x' = A(t)x + g(t, x), \quad 0 \leq t < +\infty, \quad |x| < b, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
- onde  $A$  e  $g$  são contínuas,  $g(t, x) = 0$  ( $|x|$ ) uniformemente em  $t$ . Seja  $\Phi(t)$  a matriz fundamental de  $x' = A(t)x$  tal que  $\Phi(0) = \text{Id}$ , e suponha que existam constantes  $K > 1$  e  $\mu > 0$  tais que  $|\Phi(t)| \leq K e^{-\mu t}$ ,  $t \geq 0$ . Então a solução nula de (\*) é assintoticamente estável.
5. Seja  $x_0$  um ponto singular de  $x' = f(x)$ , onde  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Seja  $V$  uma função  $C^1$  definida em uma vizinhança de  $x_0$  tal que  $\dot{V}(x) > 0$  para todo  $x \neq x_0$  e  $V(x_0) = 0$ . Se em toda vizinhança de  $x_0$  existe  $x$  tal que  $V(x) > 0$ , então  $x_0$  é instável.
6. Seja  $x_0$  um ponto singular de  $x' = f(x)$ , onde  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^1$ , e  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Seja  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Liapounov estrita de  $x_0$ . Então, para cada  $c > 0$  tal que  $V^{-1}[0, c]$  é compacto, tem-se  $V^{-1}[0, c] \subset B(x_0)$  (bacia de atração de  $x_0$ ).
7. Sejam  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $V: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . O campo gradiente associado a  $V$  é definido por

$$x' = -\text{grad } V(x), \quad x \in \Delta,$$

onde  $\text{grad } V(x) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)$ . Observe que o campo  $\text{grad } V$  é de classe  $C^1$  e satisfaz

$$DV_x \cdot y = \langle \text{grad } V(x), y \rangle,$$

para todo  $x \in \Delta$  e  $y \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $\dot{V}$  a derivada de  $V$  ao longo das trajetórias do campo. Prove:

- a)  $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in \Delta$ , e  $\dot{V}(x) = 0$  se e só se  $x$  é uma singularidade de  $\text{grad } V$ ;

- b) Se  $x_0$  é um mínimo isolado de  $V$ , então  $x_0$  é uma singularidade assintoticamente estável de  $-\text{grad } V$ ;
- c)  $-\text{grad } V$  não possui trajetórias periódicas não singulares.
8. Seja  $V: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Dado  $c \in \mathbb{R}$ , o conjunto  $V^{-1}(c)$  é chamado superfície de nível de  $V$ . Se  $x \in V^{-1}(c)$  é ponto regular (isto é,  $DV_x \neq 0$ ), então  $V^{-1}(c)$  é uma superfície  $C^1$  de dimensão  $m - 1$  em torno de  $x$ . Prove que, neste caso,  $\text{grad } V(x)$  é perpendicular a  $V^{-1}(c)$  em  $x$ . Em cada um dos casos abaixo, esboce o gráfico de  $V$  e o espaço de fase de  $-\text{grad } V$ .
- a)  $V(x, y) = x^2 + y^2$ ;
- b)  $V(x, y) = x^2 - y^2$ ;
- c)  $V(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$
9. Sejam  $V: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto, e  $p$  um ponto  $\alpha$ -limite ou  $\omega$ -limite de uma trajetória do campo  $-\text{grad } V$ . Então  $p$  é uma singularidade deste campo.  
(Sugestão: dado  $x \in \Delta$ , prove que  $V$  é constante em  $\alpha(x)$  e em  $\omega(x)$ .)
10. Considere uma partícula movendo-se sob a influência de uma função potencial  $P: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$  aberto. O sistema dinâmico correspondente é

$$(*) \quad \begin{cases} x' = v, \\ v' = -\text{grad } P(x), \end{cases} \quad (x, v) \in \Delta \times \mathbb{R}^3.$$

Prove o teorema de Lagrange, segundo o qual uma singularidade  $(x_0, 0)$  de  $(*)$  é estável se  $x_0$  foi um mínimo local estrito de  $P$ .

11. Seja  $A$  uma matriz real  $n \times n$  cujos autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  satisfazem  $\lambda_i + \lambda_k \neq 0 \forall i, k$ . Seja  $S(\mathbb{R}^n)$  o conjunto das matrizes simétricas reais  $n \times n$  e consideremos o operador  $T: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n)$  dado por  $T(B) = A'B + BA$ , onde  $A'$  é a transposta de  $A$ . Prove que  $T$  é sobrejetiva. Conclua que existe  $B \in S(\mathbb{R}^n)$  tal que a forma quadrática  $V(x) = \langle x, Bx \rangle$  satisfaz  $\dot{V}(x) = -|x|^2$ , onde  $\dot{V}$  é a derivada de  $V$  ao longo das trajetórias de  $x' = Ax$ . Ainda, se  $\text{Re } \lambda_i < 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , então  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ .  
(Sugestão: Observe que  $T$  é linear. Seja  $B \neq 0$  tal que  $T(B) = \mu B$ . Então  $(A' - \mu I)B = -BA$ , donde  $A' - \mu I$  e  $-A$  têm um autovalor comum. Conclua que  $\mu \neq 0$ ).
12. Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  tal que  $f(0) = 0$ . A solução  $0 \in \mathbb{R}^n$  diz-se globalmente estável quando for estável e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$  para toda solução  $\varphi(t)$  de

$$(*) \quad x' = f(x).$$

Seja  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Liapounov estrita para (\*) em 0. Suponha que para cada  $c > 0$  dado exista  $R > 0$  tal que  $|x| > R$ , implica  $V(x) > c$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Então 0 é uma solução globalmente estável de (\*). Observe que não é necessária a condição  $\{x \in \mathbb{R}^n; V(x) = 0\} = \{0\}$ . É suficiente supor que este conjunto não contém trajetória inteira de (\*) distinta de  $x(t) \equiv 0$ .

13. Mostre que toda forma quadrática  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida positiva satisfaz à condição: dado  $c > 0$ , existe  $R > 0$  tal que  $|x| > R$  implica  $V(x) > c$ . Prove novamente que a solução nula é globalmente estável para  $x' = Ax$ , onde  $A$  é um operador linear em  $\mathbb{R}^n$  cujos autovalores têm parte real  $< 0$ .

14. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $f(0) = 0$ . Considere o sistema

$$(*) \quad \ddot{x} + a\dot{x} + f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se  $a > 0$  e  $f(x)x > 0 \forall x \neq 0$ , então a solução nula é uma solução assintoticamente estável para o sistema (\*) (isto é, para o sistema de primeira ordem associado). Se  $f(x)/x > \varepsilon > 0 \forall x \neq 0$ , então a solução nula é globalmente estável.

(Sugestão: Tome  $V(x, y) = y^2 + 2 \int_0^x f(x) dx$ .)

15. Considere a equação

$$(*) \quad \ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sob quais condições em  $f$  e  $g$  a solução nula é globalmente estável?

(Sugestão: Transforme (\*) no sistema

$$\dot{x} = y - \int_0^x \varphi(x) dx, \quad \dot{y} = -f(x),$$

usando a mudança de variáveis  $y = \dot{x} + \int_0^x \varphi(x) dx$ .

Proceda então como no exercício 14.)

16. Seja  $p$  uma singularidade da equação Lipschitziana

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n.$$

- a) Se  $p$  é estável, prove que não existe  $q$  tal que  $p \in \alpha(q)$ . Se  $p \in \omega(q)$  prove que  $\omega(q) = \{p\}$ .

(Sugestão: Se  $p \in \alpha(q)$ , existem  $t_n \rightarrow +\infty$  tais que  $\varphi(-t_n, q) \rightarrow p$ .

Sejam  $z_n = \varphi(-t_n, q)$  e  $W$  uma vizinhança de  $p$  tal que  $q \notin W$ . Então  $\varphi(t_n, z_n) = q \notin W$ . Deduza que  $p$  não é estável.

Se  $p \in \omega(q)$  e  $p_1 \neq p$  com  $p_1 \in \omega(q)$ , existem  $t_n \rightarrow +\infty$  tais que  $\varphi(t_n, q) \rightarrow p_1$  e  $s_n \rightarrow +\infty$  tais que  $s_n < t_n$  e  $\varphi(s_n, q) \rightarrow p$ . Seja

$z_n = \varphi(s_n, q)$ . Então se  $W$  é uma vizinhança de  $p$  tal que  $p_1 \notin W$ , como  $\varphi(t_n - s_n, z_n) \rightarrow p_1$ , resulta  $\varphi(t_n - s_n, z_n) \notin W$  para todo  $n$  suficientemente grande.)

b) Se  $p$  é assintoticamente estável, prove que existe uma vizinhança  $W$  de  $p$  tal que  $\alpha(q) \cap W \neq \emptyset$  implica  $q = p$ .

c) Suponha  $m = 2$ . Se  $p$  é uma singularidade isolada estável e não assintoticamente estável, então toda vizinhança de  $p$  contém uma órbita periódica não trivial.

17. Considere a equação Lipschitziana  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ . Seja  $V: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $\langle \text{grad } V(x), f(x) \rangle \leq 0$  para todo  $x$ .

a) Prove que  $V(\varphi(t_1, p)) \leq V(\varphi(t_2, p))$  para todo  $p$ , se  $t_1 \geq t_2$ ;

b) Prove que  $p \in \omega(q)$  implica  $V(p) \leq V(q)$ ;

c) Prove que todo conjunto limite está contido no conjunto  $\Sigma = \{x; \langle \text{grad } V(x), f(x) \rangle = 0\}$ .

(Sugestão: Se  $p \in \omega(q)$  e  $\langle \text{grad } V(p), f(p) \rangle > 0$ , existe  $t_0 > 0$  tal que  $V(\varphi(t_0, p)) < V(p)$ . Então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|x - p| < \varepsilon$

implica  $V(\varphi(t_0, x)) < V(p)$ . Seja  $T > 0$  tal que  $|\varphi(T, q) - p| < \varepsilon$ . Então  $V(\varphi(t_0 + T, q)) = V(\varphi(t_0, \varphi(T, q))) < V(p)$ , e daí

$$p \in \omega(\varphi(t_0 + T, q)) = \omega(q).$$

## ESTRUTURA LOCAL DOS PONTOS SINGULARES E ÓRBITAS PERIÓDICAS HIPERBÓLICAS

Neste capítulo demonstraremos o Teorema de Hartman (VI; 5.4) que estabelece a estrutura topológica das órbitas de um campo vetorial numa pequena vizinhança de um ponto singular hiperbólico. No Apêndice estabelecemos a diferenciabilidade da variedade estável (resp. instável) de um ponto singular hiperbólico, definida como o conjunto dos pontos cujo  $\omega$ -limite (resp.  $\alpha$ -limite) é o ponto singular.

A demonstração destes fatos formulados para pontos singulares hiperbólicos de campos vetoriais decorrem de resultados similares válidos para pontos fixos hiperbólicos de difeomorfismos. Estes resultados aplicados à transformação de Poincaré de uma órbita fechada  $\gamma$  permitem obter a estrutura topológica das órbitas numa pequena vizinhança de  $\gamma$  e também a diferenciabilidade das suas variedades estáveis e instáveis.

### 1. Preliminares

Seja  $\varphi$  o fluxo de um campo vetorial  $X$  de classe  $C^r$  com uma órbita periódica  $\gamma = \{\varphi(t, p); 0 \leq t \leq \tau_0\}$ . Denotemos por  $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  a transformação de Poincaré (VI, 6) associada a uma seção transversal  $\Sigma$  de  $X$  pelo ponto  $p \in \gamma$ . Seja  $f: U \rightarrow \Sigma$  uma parametrização regular de  $\Sigma$ , isto é,  $f$  é um homeomorfismo do aberto  $U \ni 0$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$  sobre  $\Sigma$  com  $Df(u)$  injetora para todo  $u \in U$ . Seja  $U_0 = \delta^{-1}(\Sigma_0)$ ;  $U_0$  é um aberto contendo  $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ . A transformação  $\pi_f = f^{-1} \circ \pi \circ f: U_0 \rightarrow U$  é uma expressão coordenada de  $\pi$ , que tem  $0 \in \mathbb{R}^{n-1}$  como ponto fixo. Por ser  $\pi_f^n = f^{-1} \circ \pi^n \circ f$ , e por ser  $f$  um homeomorfismo, (de fato difeomorfismo), as propriedades assintóticas de  $\pi^n(q)$  são traduzidas por propriedades similares para  $\pi_f^n(u)$ ,  $q = f(u)$ . Pois  $f^{-1}$  transforma  $q$  em  $f^{-1}(q) = u$  e  $\pi(q)$  em  $\pi_f(u)$ .

Em geral, se  $F: S_0 \rightarrow S$  e  $G: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  são difeomorfismos de abertos  $S_0$  e  $\Sigma_0$  de  $S$  e  $\Sigma$ , com pontos fixos  $p = F(p)$  e  $q = G(q)$ , diz-se que

$F$  em  $p$  é localmente  $C^k$ -conjugado a  $G$  em  $q$  se existe um difeomorfismo  $H: S \rightarrow \Sigma$  de classe  $C^k$ ,  $k \geq 0$  (se  $k = 0$ ,  $H$  é um homeomorfismo) tal que  $H(p) = q$  e

$$H \circ F = G \circ H$$

numa vizinhança  $V$  de  $p$ ,  $H$  chama-se *conjugação local* entre  $F$  e  $G$  em torno de  $p$  e  $q$ . É imediato que a relação de conjugação local é uma relação de equivalência entre pontos fixos de difeomorfismos.

Chamemos de *órbita* de  $F$  em  $V$  por  $\bar{p} \in V$  ao máximo conjunto de iterados positivos e negativos de  $\bar{p}$  por  $F$ , i.e. da forma

$$\theta(\bar{p}) = \{\dots, F^{-l}(\bar{p}), F^{-l+1}(\bar{p}), \dots, \bar{p}, \dots, F^j(\bar{p}) \dots\},$$

que está contido em  $V$ .

Observemos que, como no caso de campos vetoriais, uma conjugação entre  $F$  e  $G$  transforma órbitas de  $F$  em  $V$  em órbitas de  $G$  em  $W = F(V)$ , preservando a orientação das mesmas. Isto é, se  $\bar{q} = F(\bar{p})$ , então

$$\theta(\bar{q}) = H(\theta(\bar{p})) \text{ e } H(F^j(\bar{p})) = G^j(\bar{q}).$$

Claramente  $\pi$  e sua expressão local  $\pi_f$  são  $C^r$ -conjugadas em torno de  $p$  e  $0$ .

1. PROPOSIÇÃO. Sejam  $\Sigma_1, \Sigma_2$  seções transversais de um campo vetorial  $X$  de classe  $C^r$  por pontos  $p_1, p_2$  de uma órbita periódica  $\gamma$ . As transformações de Poincaré  $\pi_1: \Sigma_{1,0} \rightarrow \Sigma_1$  e  $\pi_2: \Sigma_{2,0} \rightarrow \Sigma_2$  são localmente  $C^r$ -conjugadas em torno de  $p_1$  e  $p_2$ .

A demonstração deste fato é ilustrada na Figura 1 o leitor dará uma demonstração com argumentos precisos, usando o Teorema do Fluxo Tubular e o Corolário 9, como foi feito na definição de  $\pi$  (VI, 6). ■

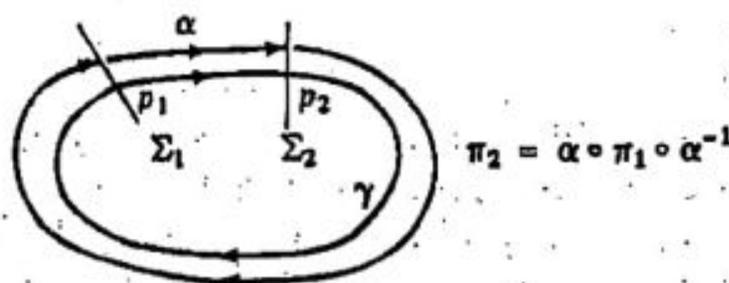


Figura 1

2. PROPOSIÇÃO. Sejam  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  órbitas periódicas de período  $\tau_1$  e  $\tau_2$  de campos vetoriais  $X_1$  e  $X_2$ . Sejam  $\pi_1: \Sigma_{1,0} \rightarrow \Sigma_1$  e  $\pi_2: \Sigma_{2,0} \rightarrow \Sigma_2$  transformações de Poincaré associadas a estas órbitas.

em pontos  $p_1 \in \gamma_1$  e  $p_2 \in \gamma_2$ . Se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são difeomorfismos localmente  $C^r$ -conjugados,  $r \geq 0$ , em torno de  $p_1$  e  $p_2$ , então  $X_1$  e  $X_2$  são campos retoriais localmente  $C^r$ -equivalentes em torno de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Isto é, existem vizinhanças  $V_1$  e  $V_2$  de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e um difeomorfismo  $h: V_1 \rightarrow V_2$  de classe  $C^r$  que transforma órbitas de  $X_1|_{V_1}$  em órbitas de  $X_2|_{V_2}$ .

*Esboço da Demonstração.* Seja  $H: W_1 \rightarrow W_2$  um difeomorfismo de classe  $C^k$  tal que  $H(p_1) = p_2$  e  $\pi_2 \circ H = H \circ \pi_1$ . Seja  $\tau_1(x)$  o tempo que a trajetória positiva de  $X_1$  por  $x \in \Sigma_{1,0}$  leva em percorrer o arco  $A_1(x) = x\pi_1(x)$ . Definimos  $h$  aplicando o ponto  $\varphi_1(s\tau_1(x), x)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , de  $A_1(x)$  de  $X_1$  por  $x \in V_1$ , no ponto  $\varphi_2(s\tau_2(H(x)), H(x))$  do arco  $A_2(H(x))$ . Chamamos  $V_i$  o aberto de  $\mathbb{R}^n$  formado pela união dos arcos  $A_i(x)$ ,  $x \in W_i$ . ■

## 2. Teorema de Hartman para difeomorfismos e órbitas periódicas hiperbólicas

1. DEFINIÇÃO. Seja  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  sobre sua imagem  $f(\Delta)$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto.  $p \in \Delta$  é um ponto fixo de  $f$  quando  $f(p) = p$ . Um ponto fixo  $p$  diz-se hiperbólico quando todos os autovalores de  $Df(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  têm módulo diferente de 1.

Se  $h$  é um difeomorfismo  $C^1$  conjugando  $f$  a outro difeomorfismo  $g$  em torno de  $p$ , então  $h(p)$  é um ponto fixo hiperbólico de  $g$ . De fato,  $g \circ h(p) = hf(p) = h(p)$ , e  $Dg(h(p)) \cdot Dh(p) = Dh(p) \cdot Df(p)$ , donde  $Dg(h(p))$  e  $Df(p)$  são similares, e têm os mesmos valores próprios.

2. EXEMPLO. Sejam  $X: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo  $C^1$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto, e  $\varphi_1: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  o difeomorfismo dado pelo fluxo  $\varphi$  de  $X$  no tempo 1:  $\varphi_1(x) = \varphi(1, x)$  para todo  $x \in \Delta$ . Então  $p \in \Delta$  é uma singularidade hiperbólica de  $X$  se e somente se  $p$  é um ponto fixo hiperbólico de  $\varphi_1$ . De fato, por (VI, 1) (ou (II, 3)) sabemos que  $t \rightarrow D_2 \varphi(t, p)$  é solução de  $y' = DX(p)y$ ,  $y(0) = I$ . Daí,  $D_2 \varphi(t, p) = e^{tA}$  para todo  $t$ , onde  $A = DX(p)$  e então  $D\varphi_1(p) = e^A$ . Conclui-se que os valores próprios de  $D\varphi_1(p)$  são da forma  $e^\lambda$ , onde  $\lambda$  é valor próprio de  $A$ . Isto prova a afirmação feita acima.

Seja  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um automorfismo linear hiperbólico, isto é,  $L$  é um isomorfismo cujos autovalores têm norma diferente de 1. Isto é o mesmo que dizer que 0 é um ponto fixo hiperbólico de  $L$ . O subespaço estável de  $L$  é o maior subespaço  $E^s = E_L^s$  de  $\mathbb{R}^n$ , invariante por  $L$  e

tal que todos os autovalores de  $L/E^s$  têm módulo  $< 1$ . De modo análogo define-se o *subespaço instável*  $E^u = E_L^u$ . Temos  $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$  e a dimensão de  $E^s$ , chamada *índice de estabilidade* de  $L$ , é o número de autovalores de módulo  $< 1$ , contadas as suas multiplicidades.

3. DEFINIÇÃO. Um automorfismo  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  (ou seu ponto fixo  $0 \in \mathbb{R}^m$ ) chama-se atrator quando  $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n(x) = 0$  para todo

$x \in \mathbb{R}^m$ . Como no Teorema (III; 5, 10), temos.

4. PROPOSIÇÃO. Seja  $L$  um automorfismo de  $\mathbb{R}^m$ . As seguintes condições são equivalentes:

- (1)  $L$  é atrator;
- (2) O índice de estabilidade de  $L$  é  $m$ ;
- (3) Existem  $k > 0$  e  $0 < \mu < 1$  tais que, para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $|L^n x| \leq K \mu^n |x|$ ,  $n \geq 0$ .
- (4) Existe uma norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^m$  na qual  $\|L\| < 1$ , isto é,  $\sup \{\|Lx\|; \|x\| = 1\} < 1$ .

*Demonstração.*

(1)  $\Rightarrow$  (2). Seja  $\lambda$  um valor próprio de  $L$ . Suponhamos que  $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$  seja complexo com  $|\lambda| \geq 1$ . Seja  $v = v_1 + iv_2$  um vetor próprio complexo correspondente a  $\lambda$ .  $\{v_1, v_2\}$  gera um plano  $P \subset \mathbb{R}^m$  invariante por  $L$ . Nesta base,

$$L|_P = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Consideremos em  $P$  a norma  $|\alpha v_1 + \beta v_2| = \alpha^2 + \beta^2$ . Temos  $|L^n V_1| = |\lambda|^n |V_1|$  para todo  $n \geq 0$ . Isto contradiz (1). Se  $\lambda$  é real, de modo análogo chegamos a uma contradição.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Seja  $J$  a forma de Jordan complexa de  $L$ . Cada bloco é da forma  $\lambda I + N$ , onde  $\lambda$  é um autovalor e  $N$  é nilpotente. Seja  $\mu$  tal que  $|\lambda| < \mu < 1$  para todo autovalor  $\lambda$ . Então  $(\lambda I + N)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \lambda^{n-i} N^i$ .

Se  $N^{k+1} = 0$ , vem  $|(\lambda I + N)^n| \leq \mu^n \sum_{i=0}^k n! \left(\frac{|\lambda|}{\mu}\right)^{n-i} |N^i|$ .

Lembremos que se  $0 < \xi < 1$ , então a série  $\sum_{i=1}^{\infty} i! \xi^i$  converge (critério da raiz). Conclui-se que existe  $K > 0$  tal que

$$\sum_{i=0}^n n! \left( \frac{|\lambda|}{\mu} \right)^{n-i} |N^i| \leq K$$

para todo  $n \geq 0$  e para todo bloco  $\lambda I + N$  de  $J$ . Isto prova (3).

(3)  $\Rightarrow$  (4). Seja  $\|x\| = \sum_{i=0}^{\infty} |L^i x|$ . Esta série é convergente, pois  $|L^i x| \leq K \mu^i |x|$ . Dado  $\|x\| = 1$ , temos  $\|Lx\| = \sum_{i=0}^{\infty} |L^i Lx| = \sum_{i=1}^{\infty} |L^i x| < \sum_{i=0}^{\infty} |L^i x| = \|x\| = 1$ . Portanto,  $\|L\| < 1$ .

(4)  $\Rightarrow$  (1). Trivial. Isto termina a demonstração. ■

*Observação.* Duas normas quaisquer em  $\mathbb{R}^m$  são equivalentes. Em particular, para as normas acima temos

$$|x| \leq \|x\| \leq \left( \sum_{i=0}^{\infty} K \mu^i \right) |x|, \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

5. DEFINIÇÃO. Um automorfismo  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  (ou seu ponto fixo  $0 \in \mathbb{R}^m$ ) chama-se fonte quando  $\lim_{n \rightarrow \infty} |L^n x| = \infty$  para todo  $x \neq 0$ .

A demonstração da proposição abaixo é imediata a partir da proposição 4 acima.

6. PROPOSIÇÃO. Seja  $L$  um automorfismo de  $\mathbb{R}^m$ . As seguintes condições são equivalentes:

- (1)  $L$  é uma fonte;
- (2) O índice de estabilidade de  $L$  é zero;
- (3) Existem  $K > 0$  e  $\mu > 1$  tais que, para todo  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $|L^n x| \geq K \mu^n |x|$ ,  $n \geq 0$ ;
- (4) Existe uma norma  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^m$  na qual  $\|L^{-1}\| < 1$ .

Temos também a

7. PROPOSIÇÃO. Seja  $L$  um automorfismo hiperbólico de  $\mathbb{R}^m$ . Então  $E^s = \{x \in \mathbb{R}^m; |L^n(x)| \text{ é limitado, } n \geq 0\}$  e  $E^u = \{x \in \mathbb{R}^m; |L^n(x)| \text{ é limitado, } n \leq 0\}$ .

A estrutura topológica de um difeomorfismo  $C^1$  em torno de um ponto fixo hiperbólico é determinada pela derivada do difeomorfismo neste ponto. Este é o teorema de Hartman:

**8. TEOREMA DE HARTMAN PARA DIFEOMORFISMOS.** Sejam  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo  $C^1$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto, e  $p \in \Delta$  um ponto fixo hiperbólico de  $f$ . Existem vizinhanças  $U$  de  $p$  em  $\Delta$  e  $W$  de  $0$  em  $\mathbb{R}^n$ , e existe um homeomorfismo  $h: U \rightarrow W$  tais que

$$h \circ f = Df(p) \circ h.$$

Uma prova de caráter analítico, numa situação mais geral, será dada na seção seguinte. O leitor encontrará uma demonstração geométrica em Palis-Melo [1978].

### 3. Teorema de Hartman em espaços de Banach

Embora nosso interesse principal esteja concentrado em espaços de dimensão finita, não há maior dificuldade, nos argumentos que seguem, em trabalhar com espaços de Banach. Lembramos ao leitor que um espaço vetorial normado  $E$  chama-se espaço de Banach se munido da distância  $d(x, y) = \|x - y\|$ , onde  $\|\cdot\|$  é a norma de  $E$ , é um espaço completo. Uma aplicação linear  $L: E \rightarrow F$  entre espaços vetoriais normados é contínua se e somente se  $\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\| < \infty$ . Um

isomorfismo  $L$  entre espaços vetoriais normados chama-se *topológico* se tanto ele como seu inverso são contínuos.

Se  $E$  tem dimensão finita, todo isomorfismo linear é topológico.

Seja  $f$  uma aplicação de um subconjunto  $A$ , de um espaço vetorial normado  $E$ , num espaço vetorial normado  $F$ . Diz-se que  $f$  é *lipschitziana* em  $A$  se

$$\text{Lip } f = \sup_{\substack{x, y \in A \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} < \infty.$$

Se  $A = E$  e  $f$  é uma aplicação linear contínua,  $\text{Lip } f = \|f\|$ . Vamos demonstrar a seguinte versão do teorema de Hartman em espaços de Banach.

1. **TEOREMA.** *Seja  $E = E^u \times E^s$  o produto de espaços de Banach e sejam  $L_u$  e  $L_s$  isomorfismos topológicos de  $E^u$  sobre  $E^u$  e  $E^s$  sobre  $E^s$ , tais que  $\|L_u^{-1}\| \|L_s\| < 1$ . Existe um número  $\varepsilon = \varepsilon(L) > 0$  tal que se  $f$  e  $g$  são aplicações limitadas de  $E$  em  $E$  com  $\text{Lip } f, \text{Lip } g < \varepsilon$ , então existe um único homeomorfismo  $h$ , de  $E$  sobre  $E$ , tal que  $h - I$  é limitado, onde  $I$  é a identidade de  $E$ , e se*

$$L = (L_u, L_s) : (x, y) \rightarrow (L_u x, L_s y),$$

então

$$(L + f) \circ h = h \circ (L + g).$$

Mais ainda,  $h = h(f, g)$  depende continuamente de  $f$ .

A demonstração depende de vários lemas.

2. **LEMA.** *Seja  $E$  um espaço de Banach e  $\varphi$  uma aplicação de  $E$  em  $E$  tal que  $\text{Lip } \varphi < 1$ . Então  $H = I + \varphi$  é um homeomorfismo de  $E$  sobre  $E$  e  $\text{Lip}(H^{-1}) \leq 1/1 - \text{Lip } \varphi$ .*

*Demonstração.*  $H$  é biunívoca e sobre. De fato,  $x + \varphi(x) = y$  tem uma única solução, que chamamos de  $H^{-1}(y)$ , para todo  $y \in E$ . Verificamos isto observando que  $T_y : E \rightarrow E$ , definida por  $T_y(x) = x + \varphi(x) - y$ , é uma contração, pois  $\text{Lip } T_y = \text{Lip } \varphi < 1$ . Logo  $H^{-1}(y)$  é o único ponto fixo de  $T_y$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} |H^{-1}(y) - H^{-1}(z)| &= |T_y(H^{-1}(y)) - T_z(H^{-1}(z))| = \\ &= |y - z + \varphi(H^{-1}(z)) - \varphi(H^{-1}(y))| \leq \\ &\leq |z - y| + \text{Lip } \varphi |H^{-1}(y) - H^{-1}(z)|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|H^{-1}(y) - H^{-1}(z)| \leq (1/1 - \text{Lip } \varphi) |y - z|.$$

Isto termina a demonstração do Lema 2. ■

*Observações.* a) Se  $\varphi$  é uma transformação linear com  $\|\varphi\| < 1$ , então  $H = I + \varphi$  é um isomorfismo topológico de  $E$ , e  $\|H^{-1}\| \leq 1/1 - \|\varphi\|$ .

b) Se  $E(r)$  é a bola aberta de  $E$  de centro 0 e raio  $r$  e  $\varphi : E(r) \rightarrow E$  é tal que  $\text{Lip } \varphi < 1$  então  $H = I + \varphi$  é um homeomorfismo de  $E(r)$  sobre um aberto de  $E$  que contém a bola  $E(r')$  de centro 0 e raio  $r'$ , onde  $r' = r(1 - \text{Lip } \varphi)$ .

Mas ainda,  $\text{Lip}(H^{-1}) \leq 1/1 - \text{Lip } \varphi$ . A demonstração deste fato é similar à do Lema 2.

3. LEMA. Seja  $G: E \rightarrow E$  um homeomorfismo e  $L = (L_u, L_s)$  como no enunciado do Teorema. Denotemos por  $\mathcal{F} = B(E, E)$  o espaço de Banach das aplicações contínuas e limitadas de  $E$  em  $E$ , com a norma do sup; isto é,  $\|u\| = \sup |u(x)|$ ,  $x \in E$ . Então  $\mathcal{L}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  definida por

$$\mathcal{L}(u) = Lu - u \circ G$$

é um isomorfismo topológico e  $\|\mathcal{L}^{-1}\|$  não depende de  $G$ ; mais precisamente,  $\|\mathcal{L}^{-1}\| < (1 - a)^{-1}$  onde  $a = \max\{\|L_u^{-1}\|, \|L_s\|\}$ .

*Demonstração.* Denotemos por  $\mathcal{F}_u$  (resp  $\mathcal{F}_s$ ) o espaço de aplicações contínuas e limitadas de  $E$  em  $E_u$  (resp.  $E_s$ ), com a norma do sup. É claro que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_s$ .

Sejam  $v = (\xi, \eta) \in \mathcal{F}_u \times \mathcal{F}_s$  e

$$\mathcal{L}(v) = (L_u \xi - \xi \circ G, L_s \eta - \eta \circ G) = (\mathcal{L}_u(\xi), \mathcal{L}_s(\eta))$$

Provaremos que  $\mathcal{L}_u$  é um isomorfismo topológico de  $\mathcal{F}_u$ . Temos

$$\mathcal{L}_u(\xi) = L_u(\xi - L_u^{-1} \xi \circ G),$$

onde  $\varphi(\xi) = -L_u^{-1} \xi \circ G$  é tal que  $\text{Lip } \varphi \leq \|L_u^{-1}\| < 1$ ; logo, pelo Lema 2,  $\xi \rightarrow \xi + \varphi(\xi)$  é inversível. Assim,  $\mathcal{L}_u$  também é inversível e  $\mathcal{L}_u^{-1} = (I + \varphi)^{-1} \circ L_u^{-1}$ ,

donde  $\|\mathcal{L}_u^{-1}\| \leq \|L_u^{-1}\| / (1 - \|L_u^{-1}\|) < 1 / (1 - \|L_u^{-1}\|)$ .

Verificaremos que  $\mathcal{L}_s$  é um isomorfismo topológico de  $\mathcal{F}_s$ . Observemos que  $\psi(\eta) = L_s^{-1} \eta \circ G$  tem inversa  $\psi^{-1}: \eta \rightarrow L_s \eta \circ G^{-1}$ . Logo,

$$\mathcal{L}_s(\eta) = L_s(\eta - L_s^{-1} \eta \circ G) = -L_s \psi[\eta - \psi^{-1}(\eta)].$$

Pelo Lema 2,  $\mathcal{L}_s$  tem inversa, pois

$$\text{Lip } \psi^{-1} \leq \|L_s\| < 1, \text{ e } \|\mathcal{L}_s^{-1}\| \leq \|\psi^{-1} \circ L_s\| / (1 - \|L_s\|).$$

Mas  $\|\psi^{-1} \circ L_s\| \leq \|L_s \eta \circ G^{-1} \circ L_s\| \leq \|L_s\| < 1$ .

Portanto  $\|\mathcal{L}_s^{-1}\| < 1 / (1 - \|L_s\|)$ .

Finalmente,  $\mathcal{L}^{-1} = (\mathcal{L}_u^{-1}, \mathcal{L}_s^{-1})$ , e

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^{-1}\| &= \max\{\|\mathcal{L}_u^{-1}\|, \|\mathcal{L}_s^{-1}\|\} < \\ &< \max\left\{\frac{1}{1 - \|L_u^{-1}\|}, \frac{1}{1 - \|L_s\|}\right\}. \end{aligned}$$

Dai se conclue o Lema 3. ■

4. LEMA. Seja  $L = (L_u, L_v)$  como no Teorema 1. Existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $f, g$  são aplicações limitadas com  $\text{Lip } f, \text{Lip } g < \varepsilon$  então as equações

$$(1) \quad (L + f) \circ h = h \circ (L + g) \quad e$$

$$(2) \quad k \circ (L + f) = (L + g) \circ k$$

têm soluções únicas  $h$  e  $k$ , tais que  $I - h$  e  $I - k$  são limitadas.

*Demonstração.* A equação (1) é equivalente a

$$(L + f) \circ (I + u) = (I + u) \circ (L + g) \quad \text{ou}$$

$$(3) \quad Lu - u \circ (L + g) = -f \circ (I + u) + g.$$

Pelo lema 2,  $G = L + g$  é um homeomorfismo se  $\text{Lip } g < 1/\|L^{-1}\|$  donde, pelo Lema 3,  $\mathcal{L}(u) = Lu - u \circ (L + g)$  é inversível e  $\|\mathcal{L}^{-1}\|$  não depende de  $g$ ; portanto (3) é equivalente a

$$(4) \quad u = T_{f,g}(u) = -\mathcal{L}^{-1}[f \circ (I + u) - g],$$

onde  $T_{f,g}$  é uma contração se  $(\text{Lip } f)\|\mathcal{L}^{-1}\| < 1$ . O único ponto fixo  $u = u_{f,g}$  de  $T_{f,g}$  é, portanto, a solução de (1). Assim, para garantir a existência e a unicidade da solução de (1), deve-se tomar  $\text{Lip } f < \|\mathcal{L}^{-1}\|^{-1}$ , ou seja,  $\varepsilon = (1 - a)^{-1}$ , na terminologia do Lema 3.

A equação (2) é equivalente a

$$(I + v) \circ (L + f) = (L + g) \circ (I + v), \quad \text{ou}$$

$$v \circ (L + f) + f = g \circ (I + v) + Lv, \quad \text{ou ainda}$$

$$(5) \quad Lv - v \circ (L + f) = -g \circ (I + v) + f.$$

A equação (5) é da mesma forma que a equação (3) portanto a equação (2) se reduz à equação (1). ■

5. Observação. A solução  $u = u_{f,g}$  de (4) depende continuamente de  $f$ . De fato,

$$\begin{aligned} |u_{f,g} - u_{\bar{f},g}| &= |T_{f,g}(u_{f,g}) - T_{\bar{f},g}(u_{\bar{f},g})| \leq \\ &\leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \left[ |f \circ (I + u_{f,g}) - \bar{f} \circ (I + u_{f,g})| + |\bar{f} \circ (I + u_{f,g}) - \bar{f} \circ (I + u_{\bar{f},g})| \right] \leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \left[ |f - \bar{f}| + \text{Lip } \bar{f} |u_{f,g} - u_{\bar{f},g}| \right]. \end{aligned}$$

Portanto

$$|u_{f,g} - u_{\bar{f},g}| \leq \frac{\|\mathcal{L}^{-1}\| |f - \bar{f}|}{1 - \theta},$$

onde  $1 > \theta = \|\mathcal{L}^{-1}\| \text{Lip } \bar{f}$ . ■

Mais geralmente, seja  $F$  uma aplicação de  $\Lambda \times M \rightarrow M$  tal que para todo  $\lambda \in \Lambda$ ,  $F_\lambda: M \rightarrow M$  definida por  $F_\lambda(x) = F(\lambda, x)$  é uma contração do espaço métrico completo  $M$ . Então a aplicação de  $\Lambda$  em  $M$   $\lambda \rightarrow u_\lambda$ , onde  $u_\lambda$  é o ponto fixo de  $F_\lambda$ , é contínua, se a constante de contração de  $F_\lambda$  é a mesma para todo  $\lambda$  em  $\Lambda$ , e a aplicação  $\lambda \rightarrow F(\lambda, x)$  é contínua para todo  $x \in M$  fixo. A demonstração deste fato é imediata.

6. COROLÁRIO. *As soluções das equações (1) e (2) do Lema 4 são homeomorfismos.*

*Demonstração.* É suficiente verificar que

$$h \circ k = (I + u) \circ (I + v) = (I + v) \circ (I + u) = k \circ h = I$$

Temos:

$$\begin{aligned} (I + u) \circ (I + v) \circ (L + f) &= (I + u) \circ (L + g) \circ (I + v) = \\ &= (I + f) \circ (I + u) \circ (I + v). \end{aligned}$$

Portanto, pela unicidade da solução de (1), para  $g = f$ , resulta  $h \circ k = I$ . Analogamente, usando a unicidade da solução de (2), resulta que  $k \circ h = I$ . ■

*Demonstração do Teorema de Hartman:* Imediata a partir de 4 e 6. A continuidade de  $h$  em relação a  $f$  resulta da observação 5. ■

7: DEFINIÇÃO. Um isomorfismo topológico  $L: E \rightarrow E$  diz-se estruturalmente estável se existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $g$  com  $\|L - g\| < \varepsilon$  e  $\text{Lip}(L - g) < \varepsilon$  existe um homeomorfismo  $h$  de  $E$  em  $E$  tal que

$$h \circ L = g \circ h.$$

O teorema de Hartman implica que todo  $L = (L_u, L_v)$  com  $\|L_u^{-1}\|, \|L_v\| < 1$  é estruturalmente estável.

8. Observação. Em vista das Proposições 4 e 6, todo isomorfismo hiperbólico  $L$  de  $\mathbb{R}^n$  é estruturalmente estável.

## 4. Teorema de Hartman para campos vetoriais e fluxos

1. TEOREMA. Seja  $\varphi$  um fluxo de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^n$ , da forma

$$\varphi(t, x) = e^{At}x + \gamma(t, x),$$

onde  $A$  tem todos seus valores próprios com parte real diferente de zero. Seja  $\varepsilon = \varepsilon(A)$  o número fornecido pelo Teorema 1.3 para  $L_1 = e^A$ . Se  $\gamma_1 = \gamma(1, \cdot)$  é tal que  $\text{Lip } \gamma_1 = \sup |D\gamma_1| < \varepsilon$  e se  $\gamma$  é limitada em  $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$ , então existe um único homeomorfismo  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  da forma  $H = I + U$ , onde  $U$  é limitada tal que, para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(*) \quad e^{At}H(x) = H(\varphi(t, x));$$

isto é,  $H$  é conjugação topológica entre  $\varphi$  e o fluxo linear  $L(t, x) = e^{At}x$ .

*Demonstração.* Seja  $h = I + u$  o único homeomorfismo, fornecido pelo Teorema 1.3, tal que  $u$  é limitada e

$$(1) \quad L_1 \circ h = h \circ (L_1 + \gamma_1).$$

Definimos  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $H(x) = \int_0^1 e^{-As} h(\varphi(s, x)) ds$ . Provaremos que  $H$  satisfaz (\*).

Observe que

$$(*) \quad e^{At}H(x) = e^{At} \int_0^1 e^{-As} h(\varphi(s, x)) ds = \int_0^1 e^{A(t-s)} h(\varphi(-t+s, \varphi(t, x))) ds.$$

Verifiquemos que

$$(2) \quad \int_0^1 e^{A(t-s)} h(\varphi(s-t, x)) ds = H(x).$$

De fato, mediante a mudança de variáveis  $u = s - t$ , temos

$$(3) \quad \int_0^1 e^{A(t-s)} h(\varphi(s-t, x)) ds = \int_{-t}^{1-t} e^{-Au} h(\varphi(u, x)) du = \int_{-t}^0 e^{-Au} h(\varphi(u, x)) du + \int_0^{1-t} e^{-Au} h(\varphi(u, x)) du.$$

O primeiro termo desta soma satisfaz a

$$\int_{-t}^0 e^{-Au} h(\varphi(u, x)) du = \int_{-t}^0 e^{-A(u+1)} e^A h(\varphi(u, x)) du = \int_{-t}^0 e^{-A(u+1)} h(\varphi(u+1, x)) du.$$

Observe que na passagem do segundo para o terceiro termo acima usamos (1). Mediante a mudança de variáveis  $v = u + 1$ , vemos que o terceiro termo é igual a

$$\int_{1-t}^1 e^{-Av} h(\varphi(v, x)) dv$$

Logo, a partir de (3), temos:

$$\int_0^1 e^{A(t-s)} h(\varphi(-t+s, x)) ds = \int_0^1 e^{-As} h(\varphi(u, x)) du$$

e portanto (2) é verificada e, conseqüentemente, (\*) implica que  $H$  satisfaz (\*).

Provaremos agora que  $U = H - I$  é limitada.

De fato,

$$\begin{aligned} (H - I)(x) &= \int_0^1 e^{-As} h(\varphi(s, x)) ds - x = \\ &= \int_0^1 [e^{-As} (I + u) (e^{As} x + \gamma(s, x)) - x] ds = \\ &= \int_0^1 e^{-As} [\gamma(s, x) + u(\varphi(s, x))] ds. \end{aligned}$$

Logo  $|U(x)| \leq e^{|A|} (\sup_{s \in [0,1]} |\gamma(s, x)| + |u|)$ . Portanto,  $U$  é limitada em

$\mathbb{R}^n$ . Isto implica que  $H = h$  por unicidade da solução da equação (\*) para  $t = 1$ . Isto prova que  $H$  é um homeomorfismo. ■

A seguinte proposição permite verificar as hipóteses do Teorema 1 quando o fluxo  $\varphi(t, x)$  é gerado por um campo vetorial  $X$  da forma  $X = A + g$ , com  $A$  hiperbólico.

**2. PROPOSIÇÃO.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação de classe  $C^1$ , limitada, digamos  $|g| \leq \theta$ , com derivada  $g' = Dg$  também limitada, digamos  $|g'| \leq \theta'$ , em  $\mathbb{R}^n$ .*

Então o fluxo de  $X(x) = Ax + g(x)$  está definido em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e é da forma

$$\varphi(t, x) = e^{At} x + \gamma(t, x),$$

onde

$$|\gamma(t, x)| \leq M(t)\theta \quad \text{e} \quad |D_2\gamma(t, x)| \leq L(t)\theta',$$

sendo que  $M(t)$  e  $L(t)$  são funções contínuas e crescentes de  $|t|$ ;  $L(t)$  é independente de  $g$ , e  $M(t)$  depende apenas de  $\theta'$ .

*Demonstração.* Como  $\text{Lip } X \leq \|A\| + \theta'$ , pela Proposição I;4,4, as curvas integrais de  $X$  estão definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Seja  $H(t, x) = D_2\varphi(t, x) = e^{At} + D_2\gamma(t, x)$ . Pela Proposição II;3,1, temos que

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x) = [A + g'(\varphi(t, x))] H(t, x).$$

Chamando de  $K(t, x)$  a  $e^{-At}H(t, x)$ , temos que

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \frac{\partial K}{\partial t}(t, x) &= -Ae^{-At}H(t, x) + e^{-At} \frac{\partial H}{\partial t}(t, x) = \\
 &= [-Ae^{-At} + e^{-At}A + e^{-At}g'(\varphi(t, x))]H(t, x) = \\
 &= e^{-At}g'(\varphi(t, x))e^{At}K(t, x).
 \end{aligned}$$

Pela Proposição II; 2,4, temos que  $|K(t, x)| \leq e^{|\lambda(t)|}$ , onde  $\lambda(t) = e^{2|t||A|}\theta$ . Pois  $\lambda(t) \geq \sup \{ \|e^{-As}g'(x)e^{As}\|; |s| \leq |t| \text{ e } x \in \mathbb{R}^n \}$ , é uma constante de Lipschitz para a equação

$$X' = e^{-At}g'(\varphi(t, x))e^{At}X.$$

De  $D_2\gamma(t, x) = H(t, x) - e^{At} = e^{At}[e^{-At}H - I]$ , por (\*), temos que

$$\begin{aligned}
 |D_2\gamma(t, x)| &\leq |e^{At}| \left| \int_0^t \frac{\partial H}{\partial \tau}(\tau, x) d\tau \right| \leq \\
 &\leq |e^{At}| |t| |g'| |e^{-At}|^2 |K(t, x)| \leq \\
 &\leq |e^{At}|^3 |t| \theta e^{\lambda(t)}
 \end{aligned}$$

Portanto, para  $L(t) = |t| e^{3|A||t| + |\lambda(t)|}$ , temos que

$$|D_2\gamma(t, x)| \leq L(t)\theta.$$

Aplicando o Exerc. 36, Capítulo I, a  $f(t, x) = X(x)$ ,  $\varphi_1(t) = \varphi(t, x)$  e  $\varphi_2(t) = e^{At}x$ , com  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = \theta$ , e por ser  $|A| + \theta$  uma constante de Lipschitz de  $f$ , temos que

$$|\gamma(t, x)| = |\varphi(t, x) - e^{At}x| \leq e^{(|A| + \theta)|t|}\theta.$$

Tomando  $M(t) = e^{(|A| + \theta)|t|}$ , termina-se a demonstração. ■

## 5. Teorema de Hartman: Caso local para difeomorfismos

1. TEOREMA. Seja  $L$  um isomorfismo hiperbólico de  $\mathbb{R}^n$ . Para toda aplicação  $f$  de classe  $C^1$  definida numa vizinhança  $V$  de  $0 \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $f(0) = 0$ ,  $Df(0) = 0$ , existe uma vizinhança de  $0$   $U \subset V$  e um homeomorfismo  $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $h(U) \subset V$  e

$$(*) \quad (L + f) \circ h = h \circ L$$

em  $L^{-1}(U) \cap U$ .

**Demonstração.** Observemos inicialmente que existe uma aplicação  $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com as seguintes propriedades:

a)  $\tilde{f}$  é limitada, de classe  $C^1$ , e coincide com  $f$  numa vizinhança  $U'$  de  $0$ .

b)  $\sup |D\tilde{f}| \leq \bar{a} \sup |Df|/W$  onde  $\bar{a}$  não depende de  $f$ , e  $U' \subset W \subset V$ .

Esta extensão é construída da seguinte maneira: Seja  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^\infty$  tal que  $\alpha \geq 0$ ;  $\alpha(t) = 1$ , se  $|t| \leq 1/2$ ;  $\alpha(t) = 0$ , se  $t \geq 1$ . Definimos  $\tilde{f}$  por

$$\tilde{f}(x) = \alpha\left(\frac{|x|}{r}\right) f(x), \text{ se } |x| \leq r$$

$$\tilde{f}(x) = 0, \text{ se } |x| > r.$$

Verifica-se imediatamente que  $\bar{a} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\alpha'(t)| + 1$ , e que podemos tomar  $U'(0) = B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ , a bola aberta de raio  $r/2$  e  $W = B(0, r)$ , com  $\overline{B(0, r)} \subset V$ .

Para a prova do Teorema, tomamos  $r$  pequeno de modo que  $\text{Lip } \tilde{f} < \varepsilon_L$ , onde  $\varepsilon_L$  é fornecido pelo Teorema 1 da seção 3. Por este teorema encontramos  $\tilde{h}$  homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$  tal que

$$(L + \tilde{f}) \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ L.$$

Escolhendo  $U \subset U'$  pequena, tal que  $\tilde{h}(U(0)) \subset U'(0)$ , temos que (\*) é satisfeita por  $h = \tilde{h}/U$ . ■

## 6. Teorema de Hartman: Caso local para campos vetoriais

**1. TEOREMA.** *Seja  $A: x \rightarrow Ax$  um campo vetorial linear hiperbólico em  $\mathbb{R}^n$ . Para todo campo  $g$  de classe  $C^1$  numa vizinhança  $V$  de  $0 \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $g(0) = 0$  e  $Dg(0) = 0$ , existe uma vizinhança  $U \subset V$  e um homeomorfismo  $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $h(U) \subset V$  e  $h$  é uma conjugação topológica entre  $A|_U$  e  $A + g/h(U)$ .*

*Isto é, se  $\varphi(t, y)$ ,  $t \in I(y)$ , denota a curva integral máxima de  $X = A + g/h(U)$  por  $y \in h(U)$ , então para todo  $t \in I(h(x))$*

$$(*) \quad h(e^{At}x) = \varphi(t, h(x)).$$

*Demonstração.* Seja  $\varepsilon = \varepsilon(A)$  o número que aparece no enunciado do Teorema 1 da seção 4. Seja  $\tilde{g}$  uma extensão de  $g$  com as seguintes propriedades:

- a)  $\tilde{g}$  é limitada e de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^n$ , e coincide com  $g$  numa vizinhança  $U'$  de 0.  
 b)  $\sup |D\tilde{g}| \leq a \sup |Dg|/W$  onde  $a$  não depende de  $g$  e  $U' \subset W \subset V$ .

Esta extensão é obtida como na demonstração do Teorema 1, seção 5. Escolhemos  $W$  pequena, de modo que  $\sup |D\tilde{g}| < \varepsilon(A)$ . Seja  $\tilde{h}$  a conjugação topológica entre  $A$  e  $A + \tilde{g}$  fornecida pelo Teorema 3. Isto é  $\tilde{h}(e^{At}x) = \tilde{\varphi}(t, \tilde{h}(x))$ , onde  $\tilde{\varphi}$  é o fluxo de  $A + \tilde{g}$ . Escolhemos  $U \subset U'$  pequena de modo que  $\tilde{h}(U) \subset U'$ . Portanto, (\*) é satisfeita por  $h = \tilde{h}/U$ . ■

## 7. Variedades invariantes

Seja  $S$  um subconjunto *invariante* por  $X$ ; isto é,  $x \in S$  implica que  $\varphi(t, x) \in S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , onde  $\varphi$  denota o fluxo de  $X$ .

Denota-se com  $W_S^+ = W_S^+(X)$  o conjunto de todos os pontos  $x \in \Delta$ , domínio de  $X$ , tais que  $\varphi(t, x) \rightarrow S$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto é,  $d(\varphi(t, x), S) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ . O conjunto  $W_S^+$  chama-se *conjunto estável de S*.

Analogamente, define-se  $W_S^- = W_S^-(X)$ , *conjunto instável de S*, tomando  $t \rightarrow -\infty$ .

Se  $h: \Delta \rightarrow \Delta'$  é uma conjugação topológica entre  $X$  e  $X'$  então, para todo conjunto  $S$  invariante por  $X$ ,  $h(S) = S'$  é invariante por  $X'$ . Mais ainda,

$$h(W_S^+) = W_{S'}^+, \quad h(W_S^-) = W_{S'}^-.$$

Para os sistemas lineares hiperbólicos estudados no Capítulo III, o conjunto estável  $W_0^+$  do ponto singular  $0 \in \mathbb{R}^n$  coincide com o subespaço vetorial estável  $E^s$ . Analogamente para  $W_0^-$  e  $E^u$ .

Portanto, pelo Teorema de Hartman, os conjuntos  $W_p^+$  e  $W_p^-$ , estável e instável, de  $X/V$  são imagens homeomorfas de abertos dos espaços euclidianos  $E^s$  e  $E^u$ . Logo,  $W_p^+$  e  $W_p^-$ , para um ponto singular hiperbólico, são variedades topológicas de dimensões iguais ao índice  $i(p)$  de  $DX(p)$  e a  $n - i(p)$ , respectivamente. O teorema seguinte, estabelece que estas variedades topológicas são de fato subvariedades diferenciáveis.

1. **TEOREMA.** (*Diferenciabilidade das variedades estável e instável*).  
 Seja  $p$  um ponto singular hiperbólico de um campo  
 vetorial de classe  $C^r$  num aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que

- 1)  $W_p^s(X|V) = \{x \in V; \forall t \geq 0, \varphi(t, x) \in V\}$
- 2)  $W_p^u(X|V) = \{x \in V; \forall t \leq 0, \varphi(t, x) \in V\}$
- 3)  $W_p^s(X|V)$  é uma subvariedade de classe  $C^r$  e dimensão igual ao índice  $i(p)$  de estabilidade de  $p$ . O Espaço tangente de  $W_p^s(X|V)$  em  $p$  coincide com  $E^s$ , espaço estável de  $A = DX(p)$ .
- 4)  $W_p^u(X|V)$  é uma subvariedade de classe  $C^r$  e dimensão  $n - i(p)$ . O espaço tangente de  $W_p^u(X|V)$  em  $p$  coincide com  $E^u$ , espaço instável de  $A = DX(p)$ .

A demonstração deste Teorema, no caso  $r = 1$ , é dada no Apêndice, como consequência de uma proposição análoga (Teorema 2 a seguir), válida para difeomorfismos, que permite estudar também os conjuntos estáveis e instáveis das órbitas periódicas por meio da transformação de Poincaré.

Como no caso de fluxos, definimos o conjunto estável de um ponto fixo  $p$  de  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  como o conjunto  $W_f^s(p)$  de pontos  $q$  tais que  $f^i(q) \rightarrow p$ , quando  $i \rightarrow \infty$ . Analogamente para o conjunto instável  $W_f^u(p)$ , com  $i \rightarrow -\infty$ .

Se  $f = L$  é um automorfismo hiperbólico, então  $W_f^s(0) = E^s$  e  $W_f^u(0) = E^u$ . Pelo Teor. de Hartman 6,1  $W_{f_1}^s(p) = h(E_1^s)$ , onde  $f_1$  é a restrição de  $f$  a uma vizinhança de  $p$ , e  $E_1^s$  é uma vizinhança de 0 em  $E^s$ . Portanto  $W_{f_1}^s(p)$  é uma variedade topológica passando por  $p$ . Análogas considerações valem para  $W_{f_1}^u$ . O seguinte teorema estabelece que estas variedades topológicas são de fato da mesma classe de diferenciabilidade de  $f$ .

2. **TEOREMA.** (*Diferenciabilidade das Variedades Invariantes*). Seja  
 $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um difeomorfismo de classe  $C^r$  com um ponto  
 fixo hiperbólico  $p$ . Existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que para  $f_1 = f|V$   
 tem-se:

- 1)  $W_{f_1}^s(p) = \{q; f^m(q) \in V, m \geq 0\}$
- 2)  $W_{f_1}^s(p)$  é uma variedade diferenciável de classe  $C^r$  cujo espaço tangente em  $p$  é igual a  $E^s$ .
- 3)  $W_{f_1}^u(p) = \{q; f^m(q) \in V, m \leq 0\}$
- 4)  $W_{f_1}^u(p)$  é uma variedade diferenciável de classe  $C^r$  cujo espaço tangente em  $p$  é igual a  $E^u$ .

A demonstração será dada no Apêndice, para  $r = 1$ .

Seja  $X: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  aberto.

**3. DEFINIÇÃO.** *Seja  $\gamma$  uma órbita periódica de  $X$  e  $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  uma transformação de Poincaré de  $\gamma$  em  $p \in \Sigma_0 \cap \gamma$ .  $p$  é um ponto fixo de  $\pi$ . Se for hiperbólico, isto é se para alguma seção transversal local  $f: U \rightarrow \Sigma$ ,  $f(0) = p$  a expressão coordenada tem o como ponto fixo hiperbólico (ver seção 1), diz-se que  $\gamma$  é órbita periódica hiperbólica.*

É fácil ver que a definição acima não depende de  $p \in \gamma$  ou da seção  $\Sigma$ . Também não depende da particular expressão coordenada  $\pi_f$  de  $\pi$ .

Se  $\gamma$  é uma órbita periódica hiperbólica de  $X$  de período  $\tau$ , então  $D_2 \varphi(\tau, p): \mathbb{R}^n \supset$  tem um espaço invariante maximal  $E_1^s(p)$  tal que  $D_2 \varphi(\tau, p)|_{E_1^s(p)}$  tem autovalores de módulo  $\leq 1$ . De modo análogo define-se  $E_1^u(p)$  tal que  $D_2 \varphi(\tau, p)|_{E_1^u(p)}$  tem autovalores de módulo  $\geq 1$ . Verifica-se que

$$E_1^s(p) \cap E_1^u(p) = \{tX(p); t \in \mathbb{R}\}.$$

A dimensão de  $E_1^s(p)$  chama-se *índice de estabilidade* de  $\gamma$ . Observe que se  $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  é a transformação de Poincaré em  $p$ , então  $E_1^s(p) = E^s \oplus \{tX(p); t \in \mathbb{R}\} \rightarrow$  onde  $E^s$  é o subespaço estável de  $D\pi_p$ . Portanto, o índice de  $\gamma$  é igual ao índice de  $\pi$  mais um.

**4. TEOREMA.** *Seja  $\gamma$  uma órbita periódica hiperbólica de um campo vetorial  $X$  de classe  $C^r$ , então existe uma vizinhança  $W$  de  $\gamma$  tal que  $W^s(X|W)$  é uma variedade diferenciável de classe  $C^r$  e dimensão igual ao índice de estabilidade de  $\gamma$ . Mais ainda,*

$$W^s(X/W) = \{q \in W; \varphi(t, q) \in W, t \geq 0\}$$

Analogamente,

$$W^u(X/W) = \{q \in W, \varphi(t, q) \in W, t \leq 0\}.$$

O espaço tangente de  $W^s(X/W)$  em  $q \in \gamma$  é  $E_1^s(q)$  e o espaço tangente a  $W^u(X/W)$  em  $q \in \gamma$  é  $E_1^u(q)$ .

*Demonstração.* Seja  $V$  a vizinhança de  $p$  fornecida para  $\pi: \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$  pelo Teorema 3. Denotemos por  $W$  o conjunto aberto formado pelos arcos de órbita positiva de  $X$  que ligam  $x \in V$  com  $\pi(x) \in \Sigma$ .

$G(g)$  é a aplicação "gráfico de  $g$ ", i.e.  $G(g)(x_u) = (x_u, g(x_u))$ , e  $\pi_u$  é a projeção canônica de  $E_u \oplus E_s$  sobre  $E_u$ , é um homeomorfismo de  $E_u(r)$  sobre um aberto de  $E_u$  que contém  $E_u(r)$ .

$$\text{Mais ainda, } \text{Lip}(\psi_g^{-1}) \leq \frac{\tau}{1 - \tau\varepsilon} < 1.$$

*Demonstração.* Chamemos de  $\Delta_u$  a  $\pi_u \circ (f - L)$ .

Temos

$$\psi_g = L_u + \Delta_u \circ G(g) = L_u(I + L_u^{-1} \Delta_u \circ G(g)) \text{ e}$$

$$\text{Lip}(L_u^{-1} \Delta_u \circ G(g)) \leq \|L_u^{-1}\| \cdot \text{Lip} \Delta_u \cdot \text{Lip} g \leq \tau\varepsilon < 1.$$

Logo, pela observação b) ao Lema 2 da seção 3,  $I + L_u^{-1} \Delta_u \circ G(g)$  é um homeomorfismo de  $E_u(r)$  sobre um aberto que contém  $E_u(r')$ , onde

$$r' = r(1 - \tau\varepsilon), \text{ e } \text{Lip}(I + L_u^{-1} \Delta_u \circ G(g))^{-1} \leq 1/1 - \tau\varepsilon.$$

Logo,  $\psi_g$  é um homeomorfismo sobre um aberto que contém  $L_u(E_u(r'))$  e

$$\text{Lip} \psi_g^{-1} \leq \|L_u^{-1}\|/1 - \tau\varepsilon \leq \frac{\tau}{1 - \tau\varepsilon} < 1.$$

A prova termina observando que  $L_u(E_u(r'))$  contém a bola  $E_u(r'')$ , onde  $r'' = \tau^{-1} r' \geq r \frac{\tau^{-1}}{1 - \tau\varepsilon} > r$ , pois  $\tau^{-1}/1 - \tau\varepsilon > 1$ . ■

3. LEMA. Suponha que  $\varepsilon$  é tal que

$$(*) \quad \frac{\tau + \varepsilon}{1 - \tau\varepsilon} < 1.$$

Seja  $\varphi_g = \pi_s \circ f \circ G(g)$  e  $\Gamma(g) = \varphi_g \circ \psi_g^{-1}: E_u(r) \rightarrow E_s(r)$ . Então

a)  $\text{Lip} \Gamma(g) \leq \frac{\tau + \varepsilon}{1 - \tau\varepsilon} < 1$  para todo  $g$  com  $\text{Lip} g \leq 1$  e  $g(0) = 0$ .

b) A aplicação  $\Gamma: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ , onde  $\mathcal{F}$  é o espaço métrico completo das aplicações contínuas  $g$ , com  $g(0) = 0$  e  $\text{Lip} g \leq 1$ , é uma contração com constante de contração  $\lambda = \frac{\tau + \varepsilon}{1 - \tau\varepsilon}$ . O espaço  $\mathcal{F}$  é munido da métrica uniforme  $d(g_1, g_2) = \sup_{x \in E_u(r)} |\theta_1(x) - \theta_2(x)| = |\theta_1 - \theta_2|$ .

*Demonstração.*

a)  $\text{Lip} \varphi_g \leq \text{Lip}(L_s + \Delta_s) \cdot \text{Lip} g \leq (\tau + \varepsilon) \text{Lip} g$ .

Logo, pelo Lema 2,  $\text{Lip} \Gamma(g) \leq \text{Lip} \varphi_g \cdot \text{Lip} \psi_g^{-1} \leq (\tau + \varepsilon)/1 - \tau\varepsilon < 1$ .

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad |\Gamma(g_1) - \Gamma(g_2)| &= |\varphi_{g_1} \circ \psi_{g_1}^{-1} - \varphi_{g_2} \circ \psi_{g_2}^{-1}| \leq \\
 &\leq |\varphi_{g_1} \circ \psi_{g_1}^{-1} - \varphi_{g_1} \circ \psi_{g_2}^{-1} + \varphi_{g_1} \circ \psi_{g_2}^{-1} - \varphi_{g_2} \circ \psi_{g_2}^{-1}| \leq \\
 &\leq (\text{Lip } \varphi_{g_1}) |\psi_{g_1}^{-1} - \psi_{g_2}^{-1}| + |\varphi_{g_1} - \varphi_{g_2}|.
 \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 |\varphi_{g_1} - \varphi_{g_2}| &= |L_g g_1 + \Delta_g \circ G(g_1) - L_g g_2 - \Delta_g \circ G(g_2)| \leq \\
 &\leq (\|L_g\| + \text{Lip } \Delta_g \cdot |g_1 - g_2|) \leq (\tau + \varepsilon) |g_1 - g_2|.
 \end{aligned}$$

Verifica-se sem grande dificuldade que

$$(*) \quad |\psi_{g_1}^{-1} - \psi_{g_2}^{-1}| \leq \frac{\varepsilon \tau}{1 - \varepsilon \tau} |g_1 - g_2|.$$

Esta desigualdade junto com as desigualdades a) e b) desta demonstração implica a parte b) do Lema. ■

O fato de  $\psi_g$  ser um homeomorfismo sobre um aberto  $\psi_g(E_u(r)) \supset E_u(r)$  (Lema 2) implica que  $f(\text{Gráfico } g)$  é o gráfico de uma única aplicação contínua em  $\psi_g(E_u(r))$ . Esta aplicação é precisamente  $\Gamma(g) = \varphi_g \circ \psi_g^{-1}$ . Por isto  $\Gamma$  chama-se "transformação de gráficos"; ela associa a cada  $g$  a aplicação cujo gráfico é a imagem por  $f$  do gráfico de  $g$ . O ponto fixo de  $\Gamma$ ,  $g_f = g_f^*$ , corresponde à única aplicação  $g_f$  tal que o gráfico de  $g_f$  é igual a  $f(\text{Gráfico } g_f) \cap E(r)$ . Portanto  $f^{-1}(\text{Gráfico } g_f) \subset \text{Gráfico } g_f$  e  $f^{-1}$  é uma contração de Gráfico  $g_f$ .

Este fato decorre de  $\pi_u \circ f^{-1} \circ G(g_f) = \psi_{g_f}^{-1}$  sendo  $\pi_u$  e  $G(g_f) = \pi_u^{-1}$  isometrias e (Lema 2).

$$\text{Lip } \psi_{g_f}^{-1} \leq \frac{\tau}{1 - \tau \varepsilon} < 1.$$

A demonstração da parte a) do Teorema 1 terminará com a verificação da relação  $W_f^* = \text{Gráfico } g_f$ . Este é o conteúdo do Lema seguinte.

4. LEMA. Sejam  $x = (x_u, x_s)$ ,  $y = (y_u, y_s) \in E(r)$  com  $x_u = y_u$  e  $f^{-i}(x)$ ,  $f^{-i}(y) \in E(r)$  para todo  $i \geq 0$ . Então  $x_s = y_s = g_f(x_u)$ .

Este lema decorre da seguinte observação relativa ao comportamento de  $f$ , que será usada também na prova da parte b) do Teorema 1.

5. Observação. Seja  $\varepsilon < \frac{1 - \tau}{1 + \tau}$  e  $\text{Lip}(L - f) < \varepsilon$ , então se denotamos

$$f = (f_u, f_s), \text{ temos}$$

a)  $\text{Lip } f_s \leq \tau + \varepsilon$

b) Se  $x = (x_u, x_s)$  e  $y = (y_u, y_s)$  são dois pontos de  $E(r)$  e se  $|x_u - y_u| \geq |x_s - y_s|$ , então

$$\begin{aligned}
 |f_u(x) - f_u(y)| &\geq (\tau^{-1} - \varepsilon) |x_u - y_u| \geq (\tau + \varepsilon) |x_u - y_u| \geq \\
 &\geq |f_s(x) - f_s(y)|.
 \end{aligned}$$

c) Com as mesmas hipóteses de b), se  $|x_u - y_u| \leq |x_s - y_s|$ , então  $|f_s(x) - f_s(y)| \leq (\tau + \varepsilon) |x_s - y_s|$ .

De fato:

$$a) |f_s(x) - f_s(y)| = |L_s(x_s - y_s) + \Delta_s(x) - \Delta_s(y)| \leq \tau |x_s - y_s| + \text{Lip}(f - L) |x - y| \leq (\tau + \varepsilon) |x - y|.$$

$$b) |f_u(x) - f_u(y)| = |L_u(x_u) - L_u(y_u) + \Delta_u(x) - \Delta_u(y)| \geq \\ \geq |L_u(x_u - y_u)| - |\Delta_u(x) - \Delta_u(y)| \geq \tau^{-1} |x_u - y_u| - \varepsilon |x - y|$$

Lembrando que  $|x - y| = |x_u - y_u|$ , em vista de que  $|x_u - y_u| \geq |x_s - y_s|$  e de  $|L_u| \geq |L_u^{-1}|^{-1}$ . Resulta portanto  $|f_u(x) - f_u(y)| \geq (\tau^{-1} - \varepsilon) |x - y|$ .

A segunda desigualdade de b) segue de

$$\varepsilon + \tau < 1 < \tau^{-1} - \varepsilon.$$

Finalmente, de a) segue-se que

$$|f_s(x) - f_s(y)| \leq (\tau + \varepsilon) |x - y| = (\tau + \varepsilon) |x_u - y_u|.$$

c) Resulta imediatamente de a). ■

*Demonstração do Lema 4.* Dado  $n > 0$ , sejam

$$x' = f^{-n}(x) \text{ e } y' = f^{-n}(y).$$

Temos dois casos a considerar:

1) Existe  $j$ ,  $0 \leq j < n$  tal que

$$|f_u^j(x') - f_u^j(y')| \geq |f_s^j(x') - f_s^j(y')|;$$

2) Para todo  $j$ ,  $0 \leq j < n$ ,

$$|f_u^j(x') - f_u^j(y')| < |f_s^j(x') - f_s^j(y')|.$$

No caso 1), pela parte b) da observação anterior, temos

$$|f_u(f^j(x')) - f_u(f^j(y'))| \geq |f_s(f^j(x')) - f_s(f^j(y'))|$$

ou seja que

$$|f_u^{j+1}(x') - f_u^{j+1}(y')| \geq |f_s^{j+1}(x') - f_s^{j+1}(y')|.$$

Aplicando sucessivamente esta desigualdade temos:

$$|x_u - y_u| = |f_u^n(x') - f_u^n(y')| \geq |f_s^n(x') - f_s^n(y')| = |x_s - y_s|.$$

Logo,  $x_s = y_s$ , pois  $x_u = y_u$ .

No caso 2), pela parte c) da Observação anterior, temos

$$|x_n - y_n| = |f^n(x') - f^n(y')| = |f_n(f_n^{n-1}(x')) - f_n(f_n^{n-1}(y'))| \leq \\ \leq (\tau + \varepsilon) |f_n^{n-1}(x') - f_n^{n-1}(y')| \leq \dots \leq (\tau + \varepsilon)^n |x'_n - y'_n| < 2r(\tau + \varepsilon)^n.$$

Logo  $x_n = y_n$ , pois  $2r(\tau + \varepsilon)^n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , pois  $\tau + \varepsilon < 1$ . ■

*Demonstração do Teorema 1, parte b).*

Da Observação 5, parte b), resulta que se  $x = (x_u, x_s)$  e  $y = (y_u, y_s)$  são pontos em  $W_f^s$ , com  $x_s = y_s$ , então  $x_u = y_u$ . Isto é,  $W_f^s$  é o gráfico de uma aplicação definida num subconjunto de  $E_s(r)$ . De fato, para todo  $n > 0$ , temos

$$2r > |f^n(x) - f^n(y)| \geq |f_u(f^{n-1}(x)) - f_u(f^{n-1}(y))| \geq \\ \geq (\tau^{-1} - \varepsilon) |f_u^{n-1}(x) - f_u^{n-1}(y)| \geq \dots \geq (\tau^{-1} - \varepsilon)^n |x_u - y_u|.$$

Logo,  $|x_u - y_u| = 0$ , pois  $\tau^{-1} - \varepsilon > 1$ .

A hipótese  $\text{Lip}(f - L) < |L^{-1}|^{-1}$  implica que  $f$  é um homeomorfismo de  $E(r)$  sobre um aberto de  $E$ . Seja  $E(r_1)$  uma bola contida neste aberto.

Deixamos ao leitor verificar que  $r_1$  pode ser tomado igual a  $r(|L_s^{-1}|^{-1} - \varepsilon)$ . Observe inicialmente que  $L(E(r))$  contém a bola  $E(r|L_s^{-1}|^{-1})$ . O homeomorfismo  $f^{-1}: E(r_1) \rightarrow E$  tem as seguintes propriedades:

$$f^{-1} - L^{-1} = L^{-1}L f^{-1} - L^{-1}f \circ f^{-1} = L^{-1} \circ (L - f) \circ f^{-1}, \text{ logo} \\ \text{Lip}(f^{-1} - L^{-1}) \leq |L^{-1}| \cdot \text{Lip}(f - L) \cdot \text{Lip}(f^{-1}) \leq \\ \leq |L^{-1}| \text{Lip}(f - L) (|L^{-1}|^{-1} - \text{Lip}(f - L))^{-1}.$$

Observe que  $\tau(L^{-1}) = \tau(L) = \tau$ , e que  $\varepsilon = \varepsilon(L) > \text{Lip}(f - L)$  determinado na prova da parte a) do Teorema 1, depende apenas de  $\tau$ . Portanto, se tomarmos este número pequeno, teremos, pela desigualdade acima, que

$$\text{Lip}(f^{-1} - L^{-1}) < \varepsilon = \varepsilon(L),$$

e portanto, pela observação acima, que  $W_f^s$  é um gráfico, teremos que

$$W_f^s = W_f^s \cap E(r_1) = W_{f^{-1}|_{E(r_1)}}^s = \text{gráfico } g_{f^{-1}}^s.$$

Definimos  $g_f^s = g_{f^{-1}}^s$ . Pela parte a) do Teorema,  $f: W_f^s \rightarrow W_f^s$  é uma contração. Isto termina a prova do Teorema 1. ■

Logo, pelo Lema 3(b), temos:

$$|\Gamma_\rho(h_1)(x_u) - \dot{\Gamma}_\rho(h_2)(x_u)| \leq \frac{\tau + \varepsilon}{1 - \tau\varepsilon} |h_1(x_u) - h_2(x_u)|.$$

Isto prova que  $\dot{\Gamma}_\rho$  é uma contração de  $\mathcal{F}$ , para todo  $g \in \mathcal{F}$ .

Provaremos agora que  $g \rightarrow \dot{\Gamma}_\rho(h)$  é contínua para todo  $h$ . De fato, pelo Lema 7,

$$\begin{aligned} (*) \quad & |(\dot{\Gamma}_\rho(h) - \dot{\Gamma}_{\rho_0}(h))(x_u)| = \\ & = |\Gamma_{Df(\xi_g(x_u))} h(x_u) - \Gamma_{Df(\xi_{g_0}(x_u))} h(x_u)| \leq 2 |Df(\xi_g(x_u)) - Df(\xi_{g_0}(x_u))|. \end{aligned}$$

Verifica-se a partir de (2) e (3) na demonstração do Lema 7, que para todo  $x_u \in E_u(r)$ ,

$$|\xi_g(x_u) - \xi_{g_0}(x_u)| \leq (1 + \tau) |g - g_0|.$$

Pelo Lema 2, para todo  $g$ , a imagem de  $E_u(r)$  por  $\psi_g^{-1} = \xi_{g_u}$  está contida em  $E_u(r')$  com  $r' = \tau r / (1 - \tau\varepsilon) < r$ , portanto a imagem de  $\xi_g$  está contida no compacto  $\overline{E}(r') \subset E(r)$ , onde  $Df$  é uniformemente contínua. Logo, (\*) implica que  $\dot{\Gamma}_\rho(h) \rightarrow \dot{\Gamma}_{\rho_0}(h)$  quando  $g \rightarrow g_0$ ; de fato,  $g \rightarrow \dot{\Gamma}_\rho(h)$  resulta uniformemente contínua.

*Nota.* Observe que estamos usando a compacidade de  $\overline{E}(r')$  o que restringe a validade de nosso argumento ao caso  $E = \mathbb{R}^n$ . No caso de espaços de Banach arbitrários a prova acima é válida quando  $Df$  é uniformemente contínua nas bolas fechadas de  $E$ .

Isto termina a prova da Proposição 6, e portanto a prova de que a aplicação  $\theta^u = g_f^u$  — e portanto  $W_f^u$  — do Teorema 1, a), é classe  $C^1$ . ■

*Espaço Tangente à Variedade Instável.*

Verificamos a seguir que se  $Df(0) = L$  então  $D\theta_f^u(0) = 0$ . Isto é, o espaço tangente a  $W_f^u$  em 0 é  $E_u$ . De fato, por ser  $Dg$  ponto fixo de  $\Gamma(g)$ , temos que  $g = g_f^u$  satisfaz a

$$Dg(0) = Df_u(0) \circ [I, Dg(0)] \circ [Df_u(0) [I, Dg(0)]]^{-1} = [L, Dg(0)] \circ L_u^{-1}.$$

Isto implica que  $Dg(0) = 0$ , pois caso contrário,

$$|Dg(0)| \leq \tau^2 |Dg(0)| < |Dg(0)|.$$

*Diferenciabilidade da Variedade Estável.*

Por ser  $E(r_1) \cap W_f^s = \text{gráfico } g_f^s = \text{gráfico } G_f^u|_{E(r_1)}$ , resulta que  $W_f^s$  é de classe  $C^1$ , pelo caso anterior; se  $Df(0) = L$ , resulta igualmente que  $Dg_f^s(0) = 0$ .

*Nota.* A diferenciabilidade das variedades invariantes de pontos singulares hiperbólicos de campos vetoriais  $X$  decorre dos resultados para variedades invariantes do difeomorfismo  $\varphi_1$  onde  $\varphi_t$  é o fluxo gerado por  $X$ .

## EXERCÍCIOS

1. (i) Seja  $\varphi(t)$  uma solução periódica de período  $t_0$  de um sistema autônomo  $x' = X(x)$ , onde  $X$  é um campo vetorial de classe  $C^\infty$ . Suponha que  $|X| = 1$  numa vizinhança de  $\varphi(t)$  e sejam  $\{T(t), N(t), B(t)\}$  o triedro de Frenet de  $\varphi(t)$  e  $\tau(t)$  sua torsão. Prove que a derivada  $\pi'$  da transformação de Poincaré no plano  $\Sigma$  que passa por  $\varphi(0)$  e contém  $N(0), B(0)$  é dada por  $\phi(t_0)$  onde  $\phi(t)$  é a matriz fundamental, com  $\phi(0) =$  identidade, do sistema

$$\begin{aligned} u' &= \langle (D_N X)(t), N(t) \rangle u + (\tau(t) + \langle (D_B X)(t), N(t) \rangle) v \\ v' &= (-\tau(t) + \langle (D_N X)(t), B(t) \rangle) u + \langle (D_B X)(t), B(t) \rangle v \end{aligned}$$

(Sugestão: Se  $p \in \Sigma$  está suficientemente próxima de  $\varphi(0)$ , escreva  $\varphi(t, p) = \varphi(t) + u(t)N(t) + v(t)B(t)$ . Derive esta equação e use as fórmulas de Frenet e o fato de  $\varphi(t, p)$  ser curva integral do campo  $X$  para obter as equações acima.)

(ii) Seja  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  um plano tal que  $q \in \Gamma$  implica  $X(q) \in \Gamma$ . Se  $\varphi(t)$  está contida em  $\Gamma$ , encontre um critério para que a órbita seja hiperbólica.

(Sugestão: Compare com o critério da integral da divergência dado no Capítulo VI seção 6.)

2. Sejam  $X$  e  $Y$  campos de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  em  $\mathbb{R}^3$ . Se  $\gamma$  é órbita periódica hiperbólica de ambos os campos e  $DX(p) = DY(p)$  para todo  $p \in \gamma$  mostre que as variedades estáveis de  $X$  e  $Y$  relativas a  $\gamma$  são tangentes ao longo de  $\gamma$ . Generalize para o caso em que  $D^k X(p) = D^k Y(p)$  para  $k = 0, 1, \dots, m$  com  $m \leq r$ .
3. Seja um difeomorfismo  $F_0$  de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  que tem a origem como ponto fixo hiperbólico. Seja  $F_n$  uma seqüência de difeomorfismos que converge juntamente com suas derivadas primeiras para  $F_0$  uniformemente nas partes compactas. Prove que para  $n$  suficientemente grande,  $F_n$  tem um ponto fixo hiperbólico  $x_n$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

Prove então que a variedade instável  $W_n^u$  de  $F_n$  em  $x_n$  converge uniformemente nas partes compactas para a variedade instável  $W_0^u$  de  $F_0$ .

## 1. Número de rotação

Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  e periódica de período 1, isto é,

$$(1) \quad f(x+1, y) = f(x, y) = f(x, y+1), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Para todo  $y \in \mathbb{R}$ , seja  $\varphi(t, y)$  a solução de

$$(2) \quad y' = f(t, y), \quad y(0) = y.$$

Então

$$(3a) \quad \varphi(t+1, y) = \varphi(t, \varphi(1, y)) \quad \dot{\phantom{y}}$$

$$(3b) \quad \varphi(t, y+1) = \varphi(t, y) + 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

É fácil ver que a aplicação  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi(y) = \varphi(1, y)$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$ . Da unicidade das soluções de (2) vê-se que  $\psi$  é estritamente crescente. Ainda, de (3a) segue que

$$(4) \quad \psi^n(y) = \varphi(n, y), \quad n \geq 0.$$

Consideremos o toro  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . O campo  $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definido por  $X(x, y) = (1, f(x, y))$ , define um fluxo  $\Phi$  de classe  $C^1$  no toro por passagem ao quociente. Seja  $C$  o círculo  $\{(0, y); y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ ; observe que  $\Phi$  é transversal a  $C$ . Ainda,  $\psi(y+1) = 1 + \psi(y) \forall y \in \mathbb{R}$ , donde está bem definido o difeomorfismo  $\pi: C \rightarrow C$ ,  $\pi(0, y) = (0, \psi(y))$ . É fácil ver que o estudo do comportamento das soluções de (2) se reduz ao estudo do difeomorfismo  $\pi$  de  $C$ . Por exemplo,  $\Phi$  tem uma órbita fechada se e somente se  $\pi$  tem um ponto periódico.

A proposição seguinte nos permitirá definir o número de rotação.

1. PROPOSIÇÃO. Para todo  $y \in \mathbb{R}$ , o limite  $\rho = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\psi^n(y)}{n}$  existe e não depende de  $y$ .

*Demonstração.* Vamos provar primeiro que existe o  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n, 0)}{n} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\psi^n(0)}{n}$ . Notemos primeiro que, dados  $y_1,$

$y_2 \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$(*) \quad \varphi(t, y_1) - y_1 - 1 \leq \varphi(t, y_2) - y_2 \leq \varphi(t, y_1) - y_1 + 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fixemos  $t$ . Pondo  $F(y) = \varphi(t, y) - y$ , (\*) equivale a  $|F(y_1) - F(y_2)| \leq 1$ . Em virtude de (3b), basta provar isto para  $|y_1 - y_2| < 1$ . Seja  $y_1 > y_2$ . Usando a unicidade das soluções de (2) obtemos  $0 \leq \varphi(t, y_1) - \varphi(t, y_2) \leq 1$ . Somando membro a membro com  $-1 \leq y_2 - y_1 \leq 0$ , vem

$$-1 \leq \varphi(t, y_1) - y_1 - \varphi(t, y_2) + y_2 \leq 1,$$

ou seja,  $|F(y_1) - F(y_2)| \leq 1$ . Se  $y_1 < y_2$ , procede-se de modo análogo. Em particular, de (\*) obtém-se

$$(**) \quad \varphi(m, 0) - 1 \leq \varphi(m, y) - y \leq \varphi(m, 0) + 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Fazendo sucessivamente  $y = 0, \varphi(m, 0), \dots, \varphi(n-1)m, 0$  nesta relação, vem

$$\begin{aligned} \varphi(m, 0) - 1 &\leq \varphi(m, 0) && \leq \varphi(m, 0) + 1, \\ \varphi(m, 0) - 1 &\leq \varphi(2m, 0) - \varphi(m, 0) && \leq \varphi(m, 0) + 1, \\ \vdots & && \vdots \\ \varphi(m, 0) - 1 &\leq \varphi(nm, 0) - \varphi(n-1)m, 0) && \leq \varphi(m, 0) + 1, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Somando membro a membro estas relações, obtemos

$$n\varphi(m, 0) - n \leq \varphi(nm, 0) \leq n\varphi(m, 0) + n, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Dai,

$$(5) \quad \left| \frac{\varphi(mn, 0)}{mn} - \frac{\varphi(m, 0)}{m} \right| \leq \frac{1}{|m|} \text{ e, trocando } m \text{ por } n,$$

$$\left| \frac{\varphi(mn, 0)}{mn} - \frac{\varphi(n, 0)}{n} \right| \leq \frac{1}{|n|}.$$

Portanto,

$$\left| \frac{\varphi(m, 0)}{m} - \frac{\varphi(n, 0)}{n} \right| \leq \frac{1}{|m|} + \frac{1}{|n|},$$

e pelo critério de Cauchy conclue-se que existe  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n, 0)}{n}$ . Para ver

que  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n, 0)}{n} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n, y)}{n} \quad \forall y \in \mathbb{R}$ , basta dividir a relação (\*\*)

acima por  $m$  e fazer  $|m| \rightarrow \infty$ . Isto termina a demonstração da proposição. ■

2. *Observações.* a) Para obter a conclusão da proposição 1 é suficiente supor apenas que  $f$  é lipschitziana em relação à segunda variável ou, menos ainda, que a equação (2) tem solução única definida em  $\mathbb{R}$ .

b) Seja  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função estritamente crescente tal que  $\psi(y+1) = \psi(y) + 1 \forall y \in \mathbb{R}$ . Então continuam válidas as conclusões da proposição 1. Se  $\psi$  for contínua, verifica-se que ela provém de uma equação do tipo (2), pois então  $\psi$  determina um homeomorfismo  $\pi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  que gera um fluxo no toro.

3. DEFINIÇÃO. O número  $\rho = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\psi^n(y)}{n}$  chama-se *número de rotação* da equação (2) ou do fluxo  $\Phi$  (ou ainda do difeomorfismo  $\pi$ ).

De acordo com a proposição 1, o número de rotação está bem definido. Nele se refletem certas propriedades das órbitas de  $\Phi$  (ou de  $\pi$ ), como na proposição abaixo.

4. PROPOSIÇÃO. O número de rotação  $\rho$  é racional se e somente se  $\pi$  possui órbita periódica (ou, equivalente,  $\Phi$  possui órbita fechada).

*Demonstração.* Suponhamos  $\rho = r/m$ ,  $r, m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 0$ . Afirimo que  $\pi^m$  tem ponto fixo. Caso contrário,  $\varphi(m, y) \neq r + y$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ . Suponhamos  $\varphi(m, y) > r + y, \forall y$ . Seja  $a > 0$  tal que  $\varphi(m, y) - r - y \geq a, \forall y \in \mathbb{R}$ , cuja existência é garantida pela periodicidade de  $y \rightarrow \varphi(m, y) - y$ . Fazendo sucessivamente  $y = \varphi(m, y)$ ,  $\varphi(2m, y), \dots, \varphi(k-1)m, y$ , obtemos  $\varphi(km, y) \geq k(r+a) + y$ . Dividindo por  $km$  e fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos  $\rho \geq \frac{r+a}{m}$ , o que é absurdo. Se  $\varphi(m, y) < r + y \forall y$ , procedemos de modo análogo. Portanto,  $\pi^m$  tem ponto fixo.

Reciprocamente, suponhamos que  $\pi^m$  tenha ponto fixo  $y$  para algum  $m$ . Seja  $r$  tal que  $\varphi(m, y) = r + y$ . Usando (3) ve-se que  $\varphi(km, y) = kr + y \forall k \geq 0$ , donde  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(km, y)}{km} = \frac{r}{m}$ . Portanto,  $\rho$  é racional. ■

5. PROPOSIÇÃO. O número de rotação varia continuamente com  $f$ , isto é, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x, y) - f_1(x, y)| < \delta \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow |\rho - \rho_1| < \varepsilon$ , onde  $\rho_1$  é o número de rotação de

$$(6) \quad y' = f_1(t, y).$$

*Demonstração.* Seja  $m > 0$  tal que  $1/m < \varepsilon/3$ . Seja  $\varphi_1(t, 0)$  a solução de (6) com  $y(0) = 0$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$  na relação (5), obtemos

$$\left| \frac{\varphi(m, 0)}{m} - \rho \right| < \frac{1}{m} \text{ e } \left| \frac{\varphi_1(m, 0)}{m} - \rho_1 \right| < \frac{1}{m}.$$

Pela continuidade das soluções da equação diferencial (2) relativamente a  $f$  (cap. II, seção 2), existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f_1(x, y)| < \delta \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ implica} \\ |\varphi(t, 0) - \varphi_1(t, 0)| < 1, \quad 0 \leq t \leq m. \text{ Daí } |\rho - \rho_1| < \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

## 2. Teorema de Schwartz

Seja  $M^2$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  munido da topologia induzida. Diz-se que  $M^2$  é uma *variedade bidimensional* ou uma *superfície* quando para cada  $p \in M^2$  existem uma vizinhança  $V_p$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$  e um homeomorfismo  $x: V_p \cap M^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , chamado sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com as seguintes propriedades:

- $x^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^\infty$ ;
- $Dx^{-1}(a)$  é injetiva para todo  $a \in \mathbb{R}^2$ .

O plano  $T_p M^2 = Dx^{-1}(x(p))$  ( $\mathbb{R}^2$ ) chama-se *espaço tangente* ou *plano tangente* a  $M^2$  em  $p$ .

Um fluxo de classe  $C^r$  em  $M^2$  é uma aplicação  $\varphi: \mathbb{R} \times M^2 \rightarrow M^2$  tal que

- $\varphi(0, p) = p \quad \forall p \in M^2$ ;
- $\varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(t + s, p), \quad \forall p \in M^2, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$ ;
- existe uma aplicação  $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$  tal que  $\Phi/\mathbb{R} \times M^2 = \varphi$ .

Um campo vetorial  $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se tangente à superfície  $M^2$  quando  $X(p) \in T_p M^2$ . Todo fluxo em  $M^2$  pode ser obtido por restrição a  $\mathbb{R} \times M^2$  do fluxo local de um campo vetorial  $X$  em  $\mathbb{R}^n$  que é tangente a  $M^2$ . Mostra-se que se  $X$  é de classe  $C^r$  então a restrição do fluxo local de  $X$  a  $M^2$  é um fluxo de classe  $C^r$  em  $M^2$ . Ver exercício 1.

Para os fluxos de classe  $C^r$  em superfícies compactas são válidos os conceitos de conjuntos  $\alpha$  e  $\omega$ -limite e os resultados gerais demonstrados em XII.

Seja  $\varphi: \mathbb{R} \times M^2 \rightarrow M^2$  um fluxo e ponhamos  $\varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$ . Um conjunto  $\mu \subset M^2$  diz-se *minimal* para  $\varphi$  se  $\mu \neq \emptyset$  é compacto, é invariante por  $\varphi$  (isto é,  $\varphi_t(\mu) = \mu \forall t \in \mathbb{R}$ ) e  $\mu$  não contém subconjuntos próprios com esta propriedade. Os pontos singulares e as órbitas periódicas de  $\varphi$  são conjuntas minimais. Se  $a$  é irracional, então o toro  $T^2$  é um conjunto minimal do fluxo induzido em  $\mathbb{R}^4$  pelo campo constante  $(1, a)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Um conjunto minimal diz-se *trivial* quando for um ponto singular, ou uma órbita periódica ou um toro. O teorema de Poincaré-Bendixson estabelece que em  $\mathbb{R}^2$  e em  $S^2$  não existem conjuntos minimais não triviais.

**1. TEOREMA DE SCHWARTZ.** *Um fluxo  $\varphi$ , de classe  $C^2$  em uma variedade bidimensional  $M^2$ , compacta conexa e sem bordo, não pode possuir um conjunto minimal  $\mu$  distinto de um ponto singular ou trajetória fechada a menos que  $M^2 = T^2 = \mu$ .*

Antes de iniciar a demonstração verificaremos o seguinte:

**LEMA 1.** *Seja  $\mu \subset M^2$  um conjunto minimal para  $\varphi$ .*

a) *Se  $\mu$  tem interior não vazio então  $\mu = M^2$  e  $M^2$  é o toro  $T^2$ .*

b) *Se  $\mu$  é não trivial e tem interior vazio então para toda seção (segmento) transversal  $I$ ,  $I \cap \mu$  é um conjunto perfeito (isto é, é compacto sendo que todos os seus pontos são pontos de acumulação) de interior vazio (magro) em  $I$ .*

*Demonstração.* a)  $\mu$  é fechado. Mostraremos que  $\mu$  é aberto. Seja  $A$  um aberto,  $A \subset \mu$  e  $p \in \mu$ . Existe  $t_0$  tal que  $\varphi(t_0, p) \in A$ . Obviamente  $\varphi_{-t_0}(A) \subset \mu$  é um aberto que contém  $p$ . Portanto  $\mu$  é aberto e segue, pela conexidade de  $M^2$ , que  $\mu = M^2$ . Assim  $\varphi$  é um fluxo sem singularidades e portanto  $M^2$  é o toro  $T^2$  ou a garrafa de

Klein  $K^2$ , pois estas são as únicas variedades bidimensionais compactas que tem um campo contínuo sem singularidades. Mas  $M^2$  não pode ser  $K^2$ , pois um fluxo em  $K^2$  sem singularidades tem necessariamente uma órbita fechada, por um teorema de Kneser. Este fato porém, não será utilizado na demonstração do teorema 1.

b) É imediato:  $I \cap \mu$  é perfeito devido ao fato de que todas as órbitas de  $\mu$  são densas em  $\mu$ ;  $I \cap \mu$  é magro porque  $\mu$  é magro e  $I$  é seção transversal. ■

*Demonstração do Teorema 1.* Suponhamos que  $\varphi$  admite um conjunto minimal  $\mu$ , magro e distinto de um ponto singular ou trajetória fechada.

Seja  $i: [-1, 1] \rightarrow M^2$  um mergulho de classe  $C^2$  tal que:

- (a) A imagem  $I$ , de  $i$  restrito a  $(-1, 1)$ , é transversal a cada órbita de  $\varphi$  que a intercepta isto é, se  $r \neq \pm 1$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, i(r))$  e  $i'(r)$  são linearmente independentes.
- (b)  $i(-1)$  e  $i(1)$  não estão em  $\mu$ .
- (c)  $i(0) \in \mu$ .

A existência do mergulho  $i$ , pode ser visto usando para (a) e (c) um fluxo tubular e para (b) o fato que  $\mu$  tem interior vazio.

(1) Veja que existe um  $\sigma > 0$  tal que para  $|t| < \sigma$  e  $|r| < 1$ ,  $\delta(t, r) = \varphi(t, i(r))$  define um difeomorfismo.  $\delta^{-1}$  pode ser considerado como um sistema de coordenadas em  $M^2$  em torno de  $i(0)$ .

(2) A demonstração baseia-se no estudo do comportamento da função  $f(x)$  definida pelo primeiro ponto de retorno a  $I$  da órbita de  $\varphi$  por  $x \in I$ . Precisaremos a definição de  $f$  como segue.

Seja  $U = \{x \in I \text{ tal que existe } t > 0 \text{ com } \varphi(t, x) \in I\}$ ; verifica-se facilmente que  $U$  é aberto em  $I$ . Para cada  $x \in U$ , seja  $t(x) = \min\{t; \varphi(t, x) \in I, t > 0\}$ . Seja  $V = i^{-1}(U) \subset (-1, 1)$ ;  $V$  é aberto pois  $U$  é aberto. Defina  $f: V \rightarrow (-1, 1)$  por  $f(V) = i^{-1}[\varphi(t(i(v)), i(v))]$ . Observemos que para  $|v - v_0|$  suficientemente pequeno,  $f(v) = r(\delta^{-1}[\varphi(t(i(v_0)), i(v_0))])$ , onde  $r(x, y) = y$ , e como conseqüência  $f$  é de classe  $C^2$ .

(3) O conjunto  $\mu$  sendo minimal, as órbitas de  $\varphi$  por pontos de  $\mu$  são densas em  $\mu$ . Tem-se então que  $G = i^{-1}(I \cap \mu) \subset V$ . Pelo Lema 1,  $G$  é perfeito e magro em  $[-1, 1]$ .

Seja  $W$  um aberto de  $[-1, 1]$  tal que  $G \subset W \subset \bar{W} \subset V$ .

4. LEMA.  $f$  e  $G$  possuem as seguintes propriedades:

(4.1)  $G = (-1, 1) - \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ , onde  $(a_i, b_i)$  são intervalos abertos e disjuntos.

(4.2)  $f(G) = G$ .

(4.3) se  $v \in G$  e  $f^k(v) = v$  então  $k = 0$ .

(4.4)  $G$  é um conjunto minimal para  $f$ , no sentido de que  $G$  não contém propriamente um subconjunto fechado  $K_0 \neq \emptyset$  com  $f(K_0) = K_0$ .

(4.5) Existe  $L > 0$  tal que  $|f'(w)| \geq L$ , para todo  $w \in W$ .

(4.6) Dado  $a \in G$  o conjunto  $H = \{f^k(a), k \in \mathbb{Z}\}$  é denso em  $G$ .

(4.7) Existe  $M > 0$  tal que  $|f''(w)| \leq M$  para todo  $w \in W$ .

5. LEMA. Para  $f$  e  $G$  como em (2) e (3) sendo  $f$  monótona, temos o seguinte:

(5.1) Existe um ponto  $a \in G$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} Df^k(a) = 0$ .

(5.2) Existe uma vizinhança de  $a$ ,  $V(a)$ , em  $(-1, 1)$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} Df^k(x) = 0$ , uniformemente em  $x \in V(a)$ .

Provemos agora o Teorema usando os Lemas 4 e 5. Em seguida verificaremos tais lemas. A demonstração do Teorema segue-se se mostrarmos que não existe uma função satisfazendo as propriedades (4) estabelecidas no Lema 4. Para isto usaremos o Lema 5. Com efeito, de (4.6) e (5.2), segue-se que existem  $d > 0$  e um inteiro  $k$  suficientemente

grande tais que  $(a-d, a+d) \subset V(a)$ ,  $|f^k(a) - a| \leq \frac{d}{2}$  e  $|Df^k(s)| < \frac{1}{2}$  para  $|s - a| \leq d$ . Logo  $|f^k(a \pm d) - a| \leq |f^k(a \pm d) - f^k(a)| + |f^k(a) - a| \leq |Df^k(\theta)| |d| + \frac{d}{2} < d$  para algum  $\theta \in (a-d, a+d)$ .

Portanto  $f^k(a \pm d) \in (a-d, a+d)$ . Assim  $f^k(s) - s$  têm sinais opostos em  $s = a \pm d$ . Logo existe  $s_0$ ,  $|s_0 - a| < d$  tal que  $f^k(s_0) = s_0$  e assim  $f^{nk}(s_0) = s_0$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$  e, de (5.2) conclui-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(a) = s_0$ , pois

$|f^{nk}(a) - f^{nk}(s_0)| = |Df^{nk}(\theta)| |a - s_0|$  para algum  $\theta \in (a-d, a+d)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} Df^{nk}(\theta) = 0$ . Como  $a \in G$ , segue-se de (4.2) que  $f^{nk}(a) \in G$ ; sendo  $G$  fechado,  $s_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(a) \in G$ , o que contradiz (4.3) e prova o Teorema!

se  $M^2$  é orientável pois então  $f$  é monótona.

Para completar a demonstração resta provar os lemas 4 e 5, o que faremos a seguir.

## Prova do Lema 4.

(4.1) segue da definição de  $G$ ; (4.3) é imediata pois  $\mu$  não contém órbitas periódicas; (4.2) segue do fato de que dado  $g \in I \cap \mu$  existem valores positivos e negativos de  $t$  tais que  $\varphi(t, g) \in I \cap \mu$ . Para verificar (4.4) suponha que existe um tal  $K_0$ . Seja  $\tilde{K}_0 = i(K_0)$  e  $\tilde{G} = i(G)$ . Consideremos a união  $\Omega$  de todas as órbitas de  $\varphi$  passando por pontos de  $\tilde{K}_0$ . Mostremos que  $\Omega$  é fechado em  $\mu$ . Suponha que não; seja  $p \in \bar{\Omega} - \Omega$ . Aqui  $\bar{\Omega}$  é o fecho de  $\Omega$  em  $\mu$ . Existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t_0, p) \in I \cap \mu$ . Como  $\tilde{G} - \tilde{K}_0$  é aberto em  $\tilde{G}$  e  $\varphi(t_0, p) \in \tilde{G} - \tilde{K}_0$ , existe uma vizinhança de  $\tilde{V}$  de  $\varphi(t_0, p)$  em  $\tilde{G}$  com  $\tilde{V} \cap \tilde{K}_0 = \emptyset$  tal que  $\varphi_{-t_0}(\tilde{V})$  não contém pontos de  $\Omega$ , o que é absurdo pois  $p \in \varphi_{-t_0}(\tilde{V}) \cap (\bar{\Omega} - \Omega)$ . Como  $\Omega$  é invariante tem-se  $\Omega = \mu$  e assim  $K_0 = G$ . O item (4.5) é imediato, pois  $\bar{W}$  é compacto e, por construção,  $f'(v) \neq 0$  para todo  $v \in V$ .

Seja  $H$  como em (4.6). O fecho de  $H$ ,  $\bar{H}$  é invariante com respeito a  $f$ , pois se  $x \in \bar{H}$  então existe uma seqüência  $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $k_n \in \mathbb{N}$  tal que  $\lim_{n \geq 0} f^{k_n}(a) = x$  e assim  $f(\lim_{n \geq 0} f^{k_n}(a)) = f(x)$  isto é,  $\lim_{n \geq 1} f^{k_n+1}(a) = f(x)$  o que implica  $f(x) \in H$ . Daí  $f(\bar{H}) \subset \bar{H}$ . Analogamente  $\lim_{n \geq 1} f^{k_n-1}(a) = f^{-1}(x) \in \bar{H}$  isto é  $f^{-1}(\bar{H}) \subset \bar{H}$ . Logo  $f(\bar{H}) = \bar{H}$  pois  $f$  é bijetiva em  $G$ , segundo (4.2) e (4.5). Agora usando (4.4) conclui-se  $G = \bar{H}$ . Isso mostra (4.6) (4.7) segue ao fato de que  $f$  é de classe  $C^2$ . ■

Para a prova do Lema 5, precisaremos de dois resultados estabelecidos a seguir.

**LEMA 6.** Existe um intervalo aberto  $(a, b)$  com  $a, b \in G$  e tal que  $f^k\{(a, b)\} \subset W$  para todo  $k \geq 0$ . Supor  $f$  monótona.

*Demonstração.* Seja  $\rho = \text{dist}(G, [-1, 1] - W)$ . Para os  $a_i, b_i$  de (4.1) sejam  $S = \{i; b_i - a_i \geq \rho\}$  e  $Y = \{a_i, b_i, i \in S\}$ . Observemos que  $S$  e  $Y$  são conjuntos finitos.

Segue-se de (4.3) que existe  $N$  inteiro, tal que  $f^k(a_1) \notin Y$  para  $k \geq N$ . De fato, o conjunto  $K_1 = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots\}$  sendo invariante por  $f$  e  $Y$  finito, existe  $N > 0$  tal que  $\{f^i(a_1)\}_{i=0, 1, 2, \dots, N}$  contém  $Y$ . Suponha que existe  $n > N$  tal que  $f^n(a_1) \in Y$ , digamos  $f^n(a_1) = a_j = f^s(a_1)$ ,  $0 \leq s \leq N$ . Como  $n > N$  existe  $k > 1$  tal que  $n = k + s$ . Assim  $a_j = f^n(a_1) = f^k(f^s(a_1)) = f^k(a_j)$  o que implica  $k = 0$ . Para ver que  $f(K_1) = K_1$ , basta observar que  $s_0 \in G - K_1 \Leftrightarrow$  para todo  $\varepsilon > 0$  tem-se:

$$G \cap (s_0 - \varepsilon, s_0) \neq \phi \quad \text{e} \quad G \cap (s_0, s_0 + \varepsilon) \neq \phi \quad (*)$$

( $s_0$  não é extremo de intervalo). Seja  $a_1 \in K_1$  e suponhamos que  $f$  seja estritamente crescente; então  $G \cap (a_1, b_1) = \phi \Rightarrow G \cap (f(a_1), f(b_1)) = \phi$ . Mas como  $f(G) = G$ , temos que  $f(a_1) \in K_1$  por (\*). O argumento feito para  $a_1$  é válido para qualquer outro elemento de  $K_1$ , considerando que  $f$  é estritamente monótona e que  $f(G) = G$ .

Assim  $f^N(a_1) = a_i$  ou  $b_i$  para algum  $i$ , e de acordo com a escolha do  $N$ ,  $|f^k(a_i) - f^k(b_i)| < \rho$  para todo  $k \geq N$ . O intervalo  $(a, b) = (a_i, b_i)$  satisfaz as propriedades requeridas. ■

LEMA 7. (Desigualdade fundamental). Seja  $N$  um inteiro e  $[p, q] \subset (-1, 1)$  tal que  $f^k([p, q]) \subset W$  para todo  $k$  satisfazendo  $0 \leq k \leq N$ .

Então

$$\left| \frac{Df^{k+1}(u)}{Df^{k+1}(v)} \right| \leq \exp \left( \frac{M}{L} \sum_{j=0}^k |f^j(p) - f^j(q)| \right),$$

para todo  $k$  satisfazendo  $0 \leq k \leq N$  e  $u, v \in [p, q]$ ;  $M$  e  $L$  são como em (4.5) e (4.7).

Demonstração. Temos que  $f^{k+1}(s) = f \circ f^k(s)$  e portanto  $Df^{k+1}(s) = f'(f^k(s)) \cdot Df^k(s)$ , donde

$$\left| \frac{Df^{k+1}(u)}{Df^{k+1}(v)} \right| = \frac{|f'(f^k(u)) \cdot f'(f^{k-1}(u)) \dots f'(f(u)) \cdot f'(u)|}{|f'(f^k(v)) \cdot f'(f^{k-1}(v)) \dots f'(f(v)) \cdot f'(v)|}$$

$$\text{Então} \left| \log \left| \frac{Df^{k+1}(u)}{Df^{k+1}(v)} \right| \right| \leq \sum_{j=0}^k |\log |f'(f^j(u))| - \log |f'(f^j(v))|| \leq \sum_{j=0}^k \frac{|f''(w_j)|}{|f'(w_j)|} |f^j(u) - f^j(v)|, \text{ onde } w_j \in [f^j(u), f^j(v)].$$

A última desigualdade segue do Teorema do valor médio do cálculo diferencial.

Usando agora as desigualdades (4.5) e (4.7), e que  $f$  sendo estritamente monótona,  $f^j$  também o é, a última expressão acima é majorada por:

$$\frac{M}{L} \sum_{j=0}^k |f^j(u) - f^j(v)| \leq \frac{M}{L} \sum_{j=0}^k |f^j(p) - f^j(q)|.$$

Desta majoração conclui-se a desigualdade fundamental. ■

*Prova do Lema 5.* Demonstraremos que o ponto  $a$  escolhido no Lema 6 satisfaz a (5.1). Faremos isso mostrando que a

série  $\sum_{k=0}^{\infty} Df^k(a)$  converge. Seja então  $a_k = f^k(a)$  e  $b_k = f^k(b)$ . Pelo visto na demonstração do lema 6, é claro que  $G \cap [a_k, b_k] = \{a_k, b_k\}$ , de modo que os intervalos  $[a_k, b_k]$  são todos disjuntos. Temos então

$$(*) \quad 1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k - a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |f^k(b) - f^k(a)| = \sum_{k=0}^{\infty} |Df^k(w_k)| |b - a|$$

para certos  $w_k \in (a, b)$ . Portanto  $\sum_{k=0}^{\infty} Df^k(w_k) \leq \frac{1}{|b-a|}$  converge. (\*\*).

Aqui usamos o fato de  $M^2$  ser orientável para garantir que  $Df^k(w_k)$  é positivo.

Aplicamos agora a desigualdade fundamental (lema 7) ao intervalo  $(a, b)$  (lema 6) pondo  $p = a$ ,  $q = b$ ,  $u = a$ ,  $v = w_k$ . Temos

$$\frac{|Df^k(a)|}{|Df^k(w_k)|} \leq \exp\left(\frac{M}{L} \sum_{j=0}^{k-1} |f^j(b) - f^j(a)|\right) \leq \exp \frac{M}{L},$$

usando (\*), donde  $Df^k(a) \leq (\exp M/L) Df^k(w_k)$ . Levando em conta (\*\*) conclui-se que  $\sum_{k=0}^{\infty} Df^k(a)$  converge, o que prova (5.1).

Para terminar a demonstração, resta provar (5.2). Vamos então determinar  $d > 0$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} Df^k(x) = 0$  uniformemente na vizinhança  $V(a) = \{x; |x - a| < d\}$ . Para isto, levando em conta (5.1), basta determinar  $d > 0$  tal que para  $x \in V(a)$ ,  $\alpha$  e  $k \geq 0$  inteiro tenhamos

$$\begin{aligned} (i) \quad & |f^k(x) - f^k(a)| < \rho \\ (ii) \quad & |Df^k(x)| < \alpha |Df^k(a)| \end{aligned}$$

onde  $\rho = \text{dist}[G, [-1, 1] - W]$ . Usaremos indução em  $k$ .

Para  $k = 0$ , obviamente existem  $d = d_0$ ,  $\alpha$ , tais que (i) e (ii) são trivialmente satisfeitos. Suponhamos que (i) e (ii) são satisfeitos para um certo  $d$  e para  $0 \leq k \leq N$ , sendo

$$d = \min \left\{ d_0, \frac{\rho}{\alpha r}, \frac{1}{r \exp(M/L)} \right\}$$

onde  $\tau = \sum_{k=0}^{\infty} Df^k(a)$  utilizado na prova de (5.1). Mostraremos que para

$k = N + 1$  e o mesmo  $d$ , (i) e (ii) são satisfeitos. De fato aplicando a desigualdade fundamental para  $p = u = x$ ,  $q = v = a$ , em virtude da hipótese de indução e levando em conta o valor de  $d$ , temos

$$\begin{aligned} |Df^{N+1}(x)| &\leq \exp(M/L) \sum_{k=0}^N |f^k(x) - f^k(a)| |Df^{N+1}(a)| \leq \\ &\leq \exp(M/L) \sum_{k=0}^N |Df^k(u_k)| d |Df^{N+1}(a)| \leq \\ &\leq \exp(M/L) \sum_{k=0}^N d \cdot \alpha |Df^k(a)| |Df^{N+1}(a)| \leq \\ &\leq \exp(M/L) d \alpha \tau |Df^{N+1}(a)| \leq \alpha |Df^{N+1}(a)| \end{aligned}$$

o que mostra (ii) para  $K = N + 1$ .

O  $u_k$  usado acima pertence a  $[x, a]$ . Daí segue que para um certo  $\theta \in [x, a]$ ,  $|f^{N+1}(x) - f^{N+1}(a)| = |x - a| |Df^{N+1}(\theta)| < d \alpha |Df^{N+1}(a)| < d \alpha \tau < \rho$  isto é (i) é também satisfeito para  $k = N + 1$ . Observe que (i) se aplica para fazer a indução em (ii) e para garantir o uso da desigualdade fundamental, pois ela garante que  $f^k([x, a]) \subset W$ . O mesmo raciocínio vale para  $x > a$ . ■

Isto prova o teorema no caso orientável. Se  $M^2$  não for orientável, toma-se  $\tilde{M}^2 \rightarrow M^2$  o seu recobrimento duplo orientável e  $\tilde{\varphi}$  o único fluxo que recobre  $\varphi$ , isto é, tal que  $q \circ \tilde{\varphi}_t = \varphi_t \circ q$ . Como  $\tilde{\varphi}$  não admite conjuntos minimais não triviais, o mesmo acontece com  $\varphi$ . ■

O teorema de Schwartz admite a seguinte formulação equivalente:

**1. TEOREMA DE SCHWARTZ.** *Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^2$  numa variedade bidimensional  $M^2$ . Seja  $\gamma$  uma órbita de  $X$ . Se  $\omega(\gamma)$  não contém pontos singulares, então  $\omega(\gamma)$  é uma órbita fechada ou  $\omega(\gamma) = T^2$ , e neste caso  $M^2 = T^2$ .*

**2. COROLÁRIO.** *Seja  $X$  um campo vetorial de classe  $C^2$  em  $T^2$ . Se  $X$  não tem singularidade, ocorre uma das seguintes alternativas: a) o conjunto  $\alpha$  (e  $\omega$ )-limite de toda órbita de  $X$  é uma órbita fechada; b) o conjunto  $\alpha$  (e  $\omega$ ) limite de toda órbita de  $X$  é  $T^2$ .*

**Demonstração.** É suficiente provar que se o  $\omega$ -limite de uma órbita de  $X$  é uma órbita periódica  $\gamma$  então o  $\omega$ -limite de

qualquer outra órbita também é uma órbita fechada. Mas isto decorre do fato de que  $T^2 - \gamma$  é homeomorfa a  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ , onde podemos aplicar o teorema de Poincaré-Bendixson. ■

O seguinte corolário deve-se a Denjoy (1932), que o provou supondo  $f$  de classe  $C^1$  e  $Df$  de variação limitada. A versão que se segue decorre do teorema de Schwartz.

3'. COROLÁRIO. *Seja  $\varphi$  um fluxo de classe  $C^2$  em  $T^2$  induzido por um campo de  $\mathbb{R}^2$  da forma  $(x, y) \rightarrow (1, f(x, y))$ . Seja  $\rho = \rho(f)$  o número de rotação deste fluxo. Então  $\rho$  é irracional se e somente se todas as órbitas de  $\varphi$  são densas em  $T^2$ .*

*Demonstração.* Imediata a partir do Teorema 1'. ■

4'. *Observação.* O corolário acima é falso se  $f$  for de classe  $C^1$  apenas, sem outra hipótese adicional, conforme um exemplo de Denjoy.

## EXERCÍCIOS

1. Seja  $X$  um campo em  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  e considere uma superfície  $M \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^2$  tal que  $p \in M$  implica  $X(p) \in T_p M$ . Mostre que qualquer órbita de  $X$  passando por um ponto de  $M$  está inteiramente contida nessa superfície.

2. Considere o sistema de equações de ordem 2

$$\left. \begin{aligned} x'' + (x^2 - 1)x' + x &= 0 \\ 2y'' + \sqrt{2}(y^2 - 1)y' + y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Mostre que toda órbita de (\*) em  $\mathbb{R}^4(x, x', y, y') - \Gamma$  onde  $\Gamma = (\mathbb{R}^2 \times (0, 0)) \cup ((0, 0) \times \mathbb{R}^2)$  é densa num toro.

3. Considere a família de aplicações  $f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_a(x, y) = a + \sin^2 2\pi y$ ,  $a \in [-1, 1]$ . Seja  $\rho(a)$  o número de rotação de  $X_a = (1, f_a)$ . Prove que  $a \rightarrow \rho(a)$  não é diferenciável em  $a = 0$ . (Sugestão: Para todo  $a \in [-1, 0]$ ,  $X_a$  tem órbita periódica paralela ao eixo dos  $x$ 's, e daí  $\rho(a) = 0$ . Para  $a > 0$ , integrando

$$x = \int_0^y \frac{dy}{a + \sin^2 2\pi y}, \text{ obtém-se } \rho(a) = \sqrt{a^2 + a}$$

4. Seja  $X = (1, f)$  um campo periódico  $C^1$  de  $\mathbb{R}^2$  de período 1 nas duas variáveis. Diz-se que o número de rotação  $\rho$  de  $X$  é estável quando existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz  $|f_1(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  então o número de rotação de  $X_1 = (1, f_1)$  é ainda  $\rho$ . Se o número de rotação  $\rho$  de  $X$  é um racional  $p/q$ , definimos  $g(y) = \varphi(q, y) - p - y$ , onde  $\varphi(t, y)$  é a solução de  $y' = f(t, y)$ ,  $y(0) = y$ . Prove que  $\rho$  é estável se e só se  $\rho$  é racional e a função  $g$  muda de sinal.
5. Seja  $X$  um campo  $C^1$  em uma superfície compacta  $M$ . Então  $X$  possui conjuntos minimais. Ainda, se  $\mu$  é minimal, então para todo  $p \in \mu$  a órbita de  $X$  em  $p$  é densa em  $\mu$ .

## BIBLIOGRAFIA

### *Textos gerais*

- GREENBERG, M. – Lectures on Algebraic Topology, W. A. Benjamin, 1967.
- HOFFMAN, K; KUNZE, R. – Linear Algebra 2<sup>nd</sup> ed. Prentice Hall, 1971.
- KLINE, M. – Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, 1972.
- LIMA, E. L. – Espaços Métricos. Coleção Projeto Euclides, CNPq. 1977.
- LOOMIS, L; STERNBERG, S. – Advanced Calculus. Addison Wesley, 1968.

### *Textos introdutórios*

- BIRKHOFF, G; ROTA, G. C. – Ordinary Differential Equations Gin and Company, 1962.
- KAPLAN, W. – Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley, 1958.
- SIMMONS, G. – Ordinary Differential Equations with Applications and Historical Notes, Mc. Graw Hill, 1972.

### *Textos intermediários*

- ARNOLD, V. – Equations Différentielles Ordinaires, Éditions MIR, 1974.
- GUZMAN, M. – Ecuaciones Diferenciales Ordinárias; Teoria de estabilidad y control, Editorial Alhambra, 1975.
- PONTRYAGIN, L. – Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley, 1962.
- RAINVILLE, E. – Intermediate Differential Equations. 2<sup>nd</sup> ed. Mac-Millan, 1964.
- SMALE, S; HIRSCH, M. – Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, 1974.

*Textos avançados e tratados*

CODDINGTON, E; LEVINSON, N. — Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, 1955.

HALE, J. — Ordinary Differential Equations, J. Wiley, 1969.

HARTMAN, P. — Ordinary Differential Equations, J. Wiley, 1964.

LEFSCHETZ, S. — Differential Equations: Geometric Theory. Interscience, 1959.

PALIS, J; MELO, W. — Introdução aos Sistemas Dinâmicos. Projeto Euclides, CNPq, 1978.

PEIXOTO, M. — Teoria Geométrica das Equações diferenciais. IMPA, Colóquio Brasileiro de Matemática, 1969.

PICARD, E. — Traité D'analyse, Tome III, Gauthier — Villars, 1904.

*Aplicações*

ANDRONOV, A. et al. — Theory of Oscillators, Addison-Wesley, 1966.

BRAUN, M. — Differential Equations and Their Applications, Springer-Verlag, 1975.

# ÍNDICE ALFABÉTICO

- Adjunto formal, 119  
Amortecidas (ver oscilações)  
Arzelá (ver teorema de)  
Assintoticamente estável, órbita, 269  
estável, ponto singular, 269  
Atrator, 65, 67, 73, 227, 284  
Auto-adjunto (ver operador)  
Autofunção, 107  
Autônoma (ver equação)  
Autovalor, 107, 117  
Autovetor, 117
- Base ortonormal, 116  
Bendixson, critério de, 258  
Bernoulli (ver equação de)  
Bessel, desigualdade de, 131  
(ver equação de e função de)
- Campo de vetores, 208, 314  
Centro, 67  
Cetaev, critério de 275  
Chebyshev (ver equação de e polinômio de)  
Ciclo limite, 228  
Compacto (ver operador)  
Condições de contorno, 107, 119  
Conjugação de campos vetoriais, 220  
de sistemas lineares, 70  
local de difeomorfismos, 282  
Conjunto estável, 295  
instável, 295  
invariante, 295  
 $\alpha$ -limite, 243  
 $\omega$ -limite, 243  
minimal 258, 314  
positivamente invariante, 273  
Contorno (ver condições de)  
Contração (ver lema da)  
nas fibras (ver teorema de)  
Curva integral, 208
- Denjoy (ver teorema de)  
Divergência (ver fórmula da)
- Equação autônoma, 202  
confluente hipergeométrica, 197  
de Bernoulli, 23  
de Bessel, 186  
de Chebyshev, 199  
de Euler, 157  
de Laguerre, 198  
de Legendre, 200  
de Legendre associada, 203  
de Riccati, 23
- de Sturm-Liouville, 106  
de variáveis separáveis, 8  
de van der Pol, 257  
diferencial de primeira ordem, 4  
diferencial de ordem superior, 20  
Fuchsiana, 162, 163  
homogênea, 22  
hipergeométrica, 177  
linear, 10, 50  
linear de ordem superior, 95  
Equicontinuidade, 15  
Equivalência de campos vetoriais, 220  
Estabilidade (ver Índice de)  
Estável, ciclo limite, 228  
conjunto, 295  
órbita, 268  
órbita assintoticamente, 269  
polinômio, 99  
subespaço, 77, 283  
variedade, 295  
Euler (ver equação de)  
expoentes, 165  
exponencial de uma matriz, 58
- fase (ver retrato de)  
Floquet (ver teorema de)  
Fluxo, 59, 210  
Fluxo tubular (ver teorema do)  
Floco, 67  
Fonte, 66, 294  
forçadas (ver oscilações)  
Fórmula da divergência, 229  
de Liouville, 56  
de Rodrigues, 202  
Frobenius (ver método de)  
Fuchs (ver teorema de)  
Fuchsiana (ver equação)  
Função de Bessel, 186, 191  
de Lyapounov, 272  
Lipschitziana, 272  
Fundamental, matriz, 54  
sistema, 96
- Gronwall (ver lema de)
- Harmônico simples, movimento, 85  
Hartman (ver teorema de)  
Hilbert, espaço de, 137  
Hiperbólica (ver órbita)  
Hiperbólico, automorfismo, 283  
ponto fixo, 283  
ponto singular, 225  
sistema linear, 77  
Hipergeométrica (ver equação)  
Homogênea (ver equação)

- Identidade do paralelogramo, 131  
 Índice de estabilidade, 77, 225, 297  
 Indicial (ver polinômio)  
 Instável, conjunto 295  
   ponto singular, 275  
   subespaço, 77, 284  
   variedade, 295  
 Integral primeira, 233  
 Intervalo máximo, 17, 209  
 Invariante (ver conjunto)  
 Irregular (ver ponto singular)
- Jordan, forma canônica de,
- Laguerre (ver equação de)  
 Legendre (ver equação de)  
 Lema da contração, 12  
 Lema de Gronwall, 37  
 Lienard (ver teorema de)  
 Linear (ver equação)  
 Liouville (ver fórmula de)  
 Lipschitziana (ver função)
- Matriz de monodromia, 142  
   exponencial de uma, 58  
   forma de Jordan, 72  
   fundamental, 54  
   nilpotente, 60  
 Método de Frobenius, 173  
   de variação de parâmetros, 65  
 Minimal (ver conjunto)  
 Monodromia (ver matriz)
- Nó, 65, 66, 67  
 Norma, 115  
 Normado, espaço, 116  
 Número de rotação, 312
- Operador autoadjunto, 117  
   compacto, 116  
   formalmente auto-adjunto, 119  
 Órbita, 217  
   assintoticamente estável, 269  
   estável, 268  
   fechada hiperbólica, 297  
 Oscilações amortecidas, 86  
   forçadas, 86
- Paralelogramo (ver identidade do)  
 Peano (ver teorema de)  
 Picard (ver teorema de)  
 Poincaré (ver transformação de)  
 Poincaré-Bendixson (ver teorema de)  
 Polinômio de Chebyshev, 199  
   de Laguerre, 198  
   de Legendre, 200  
   estável, 99  
   indicial, 157, 159  
 Ponto fixo, 283  
   fixo hiperbólico, 283  
   regular, 140, 155, 208  
   singular hiperbólico, 225  
   singular instável, 275  
   singular irregular, 157  
   singular regular, 147, 156,  
   singular simples, 144, 147, 156  
 Pré-Hilbertiano, espaço, 116, 131  
 Produto interno, 116, 131  
 Problema de Cauchy, 6, 20, 21  
   de Sturm-Liouville regular, 107  
   de Sturm-Liouville singular, 108
- Quase-polinômio, 99
- Regular (ver ponto)  
 Ressonância, 87  
 Retrato de fase, 217  
 Ricatti (ver equação de)  
 Riemann (ver símbolo de)  
 Rodrigues (ver fórmula de)  
 Rotação (ver número de)
- Schwartz (ver teorema de)  
 Sela, 66  
 Série logarítmica formal, 149  
 Símbolo de Riemann, 167  
 Singular (ver ponto)  
 Solução aproximada, 31  
   de uma equação, 4, 20  
   de um sistema, 19  
   formal, 83, 149  
   máxima, 17  
 Sturm (ver teorema de)  
 Sturm-Liouville (ver problema de)  
 Subespaço estável, 77, 283  
   instável, 77, 284
- Teorema de Arzela, 15  
   de comparação de Sturm, 104  
   de continuidade em relação  
   às condições iniciais e  
   parâmetros, 34  
   de contração nas fibras, 211  
   de Denjoy, 321  
   de diferenciabilidade em  
   relação às condições iniciais  
   e parâmetros, 38, 213, 215  
   de diferenciabilidade das variedades  
   instável e estável, 296, 297

- de existência e unicidade de  
soluções de equações lineares, 15, 50
  - de expansão em séries
  - de autofunções, 122
  - de Floquet, 102
  - do Fuchs, 158
  - de Hartman, 226, 283, 291
  - de Lienard, 255
  - de Peano, 16
  - de Picard, 13
  - de Poincaré-Bendixson, 243
  - de Schwartz, 314, 320
  - de separação de Sturm, 104
- Transformação de Poincaré, 226
- van der Pol (ver equação de)
  - Variação de parâmetros (ver método de)
  - Variáveis separáveis (ver equação de)
  - Variiedades bidimensionais, 313

Chamada: 515.353  
SOTOII  
Registro: 11813  
Tombo: 038521  
Biblioteca: SA

Procedencia: Doação  
PROFESSOR PATRÍCIO S.  
LETELIER  
Data Aquisição: 17/08/2011  
Preço: 1,00



## **jorge sotomayor**

Bacharelou-se em Matemática na Universidade de San Marcos, em Lima, Peru e doutorou-se no IMPA.

Foi Professor do Instituto de Matemática da Universidade de Engenharia (Lima) e na Universidade da Califórnia (Berkeley). Foi Professor visitante da Universidade de Dion (França), Universidad de Los Andes (Venezuela), Universidad de Chile, e no Institut de Hautes Études Scientifiques (França). É pesquisador do IMPA desde 1972.

É autor do livro "Singularidades de Aplicações Diferenciáveis" e de vários trabalhos de pesquisa sobre a Teoria das Bifurcações das Equações Diferenciais, onde seu trabalho é considerado pioneiro no enfoque moderno. Trabalha na inter-relação entre as Teorias de Sistemas Dinâmicos e de Singularidades de Aplicações Diferenciáveis.

É divulgador entusiasta da Teoria das Catástrofes de R. Thom, sobre a qual tem organizado seminários e proferido numerosas palestras.

Admirador do jogo de xadrez, que cultiva com algum empenho, especialmente no calçadão do Leblon.

## **lições de equações diferenciais ordinárias**



**CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico**



**Instituto de Matemática Pura e Aplicada**