

Curso introductorio a las ecuaciones diferenciales

Omar Gil

*Desde esta milonga se dan las gracias
a toda persona que sea capaz
de estar dos minutos ensimismada
tratando aplicada de mejorar*

Fernando Cabrera, en Décimas Porteñas,
Fines (1994)

SIMPLICIDAD DE LA MATEMÁTICA.

Existe una opinión muy generalizada según la cual la matemática es la ciencia más difícil cuando en realidad es la más simple de todas. La causa de esta paradoja reside en el hecho de que, precisamente por su simplicidad, los razonamientos matemáticos equivocados quedan a la vista. En una compleja cuestión de política o arte, hay tantos factores en juego y tantos desconocidos o inaparentes, que es muy difícil distinguir lo verdadero de lo falso. El resultado es que cualquier tonto se cree en condiciones de discutir sobre política y arte —y en verdad lo hace— mientras que mira la matemática desde una respetuosa distancia.

Ernesto Sábato, en *Uno y el Universo* (1945)

0.1 Introducción

Este texto pretende servir como introducción a la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, cubriendo al mismo tiempo algunas nociones básicas del análisis matemático que resultan imprescindibles para dar los primeros pasos en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Ha sido pensado para atender las necesidades del curso de Ecuaciones Diferenciales que corresponde al nuevo plan de estudios de la Facultad de Ingeniería, aunque esperamos que pueda ser útil también en otros contextos. En realidad no es todavía un texto acabado, sino una versión corregida a partir de la experiencia recogida en las ediciones de 1998 y 1999 del curso Ecuaciones Diferenciales, de un libro que está en proceso de elaboración.

En la exposición hemos tratado de priorizar aspectos cualitativos de la teoría básica de las ecuaciones diferenciales: se introduce rápidamente la noción de diagrama de fases y los conceptos de estabilidad e inestabilidad de puntos críticos en ejemplos de ecuaciones diferenciales en la recta; el mismo enfoque se utiliza para ecuaciones en el plano; en el caso de los sistemas lineales en el plano hemos presentado una discusión exhaustiva con el objetivo de que el estudiante pueda apreciar todos los comportamientos dinámicos que pueden presentar; para la ecuación de ondas se enfatiza la presencia de características y la ausencia de efectos regularizantes; hemos dedicado una sección al principio del máximo para la ecuación del calor, y hemos subrayado también el carácter irreversible de la evolución y la presencia de una fuerte regularización, etc.

Existe en la actualidad un buen número de libros de ecuaciones diferenciales ordinarias que enfatizan estos aspectos cualitativos y los combinan con el uso de la enorme capacidad de cálculo que tienen las computadoras modernas. Un buen ejemplo de este tipo de textos es la referencia [BP]. Recomendamos, por ejemplo, la lectura de las secciones dedicadas a los problemas de especies competidoras y de rapaz-presa, como un complemento al capítulo 3 de este texto. La sección dedicada a modelos en los que aparecen fenómenos caóticos es un muy buen complemento a este curso. Otra buena referencia general es el texto [Si]. Sin embargo no es corriente que estos textos ofrezcan una introducción a los temas de análisis que abordaremos en este curso.

Algo similar ocurre con la literatura dedicada a las ecuaciones en derivadas parciales. Es posible encontrar referencias que presentan los métodos de cálculo al nivel que trabajaremos en este curso, pero no discuten algunos aspectos cualitativos básicos y relativamente fáciles de analizar, o textos más avanzados en los que se hace una exposición de parte de la teoría a un nivel más alto que el que podemos alcanzar en una primera introducción. El texto [I] escapa a estas dos categorías y combina la descripción de los aspectos básicos de la teoría y los métodos de cálculo a un nivel perfectamente adecuado para este curso, por lo que recomendamos su consulta. Más difícil es encontrar buenas referencias en español. Aunque la preparación de este material pretende paliar

en parte esta circunstancia, esperamos que no oculte el hecho de que el dominio de otras lenguas, en especial del inglés, es de la mayor importancia, sobre todo para quienes se orientan hacia profesiones científicas o técnicas. Una vez hecho este comentario, tal vez no sea del todo inútil recordar que también es importante el dominio y el buen uso de nuestra propia lengua.

Otra razón para preparar este material fue nuestra convicción de que es útil y deseable aprovechar una introducción a las ecuaciones diferenciales para motivar la necesidad de ocuparse de algunas cuestiones básicas del análisis matemático. De hecho, el estudio de las ecuaciones diferenciales ha sido, y sigue siendo hoy en día, un importante motor para el avance del análisis. Nuestra exposición no es fiel al desarrollo histórico de estos temas, pero hemos tratado de mostrar como surge la necesidad de elaborar diversas herramientas matemáticas al tratar problemas de ecuaciones diferenciales. Y de usar estos problemas como motivación para abordar temas como la convergencia de sucesiones de funciones, el estudio de los espacios vectoriales normados de dimensión infinita, las series de Fourier, etc.

En la presente edición hemos incorporado un buen número de figuras. Esperamos que sean de ayuda para la lectura de este libro. Resta todavía un punto en los que este texto es todavía deficitario: la incorporación de temas de análisis numérico y de ejercicios para ser resueltos con ayuda de una computadora. Sólo están sugeridas tímidamente algunas excursiones en esta dirección, pero creemos que esto debería cambiar en el futuro, y que el curso debería incorporar un tratamiento sistemático de estas cuestiones. También nos hubiera gustado agregar más notas históricas y expandir algunas de las que aparecen en el texto. Recomendamos a quien se interese por este aspecto de la asignatura la consulta de [Si].

0.1.1 Sobre el uso de este material como texto

Esperamos que cada sección pueda ser cubierta en una clase de hora y media. No queremos decir con esto que *todo* el material de cada sección pueda exponerse en una clase de hora y media. Sin embargo, cada una de las secciones del texto está edificada alrededor de una idea central, y confiamos en que, haciendo una selección de ejemplos y los énfasis adecuados, el núcleo central de cada sección pueda cubrirse en una clase. Creemos entonces que, obviando las secciones marcadas como optativas, el contenido de este texto puede ser asimilado por el estudiante en un curso de un semestre. Los prerrequisitos que suponemos son un curso anual de álgebra lineal, que incluya la diagonalización de matrices, una introducción a los espacios con producto interno, nociones de espacios normados y clasificación de formas cuadráticas en \mathbf{R}^2 , y un curso anual de cálculo diferencial e integral, en el que se hayan tratado la integral de Cauchy o la de Riemann y el cálculo con varias variables. Algún contacto previo con las ecuaciones lineales a coeficientes constantes puede ser útil pero

no es imprescindible¹.

Como creemos que es natural esperar que distintos estudiantes lleguen a enfrentarse a los temas que trata este texto con formaciones, intereses, gustos, disponibilidad de tiempo, etc., diferentes hemos indicado al menos dos caminos para ir avanzando en su lectura: un primer nivel de conocimientos mínimos y un segundo nivel formado con material algo más complejo. Hay entonces un cuerpo básico formado por la teoría que se expone en cada sección y los ejercicios marcados con *. El segundo nivel corresponde a los ejercicios marcados con **. Como confiamos en que muchos lectores desearán aprender todavía más hemos incluido ejercicios marcados con *** y secciones optativas indicadas por † (el comienzo de una sección optativa está marcado por † y su final por ††). Ya que estamos hablando de los chirimbolos que encontrarán en el texto mencionemos que ♠ indica el fin de una observación y ♣ el de un ejemplo. El diamante \diamond señala el fin de una prueba. Con \heartsuit hemos marcado aquellos ejercicios cuyo contenido será utilizado más adelante.

También recomendamos consultar la bibliografía, cosa que es útil para comprender mejor las cuestiones que se exponen en este texto y para ampliar el horizonte haciendo algunas incursiones en temas que no trataremos. En este sentido, vale la pena tener en cuenta que los temas de análisis y ecuaciones diferenciales que aquí presentamos son muy vastos y tienen gran diversidad de aplicaciones a otras disciplinas, entre ellas la ingeniería. En realidad en este libro no haremos más que arañar la cáscara de todo este mundo tan rico y hemos debido omitir muchos temas que nos hubiera gustado incluir. Con el ánimo de guiar al lector en la consulta de la bibliografía hemos adoptado como referencias básicas los textos [BP], [I] y [CJ1]. Éste último contiene una introducción al estudio de la convergencia de sucesiones de funciones y a las series de Fourier, que son los dos temas que constituyen el núcleo de los tópicos de análisis matemático que se cubren en este texto. También [Si] es una buena referencia general para el curso. En algunos casos aparecen referencias puntuales a otros libros para ampliar el tratamiento de cierto temas específicos.

0.1.2 Agradecimientos

Creemos que esta tercera versión de este curso introductorio a las ecuaciones diferenciales es mejor que las anteriores, en gran parte gracias a los aportes de muchas personas que nos hicieron llegar sus comentarios y sugerencias. Entre ellos, los compañeros del Instituto de Matemática y Estadística “Prof. Ing. Rafael Laguardia” con los que compartimos el dictado de la asignatura en 1998 y 1999. Eleonora Catsígeras, Pablo Fernández, Nancy Guelman, Nicolás Loeff, Gonzalo Perera y Jana Rodríguez han aportado muchas veces sus puntos de vista y dedicado parte de su tiempo a atender diversas consultas sobre la elaboración de este material. Muchos estudiantes nos hicieron llegar su

¹es más que suficiente el material que se trata en las secciones 3.4 y 3.16 de [CJ1]

opinión de que las primeras versiones del texto resultaron ser una buena ayuda para abordar el curso Ecuaciones Diferenciales, lo que es un auténtico aliento. Queremos destacar también la caza sistemática de errores y erratas que hizo Héctor Patrón a lo largo del curso de 1998 y que nos permitió eliminar un buen número de defectos del texto original. Laura Aspirot y Nicolás Loeff hicieron con muchísima dedicación todas las figuras que aparecen en el texto, con lo que lograron mejorar enormemente su contenido.

Montevideo, julio de 2000

0.1.3 Comentarios a la versión del año 2002

En esta nueva impresión del texto hemos eliminado algunos errores y erratas que estaban presente en la versión anterior, e incorporado algunas pocas aclaraciones e informaciones adicionales. La estructura general del texto se ha mantenido. Agradecemos la lectura crítica y las sugerencias de Heber Enrich, Pablo Gamazo y Guillermo Reyes. Algunos de sus aportes han sido recogidos en esta nueva edición.

Montevideo, diciembre de 2001

0.2 El alfabeto griego

Utilizaremos reiteradamente las letras griegas en las fórmulas de este texto. Para que todos recordemos como se llaman las listamos a continuación.

α	A	alfa	
β	B	beta	
γ	Γ	gamma	
δ	Δ	delta	
ϵ	E	épsilon	
ζ	Z	zeta	
η	H	eta	
θ	Θ	theta	
ι	I	iota	
κ	K	kappa	(también cappa)
λ	Λ	lambda	
μ	M	my	
ν	N	ny	
ξ	Ξ	xi	
o	O	ómicron	
π	Π	pi	
ρ	P	rho	
σ	Σ	sigma	
τ	T	tau	
υ	Υ	ipsilon	
φ	Φ	phi	
χ	X	ji	
ψ	Ψ	psi	
ω	Ω	omega	

Índice General

0.1	Introducción	i
0.1.1	Sobre el uso de este material como texto	ii
0.1.2	Agradecimientos	iii
0.1.3	Comentarios a la versión del año 2002	iv
0.2	El alfabeto griego	v
1	Ecuaciones diferenciales ordinarias: ejemplos y nociones básicas	1
1.1	Ecuaciones diferenciales autónomas en la recta	5
1.1.1	Las nociones básicas de la teoría	5
1.1.2	Primer ejemplo y más nociones básicas.	11
1.2	Estabilidad e inestabilidad de los puntos críticos	17
1.2.1	Diagrama de fases para las ecuaciones en \mathbf{R}	22
1.3	Ecuaciones autónomas en el plano	34
1.3.1	Estudio de algunas ecuaciones diferenciales autónomas en \mathbf{R}^2	41
1.4	Cantidades que se conservan o decrecen sobre las órbitas	56
1.4.1	Estudio de las ecuaciones del péndulo	58
1.5	Cambios de coordenadas y nociones sobre bifurcaciones	68
1.5.1	Ecuaciones equivalentes. Cambios de coordenadas.	69
1.5.2	Cambios de variables para las ecuaciones lineales	76
1.5.3	Ejemplos sencillos de bifurcaciones.	88
1.6	Ecuaciones lineales a coeficientes constantes I	96
1.6.1	El caso diagonalizable	97
1.6.2	La forma canónica cuando A tiene un valor propio real doble y no es diagonalizable	99
1.6.3	Estudio del plano de fases para las formas canónicas	102
1.6.4	El análisis de la ecuación original	104
1.7	Ecuaciones lineales a coeficientes constantes II	108
1.7.1	El caso con valores propios complejos: la forma canónica real	108
1.7.2	Resolución de la ecuación en su forma canónica	113
1.7.3	El plano de fases asociado a la forma canónica	119

1.7.4	Resolución del problema original	121
1.7.5	Algunos comentarios finales sobre la estabilidad e inestabilidad del origen.	125
1.8	Resolución explícita de algunas ecuaciones diferenciales	126
1.8.1	Ecuaciones lineales no homogéneas con matriz constante	127
1.8.2	Otros ejemplos que pueden resolverse completamente	137
1.9	Construcción de soluciones para las ecuaciones diferenciales ordinarias	141
1.9.1	† Método de Euler.	142
1.9.2	Método iterativo o de Picard	143
1.9.3	Convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones	160
2	Elementos de análisis en espacios de funciones	163
2.1	Convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones	166
2.1.1	Criterios de convergencia uniforme	170
2.1.2	Condición de Cauchy para la convergencia uniforme	176
2.1.3	Series de funciones	178
2.1.4	Convergencia y continuidad	180
2.2	Propiedades de la convergencia uniforme	182
2.2.1	Convergencia y continuidad revisitadas	182
2.2.2	Convergencia e integración	188
2.2.3	Convergencia y derivación	193
2.3	Espacios normados	195
2.3.1	† Sucesiones de Cauchy y completitud en espacios normados	202
2.3.2	† Una versión abstracta del teorema de Picard.	205
3	Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría básica	209
3.1	Resultados de existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones diferenciales ordinarias	212
3.1.1	El teorema de Picard en su versión general	222
3.2	Algunos aspectos cualitativos de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias	232
3.2.1	El flujo asociado con una ecuación diferencial	232
3.2.2	Soluciones distintas de una ecuación diferencial no pueden cortarse	236
3.2.3	Estudio cualitativo de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias	238
3.3	Estabilidad y funciones de Liapunov	245
3.4	Estabilidad y linealización alrededor de los puntos críticos	265
3.4.1	Estabilidad de órbitas	271

4	Ecuaciones en derivadas parciales	273
4.1	Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden	277
4.1.1	El problema de contorno para ecuaciones lineales de orden 1	279
4.1.2	† Propiedades de la solución del problema de contorno.	289
4.1.3	Algunos problemas con ecuaciones cuasilineales.	291
4.1.4	† Una noción débil de solución	292
4.2	Ecuaciones de segundo orden	295
4.2.1	Teoría local para las ecuaciones lineales de segundo orden	295
4.3	La ecuación de ondas en la recta	304
4.4	Integrales de energía	315
4.4.1	Integrales de energía. Unicidad de soluciones	315
4.5	La ecuación del calor en un intervalo	319
4.5.1	Problemas de valores iniciales y de contorno para la ecuación del calor en un intervalo	319
4.5.2	El método de separación de variables para la ecuación del calor en una barra	321
4.5.3	Datos iniciales con coeficientes sumables	327
4.5.4	Otras aplicaciones del método de separación de variables	333
4.6	El principio del máximo para la ecuación del calor. Unicidad de soluciones.	336
5	Series de Fourier	347
5.1	La geometría de las series trigonométricas	350
5.2	La convergencia de las series de Fourier en $\ \cdot\ _2$	361
5.2.1	El marco natural para la teoría	364
5.3	El decaimiento de los coeficientes de Fourier	371
5.3.1	Funciones con una derivada débil en L^2	372
5.3.2	† Otros resultados sobre la convergencia de las series de Fourier	381
5.3.3	Las sutilezas de la teoría de las series de Fourier en L^2	382
5.3.4	Aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales	385
A	Prerrequisitos	i
A.1	Nociones sobre curvas y campos vectoriales	iii
A.2	Espacios vectoriales con producto interno	x
A.2.1	Una noción de aproximación: la proyección	xiii
B	Las ecuaciones de ondas y del calor	xvii
B.1	La ecuación de ondas	xix
B.2	La ecuación del calor	xxiii

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias: ejemplos y nociones básicas

En este capítulo hacemos una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias, que está destinada a presentar aspectos básicos de esta área de la matemática a través de una serie de ejemplos. Esencialmente, trabajaremos con ecuaciones diferenciales para las que es posible calcular completamente sus soluciones, aunque enfatizaremos varios aspectos teóricos y cualitativos que no dependen de las fórmulas que manipulemos.

Pasemos a ocuparnos del contenido de este capítulo. La primera sección está destinada al análisis de las ecuaciones diferenciales autónomas en la recta, y tiene como principal objetivo mostrar que una buena parte de la información acerca del comportamiento de las soluciones de estas ecuaciones puede deducirse de la representación de su *diagrama de fases*. Ésta es una herramienta de naturaleza geométrica, y muy fácil de obtener en el caso de ecuaciones en la recta. En particular, todo lo que tiene que ver con la *estabilidad e inestabilidad* de los puntos críticos de la ecuación (soluciones que corresponden a estados de “reposo”) puede obtenerse de estos diagramas. La estabilidad e inestabilidad de puntos críticos son el tema central de la sección 1.2.

En la sección 1.3 se aborda el estudio de los diagramas de fases, estabilidad e inestabilidad para ecuaciones diferenciales autónomas definidas en el plano \mathbf{R}^2 . En este caso las soluciones de las ecuaciones diferenciales son curvas en \mathbf{R}^2 , por lo que hemos incluido en el apéndice una sección sobre este tema para aquellos estudiantes que tengan una formación más débil en los temas de curvas y campos vectoriales.

Existen funciones que permanecen constantes al ser evaluadas sobre las soluciones de una ecuación diferencial, o que son crecientes o decrecientes. La sección 1.4 está destinada a presentar algunos ejemplos de esta situación y a mostrar que es posible extraer mucha información sobre la ecuación diferencial cuando se dispone de una función de este tipo. Esta sección es, parcialmente, un adelanto de la sección que dedicaremos, cuando construyamos una teoría más general para las ecuaciones diferenciales ordinarias en el capítulo 3, a explotar sistemáticamente el uso de las *funciones de Liapunov* (funciones decrecientes sobre las soluciones de una ecuación diferencial) para estudiar la estabilidad de los puntos críticos. También nos ocupamos de mostrar como la existencia de una cantidad que se mantiene constante sobre las soluciones permite representar muy bien el diagrama de fases asociado con una ecuación diferencial.

En la sección 1.5 estudiamos el efecto de los cambios de coordenadas sobre las ecuaciones diferenciales. En particular, mostramos que un cambio de coordenadas puede ser una herramienta adecuada para resolverlas y discutimos como aplicar esta herramienta para estudiar las ecuaciones lineales en el plano, empleándola en el caso en que la matriz de la ecuación es diagonalizable. En las secciones 1.6 y 1.7 se aborda sistemáticamente el estudio de todas las ecuaciones diferenciales lineales en el plano, incluyendo la representación detallada de sus planos de fase.

Luego de aprender como resolver cualquier ecuación lineal con coeficientes constantes nos concentraremos en otras ecuaciones para las que podemos calcular las soluciones. Éste es el material que se cubre en la sección 1.8.

Finalmente, en la última sección de este capítulo, la sección 1.9, intentaremos independizarnos de la necesidad de calcular explícitamente las soluciones de una ecuación diferencial, dando un primer paso en la búsqueda de un resultado general e existencia y unicidad de soluciones. Al hacerlo encontraremos una serie de limitaciones en nuestros conocimientos de análisis que serán resueltas en el capítulo 2. En el capítulo 3 retomaremos y completaremos la discusión de la sección 1.9.

1.1 Ecuaciones diferenciales autónomas en la recta

En esta sección y en la siguiente recurriremos al estudio de las ecuaciones diferenciales autónomas en \mathbf{R} para introducir algunas nociones básicas relativas a los comportamientos dinámicos asociados con una ecuación diferencial ordinaria.

1.1.1 Las nociones básicas de la teoría

Con la expresión *ecuaciones diferenciales autónomas en la recta* nos estamos refiriendo a ecuaciones de la forma $\dot{x} = f(x)$. La función f que aparece en el miembro de la derecha es una función real y continua definida en un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}$. En muchos de los casos que consideraremos Ω será todo \mathbf{R} , pero es preferible permitir este marco un poquito más general en el que Ω puede estar estrictamente incluido en \mathbf{R} . Recordemos que la notación \dot{x} indica la derivada de la función x respecto a su variable independiente. Si llamamos t a esta variable entonces $\dot{x}(t) = dx/dt(t)$

Soluciones de la ecuación

Nuestro primer paso será introducir una definición de soluciones para las ecuaciones diferenciales.

Definición 1.1. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL AUTÓNOMA
Sea f una función continua definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbf{R}$. Diremos que una función $x : I \rightarrow \Omega$, definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbf{R}$, es una *solución* de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.1)$$

si la igualdad

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

se satisface para todos los valores de t en el intervalo I .

Ejemplo 1.1.1. Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = 1 + x,$$

que corresponde a tomar $f(x) = x + 1$ en (1.1). La función $x(t) = e^t - 1$ es una solución que está definida en todo \mathbf{R} . Para verificarlo no hay más que sustituir $x(t)$ por su expresión. Al calcular la derivada obtenemos

$$\dot{x}(t) = \frac{d(e^t - 1)}{dt} = e^t,$$

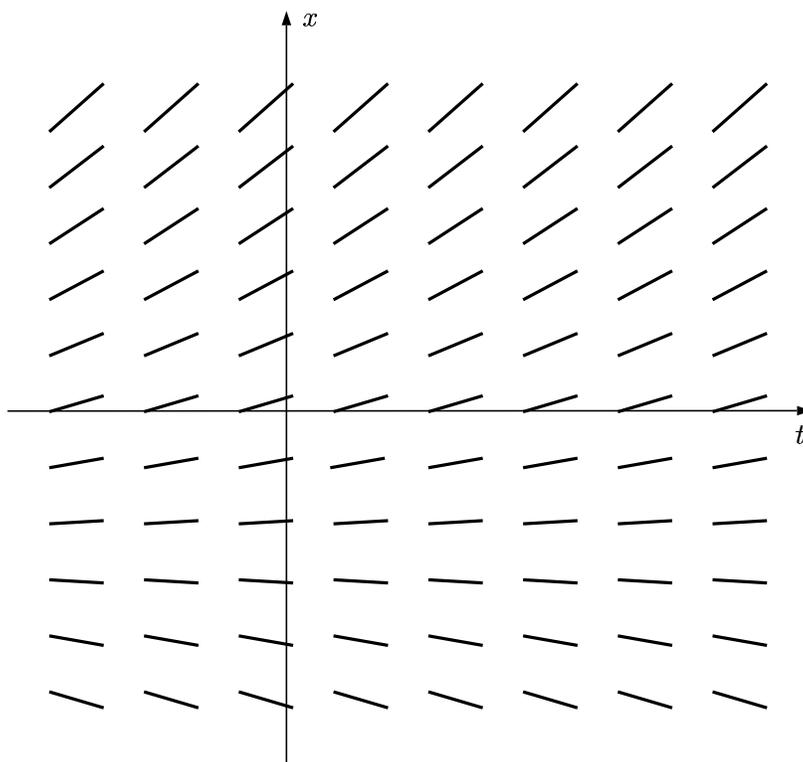


Figura 1.1: el campo de pendientes de $\dot{x} = 1 + x$

en tanto que $1 + x(t) = 1 + (e^t - 1) = e^t$. Por lo tanto hemos encontrado una solución de la ecuación. También

$$x(t) = 3e^t - 1$$

es solución de $\dot{x} = 1 + x$ y, en general, lo es cualquier función de la forma

$$x(t) = ce^t - 1. \quad (1.2)$$

Ejercicio 1.1. *¹ Mostrar que para cualquier constante $c > 0$ la función

$$x(t) = \sqrt{2t + c},$$

¹Los ejercicios del libro marcados con un asterisco, como éste, corresponden al material que consideramos básico y que constituye el núcleo central del texto. Los que tienen dos asteriscos ** tienen que ver, en general, con profundizaciones y extensiones. Esperamos que el lector de este texto llegue a familiarizarse con la teoría y ejemplos —excepto las partes marcadas entre dagas †—, y los ejercicios marcados * y **. Los ejercicios marcados con *** son excursiones en direcciones diversas. Digamos desde ya que, aunque en líneas generales la dificultad de los ejercicios tiende a crecer junto con el número de asteriscos, **los asteriscos**

definida en el intervalo $(-c/2, +\infty)$ es una solución de la ecuación $\dot{x} = 1/x$. ♣

Observación 1.1.2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El hecho de que una función $x(t)$ sea solución de una ecuación diferencial ordinaria $\dot{x} = f(x)$ tiene una interpretación geométrica muy clara: la pendiente (derivada) de $x(t)$ en cada punto t coincide con el valor $f(x(t))$. En otras palabras, si en cada punto del plano (t, x) dibujamos la recta con pendiente $f(x)$ y luego graficamos una solución $x(t)$ de la ecuación diferencial, encontraremos que en cada punto $(t, (x(t)))$ sobre el gráfico éste es tangente a la recta que corresponde a ese punto. En otras palabras, la ecuación genera un *campo*

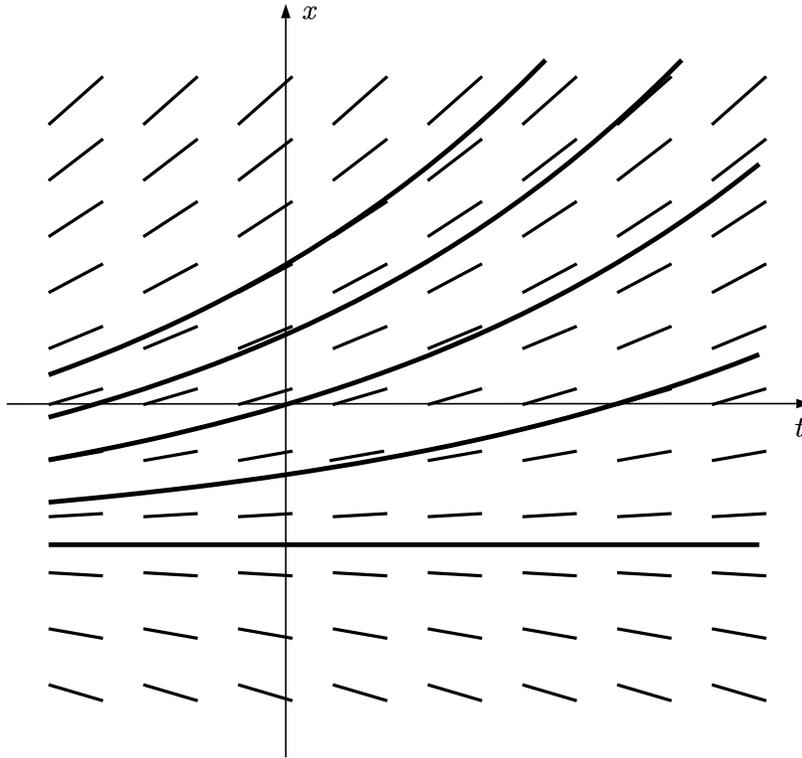


Figura 1.2: las soluciones y el campo de pendientes

de pendientes en el plano (t, x) , y sus soluciones son curvas tangentes a ese campo. En la figura 1.1 se muestra el campo de pendientes que corresponde a la ecuación $\dot{x} = 1 + x$. En tanto que en la figura 1.2 mostramos algunas

no distinguen necesariamente el nivel de dificultad: hay material básico, que forma parte de los conocimientos imprescindibles para avanzar en la teoría, que es más difícil de manejar que otros temas que aparecen tratados en los ejercicios ** o ***.

soluciones de la ecuación superpuestas al campo de pendientes. La solución que pasa por el punto $t = 0$, $x = 0$, es $x(t) = e^t - 1$.

Ejercicio 1.2. * Hacer la verificación gráfica con la solución $3e^t - 1$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = 1 + x$.

En el ejemplo 1.1.9 aparece otra interpretación de las ecuaciones diferenciales: son una herramienta útil para modelar la variación de una cantidad x a medida que transcurre el tiempo t . Este punto de vista aparecerá reiteradas veces a lo largo del texto, de modo que por el momento no extendemos más este comentario. ♠

Observación 1.1.3. SOBRE LA REGULARIDAD DE LAS SOLUCIONES

Notemos que la igualdad $\dot{x}(t) = f(x(t))$ en la definición de solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x)$$

exige que la derivada $\dot{x}(t)$ exista en cada punto t perteneciente al intervalo I sobre el que está definida la función $x(t)$. Esto implica que $x(t)$ es una función continua de t , porque todas las funciones derivables son continuas. Por lo tanto $f(x(t))$ también es continua y resulta entonces que $\dot{x}(t)$ es continua. En definitiva, una solución de una ecuación diferencial es siempre de clase C^1 (recordemos que decimos que una función es de clase C^k si tiene derivadas hasta el orden k y éstas son continuas, y es C^∞ si tiene derivadas continuas de cualquier orden). ♠

Problemas de valores iniciales para una ecuación diferencial

En el ejemplo 1.1.1 y el ejercicio 1.1 vimos que una ecuación diferencial puede tener muchas soluciones. De hecho, la constante c que aparece en ambas situaciones puede ser cualquier número real, lo que da lugar a la aparición de infinitas soluciones. Otra manera de decir esto es que existe una familia de soluciones que depende de un parámetro $c \in \mathbf{R}$. Esta situación es completamente general y, dada una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, permite formular un *problema de valores iniciales* para la ecuación, que consiste en resolverla junto con una condición de la forma $x(t_0) = x_0$, donde t_0 y x_0 están fijados de antemano, a la que llamaremos *condición inicial* o *dato inicial*. Esto conduce a resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Ejemplo 1.1.4. La solución $x(t) = e^t - 1$ del ejemplo 1.1.1 toma el valor inicial $x(0) = 0$. En realidad, tal como veremos más adelante, es la única solución del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Si queremos encontrar la solución con condición $x(0) = x_0$ entonces tenemos que elegir la constante c en (1.2) resolviendo $c - 1 = x_0$, y la solución resulta ser

$$x(t) = (x_0 + 1)e^t - 1.$$

En general, la solución $x(t)$, cuando el dato inicial x_0 está fijado en un tiempo t_0 cualquiera, es

$$x(t) = (x_0 + 1)e^{(t-t_0)} - 1.$$

Notemos que esta función es una solución de la ecuación y satisface $x(t_0) = x_0$. Observemos también que la diferencia con el caso anterior es sólo una traslación en el tiempo. Esto es una consecuencia de que el tiempo no aparezca en la ecuación diferencial $\dot{x} = 1 + x$ de manera explícita. ♣

Observación 1.1.5. En condiciones bastante generales la solución de los problemas de valores iniciales (1.3) es única². Por esta razón, siempre que estemos en situaciones en las que valgan los resultados de unicidad hablaremos de *la* solución del problema, en vez de referirnos a *una* solución de (1.3). ♠

Ejercicio 1.3. * Hallar la solución de $\dot{x} = 1/x$ que satisface $x(0) = 10$.

Nuestro próximo ejercicio vuelve sobre el comentario que cierra el ejemplo 1.1.4. Ver también la observación 1.1.7

Ejercicio 1.4. * INVARIANCIA RESPECTO A TRASLACIONES EN EL TIEMPO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES AUTÓNOMAS.

1. (a) Hallar la solución $x(t)$ de $\dot{x} = 1/x$ con dato inicial $x(0) = 20$.
 (b) Llamemos $y(t)$ a la solución de la misma ecuación con dato $y(0) = 10$. Hallar el tiempo t_0 en el que se tiene $y(t_0) = 20$.
 (c) Mostrar que $x(t) = y(t + 150)$
2. En general, mostrar que si $x(t)$ es la solución del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

entonces la función y definida por la fórmula $y(t) = x(t + t_0)$ es solución de la ecuación con dato inicial $y(0) = x_0$.

3. Interpretar geoméricamente esta propiedad, explorando su conexión con los comentarios que se hicieron en la observación 1.1.2

²preferimos obviar aquí las sutilezas que hacen necesario considerar soluciones maximales para poder demostrar un resultado de unicidad. Estos detalles serán considerados en el capítulo 3, cuando presentemos la definición de *solución maximal*. Por ejemplo, mostraremos en ese capítulo que si f es una función de clase C^1 la solución es única

Observación 1.1.6. La razón del nombre “autónoma”, para las ecuaciones en las que el tiempo no aparece explícitamente, proviene del hecho de que las leyes de la naturaleza no dependen del tiempo. Por lo tanto, las ecuaciones que gobiernan la evolución de los sistemas aislados son autónomas. Por ejemplo, al escribir las ecuaciones del movimiento de los planetas alrededor del sol, si despreciamos la influencia de todo lo que está fuera del sistema solar, obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales en el que el tiempo no aparece de manera explícita. Sin embargo, si queremos estudiar un sistema sometido a la influencia de algo exterior a él el efecto de lo que está fuera depende, en la mayoría de los casos, explícitamente en el tiempo y esto se refleja en que las ecuaciones que gobiernan el sistema resultan no ser autónomas.

Veamos un ejemplo de esto. Supongamos que queremos colocar un objeto en órbita alrededor de la luna y para estudiar como hacerlo vamos a despreciar el efecto de todo lo que no sea la tierra, la luna y el propio satélite. Una forma de atacar el problema es estudiar primero el sistema tierra-luna y determinar completamente las posiciones, que dependerán del tiempo, de la tierra y la luna a las que llamaremos $T(t)$ y $L(t)$. Una vez hecho esto ponemos el satélite en nuestro sistema tierra-luna. La fuerza gravitatoria ejercida por la tierra y la luna en cada punto del espacio puede calcularse a partir de nuestro conocimiento de $L(t)$ y $T(t)$ y si asumimos, como es razonable hacer, que nuestro satélite artificial es suficientemente pequeño como para no alterar la marcha del conjunto tierra-luna obtendremos un sistema de ecuaciones diferenciales, en las que el tiempo aparece explícitamente, que gobierna el movimiento del satélite. En este caso obtenemos una ecuación no autónoma, porque sobre nuestro satélite actúa un sistema de fuerzas externas fijadas de antemano. Otra manera de hacer este cálculo es utilizar las leyes de Newton para el sistema tierra-luna-satélite. En este caso obtendremos ecuaciones diferenciales en las que el tiempo no aparece de manera explícita. ♠

Observación 1.1.7. El término “inicial” para la condición $x(t_0) = x_0$ está justificado porque en muchos casos deberemos interpretar t como el tiempo y a la ecuación como la ley que gobierna la evolución de un sistema. Al fijar el valor de la solución en tiempo t_0 estamos eligiendo el estado x_0 a partir del cual las cosas comienzan a evolucionar. Es interesante vincular este comentario con el anterior y con el contenido del ejercicio 1.4. Cuando la ecuación es autónoma el tiempo no interviene explícitamente en el problema. Esto significa que si estamos en un punto x_0 y dejamos evolucionar el sistema a partir de ahí la evolución posterior será la misma, independientemente de que la empecemos en un instante t_0 o t_1 . Observaremos entonces “la misma solución” en ambos casos, sólo que estará trasladada en el tiempo. La que está en x_0 a tiempo t_1 hace lo mismo que la que está en x_0 a tiempo t_0 , pero $t_1 - t_0$ unidades de tiempo más tarde. Por esta razón, para las ecuaciones autónomas nos concentraremos en el caso particular en el que el dato inicial x_0 se fija en

el instante $t_0 = 0$. Esto no supone ninguna pérdida de generalidad, porque el caso general se recupera haciendo una traslación en el tiempo. ♠

Observación 1.1.8. Es importante subrayar que en la definición de solución el conjunto I es un intervalo *conexo* de la recta. Esto excluye de nuestra noción de solución funciones que estén definidas en la unión de dos intervalos disjuntos. Veamos esto con un ejemplo. La función $x(t) = 1/t$ está definida en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ y satisface $\dot{x} = -x^2$, pero **no** diremos que es una solución de la ecuación. En realidad la fórmula $1/t$ define dos soluciones distintas. Una es la solución $x_1 : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbf{R}$ tal que a cada $t < 0$ le asocia $x_1(t) = 1/t$. La segunda es $x_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ que está definida para los valores positivos de t por la misma fórmula. Pero se trata de una solución diferente. ♠

1.1.2 Primer ejemplo y más nociones básicas.

En esta sección presentaremos algunos ejemplos sencillos, con el objetivo de ir introduciendo algunas nociones de interés.

Ejemplo 1.1.9. UN MODELO PARA EL CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN. Indiquemos con $x(t)$ el número de individuos de una población en el instante t y supongamos que el número de nacimientos (o si se prefiere el número de nacimientos menos el de muertes) por unidad de tiempo es proporcional a la población presente en cada momento, con una constante de proporcionalidad $a > 0$ (esta constante representa, por ejemplo, el número de nacimientos por año y por habitante; o el incremento de una población de bacterias o de células cancerígenas por unidad de tiempo, dividido el número total de bacterias o células presentes). Si conocemos $x(t)$, la población en el tiempo $t + \Delta t$ será entonces

$$x(t + \Delta t) \simeq x(t) + ax(t)\Delta t, \quad (1.6)$$

cosa que debe interpretarse como

$$x(t + \Delta t) = x(t) + ax(t)\Delta t + \epsilon(\Delta t)\Delta t, \quad (1.7)$$

con $\epsilon(\Delta t) \rightarrow 0$ al hacer $\Delta t \rightarrow 0$. Operando con esta expresión obtenemos

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = ax(t) + \epsilon(\Delta t), \quad (1.8)$$

y haciendo $\Delta t \rightarrow 0$ resulta la sencilla ecuación diferencial lineal

$$\dot{x} = ax, \quad a > 0. \quad (1.9)$$

Si en el instante inicial $t = 0$ la población tiene x_0 individuos y queremos prever cómo va a crecer la población a partir de ese momento el problema que nos interesa resolver es

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

La solución de este problema es conocida y fácil de encontrar. En cualquier caso, es un cálculo directo verificar que se trata de

$$x(t) = x_0 e^{at}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (1.11)$$

Algunas observaciones se imponen:

- si interpretamos la ecuación como un intento de modelar el crecimiento de una población el caso $x_0 < 0$ carece de sentido. De todos modos lo estudiaremos porque no es esa la única aplicación posible de (1.9) y por su interés para el resto de la teoría.
- La fórmula (1.11) no sólo permite prever lo que ocurrirá en el futuro ($t > 0$), en realidad nos dice cuanto vale $x(t)$ (la cantidad de individuos de la población en nuestro ejemplo) para cualquier instante t , una vez conocido el valor $x(0) = x_0$.
- Nuestra solución predice un crecimiento exponencial de la población, algo que parece alarmante en cuanto pase un tiempo más o menos largo. Veremos luego como modificar nuestro modelo para obtener algo más realista.
- La fórmula (1.11) dice que hay en realidad tres tipos de soluciones:
 1. las que tienen $x_0 > 0$. Estas son siempre positivas, monótonas crecientes y tienden a $+\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$ y a 0 cuando t tiende a $-\infty$. En particular $x(t)$ recorre todos los valores del intervalo $(0, \infty)$ cuando t va de menos a más infinito;
 2. las que tienen $x_0 < 0$ son, en algún sentido, parecidas a las anteriores. Son siempre negativas, decrecientes, tienden a $-\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$ y a 0 cuando $t \rightarrow -\infty$. En este caso $x(t)$ recorre todos los valores del intervalo $(-\infty, 0)$;
 3. por último la sencilla solución $x(t) \equiv 0$, con dato inicial $x_0 = 0$. Notemos que el valor 0 es justamente el que anula el miembro de la derecha en (1.9).
- La fórmula (1.11) también da la solución del problema (1.10) cuando la constante a es negativa o nula. Sin embargo el comportamiento de la ecuación es diferente en uno y otro caso. Volveremos sobre esto más adelante.

Observación 1.1.10. Quizás el aspecto más importante de la discusión que precede es que cualquier solución de (1.9) con $a > 0$, distinta de la solución constante $x \equiv 0$, se aleja de $x = 0$ hacia el infinito, independientemente de que tan cerca de 0 esté la condición inicial. Este es un comportamiento dinámico bien interesante. ♠

Antes de cerrar este ejemplo notemos que derivamos la ecuación a partir de algunas hipótesis sencillas sobre el problema que estábamos considerando. Luego pudimos hacer algunas predicciones empleando el modelo matemático simple al que llegamos. Entre ellas está la previsión de que la población crecerá exponencialmente. Esto muestra que nuestro modelo tendrá un rango de validez limitado a ciertos valores de x , y sugiere que hay que modificarlo para que se ajuste mejor a lo que ocurre para x muy grande. Observemos entonces que al buscar un modelo matemático para un problema no nos limitamos a utilizar algunas hipótesis básicas, traducirlas en las fórmulas apropiadas y terminar allí la tarea, sino que a partir de lo que las matemáticas del modelo dicen podemos intentar encontrar descripciones más afinadas de la realidad, que tengan en cuenta efectos que pasaron inadvertidos en un primer análisis. ♣

Puntos críticos, soluciones estacionarias.

Tal como vimos, el hecho de que ax se anule en $x = 0$ tiene como consecuencia inmediata que la función constante $x(t) \equiv 0$ es una solución de (1.9). En general, si x_0 es una raíz de f , es decir si $f(x_0) = 0$, entonces la función constante $x(t) = x_0$ es una solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$. En efecto, si para cada $t \in \mathbf{R}$ definimos $x(t) = x_0$ la función (constante) que resulta es de clase C^∞ , satisface

$$\dot{x}(t) = 0 = f(x_0) = f(x(t))$$

y la condición inicial $x(0) = x_0$.

Como veremos en lo que sigue, las soluciones constantes, como la solución

$$x(t) = x_0, \quad t \in \mathbf{R}$$

que acabamos de construir, son muy importantes para comprender la dinámica asociada a las ecuaciones diferenciales. Vale la pena entonces introducir un par de definiciones que recojan estos conceptos.

Definición 1.2. PUNTOS CRÍTICOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES
Si $f(x_0) = 0$ diremos que x_0 es un *punto crítico* de $\dot{x} = f(x)$.

Definición 1.3. SOLUCIONES ESTACIONARIAS

Si x_0 es un punto crítico diremos que la solución constante $x(t) \equiv x_0$ es una *solución estacionaria* de la ecuación $\dot{x} = f(x)$.

Observación 1.1.11. FLUJO ASOCIADO A UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL
Recordemos que el valor de una solución de una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ en un instante dado depende tanto del instante t que consideremos como de la condición inicial x_0 que hayamos fijado en el tiempo $t = 0$. Por lo tanto vamos a introducir una función Φ que recoja toda esta información de la siguiente

manera: si $x(t)$ es la solución con dato x_0 definimos $\Phi(x_0, t) = x(t)$. Esta función depende entonces de la condición inicial, que indicaremos simplemente como x , y del tiempo t y la llamaremos *flujo asociado a la ecuación diferencial*, o simplemente *flujo*. En resumen, al par (x, t) el flujo Φ le asocia el valor en t de la solución de la ecuación que tiene x como dato inicial.

Ejemplo 1.1.12. La ecuación $\dot{x} = ax$ tiene asociado el flujo $\Phi(x, t) = xe^{at}$, que está definido en todo $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. ♣

Observación 1.1.13. Si x_0 es un punto crítico para una ecuación diferencial entonces el flujo Φ satisface $\Phi(x_0, t) = x_0$, para todo t . ♠

Una forma de caracterizar Φ es decir que cumple

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(x, t) = f(\Phi(x, t)), \\ \Phi(x, 0) = x. \end{cases} \quad (1.12)$$

En la primera ecuación $\dot{\Phi}$ no es más que la derivada parcial de Φ con respecto a t , que se obtiene dejando x constante. Esa ecuación dice que la función

$$t \mapsto \Phi(x, t) \quad (1.13)$$

que se obtiene dejando x fijo y considerando $\Phi(x, t)$ como una función de t es una solución de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ (también utilizaremos la notación $\Phi(x, \cdot)$ para indicar la función (1.13)³. La segunda igualdad en (1.12) es la que asegura que se toma la condición inicial x en tiempo $t = 0$.

De momento no nos preocuparemos demasiado por las propiedades de Φ (por ejemplo, no nos hemos preocupado en aclarar cuál es el dominio en que está definida) y podemos pensar por ahora que sólo se trata de una notación útil que recoge la importante dependencia de la solución respecto a la condición inicial. Sin embargo esta noción es básica en la descripción de la dinámica asociada con las ecuaciones diferenciales, tal como veremos más adelante a lo largo del curso.

Ejercicio 1.5. * Hallar el flujo asociado a la ecuación $\dot{x} = 1$.

Ejercicio 1.6. ** Hallar el flujo asociado con la ecuación $\dot{x} = 1/x$. Prestar atención a que en este caso las soluciones no están definidas para todos los tiempos. ¿Cuál es el dominio en el que el flujo queda definido en este caso?

Ejercicio 1.7. ** Expresar la solución del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.14)$$

en términos del flujo $\Phi(x, t)$ asociado con la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$. Sugerencia: ver el ejercicio 1.4. ♠

³SOBRE LA NOTACIÓN: en general, si $f(x, y)$ es una función de dos variables, utilizaremos a lo largo del texto la notación $f(\cdot, y)$ para indicar la función de x que se obtiene dejando fijo y , y $f(x, \cdot)$ para la función de y que resulta de dejar fijo x

Las órbitas de una ecuación diferencial.

Al resolver la ecuación (1.9) vimos que había básicamente tres clases de soluciones: las estacionarias, las que recorran el eje negativo y las que recorran el eje positivo. Al conjunto de valores que recorre una solución $x(t)$ de una ecuación diferencial, orientado en el sentido en el que t crece, le llamaremos *órbita*. Así, si consideramos $\dot{x} = ax$ la órbita de la solución con dato inicial 0 es el conjunto $\{0\}$ y en este caso la orientación es irrelevante; si el dato inicial es positivo la órbita es $\{x, x > 0\} = \mathbf{R}^+$ orientado en el sentido creciente de \mathbf{R} ; por último, la semirecta $\{x, x < 0\} = \mathbf{R}^-$ orientada en sentido decreciente es la órbita de cualquier solución con dato inicial negativo. Notemos que en este ejemplo la recta queda partida en tres pedazos disjuntos como $\mathbf{R} = \mathbf{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbf{R}^+$, cada uno de los cuales es una órbita para la ecuación diferencial.

En general, si la solución $\Phi(x, t)$ con dato $x(0) = x$ está definida en un cierto intervalo I_x (el intervalo de definición de la solución puede depender de x) entonces la órbita por x es el conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{\Phi(x, t); t \in I_x\} \quad (1.15)$$

dotado de la orientación que la solución x le induce.

Ejemplo 1.1.14. Escribamos las órbitas de la ecuación $\dot{x} = ax$, donde a es una constante positiva cualquiera, con la notación que acabamos de introducir. En primer lugar tenemos que $\mathcal{O}(0) = \{0\}$; si $x > 0$ su órbita será

$$\mathcal{O}(x) = \{y \in \mathbf{R}, y > 0\},$$

orientada en el sentido creciente de \mathbf{R} , en tanto que para $x < 0$ tenemos

$$\mathcal{O}(x) = \{y \in \mathbf{R}, y < 0\}$$

orientada en sentido decreciente. ♣

Ejemplo 1.1.15. Si x_0 es un punto crítico de $\dot{x} = f(x)$ entonces $I_{x_0} = \mathbf{R}$ y para todo $t \in \mathbf{R}$ se tiene que $\Phi(x_0, t) = x_0$. Concluimos entonces que sólo x_0 está en la órbita de x_0 , por lo que $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$. ♣

Ejercicio 1.8. * Calcular las órbitas de la ecuación $\dot{x} = 1$.

Ejercicio 1.9. ** Calcular las órbitas de la ecuación $\dot{x} = 1/x$.

Observación 1.1.16. Vale la pena aclarar que aunque las nociones de *órbita* y *solución* están relacionadas son distintas. Una solución es una función, y una órbita es el conjunto imagen de una solución, con la orientación que la parametrización dada por la solución induce de manera natural. Sin embargo, es usual utilizar el término “órbita” con dos sentidos diferentes. Uno es el que

introducimos en la definición de órbita. El segundo es emplearlo como sinónimo de “solución”. Utilizaremos ambos en este curso, cosa que no debería dar lugar a confusión porque el contexto siempre dejará claro de que se está hablando. Básicamente, la distinción entre las dos nociones es la que debe hacerse entre los conceptos de “curva orientada” y “curva parametrizada”. ♠

Ejemplo 1.1.17. Vamos a completar ahora la discusión de la ecuación lineal $\dot{x} = ax$, para incluir los casos $a < 0$ y $a = 0$. En general, la solución de la ecuación con dato inicial x_0 es $x(t) = x_0 e^{at}$. Si $a < 0$ entonces todas las soluciones convergen a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Si $a = 0$ todas las soluciones son estacionarias y es trivial observar que ni se acercan ni se alejan del cero. Notemos que, salvo por la orientación, las órbitas de la ecuación son las mismas para $a > 0$ que para $a < 0$. Tal como veremos en la próxima sección, el hecho de que las órbitas estén orientadas en un sentido u otro es muy importante para el comportamiento cualitativo de la ecuación diferencial.

Ejercicio 1.10. * Completar los detalles de este ejemplo. Dibujar el campo de pendientes asociado con la ecuación y graficar algunas de sus soluciones. ♣

1.2 Estabilidad e inestabilidad de los puntos críticos

En el ejemplo de la ecuación lineal $\dot{x} = ax$ hemos encontrado tres comportamientos posibles de sus soluciones respecto al punto crítico $x = 0$, según fuera $a > 0$, $a = 0$ o $a < 0$. Para $a < 0$ todas las soluciones se acercan a este punto crítico, para $a > 0$ se alejan y si $a = 0$ todas son estacionarias. Como vemos, hay una diferencia cualitativa bien marcada entre estos tres casos. Especialmente entre lo que ocurre para $a > 0$ y $a < 0$. Lo que está en juego, incluso en este ejemplo tan sencillo, es la cuestión de la *estabilidad* de las soluciones de una ecuación diferencial, vinculada con el problema de por qué vemos péndulos en reposo “hacia abajo” pero nunca los vemos quietos y “hacia arriba” (al fin y al cabo, si los dejamos en una posición perfectamente vertical no tendrían que caerse), o con el problema de saber si nuestro sistema solar es estable y seguiremos disfrutando de cuatro estaciones, fases lunares, años lectivos seguidos de veranos preparando exámenes, etc. o si alguna perturbación pequeña de nuestra rutina va a producir un cambio dramático en su marcha. En este curso daremos respuesta a primera pregunta, pero creemos que a la segunda no.

Como un paso previo a introducir definiciones rigurosas adelantemos que llamaremos a un punto crítico *estable* si las soluciones que empiezan cerca de él permanecen cerca para todos los tiempos posteriores al instante inicial. Más aún, si las órbitas no sólo permanecen cerca, sino que se aproximan al punto —como en el caso $a < 0$ — entonces diremos que es *asintóticamente estable*. Por último, si un punto crítico no es estable diremos que es *inestable*. Notemos que esta última “definición” es sólo la negación de la noción de estabilidad, de modo que alcanza con que haya órbitas que empiecen arbitrariamente cerca del punto crítico y que se alejen para que haya inestabilidad. El caso $a > 0$ en la ecuación lineal es un caso extremo de inestabilidad en el que todas las órbitas se alejan del punto crítico $x = 0$. Cuando $a = 0$ el origen es un punto crítico estable pero no es asintóticamente estable. En realidad esta afirmación es cierta para cualquier punto de \mathbf{R} cuando $a = 0$.

Estas nociones de estabilidad/inestabilidad son de gran importancia así que nos ocuparemos de definir las de manera rigurosa, al gusto de un matemático, traduciendo las ideas que hemos desarrollado en el párrafo anterior en las fórmulas adecuadas. Sólo se trata de dar una formulación matemática rigurosa a la idea de que “las órbitas se mantienen cerca del punto crítico” o de que “se acercan al punto para valores grandes de t ” en términos de los viejos y queridos ϵ y δ , tal como en la definición de continuidad de una función⁴

⁴ambién en la definición de continuidad hay que expresar de manera rigurosa la idea de que la función se acerca al valor $f(x_0)$ cuando x se acerca a x_0 y eso se hace a través del método ϵ - δ . Este asunto no es trivial y llevó un buen tiempo formalizar la noción de continuidad de esta manera. Para dar una idea sobre esto digamos que Newton (1642–1727) y Leibnitz (1646–1716) desarrollaron el cálculo diferencial en la segunda mitad del

Definición 1.4. PUNTO CRÍTICO ESTABLE E INESTABLE

Diremos que un punto crítico \bar{x} para una ecuación diferencial autónoma

$$\dot{x} = f(x)$$

es *estable* si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que si $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ entonces la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial con dato inicial $x(0) = x_0$ satisface

$$|x(t) - \bar{x}| < \epsilon, \quad \text{para todo } t \in [0, +\infty). \quad (1.16)$$

Si un punto crítico no es estable diremos que es *inestable*.

Observación 1.2.1. La definición de estabilidad requiere que las órbitas que empiezan cerca de \bar{x} están definidas para todo $t \geq 0$. Esto no es una restricción, porque mostraremos más adelante que si una solución se mantiene cerca de un punto crítico x_0 entonces está definida para todo $t \geq 0$. ♠

Observación 1.2.2. En la próxima sección extenderemos el estudio de las ecuaciones diferenciales autónomas para incluir las ecuaciones $\dot{x} = f(x)$ definidas en \mathbf{R}^n . En este caso x no representará un número real sino una n -upla y f será una función continua a valores en \mathbf{R}^n definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Todas las definiciones de solución, punto crítico, etc., serán esencialmente las mismas que en el caso escalar, pero para las definiciones de estabilidad e inestabilidad habrá que tener en cuenta que $x(t) \in \mathbf{R}^n$ interpretando $|x(t)|$ como el módulo del vector $x(t)$. En este contexto, el conjunto de puntos que satisface $|y - x| < \epsilon$ es la bola abierta $B(x, \epsilon)$ con centro x y radio ϵ . Con esta notación, diremos que un punto crítico \bar{x} de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ es estable si dado cualquier número real positivo ϵ , existe un número $\delta > 0$ tal que para cualquier solución $x(t)$ de la ecuación con condición inicial $x_0 \in B(\bar{x}, \delta)$, se tiene que $x(t) \in B(\bar{x}, \epsilon)$ para todo $t \geq 0$. Naturalmente, si $n = 1$ las bolas $B(\bar{x}, \epsilon)$ no son otra cosa que los intervalos $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$. ♠

Ejemplo 1.2.3. El punto crítico $x = 0$ de $\dot{x} = ax$ es estable si $a \leq 0$ e inestable si $a > 0$. En efecto, fijemos $\epsilon > 0$ para aplicar la definición. Si la condición inicial es x_0 entonces la solución es $x(t) = x_0 e^{at}$. Si $a < 0$ tenemos

$$|x(t) - 0| = |x_0 e^{at}| \leq |x_0|, \quad t > 0, \quad (1.17)$$

por lo que si elegimos $\delta(\epsilon) = \epsilon$ la condición $x_0 < \delta = \epsilon$ implica $|x(t)| \leq |x_0| < \epsilon$. En la figura 1.3 puede apreciarse este comportamiento de las soluciones. Fijado un número $\epsilon > 0$ todas las soluciones cuyo dato inicial x_0 tiene módulo menor que ϵ permanecen en el intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ para todo $t \geq 0$.

siglo XVII. La definición de función continua que actualmente usamos data de la primera mitad del siglo XIX. La conclusión es que si estas nociones provocan dificultades y dolores de cabeza es porque son delicadas, al punto de que fue necesario más de un siglo de trabajo de matemáticos muy destacados para poner todo esto en claro (aunque tampoco vale abusar de este argumento porque para los que nacimos en la segunda mitad del siglo XX las cosas son mucho más fáciles: nos basta estudiar con atención y cuidado lo que otros ya hicieron y se preocuparon por exponer con claridad)

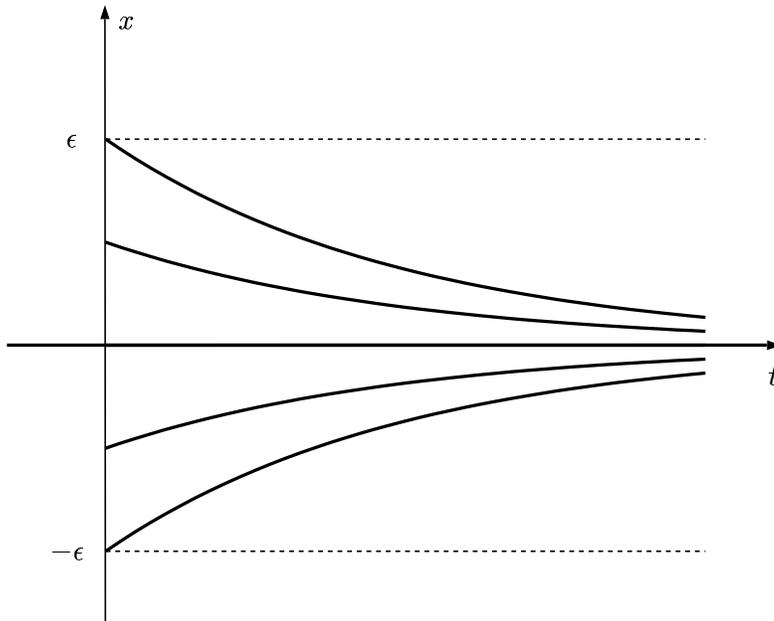


Figura 1.3: algunas soluciones de $\dot{x} = ax$, con $a < 0$

Por el contrario, si $a > 0$ la estimación (1.17) fracasa. Probemos que en esta situación el 0 es inestable. Para probar la inestabilidad hay que negar la definición de estabilidad. Por lo tanto debemos mostrar que existe un $\epsilon > 0$ tal que para cualquier δ positivo podemos encontrar una condición inicial $x_0 \in (-\delta, \delta)$, con la propiedad de que la solución $x(t)$ con dato inicial $x(0) = x_0$ sale del intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$. En el caso que estamos analizando cualquier $\epsilon > 0$ sirve, porque todas las soluciones se escapan al infinito, independientemente de cuál sea la condición inicial. Tomemos, por ejemplo, $\epsilon = 1$. Si $\delta > 0$ entonces consideremos la solución

$$x(t) = \frac{\delta}{2} e^{at}$$

cuya condición inicial es $x(0) = \delta/2 \in (-\delta, \delta)$. Como $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$ la solución $x(t)$ está fuera del intervalo $(-1, 1)$ si t es suficientemente grande. Esto basta para probar la inestabilidad, pero si queremos hacer un cálculo más fino notemos que $x(t)$ sale de $(-1, 1)$ en el instante

$$t_* = \frac{\log 2 - \log \delta}{a}.$$

Este comportamiento está ilustrado en la figura 1.4, donde podemos apreciar que todas las soluciones se escapan del intervalo $(-1, 1)$. Para un valor pequeño

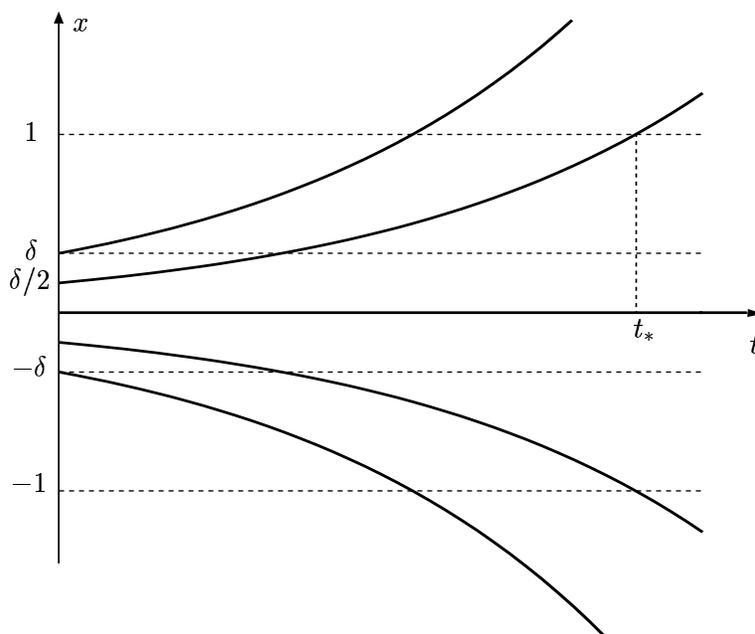


Figura 1.4: algunas soluciones de $\dot{x} = ax$, con $a > 0$

de δ hemos representado las soluciones con datos iniciales $\pm\delta$ y $\pm\delta/2$. La solución con dato inicial $\delta/2$ supera el valor 1 en el tiempo $t = t_*$.

Ejercicio 1.11. ** Supongamos $a > 0$. Para $\epsilon > 0$ consideremos $x_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$. Calcular el instante t en el que la solución de $\dot{x} = ax$ con dato $x(0) = x_0$ sale del intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$. Naturalmente, el valor de t dependerá de ϵ , x_0 y a . ♣

A continuación presentamos una noción de estabilidad bastante más fuerte que la que introdujimos antes. Escribiremos la definición usando bolas $B(\bar{x}, \epsilon)$ y $B(\bar{x}, \delta)$ centradas en un punto crítico \bar{x} de $\dot{x} = f(x)$. Esta notación es válida para todos los \mathbf{R}^n , con n un natural cualquiera, y enfatiza el contenido geométrico de las nociones de estabilidad e inestabilidad.

Definición 1.5. PUNTO CRÍTICO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

Un punto crítico \bar{x} para una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$ es *asintóticamente estable* si es estable y existe una bola $B(\bar{x}, \delta)$ tal que todas las soluciones $x(t)$ de la ecuación con dato inicial $x(0) = x_0 \in B(\bar{x}, \delta)$ satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}. \quad (1.18)$$

Ejemplo 1.2.4. El punto crítico 0 de $\dot{x} = ax$ es asintóticamente estable si $a < 0$. También es estable si $a = 0$, pero en este caso no es asintóticamente estable. ♣

Ejercicio 1.12. ** Consideremos la función continua $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Dibujar el campo de pendientes asociado con la ecuación $\dot{x} = f(x)$ y sus soluciones. Calcular el flujo y hallar sus órbitas. Mostrar que el 0 es un punto crítico estable pero no asintóticamente estable de esta ecuación diferencial.

Ahora que hemos introducido estas nociones básicas acerca de la estabilidad de los puntos críticos vamos a presentar un ejemplo que constituye una corrección al modelo para el crecimiento de una población dado por la ecuación $\dot{x} = ax$. Tal como observamos, aunque nuestro modelo puede ser razonable para valores de x no muy grandes, en general es imposible que la población mantenga su crecimiento indefinidamente. Podemos intentar hacer una corrección para tener algo un poco más realista. Una posibilidad es tener en cuenta que a medida que el número de individuos aumenta comienzan a competir entre ellos y el crecimiento se ve detenido por este fenómeno. Una idea sencilla es considerar que si la población tiene N individuos podemos suponer que el número medio de interacciones entre ellos, por unidad de tiempo, es proporcional a N^2 y que la competencia es proporcional a este número de interacciones entre individuos. Basados en estas consideraciones modificaremos el segundo término de (1.9) para pasar a estudiar la ecuación

$$\dot{x} = ax - bx^2, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (1.19)$$

Notemos que para x pequeño $ax - bx^2 \sim ax$ en tanto que el factor bx^2 domina para valores de x grande, justamente donde nuestro modelo original resultaba poco creíble.

Ejemplo 1.2.5. Para no avanzar demasiado rápido nos vamos a detener primero en el caso particular de (1.19) que se obtiene tomando $a = 0$, la ecuación $\dot{x} = -bx^2$, con $b > 0$. Para estudiarla comenzaremos por desembarazarnos de la constante b mediante el sencillo cambio de variables $y = bx$. Entonces $\dot{y} = b\dot{x} = -b^2x^2 = -y^2$ y basta con considerar el caso

$$\dot{y} = -y^2. \quad (1.20)$$

Como y^2 se anula en $y = 0$ la solución de (1.20) con dato inicial $y_0 = 0$ es la solución constante $y(t) \equiv 0$. Notemos además que todas las soluciones son no crecientes, porque siempre se satisface $\dot{y} \leq 0$. Por lo tanto, se alejan de $y = 0$ cuando son negativas y se aproximan a $y = 0$ cuando son positivas. Este comportamiento sugiere que el origen no es estable dado que hay órbitas con dato inicial negativo arbitrariamente cercano a $y = 0$ que se alejan. Vale la pena notar que aunque 0 sea inestable el comportamiento de esta ecuación cerca de este punto crítico es bien distinto del que teníamos en el ejemplo

$\dot{x} = ax$ con $a > 0$. En ese caso todas las órbitas se alejan del origen, pero las soluciones de (1.20) con dato inicial positivo se aproximan a 0. Haremos los cálculos que muestran la verdad de nuestras afirmaciones, pero es importante saber hacer estos argumentos cualitativos.

1.2.1 Diagrama de fases para las ecuaciones en \mathbf{R}

Al estudiar el comportamiento de $\dot{y} = -y^2$ obtuvimos una buena imagen de lo que ocurre sin necesidad de hacer ningún cálculo. Esto es algo general y trataremos de combinar sistemáticamente argumentos cualitativos con otros basados en fórmulas para las soluciones.

El objetivo de esta observación es subrayar el hecho de que el comportamiento de las soluciones de una ecuación $\dot{x} = f(x)$ en la recta puede resumirse de una forma gráfica muy descriptiva, representando su *diagrama de fases*. Consideremos la recta \mathbf{R} y marquemos primero los puntos críticos de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, que no son otra cosa que las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Cuando hacemos esto para la función $-x^2$ obtenemos el siguiente dibujo:

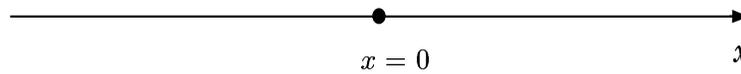
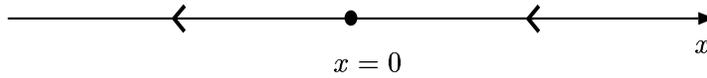


Figura 1.5: los puntos críticos de $\dot{x} = -x^2$

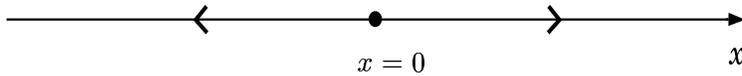
Concentrémosnos luego en los intervalos en que queda dividida la parte de la recta que está fuera de los puntos críticos. En cada uno de esos intervalos el signo de $f(x)$ es constante, porque $f(x)$ es continua y no puede anularse. Si consideramos un intervalo en que $f(x)$ es positivo las soluciones sólo pueden crecer mientras estén en él, porque su derivada \dot{x} es justamente $f(x)$. En un intervalo en que $f(x)$ es negativo las soluciones decrecen. Marquemos con una flecha que apunta hacia la derecha los intervalos con $f(x) > 0$, y con una flecha que apunta hacia la izquierda los de $f(x) < 0$ (en este caso todas las flechas apuntan hacia la izquierda):

En el dibujo que acabamos de fabricar está contenido lo esencial de la información sobre la ecuación diferencial $\dot{x} = -x^2$. Por ejemplo, la estabilidad de los puntos críticos puede leerse en este diagrama. Si un punto crítico \bar{x} tiene un entorno en el que todas las flechas apuntan hacia él es estable. Más aún, si no hay ningún otro punto crítico en el entorno entonces es asintóticamente estable, porque las órbitas que se acercan no pueden detenerse en ninguna otra parte (detenerse implica $\dot{x} = 0$ y la aparición de un nuevo punto crítico).

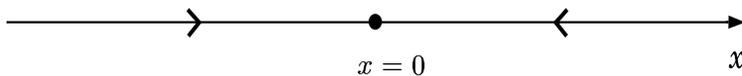
Figura 1.6: el diagrama de fases de $\dot{x} = -x^2$

Análogamente, si en cualquier entorno suficientemente pequeño de \bar{x} hay alguna flecha que apunta alejándose de \bar{x} y no hay otros puntos críticos de la ecuación diferencial, entonces se trata de un punto crítico inestable. En consecuencia, el origen es un punto crítico inestable para $\dot{x} = -x^2$, aunque las soluciones positivas de la ecuación se aproximan a él cuando el tiempo tiende a $+\infty$.

Ejemplo 1.2.6. Los diagramas de fases para la ecuación $\dot{x} = ax$ son los siguientes: en el caso $a > 0$ obtenemos la figura 1.7, que corresponde a una

Figura 1.7: diagrama de fases de $\dot{x} = ax$, con $a > 0$

situación donde el origen $x = 0$ es inestable. Cuando $a < 0$ el diagrama es el que aparece en 1.8. Este dibujo está en correspondencia con el hecho de que el

Figura 1.8: diagrama de fases de $\dot{x} = ax$, con $a < 0$

origen es asintóticamente estable en esta situación. Es interesante constatar que estos diagramas de fases contienen la información sobre el recorrido de las soluciones, junto con su crecimiento o decrecimiento.

En nuestra siguiente figura mostramos, para $a > 0$, las soluciones de la ecuación $\dot{x} = ax$ en el plano (t, x) . Obsérvese que el semieje positivo es una órbita, que corresponde al recorrido de todas las soluciones que toman un

dato inicial $x(0) > 0$; el conjunto que está formado por el 0 es otra órbita; y el semieje negativo la tercera. Junto con este dibujo aparece un esquema del eje x (el eje vertical) con el diagrama de fases asociado a la ecuación. Vemos

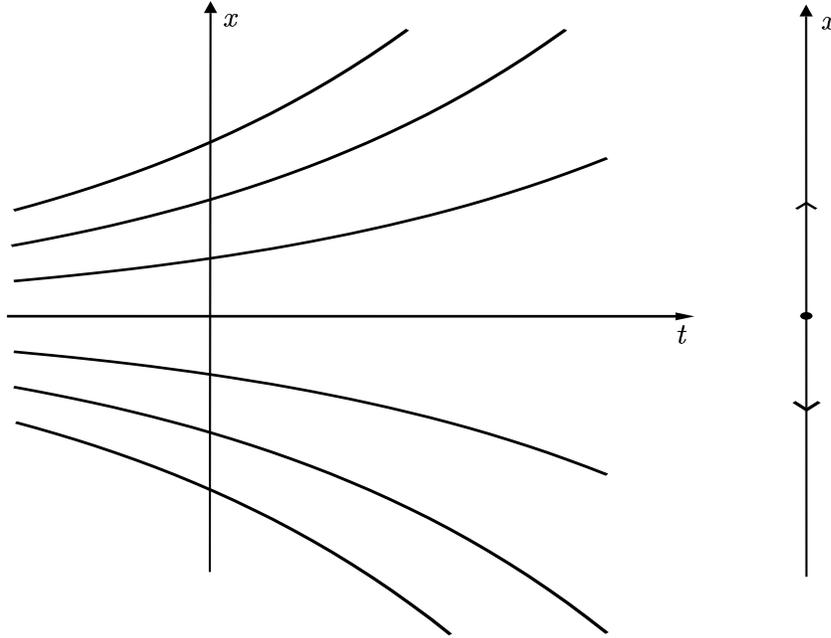


Figura 1.9: diagrama de fases y soluciones de $\dot{x} = ax$, con $a > 0$

entonces que el diagrama de fases se obtiene “proyectando” sobre el eje de las x el gráfico de las soluciones en el plano (t, x) , y conservando la información sobre el signo de \dot{x} en cada región del plano (t, x) . Esta observación es de carácter general, y vale para cualquier ecuación diferencial autónoma en \mathbf{R} . El hecho de que al trasladar los gráficos de las soluciones en el sentido horizontal obtengamos nuevas soluciones se debe a la invariancia respecto a las traslaciones en el tiempo de las ecuaciones diferenciales autónomas.

A continuación presentamos un ejercicio para aplicar estos métodos gráficos que acabamos de presentar.

Ejercicio 1.13. * Discutir según los valores de $a \in \mathbf{R}$ y $n \in \mathbf{N}$ la estabilidad del punto crítico $x = 0$ para la ecuación

$$\dot{x} = ax^n. \quad (1.21)$$

Resolver este ejercicio sin hacer cálculo alguno, sólo a partir de los diagramas de fase correspondientes. ♠

Volvamos al estudio de la ecuación diferencial (1.20). El diagrama de fases asociado con esta ecuación es el que aparece en la figura 1.6, lo que sugiere que $y = 0$ es un punto crítico inestable, y que las soluciones con dato inicial positivo se aproximan al origen a medida que el tiempo crece. Abordaremos ahora esta misma ecuación por medio del cálculo diferencial. Cuando estamos fuera de $y = 0$ podemos escribir

$$\frac{\dot{y}}{y^2} = -1, \quad (1.22)$$

e integrar entre el tiempo inicial $t = 0$ y un t genérico para obtener

$$-\int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{y^2(s)} ds = t. \quad (1.23)$$

Si llamamos y_0 a la condición inicial $y(0)$ obtenemos

$$\frac{1}{y(t)} - \frac{1}{y_0} = t, \quad (1.24)$$

y entonces la solución de la ecuación con dato y_0 es

$$y(t) = \frac{y_0}{1 + y_0 t}. \quad (1.25)$$

Notemos que esta fórmula también da la solución cuando $y_0 = 0$, a pesar de que los argumentos que hicimos antes valen sólo para $y_0 \neq 0$. No es difícil verificar que la fórmula (1.25) es efectivamente una solución de la ecuación (1.20) con dato inicial $y(0) = y_0$. Si evaluamos $y(t)$ en $t = 0$ está claro que obtenemos y_0 . Además el cálculo directo de la derivada de \dot{y} muestra

$$\dot{y}(t) = -\frac{y_0^2}{(1 + y_0 t)^2} = -y^2(t). \quad (1.26)$$

Observación 1.2.7. Hay muchas situaciones, no sólo en las matemáticas, en las que encontrar la solución de un problema es más o menos complicado, pero ver si algo es o no es solución es casi trivial (por ejemplo: cuando se busca la llave para abrir una puerta puede ser casi imposible dar con la llave, pero dada una llave es muy fácil saber si abre o no). En esos casos (por ejemplo: en algunos problemas de los exámenes de matemáticas) es imperdonable afirmar que algo es solución de un problema sin haberse molestado en verificar que efectivamente lo es.

Ejercicio 1.14. ** Buscar más ejemplos de la vida cotidiana en los que encontrar una solución no es fácil, pero sí lo es saber si algo es solución o no de un problema dado. ♠

Observación 1.2.8. INTERVALO DE EXISTENCIA DE LAS SOLUCIONES.

Es interesante notar que la fórmula (1.25) no está definida para todo t si $y_0 \neq 0$. En efecto, el denominador se anula en $t = t(y_0) = -1/y_0$. Si $y_0 < 0$ entonces $t(y_0) > 0$ y la solución que en tiempo 0 está en y_0 satisface $\lim_{t \uparrow t(y_0)} y(t) = -\infty$. Es decir, la solución se escapa a $-\infty$ en un tiempo finito, como consecuencia de que la velocidad \dot{y} por la que pasa por cada punto y es $-y^2$, una velocidad negativa y muy grande cuando y tiene módulo grande. Este hecho hace que la solución no pueda prolongarse más allá del intervalo

$$I_{y_0} = (-\infty, -1/y_0),$$

y muestra que la imposibilidad de prolongarla es inherente a la ecuación, no a nuestros métodos de cálculo. De hecho, esta es una *solución maximal*⁵ de la ecuación, porque no puede extenderse más allá del dominio I_{y_0} . Notemos que esto no ocurría para la ecuación lineal $\dot{x} = x$ y sus órbitas demoran un tiempo infinito en escapar a $\pm\infty$. A diferencia de lo que ocurre con $\dot{y} = -y^2$ las soluciones maximales de $\dot{x} = x$ están definidas sobre todo \mathbf{R} .

Por otro lado notemos que los valores de (1.25) para $t > t(y_0)$ ya no tienen nada que ver con la solución que estábamos calculando. Aunque la fórmula defina una función también en $t > t(y_0)$, en ese rango de valores de t ya no guarda ninguna conexión con el problema de resolver la ecuación $\dot{y} = -y^2$ con dato inicial y_0 . ♠

En resumen, las soluciones $x(t)$ de (1.20) con dato $y(0) = y_0 < 0$ son decrecientes, están definidas en un intervalo

$$(-\infty, t(y_0)), \quad t(y_0) = -1/y_0 > 0,$$

y un cálculo directo con la fórmula explícita (1.25) muestra que satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow t(y_0)} y(t) = -\infty.$$

Esta última observación implica que el origen es un punto crítico inestable, porque dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ cualesquiera la solución con dato inicial $-\delta/2$ sale del intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ y escapa hacia $-\infty$. Cuando el dato es $y_0 > 0$ entonces $t(y_0) < 0$ y la solución está definida en $(t(y_0), +\infty)$ y se cumple

$$\lim_{t \downarrow t(y_0)} y(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0,$$

así que efectivamente se aproximan a 0 para tiempos grandes. Toda esta información está de acuerdo con la imagen que nos habíamos formado analizando el diagrama de fases asociado con la ecuación diferencial (figura 1.6).

⁵la definición precisa de solución maximal será dada en el capítulo 3, sección 3.1

Ejercicio 1.15. * Graficar las curvas $y(t)$, soluciones de (1.20), y ver como cambian al variar el dato inicial y_0 . Comparar el gráfico de las soluciones con el diagrama de fases de la ecuación, tal como hicimos en el ejemplo 1.2.6.

Para cerrar este ejemplo notemos que la fórmula (1.25) puede escribirse en términos del flujo asociado a la ecuación como

$$\Phi(y, t) = \frac{y}{1 + yt}. \quad (1.27)$$

que está definido en el conjunto $\{(y, t); yt > -1\}$ del plano (y, t) . ♣

Ejercicio 1.16. * Para cada $y_0 \in \mathbf{R}$ hallar la fórmula de la solución de (1.21) con dato inicial y_0 y utilizarla para rehacer el ejercicio 1.13 a partir de la definición de estabilidad y estabilidad asintótica. ¿Lo que se obtiene concuerda con los resultados encontrados antes?

Una vez que hemos completado la investigación del ejemplo anterior vamos a abordar el estudio de la ecuación (1.19). Lograremos simplificar un poco los cálculos si en vez de estudiar la ecuación (1.19) nos limitamos al caso particular

$$\dot{x} = x - x^2 \quad (1.28)$$

que se obtiene cuando $a = b = 1$. Esto no es ningún problema, porque el caso general puede reducirse a éste haciendo un cambio de variables.

Ejercicio 1.17. ** Buscar constantes positivas α y β de modo que al introducir las nuevas variables $s = \alpha t$ e $y = \beta x$ la ecuación diferencial (1.19) se transforme en (1.28).

Comencemos por estudiar el diagrama de fases para la ecuación (1.28). Como esto pasa básicamente por estudiar el signo de \dot{x} graficamos $x - x^2$, que es el miembro de la derecha de la ecuación. Donde esta función se anula tendremos puntos críticos, donde es positiva las soluciones son crecientes, y decrecientes donde la función es negativa. En resumen, el diagrama de fases es el que aparece representado en el eje x de la figura 1.10. Vemos entonces que (1.28) tiene dos puntos críticos: el origen $x = 0$, que ya estaba en el modelo original, y el punto $x = 1$. Además \dot{x} es positivo si x está en el intervalo $(0, 1)$ y negativo en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Esto significa que $x(t) \equiv 0$ y $x(t) \equiv 1$ son dos soluciones estacionarias de (1.28); si una solución $x(t)$ está en $(0, 1)$ entonces $\dot{x} > 0$ y la solución está creciendo y viaja hacia la derecha; si está en $(-\infty, 0)$ o en $(1, +\infty)$ viaja hacia la izquierda. Estas consideraciones permiten representar el diagrama de fases, dan una buena pintura cualitativa de lo que ocurre con la ecuación que estamos tratando e indican que el 0 es un punto crítico inestable, en tanto que el 1 es asintóticamente estable.

Vamos a pasar ahora a los cálculos, y esperemos que estén de acuerdo con la información que acabamos de encontrar. Cuando estamos fuera de $x = 0$ o

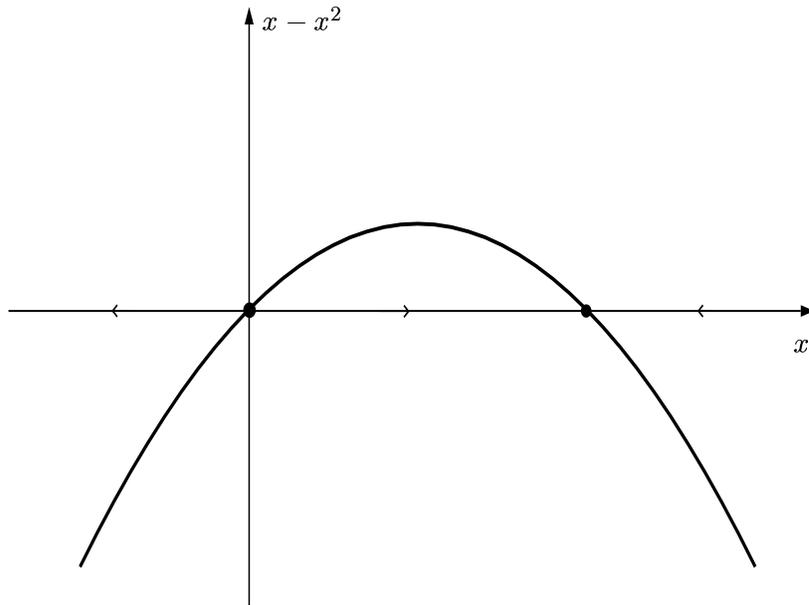


Figura 1.10: el gráfico de $x - x^2$ y el diagrama de fases de $\dot{x} = x - x^2$

$x = 1$ podemos escribir

$$\frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{x}}{1-x} = \frac{\dot{x}}{x-x^2} = 1, \quad (1.29)$$

e integrar entre el tiempo inicial $t = 0$ y un t genérico para obtener

$$\int_0^t \frac{\dot{x}}{x} ds + \int_0^t \frac{\dot{x}}{1-x} ds = t. \quad (1.30)$$

Si llamamos x_0 a la condición inicial $x(0)$, luego de integrar obtenemos

$$\log |x(t)| - \log |x_0| - \log |1-x(t)| + \log |1-x_0| = t, \quad (1.31)$$

cosa que podemos reescribir como

$$\log \left| \frac{x(t)(1-x_0)}{x_0(1-x(t))} \right| = t. \quad (1.32)$$

Un paso más en los cálculos lleva a

$$\left| \frac{x(t)(1-x_0)}{x_0(1-x(t))} \right| = e^t, \quad (1.33)$$

y luego a

$$\left| \frac{x(t)}{1-x(t)} \right| = e^t \left| \frac{x_0}{1-x_0} \right|. \quad (1.34)$$

Nos enfrentamos ahora a la delicada tarea de eliminar las barras de valor absoluto de la última expresión. Todo el problema se reduce a saber si al sacarlas tenemos que poner un signo de más o un signo de menos. Si x_0 no es ni 0 ni 1 entonces la expresión

$$e^t \frac{x_0}{1-x_0} \quad (1.35)$$

está definida y no se anula nunca. Por lo tanto, tampoco puede anularse

$$\frac{x(t)}{1-x(t)}, \quad (1.36)$$

así que siempre conserva el mismo signo que en $t = 0$ y al sacar las barras de valor absoluto obtenemos

$$\frac{x(t)}{1-x(t)} = e^t \frac{x_0}{1-x_0}. \quad (1.37)$$

Por último, podemos despejar $x(t)$ y resulta

$$x(t) = \frac{x_0 e^t}{1-x_0+x_0 e^t}. \quad (1.38)$$

Observación 1.2.9. Podemos verificar sin mucho esfuerzo que (1.38) es efectivamente solución del problema de resolver (1.28) con dato inicial $x_0 = x(0)$. Si evaluamos $x(t)$ en $t = 0$ está claro que obtenemos x_0 . Además el cálculo directo de la derivada \dot{x} muestra

$$\dot{x}(t) = \frac{x_0 e^t}{1-x_0+x_0 e^t} - x_0 e^t \frac{x_0 e^t}{(1-x_0+x_0 e^t)^2} = x(t) - x^2(t). \quad (1.39)$$

Es interesante notar que (1.38) también da la solución correcta cuando tomamos los datos iniciales $x_0 = 0$ o $x_0 = 1$, a pesar de que en su derivación no tuvimos en cuenta estos casos. ♠

Vamos a estudiar ahora el comportamiento de las soluciones.

- Para empezar tenemos las dos soluciones estacionarias que ya habíamos identificado.
- En segundo lugar miremos qué ocurre cuando $0 < x_0 < 1$. Como

$$1-x_0 > 0, \quad x_0 e^t > 0,$$

el denominador en (1.38) no se anula nunca, así que la fórmula no tiene problemas de definición. Es un cálculo directo comprobar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0.$$

Es decir, las órbitas se acercan al punto crítico $x = 1$ cuando el tiempo crece y al punto crítico $x = 0$ al hacer $t \rightarrow -\infty$. Esto último puede interpretarse como que la órbita “sale” del punto $x = 0$. Estas soluciones son crecientes en t .

- Si $x_0 > 1$ el denominador de (1.38) se anula en

$$t = t(x_0) = \log((x_0 - 1)/x_0) < 0,$$

de modo que las soluciones están definidas en $(t(x_0), +\infty)$, son decrecientes en t y satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \downarrow t(x_0)} x(t) = +\infty.$$

- Si $x_0 < 0$ las órbitas son decrecientes, están definidas sobre un intervalo de la forma

$$(-\infty, t(x_0)), \quad t(x_0) = \log[(x_0 - 1)/x_0].$$

Además

$$\lim_{t \uparrow t(x_0)} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0.$$

La figura 1.11 resume la discusión que acabamos de presentar. Recomendamos compararla con el diagrama de fases de la ecuación.

Para finalizar, mencionemos que los puntos críticos $x = 0$ y $x = 1$ tienen comportamientos bien diferentes. Hay órbitas que se alejan de $x = 0$, por lo que este punto es inestable, pero el punto $x = 1$ es asintóticamente estable.

Ejercicio 1.18. ** Demostrar las afirmaciones sobre la estabilidad de los puntos críticos 0 y 1, usando la fórmula (1.38) para el flujo asociado a la ecuación.

Ejercicio 1.19. ** Estudiar la ecuación $\dot{x} = ax - bx^2$, con a y b dos parámetros positivos. Interpretar el valor $x = a/b$ en términos de la aplicación de esta ecuación como un modelo para entender el crecimiento/decrecimiento de una población. Sugerencia: reducirla al caso $a = b = 1$ con un cambio de variables adecuado y utilizar la discusión precedente.

Ejercicio 1.20. ** La ecuación diferencial autónoma

$$\dot{x} = ax - bx^2,$$

donde a y b son dos constante positivas, es un modelo que describe la evolución del número de individuos de una población que se reproduce en su ambiente, sin sufrir la

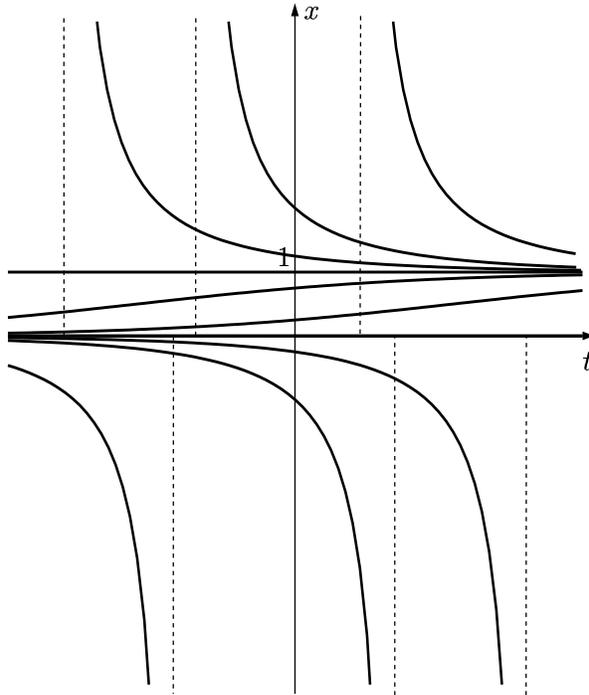


Figura 1.11: las soluciones $\dot{x} = x - x^2$ en el plano (t, x)

influencia de depredadores ni la acción del hombre. Se decide explotar comercialmente esta población, extrayendo ejemplares a un ritmo constante de c individuos por unidad de tiempo. La ecuación que gobierna el crecimiento de la población en estas condiciones pasa a ser, mientras x es positivo,

$$\dot{x} = ax - bx^2 - c.$$

Si en algún instante la solución $x(t)$ alcanza el valor 0 este hecho debe interpretarse como la *extinción* de la población.

1. Mostrar que existe un valor umbral de c , al que llamaremos c_* , tal que si $c > c_*$ entonces la explotación siempre conduce a la extinción de la población en un tiempo finito. Calcular c_* .
2. Mostrar que si $0 < c < c_*$ existe un valor crítico x_* tal que si la cantidad x_0 de individuos de la población en el instante en el que empieza la explotación es menor que x_* entonces la población también se extingue en tiempo finito. Calcular el valor de x_* y explicar cuál es la predicción de nuestro modelo para el caso en que $x_0 > x_*$.
3. Mostrar que si la cantidad inicial x_0 de individuos en la población es suficientemente alta entonces pueden extraerse a ritmo c_* sin provocar la extinción de la

población. En estas condiciones, y suponiendo que nuestro modelo es correcto, ¿qué debería observarse a largo plazo?

Ejercicio 1.21. * Estudiar las soluciones de la ecuación $\dot{x} = x(a - x^2)$, discutiendo según los valores de $a \in \mathbf{R}$. Discutir la estabilidad de sus puntos críticos. Se sugiere comenzar haciendo argumentos cualitativos para determinar la estabilidad/inestabilidad de los puntos críticos, ya que las estimaciones necesarias para las pruebas de estabilidad no son completamente directas. ♡

Ejercicio 1.22. Estudiar la ecuación $\dot{x} = \sin x$.

1. * Decir todo lo que se pueda acerca de sus soluciones sin hacer ningún cálculo. En particular, clasificar los puntos críticos según su estabilidad.
2. ** Calcular las soluciones de la ecuación y completar su estudio.

Ejercicio 1.23. ** Sea $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^1 tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = a$. Mostrar que el punto crítico $x = 0$ de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ es asintóticamente estable si $a < 0$ e inestable si $a > 0$. Mostrar, con ejemplos apropiados, que puede ocurrir cualquier cosa cuando $a = 0$. Sugerencia: comparar $f(x)$ con una función lineal adecuada cerca de $x = 0$.

Para cerrar esta sección vamos a introducir una serie de ejercicios que escapan al tema de las ecuaciones diferenciales, pero que es relevante para el problema de modelar de alguna manera la variación de una magnitud de interés.

Ejercicio 1.24. *** El problema de crecimiento/decrecimiento de una población puede ser formulado también en tiempo discreto de la siguiente manera: supongamos que cada cierto intervalo de tiempo medimos la cantidad de individuos y llamamos $x(n)$ al resultado de la n -ésima medición y queremos saber como evolucionará $x(n)$ a partir de un valor inicial $x_0 = x(0)$ conocido. Una hipótesis simple es suponer que el crecimiento entre medición y medición es proporcional al número de individuos y entonces formulamos la siguiente ley:

$$x(n+1) = (1+k)x(n),$$

donde k es un número positivo si suponemos que la población aumenta.

Hallar la sucesión $x(n)$ suponiendo conocidos $k > 0$ y x_0 . Comparar con las predicciones del modelo continuo (1.9).

Ejercicio 1.25. *** Si en el ejercicio anterior tomamos $k \in (-1, 0)$ entonces la población está disminuyendo con una velocidad proporcional al número de individuos. Esto corresponde al caso $a < 0$ de (1.9). Es interesante notar que es posible introducir un modelo aleatorio para este tipo de fenómenos que conduce a resultados parecidos a los que ya encontramos. Vamos a formular nuestro modelo para el decaimiento de una muestra de material radioactivo que en el instante inicial tiene $x(0) = N$ átomos.

Comenzaremos por asumir que el hecho de que un átomo se desintegre o no en un intervalo de tiempo dado es un fenómeno esencialmente accidental, que no depende de su historia previa. Esta suposición conduce a describir el “tiempo de vida” de cada átomo como una variable aleatoria T con distribución exponencial $\exp(\lambda)$. La

constante λ está relacionada con la velocidad con la que se desintegra el material radioactivo y depende del elemento que estemos considerando. Por lo tanto

$$p(\{T \leq t\}) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \text{para } t \geq 0, \quad (1.40)$$

o, lo que es completamente equivalente, la probabilidad de que al instante t el átomo no se haya desintegrado es

$$p(\{T > t\}) = e^{-\lambda t}, \quad \text{para } t \geq 0. \quad (1.41)$$

1. Supongamos además que los N átomos de nuestra muestra se comportan de manera independiente. Para cada instante t definimos la variable aleatoria N_t como la cantidad de átomos que todavía no se han desintegrado. Hallar la distribución de N_t y el valor esperado de N_t , para cada $t > 0$.
2. Comparar los modelos aleatorio, de tiempo continuo y de tiempo discreto para la desintegración radioactiva. Calcular las constantes que aparecen en cada uno de los modelos en términos de la vida media λ_m (el tiempo que demora en desintegrarse la mitad del material original).

1.3 Ecuaciones autónomas en el plano

En esta sección trataremos algunos ejemplos sencillos de ecuaciones autónomas en el plano \mathbf{R}^2 . Seguiremos utilizando la notación $\dot{x} = f(x)$ para estas ecuaciones, pero ahora hay que pensar que x es un elemento de \mathbf{R}^2 y f una función de \mathbf{R}^2 (o de un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$) en \mathbf{R}^2 . En algunos casos puede ser conveniente escribir

$$\dot{X} = f(X), \quad X = (x, y), \quad x \in \mathbf{R}, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Si escribimos la función f componente a componente, como

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

la notación $\dot{X} = f(X)$ no indica otra cosa que el sistema de dos ecuaciones escalares

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y). \end{cases} \quad (1.42)$$

A lo largo de esta sección veremos varios ejemplos de este tipo. La noción de *solución* de una ecuación diferencial en el plano (y en general en \mathbf{R}^n) es completamente análoga a la que introdujimos para ecuaciones diferenciales en \mathbf{R} . Si Ω es un abierto en el plano y $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$ es una función continua, una solución de la ecuación diferencial autónoma $\dot{X} = f(X)$ es una función derivable

$$X : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \Omega,$$

definida sobre un intervalo abierto I , tal que se satisface

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) \quad t \in I.$$

Observación 1.3.1. Notemos que X es una función continua de t , porque es derivable. El hecho de que f sea una función continua implica entonces que $f(X(t))$ depende en forma continua de t , por ser composición de dos funciones continuas. Entonces de que $X(t)$ satisfaga la ecuación diferencial $\dot{X} = f(X)$ se tiene como consecuencia que la derivada $\dot{X}(t)$ es una función continua de t y, por lo tanto $X(t)$ es una función de clase C^1 o *curva parametrizada*⁶. ♠

A la imagen, o traza, de la curva parametrizada X , orientada en el sentido que la parametrización induce la llamaremos *órbita*. Así como es usual utilizar la palabra “curva” tanto para la función X como para su imagen en el plano, aunque se trate de objetos distintos (uno es una función y el otro es

⁶Para los lectores que no estén familiarizados con la teoría de curvas hemos incluido en el apéndice A.1, página iii, las nociones sobre curvas parametrizadas (funciones de clase C^1 definidas en un intervalo de \mathbf{R} y a valores en \mathbf{R}^n) necesarias para este curso. También aparece allí la información necesaria sobre campos vectoriales

un conjunto) también suele emplearse el término “órbita” como sinónimo de “solución”. Ya habíamos mencionado este hecho en la observación 1.1.16.

Vamos a ver a continuación algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales en \mathbf{R}^2 .

Ejemplo 1.3.2. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN OSCILADOR SIMPLE

Consideraremos el sistema formado por una partícula de masa m sujeta a un resorte de constante elástica $k > 0$. Si con x_0 indicamos la posición de reposo del sistema, que corresponde a la longitud natural del resorte, la fuerza F que el resorte ejerce al estirarlo hasta una posición x es

$$F = -k(x - x_0). \quad (1.43)$$

Con $x(t)$ designaremos la posición de la masa en el instante t , de modo que su aceleración será $\ddot{x}(t)$ y la ecuación diferencial que describe el sistema se obtiene a partir de la conocida Ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración}) \quad (1.44)$$

y resulta ser

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0).$$

Nada nos impide fijar el sistema de coordenadas de modo que x_0 sea igual a cero (o, lo que es equivalente, tomar como nueva variable $x - x_0$) y la ecuación se transforma en $m\ddot{x} = -kx$, que puede escribirse como

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \omega^2 = k/m > 0. \quad (1.45)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden (la llamamos así porque la derivada segunda \ddot{x} de x es la derivada de orden más alto que aparece en la ecuación). Vamos a transformarla en una ecuación de primer orden en el plano, es decir en una ecuación diferencial en la que sólo aparecen derivadas primeras, introduciendo la nueva variable $y = \dot{x}$. Obtenemos entonces $\dot{y} = -\omega^2 x$, ya que $\ddot{x} = \dot{y}$. Al considerar esta nueva ecuación junto con la ecuación que define la variable y tenemos el sistema, o ecuación diferencial en el plano,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x. \end{aligned} \quad (1.46)$$

En realidad, en este caso, es preferible definir la nueva variable y como $y = \dot{x}/\omega$, porque de esta manera se llega a la forma más simétrica

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega y, \\ \dot{y} &= -\omega x, \end{aligned} \quad (1.47)$$

que, por cierto, es completamente equivalente a (1.46) y a (1.45). Las soluciones de la ecuación (1.45), que se obtiene al modelar las oscilaciones de una masa sometida a la acción de un resorte, son de la forma

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (1.48)$$

Suponemos conocido este hecho, pero si no lo es observemos que basta derivar dos veces $x(t)$ y sustituir en la ecuación (1.45) para ver que $x(t)$ es una solución, independientemente del valor que demos a A y B .

Un cálculo directo a partir de la fórmula $y = \dot{x}/\omega$ que usamos para introducir la variable y nos da

$$y(t) = -A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (1.49)$$

Las constantes A y B quedan determinadas al fijar las condiciones iniciales del movimiento. Si queremos que la condición inicial $(x(0), y(0))$ sea (x_0, y_0) entonces debemos elegir

$$A = x_0, \quad B = y_0.$$

Con esta información es posible estudiar completamente el sistema (1.47). En el ejemplo 1.5.4, página 71, se calculan las soluciones del sistema (1.47) por un procedimiento diferente, que no requiere ningún conocimiento previo acerca de las soluciones de $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Observación 1.3.3. SOLUCIONES PERIÓDICAS

Notemos que una característica relevante de las soluciones de (1.45) (y por ende de (1.47)) es que son funciones *periódicas* del tiempo, con período $2\pi/\omega$. La existencia de fenómenos periódicos es un hecho interesante que se refleja en que la búsqueda de soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales, y la comprensión de sus propiedades, es una parte importante de la teoría de estas ecuaciones. Tal vez valga la pena recordar que una función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ es periódica de período $T > 0$ si se cumple

$$f(t + T) = f(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

A modo de repaso dejamos planteado el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.26. ** Si f es periódica de período T probar que la igualdad

$$f(t + kT) = f(t)$$

se satisface para todo $t \in \mathbf{R}$ y $k \in \mathbf{Z}$.



Ejemplo 1.3.4. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL PÉNDULO

Para tratar este ejemplo derivaremos la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de un péndulo sin rozamiento a partir de la Ley de Newton (1.44).

Supongamos entonces que tenemos una partícula de masa m obligada a moverse sobre una guía circular lisa de radio r que está en un plano vertical. Al decir que la guía es lisa estamos suponiendo que no actúa ninguna fuerza debida al frotamiento entre la partícula y la guía, lo que es equivalente a asumir que la reacción \vec{R} que la guía ejerce sobre la partícula es una fuerza que tiene componente nula en la dirección tangente a la guía (sólo actúa una fuerza normal, que es la que obliga a la partícula a permanecer sobre la guía).

Si llamamos φ al ángulo entre el radio que une la partícula con el centro de la guía y la vertical, medido en sentido antihorario desde el punto más bajo de la guía, la posición de la partícula, en un sistema de coordenadas formado por el centro de la guía como origen y una base ortonormal directa con el segundo vector apuntando hacia arriba, es

$$(x(t), y(t)) = (r \sin \varphi(t), -r \cos \varphi(t)) = r \vec{e}_r(\varphi(t)), \quad (1.50)$$

con

$$\vec{e}_r(\varphi) = (\sin \varphi, -\cos \varphi), \quad (1.51)$$

tal como se muestra en la figura 1.12. Si derivamos \vec{e}_r respecto a φ obtenemos

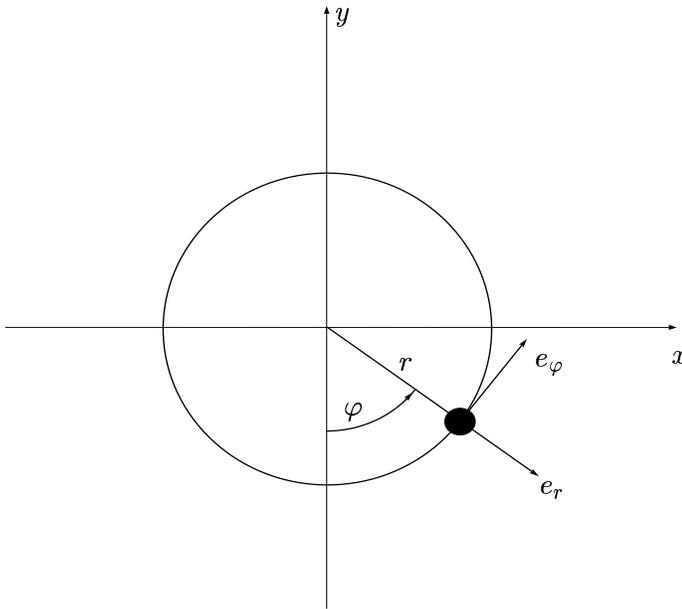


Figura 1.12: el péndulo

el vector

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi). \quad (1.52)$$

que es tangente a la guía y al que llamaremos $\vec{e}_\varphi(\varphi)$. Un cálculo tan sencillo como el anterior muestra

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}(\varphi) = -\vec{e}_r(\varphi). \quad (1.53)$$

La pareja de vectores $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ se adapta bien a la geometría de nuestro problema, así que la utilizaremos para los cálculos. Derivando una vez respecto al tiempo obtenemos la velocidad

$$\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = r \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (1.54)$$

y una nueva derivación da

$$\vec{a}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r. \quad (1.55)$$

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son la gravedad $-mg\vec{j}$ y la reacción \vec{R} de la guía que no tiene componente en la dirección tangencial dada por \vec{e}_φ , ya que hemos asumido que la guía es lisa. Si planteamos la ecuación de Newton obtenemos

$$\vec{R} - mg\vec{j} = mr\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - mr\dot{\varphi}^2\vec{e}_r. \quad (1.56)$$

Para librarnos de la molesta \vec{R} proyectamos escalarmente en la dirección de \vec{e}_φ y resulta

$$-mg\vec{j} \cdot \vec{e}_\varphi = mr\ddot{\varphi} \quad (1.57)$$

que da lugar a la *ecuación del péndulo*

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r} \sin \varphi. \quad (1.58)$$

Esta ecuación puede reducirse a un par de ecuaciones de primer orden, de la misma manera canónica que utilizamos para la ecuación del resorte, introduciendo una variable $\theta = \dot{\varphi}$. Entonces $\dot{\varphi} = \dot{\theta}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \theta \\ \dot{\theta} &= -\frac{g}{r} \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.59)$$

que es completamente equivalente a la ecuación (1.58). ♣

Observación 1.3.5. El sistema de ecuaciones de primer orden (1.59) puede escribirse como $\dot{x} = f(x)$ si consideramos

$$x = (\varphi, \theta) \in \mathbf{R}^2, \quad f(\varphi, \theta) = \left(\theta, -\frac{g}{r} \sin \varphi \right).$$

Notemos que, nuevamente, hemos reducido una ecuación diferencial de segundo orden a una ecuación de primer orden en \mathbf{R}^2 . En general, una ecuación

diferencial de segundo orden de la forma $\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ puede reducirse al sistema de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= F(x, y, t),\end{aligned}\tag{1.60}$$

que resulta ser autónomo si el tiempo t no aparece explícitamente en la ecuación original.

Ejercicio 1.27. * Mostrar como puede reducirse una ecuación diferencial de tercer orden a una ecuación de primer orden en \mathbf{R}^3 . En general, reducir una ecuación diferencial de orden n^7 a una ecuación de la forma $\dot{x} = f(x, t)$, donde $x \in \mathbf{R}^n$. ♠

Observación 1.3.6. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES AUTÓNOMAS.

La ecuación $\dot{x} = f(x)$ tiene una interpretación geométrica muy natural y muy útil. Para fijar ideas supongamos que f está definida sobre un abierto $U \subset \mathbf{R}^2$ y toma valores en \mathbf{R}^2 . Entonces f define un campo vectorial sobre U . Una solución $x(t)$ de la ecuación es una función, o curva parametrizada, que asocia a cada t un punto $x(t)$ en \mathbf{R}^2 . Su vector tangente en $x(t)$ es $\dot{x}(t)$ y la ecuación diferencial implica entonces que $\dot{x}(t) = f(x(t))$, por lo que *el vector tangente a la curva en $x(t)$ es justamente el vector $f(x(t))$ del campo vectorial definido por f* . Si agregamos un dato inicial $x(0) = x_0$ estamos pidiendo que la curva esté en el punto x_0 para $t = 0$. En consecuencia, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases}\tag{1.61}$$

puede describirse como el problema de hallar una curva que en $t = 0$ pasa por x_0 y es tangente al campo vectorial f en cada uno de sus puntos. ♠

Observación 1.3.7. † UNA INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Otra forma de ver las ecuaciones diferenciales es aplicarlas a la descripción del movimiento de una masa de fluido. Hay esencialmente dos maneras de describir este movimiento, que pueden ilustrarse con la imagen de dos pescadores en un mismo río: uno de ellos pesca desde un bote que se deja llevar por la corriente del río; el otro lo hace desde la orilla. Para hacer esto más realista supongamos a nuestros pescadores puntuales. El primero es una partícula que viaja con el río y sigue una cierta trayectoria $x(t)$ que tiene asociada una velocidad $\dot{x}(t)$. El segundo está parado en un punto y y ve partículas que pasan con una velocidad $V(y)$ (si asumimos que el flujo es estacionario la velocidad V no depende del tiempo, sólo de la posición). Lo que conecta ambas descripciones es el siguiente hecho: cuando la trayectoria $x(t)$ pasa por el punto y la velocidad $\dot{x}(t)$ es la velocidad $V(y) = V(x(t))$ que observa el pescador que

⁷una ecuación de orden n es aquella en la que la derivada n -ésima de la función incógnita es la derivada de orden más alto que aparece en la ecuación

está quieto. La vinculación entre ambas descripciones del movimiento del fluido está dada entonces por la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = V(x(t))$.

Esto puede generalizarse un poquito más y formalizarse de la siguiente manera:

I. DESCRIPCIÓN DE LAGRANGE DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO. Si tenemos un volumen de fluido que en el instante $t = 0$ ocupa una región Ω de \mathbf{R}^3 conoceremos su movimiento en un intervalo de tiempo I si para cada partícula $p \in \Omega$ y para cada instante $t \in I$ conocemos la posición $\Phi(p, t)$ de esa partícula. Naturalmente siempre podremos suponer $0 \in I$ y entonces $\Phi(p, 0) = p$. Por lo tanto conocer el movimiento del conjunto de partículas es conocer una función

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega \times I &\rightarrow \mathbf{R}^3, \\ (p, t) &\mapsto \Phi(p, t). \end{aligned} \tag{1.62}$$

II. DESCRIPCIÓN DE EULER DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO. La otra descripción posible consiste en fijar una región U del espacio y mirar con que velocidad \vec{V} pasan las partículas por cada punto $x \in U$. En general la velocidad dependerá también del tiempo (por ejemplo, al abrir una canilla en los primeros momentos las velocidades dependen del tiempo, luego se establece un flujo estacionario) y entonces habrá un campo de velocidades $\vec{V}(x, t)$ definido sobre U .

VINCULACIÓN ENTRE LAS DESCRIPCIONES DE EULER Y LAGRANGE. No es difícil hallar la relación entre las dos descripciones. Podemos calcular la velocidad a partir del conocimiento de las trayectorias $\Phi(p, t)$ derivando respecto al tiempo con p constante, como

$$\dot{\Phi}(x, t) = \partial_t \Phi(p, t)$$

y la interpretación del campo \vec{V} como las velocidades dice entonces

$$\dot{\Phi}(p, t) = \vec{V}(\Phi(p, t), t).$$

Si conocemos el campo \vec{V} entonces $\Phi(p, t)$ no es otra cosa que la solución de la ecuación

$$\dot{x} = \vec{V}(x, t)$$

con dato inicial $x(0) = p$. Por el contrario, si lo que conocemos son las trayectorias $\Phi(p, t)$ para cada partícula p podemos calcular el campo de velocidades simplemente derivando respecto al tiempo con p constante. Notemos que la función Φ no es otra cosa que el flujo que introdujimos en la sección 1.2 anterior y la interpretación que acabamos de dar justifica plenamente el uso de la palabra “flujo”.

Ejercicio 1.28. *** Considerar las funciones

1. $\Phi((x, y), t) = (x \cos t + y \sin t, y \cos t - x \sin t)$;

$$2. \Phi((x, y), t) = (xe^{at}, ye^{bt}),$$

y hallar el campo de velocidades que corresponde a cada uno de estos flujos. Interpretar el resultado. ♠ ††

1.3.1 Estudio de algunas ecuaciones diferenciales autónomas en \mathbf{R}^2

Comenzaremos ahora el estudio de las ecuaciones diferenciales autónomas en el plano. Vamos a empezar por tratar algunos ejemplos simples que nos permitirán presentar las ideas básicas sin grandes complicaciones técnicas. Además, estos ejemplos, a pesar de su sencillez, contienen información relevante y presentan comportamientos dinámicos interesantes que también están presentes en situaciones más complejas.

Ejemplo 1.3.8. CAMPO DE VELOCIDADES CONSTANTE

Hallaremos las soluciones de

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a, \\ \dot{y} &= b,\end{aligned}$$

con dato $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, donde a y b son dos constantes reales. Este problema es muy fácil de resolver. Aunque estamos tratando con un sistema de ecuaciones la ecuación para x es completamente independiente de la ecuación para y y podemos integrarlas separadamente para obtener

$$(x(t), y(t)) = (x_0 + at, y_0 + bt),$$

es decir un flujo lineal muy simple de la forma

$$\Phi((x_0, y_0), t) = (x_0 + at, y_0 + bt).$$

En la figura 1.13 aparece representado un campo vectorial constante (a, b) , y algunas soluciones de la ecuación diferencial asociada al campo. Tal como se aprecia en la fórmula para el flujo y en la figura, en este ejemplo las órbitas son rectas con dirección paralela al vector (a, b) . ♣

La clave para resolver el ejemplo anterior fue que las ecuaciones para x e y no estaban vinculadas o, para decirlo de otra manera, estaban *desacopladas*. Esto es algo general y sugiere que podremos resolver cualquier sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), \\ \dot{y} &= g(y),\end{aligned}\tag{1.63}$$

donde f y g son dos funciones escalares, aprovechando que cada una de las ecuaciones en (1.63) puede resolverse independientemente de la otra, con cálculos similares a los que hicimos en la sección 1.2 al tratar las ecuaciones autónomas en \mathbf{R} . Con esta idea vamos a seguir tratando algunos casos simples.

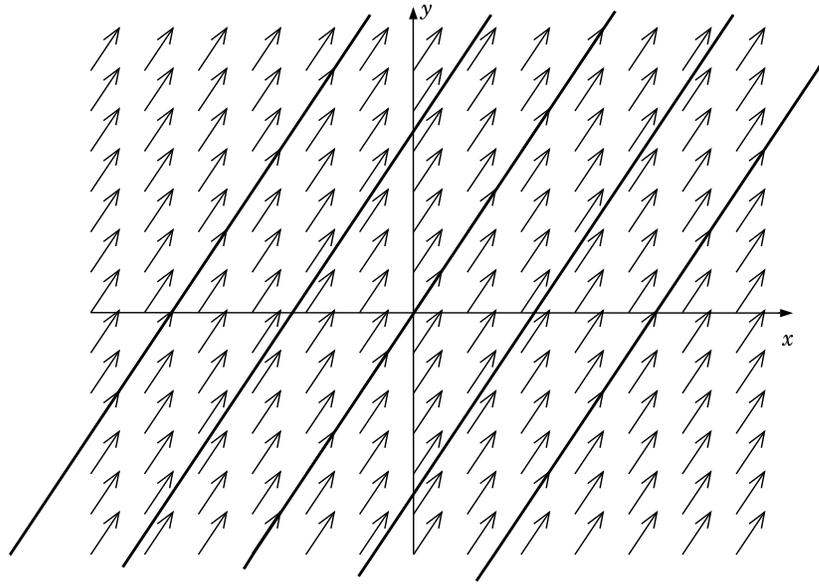


Figura 1.13: campo vectorial constante y soluciones de la ecuación diferencial

Ejemplo 1.3.9. Resolver

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax, \\ \dot{y} &= by, \end{aligned} \tag{1.64}$$

con dato $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. En la figura 1.14 hemos representado, para $a = 2$ y $b = 1$, el campo vectorial asociado con esta ecuación diferencial.

Es evidente que el problema de valores iniciales que estamos considerando es equivalente al par de problemas escalares

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y} = by, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Por lo tanto, su solución es

$$x(t) = x_0 e^{at}, \quad y(t) = y_0 e^{bt},$$

que escrita en forma de un vector de \mathbf{R}^2 queda

$$(x(t), y(t)) = (x_0 e^{at}, y_0 e^{bt}). \tag{1.65}$$

En consecuencia, el flujo que corresponde a la ecuación diferencial (1.64) es

$$\Phi((x, y), t) = (x e^{at}, y e^{bt}).$$

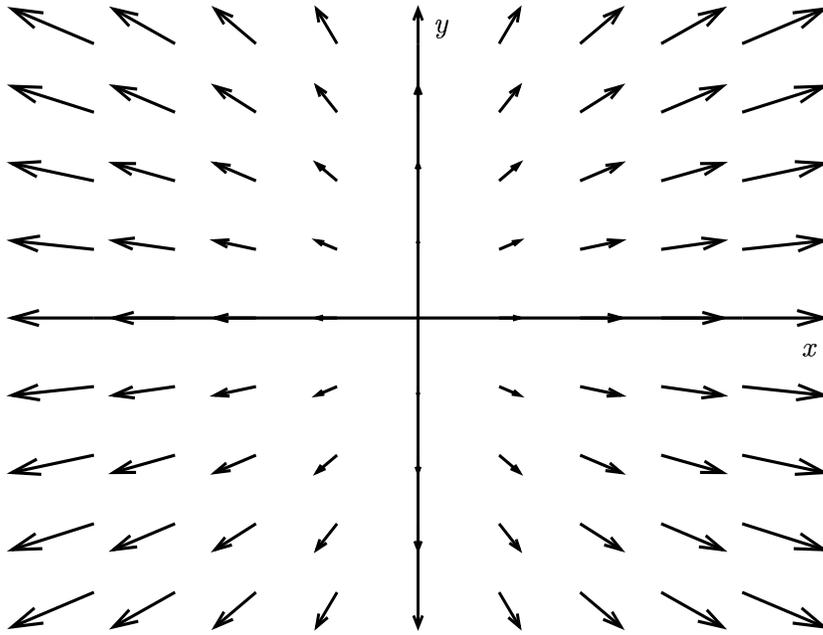


Figura 1.14: el campo vectorial de la ecuación (1.64) para $a = 2$ y $b = 1$.

Más interesante que obtener una forma para el flujo asociado con la ecuación es conseguir una buena representación gráfica del conjunto de sus soluciones, a la que nos referiremos como *plano de fases*, o *diagrama de fases*, cosa que ayuda enormemente a comprender su comportamiento. Por supuesto, la fórmula del flujo es un auxiliar útil para esta tarea, pero puede obtenerse mucha información interesante *sin* resolver la ecuación.

- **PUNTOS CRÍTICOS.** Los puntos críticos de una ecuación diferencial $\dot{X} = f(X)$ pueden hallarse sin resolverla, buscando dónde se anula el miembro de la derecha. Recordemos además que cada punto crítico X_0 corresponde a una solución destacada de la ecuación: la *solución estacionaria* $X(t) \equiv X_0$.

Consideremos el caso $a > 0$, $b > 0$, en (1.64). La condición de que (x, y) sea un punto crítico implica, en este caso, la igualdad $(ax, by) = (0, 0)$, por lo que el único punto crítico es el origen $(0, 0)$.

- **CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE $x(t)$ E $y(t)$.** Para saber cómo es el crecimiento de cada una de las componentes $x(t)$ e $y(t)$ de una solución de la ecuación diferencial *no* hace falta resolver la ecuación completamente y luego derivar para hallar $\dot{x}(t)$ y $\dot{y}(t)$ y estudiar su signo. Por el contrario,

la propia ecuación diferencial nos da directamente el valor de \dot{x} y \dot{y} en cada punto del plano.

En el caso que nos ocupa, con $a > 0$ y $b > 0$, vemos *directamente* que si una solución $(x(t), y(t))$ está en el primer cuadrante $\{x > 0, y > 0\}$ entonces $\dot{x} > 0$ y $\dot{y} > 0$, por lo que x e y aumentan cuando t crece. Por ejemplo, sobre todos los puntos del eje x tenemos $\dot{y} = 0$, por lo que las soluciones tienen tangente horizontal allí. De hecho, la parte positiva y la parte negativa del eje x son dos órbitas. También lo son la parte positiva y la parte negativa del eje y , en este caso con tangente vertical. Con los mismos argumentos se ve rápidamente que x crece en el primer y cuarto cuadrante, y decrece en el segundo y el tercero. En tanto que y crece en el primer y segundo cuadrante, y decrece en el tercero y el cuarto.

En nuestra próxima figura representamos el diagrama de fases asociado con la ecuación (1.64), para $a = 2$, $b = 1$. Pueden apreciarse en ese dibujo algunas de las características que apuntábamos en el análisis que acabamos de hacer.

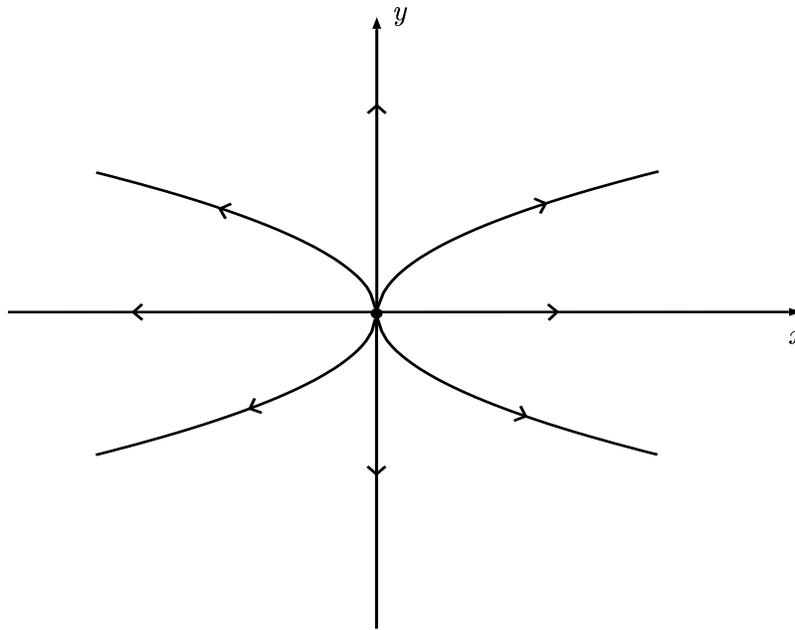


Figura 1.15: el diagrama de fases de (1.64) para $a = 2$ y $b = 1$.

Cuando $a > 0$ y $b > 0$ el punto crítico $(0, 0)$ es inestable. Esto es muy fácil de ver en este caso, porque cualquier solución $(x(t), y(t))$ de la ecuación que no sea la solución estacionaria $(0, 0)$ se va al infinito cuando $t \rightarrow +\infty$, en el

sentido de que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |(x(t), y(t))| = +\infty.$$

Por lo tanto, independientemente de lo cerca de $(0, 0)$ que este su condición inicial $(x(0), y(0))$ la solución se escapa de cualquier entorno de $(0, 0)$, lo que implica la inestabilidad de este punto crítico.

Ejercicio 1.29. * Utilizar los argumentos geométricos que acabamos de presentar, y la fórmula (1.65), para dibujar detalladamente el plano de fases asociado con (1.64), discutiendo según los valores de a y b . Estudiar también la estabilidad del punto crítico $(0, 0)$. No olvidarse de incluir en la discusión los casos en que a y/o b se anulan. ♣

Ejemplo 1.3.10. Resolver

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x, \\ \dot{y} &= x + \lambda y, \end{aligned} \tag{1.66}$$

con dato $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

Cuando $\lambda > 0$ la ecuación tiene un único punto crítico en el origen del plano (x, y) . Es fácil determinar el signo de \dot{x} y \dot{y} a partir de la ecuación, y encontramos que \dot{x} tiene el mismo signo que x , en tanto que \dot{y} se anula sobre la recta $y = -x/\lambda$, es positivo en el semiplano que está por encima de esta recta, y negativo por debajo.

Esta vez las ecuaciones no están desacopladas, pero la primera puede resolverse independientemente de la segunda para obtener

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}.$$

Con esta información la ecuación para y queda como

$$\dot{y} = x_0 e^{\lambda t} + \lambda y.$$

Ésta puede resolverse empleando el método de variación de constantes que presentaremos en la sección 1.8, aunque en vez de eso haremos un truquito que consiste en escribirla como

$$\dot{y} - \lambda y = x_0 e^{\lambda t}$$

para usar que

$$\dot{y}(t) - \lambda y(t) = e^{\lambda t} \frac{d}{dt} (y(t) e^{-\lambda t}).$$

Combinando estas dos igualdades y cancelando un factor exponencial obtenemos

$$\frac{d}{dt} (y(t) e^{-\lambda t}) = x_0,$$

que puede integrarse con toda facilidad entre 0 y t para obtener

$$y(t) e^{-\lambda t} - y_0 = x_0 t \Rightarrow y(t) = (x_0 t + y_0) e^{\lambda t}.$$

Por lo tanto, la solución de nuestro problema es

$$(x(t), y(t)) = (x_0 e^{\lambda t}, (x_0 t + y_0) e^{\lambda t}). \quad (1.67)$$

En la figura 1.16 representamos el campo vectorial asociado con la ecua-

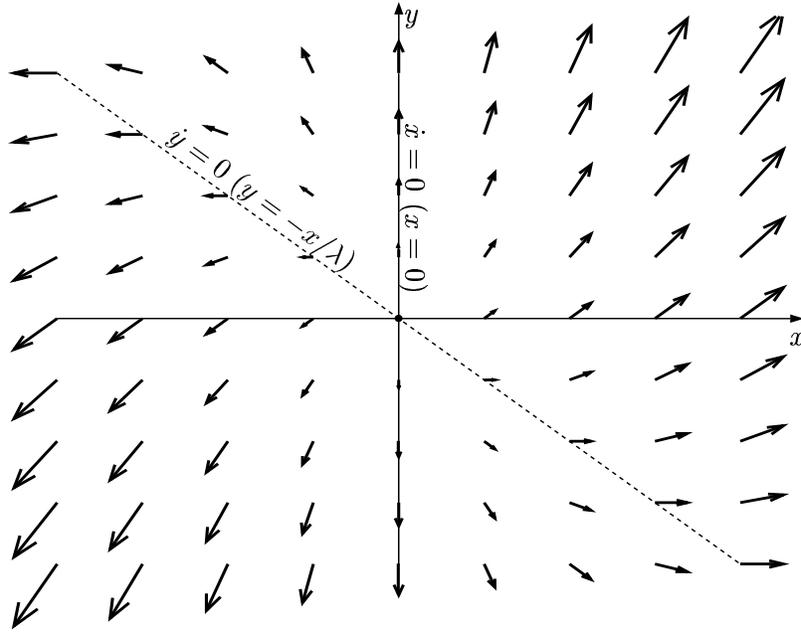


Figura 1.16: campo vectorial de (1.66) con $\lambda > 0$.

ción (1.66). Hemos incluido además el gráfico de la recta sobre la cual \dot{y} cambia de signo. La figura 1.17 es un esquema del diagrama de fases asociado con la ecuación. Observar que cuando las soluciones cortan la recta $y = -x/\lambda$ cambia el crecimiento de la variable y , tal como puede preverse del análisis del signo de \dot{y} . El $(0,0)$ es un punto crítico inestable en este caso.

Ejercicio 1.30. * Dibujar las órbitas de la ecuación 1.66 y discutir la estabilidad del punto crítico $(0,0)$ en los casos en que $\lambda \leq 0$. Sugerencia: clasificar las regiones del plano según el signo de \dot{x} y \dot{y} . Utilizar la información que estos signos dan sobre el crecimiento de $x(t)$ e $y(t)$, junto con la fórmula de las soluciones. ♡ ♣

Observación 1.3.11. SUPERPOSICIÓN DE SOLUCIONES. NOTACIÓN MATRICIAL PARA LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES. MATRIZ EXPONENCIAL

Las ecuaciones diferenciales que hemos tratado en los ejemplos 1.3.9 y 1.3.10 son *ecuaciones diferenciales lineales*, porque su miembro de la derecha depende linealmente de (x, y) . Este hecho permite escribir la ecuación en forma

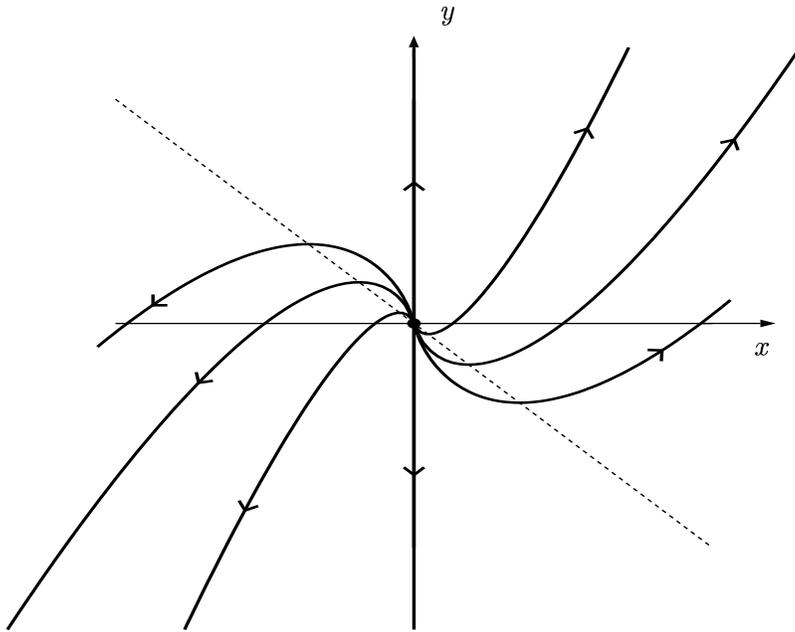


Figura 1.17: diagrama de fases de (1.66) con $\lambda > 0$.

matricial. Por ejemplo, al hacerlo para la ecuación (1.66) obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

que puede expresarse brevemente como

$$\dot{X} = AX$$

si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

También la condición inicial puede expresarse como $X(0) = X_0$ si llamamos X_0 al vector (x_0, y_0) ⁸. En resumen, el problema de valores iniciales para una ecuación diferencial lineal en \mathbf{R}^2 adopta la forma

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (1.69)$$

⁸escribiremos a los vectores de \mathbf{R}^2 como filas o columnas, según nos resulte más conveniente en cada caso. Esta convención facilita la escritura de las fórmulas. Cuando multipliquemos vectores de \mathbf{R}^2 por matrices entonces los consideraremos como columnas —o matrices 2×1 — y aparecerán a la derecha de las matrices 2×2 , como en la fórmula $\dot{X} = AX$

donde A es una matriz 2×2 y X_0 el vector con las condiciones iniciales.

Ejercicio 1.31. * Escribir en forma matricial el problema de valores iniciales planteado en el ejemplo (1.3.9).

No sólo el problema de valores iniciales para una ecuación lineal puede escribirse en forma matricial, también es posible hacerlo para sus soluciones. Antes de discutir esta afirmación en toda su generalidad volvamos a la fórmula (1.67) y observemos que la solución $X(t)$ de la ecuación (1.68), con la condición inicial $X(0) = X_0 = (x_0, y_0)$, es

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (1.70)$$

Otra manera de escribir la solución es expresarla como

$$X(t) = x_0 \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ te^{\lambda t} \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix},$$

que subraya el hecho de que al multiplicar una matriz por el vector (x_0, y_0) estamos haciendo una combinación lineal de sus columnas con coeficientes x_0 e y_0 . Notemos además que la primera columna de la matriz que aparece en (1.70) es la solución de la ecuación diferencial (1.68) con condición inicial $(1, 0)$, en tanto que la segunda columna también resuelve la ecuación diferencial, pero toma el valor $(0, 1)$ en $t = 0$. Llamemos e_i , $i = 1, 2$, a los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ de la base canónica de \mathbf{R}^2 .

Ejercicio 1.32. * Escribir en forma matricial las soluciones del ejemplo (1.3.9). Verificar que las columnas de la matriz son soluciones de la ecuación diferencial y que toman e_1 y e_2 como dato inicial.

Observemos ahora que la expresión matricial (1.70) de las soluciones no hace otra cosa que escribir cualquier solución de $\dot{X} = AX$ como una combinación lineal de las soluciones E_i de los problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = e_i, \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (1.71)$$

Recíprocamente, si somos capaces de hallar las soluciones E_i de (1.71) entonces la solución de $\dot{X} = AX$ con dato inicial (x_0, y_0) es

$$X(t) = x_0 E_1(t) + y_0 E_2(t). \quad (1.72)$$

Veamos ahora que este hecho es completamente general, como consecuencia de un *principio de superposición de soluciones para las ecuaciones lineales*.

Proposición 1.1. Sean $X_i(t)$, $i = 1, 2$ soluciones de la ecuación diferencial lineal $\dot{X} = AX$, y a_i , $i = 1, 2$ constantes reales cualesquiera. Entonces

$$Y(t) = a_1X_1(t) + a_2X_2(t)$$

es una solución de la ecuación diferencial que toma el dato inicial

$$Y(0) = a_1X_1(0) + a_2X_2(0).$$

PRUEBA: consiste en un sencillo cálculo basado en la linealidad de la operación de derivar y de la ecuación diferencial. Al derivar Y y usar que las X_i son soluciones de la ecuación obtenemos

$$\dot{Y}(t) = a_1\dot{X}_1(t) + a_2\dot{X}_2(t) = a_1AX_1(t) + a_2AX_2(t).$$

Como la operación de multiplicar por una matriz es lineal resulta

$$\dot{Y}(t) = A(a_1X_1(t) + a_2X_2(t)) = AY(t).$$

La afirmación acerca del dato inicial es completamente trivial. \diamond

Si retomamos el hilo de la discusión que estábamos desarrollando, y aplicamos la proposición anterior, concluimos que la solución de cualquier problema de valores iniciales (1.69), para una ecuación diferencial lineal $\dot{X} = AX$, puede calcularse como el producto de una matriz cuyas columnas son las soluciones $E_i(t)$ de los problemas (1.71) por el vector X_0 de la condición inicial.

Definición 1.6. MATRIZ EXPONENCIAL

Llamaremos *matriz exponencial de At* a la matriz $(E_1(t), E_2(t))$ cuyas columnas son las soluciones $E_i(t)$ de $\dot{X} = AX$ que satisfacen $E_i(0) = e_i$, $i = 1, 2$. Utilizaremos la notación e^{At} para esta matriz.

Ejemplo 1.3.12. Volvamos a tomar como ejemplo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Entonces su exponencial e^{At} es la matriz que apareció al escribir matricialmente en (1.70) las soluciones de $\dot{X} = AX$, o sea

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Ésta es una matriz que depende del tiempo t .

1. Su definición implica que al evaluarla en $t = 0$ debemos obtener la identidad, lo que es inmediato de verificar.

2. Podemos derivar e^{At} respecto al tiempo. Al igual que para un vector, la derivada de una matriz que depende de t se obtiene derivando cada una de sus componentes. Por lo tanto

$$\frac{de^{At}}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} & 0 \\ \lambda t e^{\lambda t} + e^{\lambda t} & \lambda e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

Recordemos que cada columna de la matriz es solución de $\dot{X} = AX$, de modo que derivar las columnas surte el mismo efecto que multiplicarlas por A . Multiplicar las columnas de una matriz por A es lo mismo que multiplicar por A a la izquierda, así que la matriz (1.73) debería ser igual a Ae^{At} . Vamos a verificar esto haciendo el cálculo:

$$Ae^{At} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ te^{\lambda t} & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} & 0 \\ \lambda t e^{\lambda t} + e^{\lambda t} & \lambda e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Una manera de expresar estas dos propiedades es decir que e^{At} es una solución matricial del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = I, \end{cases} \quad (1.74)$$

donde I representa a la matriz identidad. En realidad, dada una matriz A cuadrada cualquiera, la exponencial e^{At} es la única solución del problema (1.74). Esta observación da un criterio para *verificar* el cálculo de las soluciones de los sistemas lineales: siempre podemos ver si la matriz que hemos hallado al escribir las soluciones satisface (1.74) tal como hicimos en este ejemplo. Si lo satisface habremos resuelto correctamente el problema. Si esto no ocurre entonces habremos cometido un error en algún sitio.

Ejercicio 1.33. ** Demostrar que si A es una matriz 2×2 cualquiera entonces e^{At} es solución de (1.74). ♣

Observación 1.3.13. NOTACIÓN PARA EL FLUJO DE LAS ECUACIONES LINEALES

El flujo Φ asociado con la ecuación diferencial lineal $\dot{X} = AX$ puede expresarse en términos de la matriz exponencial como

$$\Phi(X, t) = e^{At}X, \quad X \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R},$$

ya que $e^{At}X$ es la solución de la ecuación con dato $X(0) = X$. ♠

Ejercicio 1.34. * Verificar, para las matrices de las ecuaciones diferenciales lineales que aparecen en los ejemplos 1.3.9 y 1.3.10 la fórmula

$$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}, \quad s, t \in \mathbf{R},$$

para la matriz exponencial. Concluir que

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}, \quad t \in \mathbf{R}$$

y que e^{At} y e^{As} conmutan para cualesquiera s y t en \mathbf{R} ♡

Ejercicio 1.35. ** Considerar ecuaciones lineales $\dot{X} = AX$ en \mathbf{R}^n , donde A es una matriz en $M^{n \times n}(\mathbf{R})$, y desarrollar la teoría de la matriz exponencial e^{At} para estas matrices. ♠

También la ecuación del oscilador $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, que introdujimos en el ejemplo 1.3.2, nos condujo a un sistema lineal que puede escribirse en forma matricial. A continuación presentamos un ejercicio sobre este sistema, que nos servirá para seguir practicando el arte de dibujar planos de fase (cosa para la que puede ser de gran ayuda una computadora, pero aunque recurramos a una es recomendable comprender el significado de los dibujos que se obtienen. Por otra parte, no siempre es posible resolver un problema de ecuaciones diferenciales introduciéndolo ingenuamente en una computadora y observando el resultado, de modo que conviene desarrollar la capacidad de utilizar las herramientas informáticas de manera inteligente, lo que casi siempre pasa por entender algo del problema que se pretende estudiar con estos medios).

Ejercicio 1.36. *

1. Escribir la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega y, \\ \dot{y} &= -\omega x,\end{aligned}$$

en forma matricial, como $\dot{X} = AX$. Para la matriz A asociada con esta ecuación, hallar e^{At} .

2. Escribir la fórmula del flujo asociado con el sistema y dibujar las órbitas del sistema en el plano (x, y) . Sugerencia: observar que todas las soluciones se conservan sobre conjuntos de la forma $x^2 + y^2 = \text{cte.}$, luego estudiar los signos de \dot{x} e \dot{y} para completar el dibujo del plano de fases. ♡
3. Estudiar la estabilidad de $(0, 0)$ para el sistema (1.47).

Como estamos gastando mucha energía en estudiar ecuaciones lineales vale la pena mencionar algunas razones para hacerlo:

1. los ejemplos que hemos visto hasta ahora son relativamente simples y constituyen un buen entrenamiento para atacar problemas más difíciles.
2. A pesar de su simpleza contienen bastante variedad de comportamientos.
3. Comprender bien las ecuaciones lineales es un paso previo necesario para estudiar el comportamiento de una ecuación cerca de sus puntos críticos.
4. Muchos problemas de interés, por ejemplo muchos problemas de circuitos eléctricos, pueden ser modelados con alto grado de precisión por ecuaciones lineales.

Observación 1.3.14. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES ALREDEDOR DE SUS PUNTOS CRÍTICOS

Vamos a extender un poco el comentario introducido en el ítem 3. La idea básica es que si tenemos que estudiar una ecuación $\dot{x} = f(x)$ cerca de un punto crítico x_0 podemos considerar el desarrollo de Taylor de primer orden de f

$$f(x) \simeq f(x_0) + D_{x_0}f(x - x_0) = D_{x_0}f(x - x_0)$$

En el punto crítico x_0 la función f se anula, entonces aproximamos f por el término lineal. Si introducimos una variable $Y = x - x_0$ y sólo nos quedamos con la parte lineal de f en la ecuación diferencial llegamos a la *ecuación linealizada*

$$\dot{Y} = (D_{x_0}f)Y. \quad (1.75)$$

Veremos que en muchos casos la ecuación linealizada contiene la información que nos hace falta para describir el comportamiento de las soluciones de la ecuación original cerca del punto crítico x_0 , porque en ella hemos puesto el término dominante del desarrollo de f . La condición para que esta afirmación sea correcta es que la matriz de la linealización no tenga ningún valor propio con parte real nula. Ésta es una condición de no degeneración de la parte lineal de la ecuación que asegura que este término domina a los términos de mayor orden. En particular, notemos que excluye al 0 como valor propio. ♠

Observación 1.3.15. Un comentario similar vale cerca de un punto x_0 en que f no se anula. La continuidad de f implica que $f(x) \simeq f(x_0)$ si $x \simeq x_0$ y podemos aproximar la ecuación diferencial, cerca de x_0 , por $\dot{x} = f(x_0)$. Esta ecuación tiene un campo vectorial constante y su flujo es $\Phi(x, t) = x + tf(x_0)$ (comparar con el flujo que se obtuvo en el ejemplo 1.3.8). Este flujo tan simple es una buena aproximación de las soluciones de la ecuación original cerca del punto no crítico x_0 . ♠

Ejemplo 1.3.16. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL PÉNDULO
Retomemos la ecuación del péndulo (1.58)

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin \varphi,$$

donde $\omega^2 = g/r$ (ver el ejemplo 1.3.4). Podemos transformarla en el sistema de primer orden (1.59) tal como hicimos antes. Sin embargo, es preferible introducir una variable θ tal que $\dot{\varphi} = \omega\theta$ por razones de simetría similares a las que utilizamos en el ejemplo 1.3.2 del oscilador simple (una masa sujeta a un resorte). Esto da lugar al sistema

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega\theta \\ \dot{\theta} &= -\omega \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.76)$$

que podemos escribir también como

$$(\dot{\varphi}, \dot{\theta}) = f(\varphi, \theta), \quad f(\varphi, \theta) = (\omega\theta, -\omega \sin \varphi).$$

La matriz del diferencial de f es

$$Df_{(\varphi, \theta)} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

El péndulo tiene dos posiciones de reposo: una “arriba”, que corresponde al punto crítico $\varphi = \pi$, $\theta = 0$, y que tiene que ser inestable si nuestro modelo para el movimiento del péndulo no está equivocado; la otra está “abajo” en $(0, 0)$.

LINEALIZACIÓN ALREDEDOR DE $(\pi, 0)$. El primer paso en la linealización es evaluar el diferencial del campo en el punto $(\pi, 0)$ para calcular la aproximación lineal del campo vectorial asociado con la ecuación cerca de ese punto. En este caso tenemos

$$Df_{(\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

El valor para el diferencial nos dice entonces que el campo vectorial f cerca de $(\pi, 0)$ satisface

$$f(\varphi, \theta) \simeq \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi - \pi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\theta \\ \omega(\varphi - \pi) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial lineal que aproxima a la ecuación original cerca de $(\pi, 0)$ es

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega\theta, \\ \dot{\theta} &= \omega(\varphi - \pi) \end{aligned}$$

Conviene introducir un cambio de coordenadas que lleve el origen al punto en que estamos trabajando, así que definimos

$$\xi = \varphi - \pi, \quad \eta = \theta.$$

Con estas nuevas coordenadas la ecuación diferencial con la que estamos trabajando se transforma en la ecuación lineal

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \omega\eta, \\ \dot{\eta} &= \omega\xi \end{aligned} \tag{1.77}$$

cuya matriz es justamente $Df_{(\pi, 0)}$. Observemos que esta ecuación no es otra cosa que la que corresponde a (1.75) para la situación particular que estamos analizando. El objetivo de nuestro próximo ejercicio es estudiar esta ecuación diferencial por medio de un cambio de variables conveniente. En la sección 1.5 comenzaremos a desarrollar sistemáticamente la técnica de realizar cambios de coordenadas para resolver las ecuaciones lineales, de modo que este ejercicio puede verse como un adelanto del material que se presenta allí.

Ejercicio 1.37. **

1. Introducir las nuevas variables

$$(u, v) = (\xi + \eta, \xi - \eta).$$

Con su ayuda resolver (1.77) y representar el plano de fases asociado con esta ecuación.

2. Representar el plano de fases asociado con la ecuación diferencial que satisfacen u y v . Observar que este plano de fases se obtiene del de la parte anterior por medio del cambio de coordenadas que permite pasar de (ξ, η) a (u, v) , y viceversa.
3. Determinar el tipo de estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ de la ecuación (1.77).

Veremos más adelante, en la sección 3.4, que el estudio que acabamos de hacer permite obtener una buena imagen de lo que ocurre con la ecuación original del péndulo cerca del punto $(-\pi, 0)$ en que calculamos la linealización. Por ejemplo, el diagrama de fases de la ecuación del péndulo cerca de $(-\pi, 0)$ es muy parecido al de la ecuación (1.77) cerca de $(0, 0)$. Verificaremos esta afirmación en la próxima sección, cuando hagamos un estudio más detallado de las ecuaciones del péndulo, pero vale la pena mencionar que es consecuencia de resultados más generales (como el teorema de Grobman-Hartman que enunciamos en la sección 3.4, acerca de la linealización de una ecuación diferencial. Estos resultados aseguran que si la linealización alrededor de un punto crítico “no degenera” entonces la ecuación linealizada tiene un comportamiento similar al de la ecuación original. De hecho es posible pasar localmente, cerca del punto crítico, de una ecuación a la otra por medio de un cambio de variables adecuado. La condición de no degeneración es que la matriz de la linealización no tenga valores propios con parte real nula. En el ejemplo que estamos tratando los valores propios de $Df_{(\pi, 0)}$ son $\pm\omega$, por lo que esta condición se satisface.

LINEALIZACIÓN ALREDEDOR DE $(0, 0)$. Pasemos ahora a estudiar la linealización en el punto de equilibrio $(0, 0)$. Si calculamos el diferencial de f en ese punto obtenemos

$$Df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$

Entonces, una vez puesta en forma matricial, la ecuación que se obtiene linealizando (1.76) es

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (1.79)$$

Notemos que este sistema de ecuaciones es justamente el sistema (1.47) que modela el comportamiento del oscilador simple. Cuando calculamos los valores propios de la matriz del sistema obtenemos los números imaginarios $\pm i\omega$, que tienen parte real nula, por lo que los resultados generales que citamos antes no

permiten asegurar que las soluciones de la ecuación original y su linealizada tengan comportamientos similares.

Sin embargo veremos en la sección 1.4 que las ecuaciones del péndulo tienen asociada una *energía* que se conserva en la evolución del sistema, y cómo usar esa energía para describir el plano de fase correspondiente. También la ecuación linealizada tiene una energía, cuyo comportamiento cerca del punto $(0, 0)$ es muy similar al de la energía del péndulo. Por esta razón ambos sistemas comparten la característica de mostrar oscilaciones periódicas cuando se parte de condiciones iniciales próximas a $(0, 0)$, y en las cercanías de este punto los planos de fase correspondientes a las ecuaciones (1.76) y (1.47)-(1.79) tienen esencialmente el mismo aspecto. Discutiremos este problema con algo más de detalle en la página 66.

Pero no puede pasarse de una ecuación a la otra por medio de un cambio de variables tal como ocurre cuando no hay valores propios con parte real nula⁹. En la sección 3.4 presentaremos ejemplos de ecuaciones diferenciales en el plano que tienen al $(0, 0)$ como punto crítico, que también conducen al sistema (1.79) al aplicar el procedimiento de linealización alrededor de $(0, 0)$, pero muestran un comportamiento completamente diferente al de la ecuación del péndulo y del oscilador debido al efecto de los términos de orden más alto. Ver, el ejemplo 3.4.2, en particular el ejercicio 3.46 en la página 267. ♣

⁹una evidencia de esto es que en el caso lineal todas las oscilaciones tienen el mismo período, independiente de la amplitud, en tanto que el período de las oscilaciones del péndulo, incluso de las pequeñas oscilaciones, depende de su amplitud

1.4 Cantidades que se conservan o decrecen sobre las órbitas

En esta sección nos ocuparemos de estudiar algunas cantidades que tienen la propiedad de ser no crecientes al movernos sobre la órbita de una ecuación diferencial en el sentido en el que el tiempo t crece. El ejemplo más claro de que este tipo de cantidades deben existir y ocupar un papel importante en la teoría proviene otra vez de los sistemas mecánicos. Si una ecuación diferencial modela un sistema mecánico aislado entonces la energía del sistema permanece constante o decrece al dejar evolucionar el sistema. El primer caso corresponde a sistemas donde la energía no se disipa (por ejemplo, un sistema aislado en el que no hay rozamientos de ningún tipo). En la segunda categoría caen los fenómenos en los que una parte de la energía del sistema se va perdiendo en la evolución (típicamente un sistema en el que hay frotamiento que hace perder energía mecánica al generar calor).

Ejemplo 1.4.1. Retomemos la ecuación del oscilador armónico $m\ddot{x} = -kx$, que hemos escrito también como

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.80)$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$, o como el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega y, \\ \dot{y} &= -\omega x, \end{aligned} \quad (1.81)$$

al introducir una variable y tal que $y = \dot{x}/\omega$ para pasar a un plano de fases conveniente. Es bien conocido el hecho de que en este sistema hay dos tipos de energía en juego: la energía cinética debida a la velocidad con que se desplaza la masa m y la energía almacenada en el resorte al deformarse. También que la energía total, suma de las energía cinética y potencial, se conserva. Veamos como nuestro modelo recoge estos hechos. La energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2, \quad (1.82)$$

en tanto que la energía (potencial) de deformación del resorte es

$$E_r = \frac{1}{2}kx^2, \quad (1.83)$$

así que la energía total es

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (1.84)$$

Si calculamos la derivada \dot{E} de la energía con respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{E} = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}(kx + m\ddot{x}) = 0, \quad (1.85)$$

lo que muestra que la energía se conserva a lo largo de las trayectorias del sistema. Podemos reescribir estos cálculos usando las magnitudes x e y de nuestro plano de fases para expresar la energía (1.84) como

$$E = \frac{k}{2} (x^2 + y^2) \quad (1.86)$$

y concluir que la magnitud

$$e = x^2 + y^2 \quad (1.87)$$

se mantiene constante sobre las órbitas del sistema (1.81). Este hecho tiene como consecuencia inmediata que las órbitas de este sistema deben estar contenidas en circunferencias, cada una de las cuales corresponde a un nivel de energía diferente, tal como vimos al resolver la parte 2 del ejercicio 1.36. Esto es algo tan importante que merece ser destacado como la siguiente observación:

Observación 1.4.2. El conocimiento de una magnitud que se conserva en la evolución, a la que llamaremos también *preintegral*, nos da mucha información acerca de lo que sucede con las soluciones de la ecuación diferencial, casi sin esfuerzo. ♠

La segunda consecuencia que podemos extraer de todo esto es que el punto crítico $x = 0$, $y = 0$ es estable. En efecto, la cantidad e que se conserva en la evolución es justamente el cuadrado de la distancia del punto (x, y) al origen $(0, 0)$ del plano de fases. Si resolvemos la ecuación con dato inicial (x_0, y_0) cercano al origen entonces tendremos

$$x^2(t) + y^2(t) = x_0^2 + y_0^2$$

y la trayectoria permanecerá tan cerca del origen como lo estaba al principio. Esto no es otra cosa que la estabilidad del punto crítico $O = (0, 0)$. Más adelante explotaremos sistemáticamente este tipo de ideas para probar estabilidad e inestabilidad. En términos de la energía del sistema lo que acabamos de decir es que si en el instante inicial el sistema está cerca del punto $x = 0$ (lo que corresponde a poca deformación del resorte), $y = 0$ (con poca velocidad) entonces su energía es baja y en ningún momento posterior podrá alcanzar una región con grandes deformaciones del resorte o velocidades altas, porque para hacerlo hace falta más energía. En este argumento es clave el hecho de que el punto O es un mínimo estricto de la función “energía” $e(x, y) = x^2 + y^2$, en el sentido de que existe un entorno de O en el cual O es el único punto donde e alcanza su mínimo $e = 0$.

Ejercicio 1.38. * Mostrar directamente, a partir de nuestro conocimiento de las soluciones del sistema (1.81), que la energía se conserva sobre las órbitas.

Observación 1.4.3. Es interesante notar que aún ignorando las cosas más básicas de física podemos encontrar que la cantidad E se conserva haciendo

el siguiente argumento: si multiplicamos la ecuación $m\ddot{x} + kx = 0$ por \dot{x} obtenemos

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

e inmediatamente podemos reconocer el miembro de la izquierda como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m\dot{x}^2 + kx^2). \quad (1.88)$$

Por lo tanto, la magnitud entre parentésis es una constante del movimiento, ya que su derivada es siempre igual a 0. ♠ ♣

Ejemplo 1.4.4. Consideraremos ahora un resorte con un amortiguador. La ecuación del sistema mecánico es ahora $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$, donde $b > 0$ es una constante que caracteriza al amortiguador. Podemos transformarla en la ecuación de primer orden en el plano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega y, \\ \dot{y} &= -\omega x - \beta y, \end{aligned} \quad (1.89)$$

al introducir $\omega = \sqrt{k/m}$, $\beta = b/m$ e $y = \dot{x}/\omega$.

Ejercicio 1.39. * Mostrar que la energía $e = x^2 + y^2$ es no creciente sobre las órbitas de (1.89), y usar este hecho para probar que el $(0, 0)$ es estable.

Ejercicio 1.40. ** Consideremos $a < 0$ y $b < 0$. Mostrar que $V(x, y) = x^2 + y^2$ es una función estrictamente decreciente sobre las órbitas del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax, \\ \dot{y} &= by, \end{aligned} \quad (1.90)$$

salvo que estemos considerando la solución estacionaria asociada al punto crítico $(0, 0)$, y usar este hecho para mostrar que $(0, 0)$ es un punto crítico estable.

Observación 1.4.5. En realidad la existencia de una función V que tiene un mínimo estricto en un punto crítico y es estrictamente decreciente sobre las órbitas no estacionarias permite asegurar la estabilidad asintótica del punto crítico. Probar esto es algo más difícil que obtener resultados de estabilidad, por eso lo pospondremos para un poco más adelante. ♠

1.4.1 Estudio de las ecuaciones del péndulo

Vamos a utilizar ahora las ideas que estamos manejando para ocuparnos de un ejemplo algo más complicado. Atacaremos con estos métodos la ecuación del péndulo

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin \varphi. \quad (1.91)$$

que introdujimos en la sección anterior. Recordemos que $\omega^2 = g/r$, donde g indica la aceleración de la gravedad y r el radio de la guía circular sobre la

que se desplaza la masa del péndulo. También habíamos reducido (1.91) a un sistema de primer orden introduciendo una nueva variable $\theta = \dot{\varphi}/\omega$ para obtener

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega\theta, \\ \dot{\theta} &= -\omega \sin \varphi.\end{aligned}\tag{1.92}$$

El truquito de multiplicar (1.91) por $\dot{\varphi}$ nos permite concluir que la cantidad

$$e = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos \varphi\tag{1.93}$$

se conserva sobre las órbitas de (1.92), cosa que puede verificarse con el sencillo cálculo

$$\dot{e} = \theta\dot{\theta} + \sin \varphi \dot{\varphi} = -\theta\omega \sin \varphi + \omega\theta \sin \varphi = 0.$$

Ejercicio 1.41. ** Dar una interpretación física de e . ¿Cómo podría haberse conjeturado la existencia de esta cantidad conservada sobre las trayectorias de la ecuación?

Estabilidad de la posición de reposo en el punto más bajo

Observemos en primer lugar que e alcanza su mínimo en los puntos con $\theta = 0$ (velocidad nula) y $\cos \varphi = 1$, es decir $\varphi = 2n\pi$, donde n es un número entero. Estos puntos representan el reposo del péndulo en la parte más baja de la guía y es evidente que ésta es la configuración con menor energía. Vamos a probar ahora utilizando e que estos puntos son estables. En realidad lo haremos sólo para $(0, 0)$ porque todos tienen el mismo comportamiento.

La idea de la prueba es muy simple: si la condición inicial esta cerca de $(0, 0)$ entonces la función e evaluada en el punto inicial estará cerca del valor -1 , por lo tanto permanecerá todo el tiempo cerca de ese valor y la trayectoria no podrá alejarse de $(0, 0)$, porque para hacerlo e debe tomar valores más grandes. La prueba no es más que escribir todo esto cuidadosamente en términos de la definición de estabilidad.

Proposición 1.2. *El punto crítico $(\varphi, \theta) = (0, 0)$ del sistema (1.92) es un punto crítico estable.*

PRUEBA. Consideremos $\epsilon > 0$ dado. Tenemos que mostrar que existe un $\delta > 0$ tal que al tomar (φ_0, θ_0) que satisfaga $|(\varphi_0, \theta_0)| < \delta$, la solución $(\varphi(t), \theta(t))$ de (1.92) con dato inicial (φ_0, θ_0) satisface $|(\varphi(t), \theta(t))| < \epsilon$ para todo $t > 0$. Para ϵ pequeño consideremos el conjunto

$$S_\epsilon = \{(\varphi, \theta); |(\varphi, \theta)| = \epsilon\}.\tag{1.94}$$

Si ϵ es chico no habra en S_ϵ ningún punto de la forma $(2n\pi, 0)$ con $n \neq 0$, y e será estrictamente mayor que -1 en todos los puntos de S_ϵ . Como S_ϵ es cerrado y acotado y e es una función continua de las variables φ y θ entonces e

alcanza un mínimo m sobre S_ϵ , que en virtud de nuestra observación anterior será estrictamente mayor que -1 .

Para asegurarnos de que la órbita no alcance S_ϵ todo lo que tenemos que hacer es partir con energía suficientemente baja, por debajo de m . Tengamos presente que $m > -1$. Como $e(0, 0) = -1$ y e es continua existe $\delta > 0$ tal que

$$e(\varphi, \theta) < m \quad \text{si} \quad |(\varphi, \theta)| < \delta.$$

Este es el δ que estamos buscando, porque si la condición inicial satisface

$$|(\varphi_0, \theta_0)| < \delta$$

entonces

$$e(0) = e(\varphi(0), \theta(0)) = e(\varphi_0, \theta_0) < m.$$

Por lo tanto

$$e(t) = e(\varphi(t), \theta(t)) = e(0) < m,$$

de modo que la órbita nunca podrá alcanzar S_ϵ , porque para que esto ocurriera e debería alcanzar un valor mayor o igual que m . Entonces $(\varphi(t), \theta(t))$ se mantiene en la región $\{|(\varphi, \theta)| < \epsilon\}$ del plano (φ, θ) , para todo $t \geq 0$, tal como queríamos probar. \diamond

Ejercicio 1.42. *** En la prueba anterior falta verificar un detalle, ¿cuál es?

Observación 1.4.6. Para la prueba de la proposición 1.2 no es necesario que la cantidad e permanezca constante sobre las órbitas. Basta saber que

$$e(t) = e(\varphi(t), \theta(t))$$

es una función no creciente de t . Esta observación hace que podamos extender los argumentos que acabamos de presentar, en los que usamos una función decreciente sobre las órbitas, o *función de Liapunov*, para mostrar la estabilidad de puntos críticos a un buen número de problemas.

Ejercicio 1.43. * Mostrar que el punto crítico $(0, 0)$ del sistema

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega\theta, \\ \dot{\theta} &= -\omega \sin \varphi - \beta\theta. \end{aligned} \tag{1.95}$$

es estable si $\beta \geq 0$. ♠

Para terminar esta sección vamos a incluir un par de ejercicios sobre dos clases de ecuaciones diferenciales sumamente interesantes, los *sistemas conservativos* y los *flujos gradiente*.

Ejercicio 1.44. ** SISTEMAS CONSERVATIVOS

Designemos con x un punto de \mathbf{R}^n . Sea U una función escalar definida en un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, de clase C^1 . Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = -\nabla U(x)$. Esta ecuación de lugar al sistema de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\nabla U(x),\end{aligned}$$

en \mathbf{R}^{2n} , ya que cada para (x, y) es ahora un vector de ese espacio. Hallar una cantidad que se conserve sobre las soluciones $(x(t), y(t))$ de la ecuación diferencial. Dar una interpretación física de todo esto. Sugerencia: la ecuación del $\ddot{x} = -kx$, en dimensión $n = 1$, es un problema de este tipo, porque $-kx$ es la derivada (gradiente) de $-kx^2/2$.

Ejercicio 1.45. ** FLUJOS GRADIENTE

1. Sean x y U como en el ejercicio anterior. Consideremos la ecuación $\dot{x} = -\nabla U$. Mostrar que U es una cantidad estrictamente decreciente sobre las órbitas de la ecuación fuera de los puntos estacionarios. Mostrar que los mínimos locales de U son puntos críticos estables.
2. Consideremos la ecuación escalar $\dot{x} = f(x)$ (ahora estamos usando la variable x para designar un escalar).
 - (a) Mostrar que si $x_0 \in \mathbf{R}$ es tal que $f(x_0) = 0$, f es positiva en algún intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ y negativa en $(x_0, x_0 + \delta)$, para algún $\delta > 0$, entonces x_0 es un punto crítico estable. Sugerencia: considerar una primitiva F de f y usar la parte anterior.
 - (b) Comparar este resultado con lo que se obtiene dibujando e inspeccionando los diagramas de fases de las ecuaciones diferenciales en \mathbf{R} con el fin de determinar la estabilidad de sus puntos críticos. También con el resultado del ejercicio 1.23, página 32.

Estudio del plano de fases por medio de una preintegral

Tal como observamos antes para el oscilador armónico, el conocimiento de una preintegral, es decir, de una cantidad e que es constante sobre las órbitas simplifica la tarea de encontrarlas, porque ahora sabemos que deben estar sobre conjuntos de la forma $\{e = \text{cte.}\}$. Utilizaremos este hecho para determinar las órbitas de la ecuación (1.92) a partir de la cantidad e definida por (1.93). Tomemos entonces constantes c y estudiemos como son los conjuntos

$$\{e(\varphi, \theta) = c\}.$$

Naturalmente, al hacerlo habrá que ir discutiendo según los distintos valores de c . El análisis de los conjuntos de nivel de e nos proporcionará curvas en el plano (φ, θ) en las que tienen que estar contenidas las órbitas de la ecuación, pero no nos dice nada acerca de la orientación de estos conjuntos (recordemos que una órbita es una curva orientada en el sentido en que “viaja” la solución de la ecuación diferencial). Sin embargo, esta información puede

obtenerse investigando el signo de $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$ en el plano (φ, θ) a partir de la ecuación diferencial (1.92). Esto nos dirá como se mueven las cosas sobre los conjuntos $\{e = c\}$. Con toda esta información es posible obtener una buena pintura cualitativa del sistema.

Para empezar recordemos que los puntos críticos de la ecuación son todos los de la forma $(k\pi, 0)$, con k entero. Sabemos además que el signo de $\dot{\varphi}$ es el mismo que el de θ . Si k indica un número entero cualquiera tenemos que $\dot{\theta}$ se anula siempre que $\varphi = k\pi$, es positivo cuando $\varphi \in ((2k - 1)\pi, 2k\pi)$ y negativo si $\varphi \in (2k\pi, (2k + 1)\pi)$. Esta información aparece en la figura 1.18, en la que nos hemos restringido a representar valores de φ entre $-3\pi/2$ y $3\pi/2$.

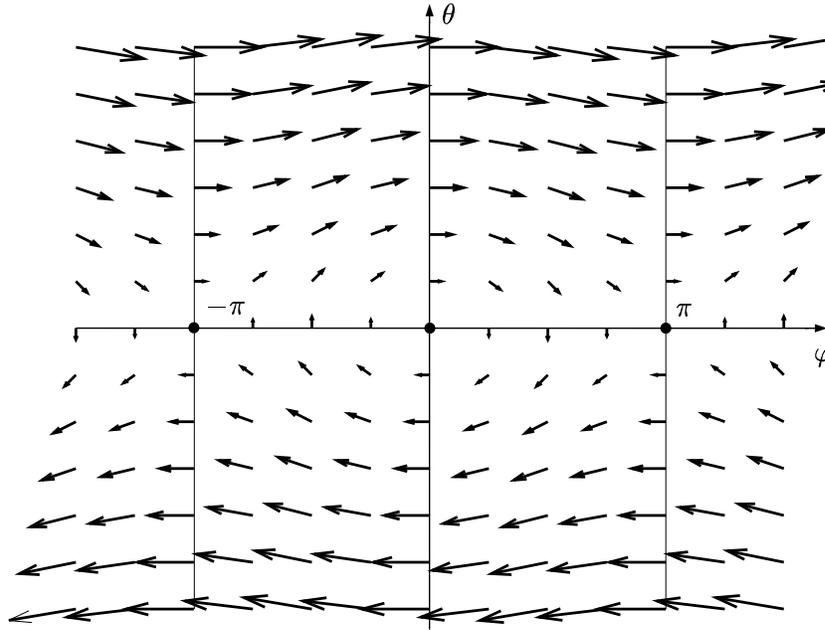
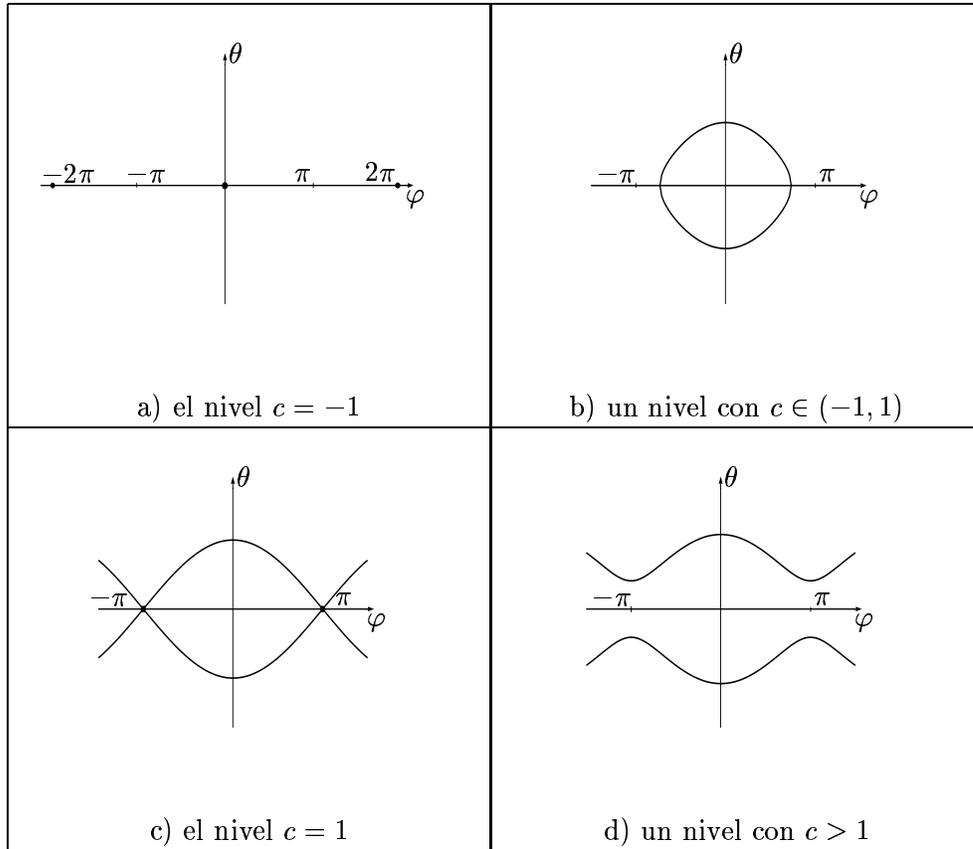


Figura 1.18: el campo vectorial de las ecuaciones del péndulo

Pasemos a incorporar ahora la información que puede obtenerse a partir de e . Los dibujos que corresponden a esta discusión son los que están en la tabla de la figura 1.19

- CASO $c < -1$. Ya habíamos observado antes que el mínimo de e es -1 , así que el conjunto $\{e = c\}$ es vacío para $c < -1$.
- CASO $c = -1$. Este valor sólo se toma sobre los puntos críticos

$$\varphi = 2k\pi, \theta = 0, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Figura 1.19: niveles de energía para $c > 1$

Cada punto crítico es una órbita estacionaria de (1.92). Ya vimos que estos puntos son estables, como consecuencia de que e alcanza su valor mínimo en ellos.

- CASO $-1 < c < 1$. En este rango de valores obtenemos curvas cerradas que rodean los puntos críticos $(0, 2k\pi)$. Si nos concentramos en la parte que está comprendida en $-\pi < \varphi < \pi$ obtenemos, para cada valor de c una curva cerrada que rodea el $(0, 0)$, corta el eje θ en $\theta = \pm\sqrt{2(c+1)}$ con tangente horizontal, y el eje φ en $\varphi = \pm \arccos(-c)$ con tangente vertical. Cada una de estas curvas es una órbita periódica que representa las oscilaciones del péndulo alrededor de la posición de reposo. El movimiento sobre la órbita ocurre en sentido antihorario, como consecuencia de los signos de $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$. El punto en que se corta el eje φ corresponde al máximo apartamiento respecto a la posición de equilibrio, que se alcanza con velocidad nula. Cuando se pasa por $\varphi = 0$ la velocidad es máxima, cosa que puede apreciarse en la figura ya que el valor máximo de $|\dot{\theta}|$

sobre cada órbita se alcanza precisamente en esos puntos.

- CASO $c = 1$. Este es el nivel de energía más interesante, y puede verse en la entrada c) de la figura 1.19. En primer lugar observemos que todos los puntos críticos de la forma

$$\varphi = (2k + 1)\pi, \quad \theta = 0 \quad k \in \mathbf{Z}$$

están en este nivel. Estos puntos representan órbitas estacionarias. También están en este nivel las curvas de la forma

$$\theta = \pm \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}, \quad \varphi \in ((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi), \quad (1.96)$$

que van de punto crítico en punto crítico. La curva con signo + corresponde a una trayectoria que sale desde el punto de arriba de la guía ($\varphi = -\pi$), pasar por el punto más bajo ($\varphi = 0$) y volver a subir para alcanzar $\varphi = \pi$ con velocidad 0, siempre viajando en sentido antihorario. Tal como veremos en la sección 3.1, esta solución está definida para $t \in (-\infty, +\infty)$, por lo que demora un tiempo infinito en hacer este recorrido. La curva con signo negativo corresponde a una órbita que hace exactamente lo mismo, pero en sentido horario.

- CASO $c > 1$. En este caso la expresión que está dentro de la raíz cuadrada en (1.96) nunca se anula y θ es siempre positivo o negativo, según que hayamos escogido el signo + o - (ver la figura 1.4.1). Esto implica que $\dot{\varphi}$ nunca cambia de signo y lo que estamos viendo son órbitas que describen el movimiento de una partícula con suficiente energía para dar vueltas y vueltas sobre la guía sin detenerse jamás. Lo hace en sentido horario sobre las órbitas con $\theta > 0$ y en sentido antihorario sobre las que tienen $\theta < 0$.

Juntando toda esta información en un sólo dibujo llegamos a obtener la figura 1.20, que es una buena pintura del diagrama de fases asociado con la ecuación del péndulo. Observemos que este diagrama pone en evidencia que los puntos críticos de la forma $((2k + 1)\pi, 0)$ son inestables, porque hay órbitas que se alejan de ellos. Esto está completamente de acuerdo con nuestra intuición física del problema.

Ejercicio 1.46. ** Comparar el diagrama de fases para la ecuación del péndulo cerca del punto $(\pi, 0)$ con el de su linealización alrededor de ese punto (ver el ejercicio 1.37 en la página 54).

Observación 1.4.7. Alguna de las afirmaciones que hemos hecho antes no están completamente justificadas. Por ejemplo que para $c \in (-1, 1)$ tenemos órbitas cerradas (periódicas), o que para $c = 1$ hay órbitas que demoran infinito tiempo para llegar hasta el punto más alto de la guía. A lo largo del

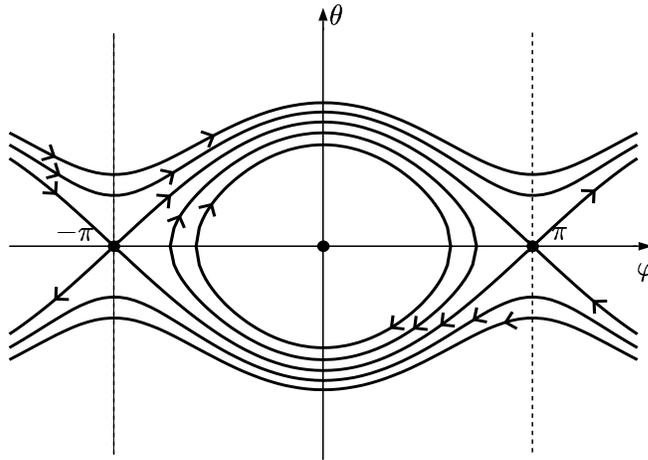


Figura 1.20: diagrama de fase de las ecuaciones del péndulo

curso iremos viendo herramientas que nos permitirán justificar todo esto, sin embargo puede ser un ejercicio interesante intentar mostrar estos asertos con los argumentos que tengamos a mano. ♠

A continuación presentamos un ejercicio en el que podremos aplicar los argumentos que desarrollamos al tratar el problema del péndulo, para analizar el plano de fases asociado con otra ecuación diferencial.

Ejercicio 1.47. ** La ecuación diferencial $\ddot{x} = -x + x^2$ puede transformarse en el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + x^2, \end{aligned} \tag{1.97}$$

introduciendo una nueva variable y tal que $y = \dot{x}$.

1. Hallar una cantidad $V(x, y)$ que se conserve sobre las órbitas del sistema y que tenga un mínimo estricto en $(0, 0)$.
2. Mostrar que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable del sistema. Sugerencia: usar la función V hallada en la parte anterior y tener en cuenta que los argumentos de estabilidad que hemos manejado hasta ahora son locales.
3. Esbozar el diagrama de fases de la ecuación (1.97) en el plano. Se sugiere

- (a) Identificar las regiones del plano (x, y) en que x e y son crecientes y decrecientes.
- (b) Utilizar la cantidad V que se halló en 1. Puede ser útil para ello graficar las funciones $f(x) = c - x^2/2 + x^3/3$, donde c es una constante arbitraria.

La energía en la ecuación linealizada alrededor de $(0, 0)$

La sección anterior está basada en considerar la energía

$$e(\varphi, \theta) = \frac{1}{2}\theta^2 - \cos \varphi$$

asociada con la ecuación del péndulo. Vamos a combinar ahora el estudio de este funcional de energía con argumentos de linealización como los que empleamos en el ejemplo 1.3.16. Extenderemos así los comentarios de la página 55

Observemos que podemos desarrollar la energía e alrededor del punto $(0, 0)$ de la siguiente manera:

$$e(\varphi, \theta) = -1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \dots$$

Cerca del punto $(0, 0)$ los términos que dominan el desarrollo son los de segundo orden. Podemos desentendernos además de la constante -1 , porque lo único que hace es trasladar el nivel de referencia para la energía. Por tanto, cerca del origen, la energía del péndulo es esencialmente igual a la función

$$\tilde{e}(\varphi, \theta) = \frac{1}{2}(\varphi^2 + \theta^2),$$

que es justamente la energía que corresponde a la ecuación linealizada

$$\dot{\varphi} = \omega\theta, \quad \dot{\theta} = -\omega\varphi.$$

Por otra parte, sabemos que las energías e y \tilde{e} contienen mucha información (en realidad la contienen toda) acerca del comportamiento de estos sistemas. Por ejemplo, las órbitas del péndulo deben estar sobre conjuntos de energía e constante, que estarán muy cerca de los conjuntos donde \tilde{e} es constante.

En resumen, aunque la presencia de valores propios con parte real nula impide aplicar directamente algunos resultados generales sobre la linealización de ecuaciones diferenciales alrededor de sus puntos críticos, las pequeñas oscilaciones del péndulo pueden describirse en términos del problema linealizado porque hay un funcional de energía asociado con esta ecuación. Linealizar la ecuación es esencialmente lo mismo que conservar los términos cuadráticos del funcional de energía e , y, para este ejemplo, estos términos son los que determinan el comportamiento de e en un entorno de $(0, 0)$.

Agreguemos un resultado más a esta discusión: el período de las oscilaciones de la ecuación linealizada es constante, igual a $T = 2\pi/\omega$. El período

de las oscilaciones del péndulo alrededor de su posición de reposo es variable, depende de las condiciones iniciales. Pero el período de las oscilaciones del péndulo tiende a T cuando las condiciones iniciales tienden a $(0, 0)$. En otras palabras, las pequeñas oscilaciones del péndulo tienen un período aproximadamente igual a T .

1.5 Cambios de coordenadas y nociones sobre bifurcaciones

En las lecciones anteriores hemos presentado algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales en \mathbf{R} y \mathbf{R}^2 , y desarrollado algunas técnicas para estudiarlas. Otra herramienta que permite abordar su estudio, y que resulta ser de enorme utilidad en ciertos casos, es la posibilidad de transformar una ecuación diferencial en otra completamente equivalente por medio de un *cambio de coordenadas* apropiado. Cuando esto es posible, podemos pensar que la ecuación original y la que se obtuvo mediante el cambio de coordenadas son en realidad “la misma” vista en dos sistemas de coordenadas diferentes. En esta situación, cualquier información sobre la dinámica asociada con una de ellas puede “traducirse” en información sobre la otra por medio del cambio de coordenadas.

Por supuesto que en la mayor parte de los casos, dadas dos ecuaciones diferenciales, es imposible transformar una en la otra por medio de un cambio de variables. Un ejemplo particularmente interesante de esta situación ocurre cuando el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial cambia drásticamente al modificar un poquito la ecuación. Cuando pasa tal cosa diremos que la ecuación sufre una *bifurcación*. Hay muchos ejemplos de situaciones de este tipo que aparecen al intentar modelar distintos fenómenos. A continuación presentamos tres de ellos.

- Retomemos el ejemplo del péndulo de la sección anterior. Cuando la guía circular está quieta hay una posición de equilibrio estable en la parte inferior. Si hacemos girar la guía en un plano vertical con una velocidad angular ω se observa que para valores pequeños de ω la situación de reposo en el punto más bajo sigue siendo estable y, en general, todo el sistema se comporta como en el caso $\omega = 0$ de la guía en reposo. Sin embargo, cuando aumentamos la velocidad de giro hasta llegar a un cierto valor crítico ω_c aparece una posición de reposo estable que no es la que corresponde al punto más bajo de la guía. Trataremos este ejemplo al final de esta sección. En este ejemplo la ecuación tiene un parámetro ω y la bifurcación, o cambio de comportamiento cualitativo de la ecuación, se produce cuando ω atraviesa el valor crítico ω_c .
- Si dejamos caer un chorro de agua desde una cierta altura, por ejemplo abriendo una canilla, observaremos que la parte alta del chorro es cristalina pero el carácter del flujo cambia algo más abajo y se vuelve extremadamente irregular y turbulento. El parámetro que controla la conducta del escurrimiento es la velocidad y lo que estamos observando es que cuando la velocidad supera cierto valor —debido a la aceleración de la gravedad— el flujo cambia de laminar a turbulento.
- Si presionamos los extremos de una barra de metal esta resistirá sin

deformarse hasta un cierto valor crítico del esfuerzo al que la sometemos. Por encima de este valor se deformará y observaremos el *pandeo* de la barra.

1.5.1 Ecuaciones equivalentes. Cambios de coordenadas.

Tal como hicimos en las secciones anteriores vamos a empezar por discutir un ejemplo simple para luego ir avanzando en la complejidad de los problemas.

Ejemplo 1.5.1. Consideramos la siguiente ecuación diferencial en \mathbf{R} :

$$\dot{x} = x - c, \quad (1.98)$$

donde c es una constante positiva cualquiera. Podemos resolverla para estudiar su dinámica y comparar que es lo que ocurre para distintos valores de c , pero este es un procedimiento demasiado bestial que insume unos cuantos cálculos y tiene el riesgo de que una vez hechos los cálculos seamos incapaces de interpretar lo que significan. Mejor pensemos un poco antes de lanzarnos a calcular. La ecuación (1.98) tiene un punto crítico en $x = c$, además \dot{x} es mayor que 0 cuando $x > c$ y negativo cuando $x < c$. Esta estructura se repite invariablemente, independientemente del valor de c , lo que da la pauta de que el comportamiento de las soluciones será esencialmente el mismo, a menos de una traslación al variar el parámetro c . En realidad esta observación es correcta, porque si introducimos una variable $y = x - c$ entonces la ecuación diferencial (1.98) se transforma, independientemente del valor de c , en

$$\dot{y} = y, \quad (1.99)$$

y toda la familia de ecuaciones (1.98) que se obtiene al variar c es esencialmente la misma ecuación, a menos de un cambio de coordenadas. Esta observación permite resolver (1.98) casi sin esfuerzo. Si tomamos un dato inicial x_0 para $x(t)$ al cambiar a coordenadas y el dato inicial será $y_0 = x_0 - c$. La solución de (1.99) con este dato es $y(t) = (x_0 - c)e^t$ así que deshaciendo el cambio de variables obtenemos

$$x(t) = (x_0 - c)e^t + c. \quad (1.100)$$

Es completamente directo verificar que esta última fórmula provee una solución de (1.98) con dato inicial $x(0) = x_0$.

Ejercicio 1.48. * Resolver (1.98) con la condición inicial $x(0) = x_0$ directamente, sin utilizar el cambio de coordenadas que acabamos de hacer. ♣

Es sumamente interesante detenerse un momento a reflexionar sobre esta cuestión de los cambios de coordenadas, en particular cuando se trata de ecuaciones diferenciales definidas en \mathbf{R}^n , con $n \geq 2$, desde un punto de vista más geométrico. Recordemos que la interpretación geométrica de

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.101)$$

y sus soluciones es que la función f define un campo vectorial sobre un abierto U de \mathbf{R}^n . Las soluciones de la ecuación son curvas $x(t)$ que toman valores en U , tales que su vector tangente \dot{x} en el instante t coincide con el valor del campo f en el punto $x(t)$. Un cambio de coordenadas que nos permite pasar de la variable x a una nueva variable y no es otra cosa que una biyección h diferenciable con inversa diferenciable, es decir un *difeomorfismo*, entre el abierto U y otro abierto V de \mathbf{R}^n .

Ejemplo 1.5.2. El cambio de coordenadas polares a cartesianas no es otra cosa que el difeomorfismo

$$(r, \theta) \mapsto (x, y) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (1.102)$$

que establece una biyección

$$U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow V = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y); x \geq 0, y = 0\} \quad (1.103)$$

entre los conjuntos U y V de \mathbf{R}^2 . ♣

Está claro entonces que un punto x de U se transforma en $y = h(x) \in V$ a través del cambio, pero ¿cómo debe transformarse el campo f para que veamos una ecuación equivalente a la original en las nuevas coordenadas? La respuesta a esta pregunta viene dada por la siguiente consideración: si $x(t)$ es una solución de la ecuación original queremos que

$$y(t) = h(x(t)) = (h \circ x)(t)$$

sea solución de la ecuación en las nuevas variables. Esto es lo mismo que decir que nuestro cambio de variables transforma soluciones del problema original en soluciones de la nueva ecuación, y es lo menos que le podemos pedir al cambio de variables si queremos que nos sirva para algo a la hora de resolver la ecuación. Esta simple observación nos dice cuál es el campo sobre V . En efecto, si derivamos respecto a t la fórmula para $y(t)$ y usamos la regla de la cadena obtenemos

$$\dot{y}(t) = \frac{d(h \circ x)}{dt}(t) = Dh_{x(t)}\dot{x}(t). \quad (1.104)$$

Al combinar esta expresión para \dot{y} con la ecuación diferencial (1.101) llegamos a

$$\dot{y}(t) = Dh_{x(t)}f(x(t)), \quad (1.105)$$

y esto nos indica cómo debemos transformar el campo f en el cambio de variable: en el punto $y = h(x)$ debemos poner el vector $Dh_x f(x)$. Como nos interesa saber qué hacer en cada punto y usamos que si $y = h(x)$ entonces $x = h^{-1}(y)$. Por lo tanto, al escribir la ecuación $\dot{y} = g(y)$ que resulta de todo esto encontramos que el campo $g(y)$ tiene que ser

$$g(y) = Dh_{h^{-1}(y)}f(h^{-1}(y)), \quad (1.106)$$

y la ecuación en el nuevo sistema de coordenadas es

$$\dot{y} = Dh_{h^{-1}(y)}f(h^{-1}(y)). \quad (1.107)$$

De todo esto es importante retener la idea de que el campo de vectores en las nuevas coordenadas es la imagen por el diferencial del cambio de variables h del campo vectorial original. En realidad, en las aplicaciones no hay que preocuparse demasiado de estas cosas, porque al hacer un cambio de variables y calcular las nuevas fórmulas la ecuación se transforma automáticamente en lo que deba transformarse. Sin embargo es conveniente comprender el significado de las operaciones que se están haciendo al realizar un cambio de variables.

Ejemplo 1.5.3. Al introducir el cambio $y = x - c$ el mapa h es $h(x) = x - c$ y su diferencial (en este caso su derivada porque estamos en $n = 1$) es la identidad. En el punto x el campo es $x - c$, al aplicarle la identidad obtenemos nuevamente $x - c$ que es justamente y , y la ecuación resultante es $\dot{y} = y$, tal como habíamos encontrado. Observemos que en este ejemplo este razonamiento es innecesario y no nos ayuda para nada. Retomaremos este asunto más tarde, en situaciones algo más complejas en las que quedará más claro su importancia. ♣

Ejemplo 1.5.4. EL CAMBIO A COORDENADAS POLARES

Vamos a transformar a coordenadas polares el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega y, \\ \dot{y} &= -\omega x, \end{aligned} \quad (1.108)$$

que apareció en el ejemplo 1.3.2, al modelar las oscilaciones de una partícula sometida a la acción de un resorte. Recordemos que este sistema es equivalente a la ecuación $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ y que en el ejemplo 1.3.2 supusimos conocidas las soluciones de esta ecuación diferencial lineal para calcular las soluciones de (1.108). Veremos a continuación que el cambio a polares permite resolver fácilmente esta ecuación e interpretar geoméricamente sus soluciones. El único punto que no puede analizarse por medio de este cambio es el origen $(0, 0)$. Esto no es grave porque es trivial verificar que $(0, 0)$ es un punto crítico de (1.108) y, por lo tanto, corresponde a una solución estacionaria.

Recordemos que las ecuaciones que definen el cambio a polares son

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1.109)$$

Si las derivamos respecto al tiempo obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

Por otra parte, la ecuación diferencial nos dice que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega y = \omega r \sin \theta, \\ \dot{y} &= -\omega x = -\omega r \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Si combinamos las dos expresiones que acabamos de obtener para cada una de las derivadas \dot{x} e \dot{y} llegamos al sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} &= \omega r \sin \theta, \\ \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} &= -\omega r \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Resolviendo este sencillo sistema lineal en \dot{r} y $\dot{\theta}$ podemos despejarlas inmediatamente. El resultado es

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0, \\ \dot{\theta} &= -\omega. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Aunque no sea completamente evidente a primera vista, los cálculos que acabamos de hacer son equivalentes al procedimiento de calcular el diferencial del cambio de coordenadas $(x, y) \mapsto (r, \theta)$ y “transportar” el campo vectorial asociado con la ecuación diferencial usando el diferencial del cambio de coordenadas. Para completar la discusión vamos a rehacer los cálculos haciendo aparecer explícitamente el diferencial del cambio de variables. Es más sencillo calcular el diferencial del cambio de polares a cartesianas, cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.114)$$

En realidad necesitamos el diferencial del cambio inverso, porque queremos pasar de cartesianas a polares. Recordemos que el diferencial de la inversa de una función es la inversa de su diferencial, por lo tanto la matriz asociado con el diferencial del cambio a polares es

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.115)$$

El campo vectorial asociado con la ecuación (1.108) es $\vec{X}(x, y) = (\omega y, -\omega x)$, al que podemos expresar usando las coordenadas polares (r, θ) en vez de (x, y) como

$$(\omega r \sin \theta, -\omega r \cos \theta). \quad (1.116)$$

Para calcular el segundo miembro del sistema correspondiente a (1.108) en polares sólo tenemos que multiplicar la matriz (1.115) por el vector (1.116). Tenemos entonces

$$\frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega r \sin \theta \\ -\omega r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega \end{pmatrix}.$$

Este vector es justamente el segundo miembro de (1.113).

Podemos ahora resolver la ecuación diferencial (1.108), con un dato inicial (x_0, y_0) , utilizando la ecuación equivalente (1.113). Para ello expresemos la condición inicial en polares, como

$$x_0 = r_0 \cos \theta_0, \quad y_0 = r_0 \sin \theta_0,$$

de modo que la condición inicial para (1.113) es

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Las ecuaciones para r y θ están desacopladas, por lo que su resolución es trivial y sus soluciones son

$$r(t) = r_0, \quad \theta(t) = \theta_0 - \omega t. \quad (1.117)$$

Si queremos volver a coordenadas cartesianas obtenemos

$$x(t) = r(t) \cos \theta(t) = r_0 \cos(\theta_0 - \omega t), \quad y(t) = r(t) \sin \theta(t) = r_0 \sin(\theta_0 - \omega t). \quad (1.118)$$

Para empezar notemos que en la expresión de la solución en coordenadas polares está contenida toda la información geométrica sobre las soluciones: la solución se mueve sobre la circunferencia de radio r_0 , con velocidad angular constante e igual a $-\omega$ (en sentido horario si $\omega > 0$ y antihorario si ω es negativo). Esto es suficiente para representar el diagrama de fases de la ecuación diferencial (1.108) en el plano (x, y) . En el primer dibujo de la figura 1.21

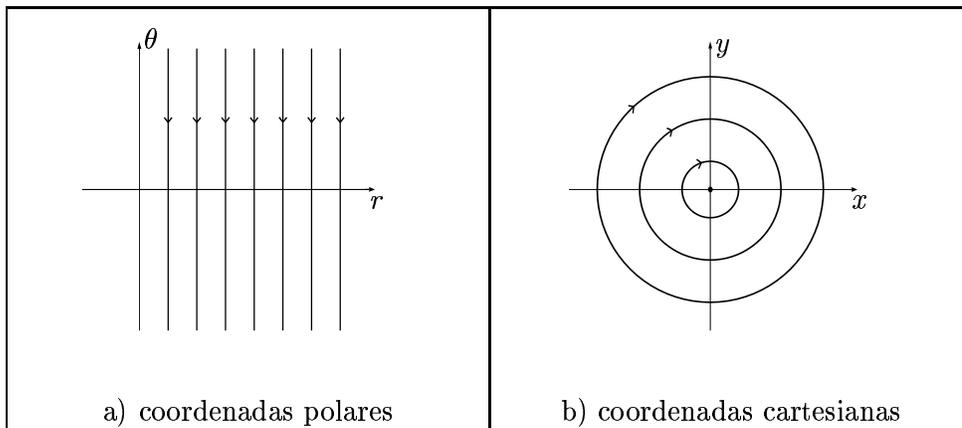


Figura 1.21: el diagrama de fase en dos sistemas de coordenadas

representamos el diagrama de fases de la ecuación (1.113), que es, tal como vimos, la versión en coordenadas polares de (1.108). El segundo dibujo es el diagrama de la ecuación original en coordenadas cartesianas. Las rectas del primer dibujo se transforman en la circunferencia del segundo al hacer el paso coordenadas polares a cartesianas por medio de las fórmulas (1.109). La orientación de ambos conjuntos de curvas corresponde el caso $\omega > 0$.

Llamemos A a la matriz del sistema (1.108). Es muy fácil calcular la exponencial e^{At} usando las fórmulas (1.118). Recordemos que las columnas de la matriz exponencial son las soluciones de la ecuación que tienen como dato inicial a los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$. El vector $(1, 0)$ tiene coordenadas polares

$r_0 = 1$, $\theta_0 = 0$, de modo que la solución $(x(t), y(t))$ que lo tiene como dato inicial satisfice

$$x(t) = \cos \omega t, \quad y(t) = -\sin \omega t.$$

Al vector $(0, 1)$ le corresponde $\theta_0 = \pi/2$, de modo que da lugar a una solución con coordenadas

$$x(t) = \cos(\pi/2 - \omega t) = \sin \omega t, \quad y(t) = \sin(\pi/2 - \omega t) = \cos \omega t.$$

Al poner estas soluciones como columnas de una matriz obtenemos

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (1.119)$$

Naturalmente, este resultado da lugar a las mismas soluciones de (1.108) que las que ya conocíamos del ejemplo 1.3.2.

Observación 1.5.5. La deducción de la matriz exponencial también podría haberse hecho usando las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b, \end{aligned}$$

para escribir las soluciones (1.118) en la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= r_0 \cos \theta_0 \cos \omega t + r_0 \sin \theta_0 \sin \omega t, \\ y(t) &= r_0 \sin \theta_0 \cos \omega t - r_0 \cos \theta_0 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Observando que $x_0 = r_0 \cos \theta_0$ e $y_0 = r_0 \sin \theta_0$ obtenemos

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos \omega t + y_0 \sin \omega t, \\ y(t) &= -x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

que es completamente equivalente a la fórmula (1.119) para la exponencial de la matriz del sistema. ♠

La técnica de pasar a polares permite resolver con facilidad algunas ecuaciones diferenciales lineales en el plano cuyas matrices tienen autovalores complejos e interpretar geoméricamente los resultados obtenidos. A continuación proponemos un par de ejercicios que giran alrededor de esta idea. En la sección 1.7 la desarrollaremos sistemáticamente.

Ejercicio 1.49. * Consideremos números reales a y b cualesquiera, y la matriz

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Hallar la expresión en coordenadas polares de la ecuación diferencial $\dot{X} = JX$. ♡

Ejercicio 1.50. ** Calcular la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x + 2y, \\ \dot{y} &= -2x - 3y,\end{aligned}\tag{1.120}$$

con dato inicial (x_0, y_0) , transformándola a coordenadas polares. Representar el plano de fases asociado con esta ecuación. Se sugiere complementar la información obtenida del cambio a polares con la que resulta de analizar los signos de \dot{x} y \dot{y} en el plano (x, y) .

Observación 1.5.6. LOS CAMBIOS DE COORDENADAS VISTOS A TRAVÉS DEL FLUJO

Hasta el momento hemos estudiado el efecto de un cambio de coordenadas h sobre el campo vectorial. Si retomamos la idea de que el cambio debe “respetar” las órbitas encontramos por un lado que $y(t) = h(x(t))$ debe ser una solución de la ecuación en las nuevas variables. El dato inicial de esta solución es $y(0) = h(x(0))$. Llamemos Φ_1 al flujo asociado con la ecuación en la variable x , entonces la solución $x(t)$ con dato inicial $x(0)$ no es otra cosa que $\Phi_1(x(0), t)$, así que

$$x(t) = \Phi_1(x(0), t).\tag{1.121}$$

Si con Φ_2 llamamos al flujo asociado con la ecuación en la variable y , idéntica consideración muestra que

$$y(t) = \Phi_2(y(0), t).\tag{1.122}$$

Si tenemos en cuenta que $y(0) = h(x(0))$ y, en general, $y(t) = h(x(t))$ podemos resumir esta discusión en la fórmula

$$h(\Phi_1(x(0), t)) = \Phi_2(h(x(0)), t).\tag{1.123}$$

Como en realidad $x(0)$ es un punto cualquiera es preferible escribir nuestra última ecuación como

$$h(\Phi_1(x, t)) = \Phi_2(h(x), t).\tag{1.124}$$

o en la forma aún más sugerente

$$\Phi_1(x, t) = h^{-1}(\Phi_2(h(x), t))\tag{1.125}$$

que puede leerse de la siguiente manera: si queremos la solución de la ecuación en la variable original x con un dato inicial prefijado entonces transformemos el dato a las nuevas variables usando h , resolvamos en las nuevas variables y luego apliquemos h^{-1} para volver a la variable original. Naturalmente, esta posibilidad de resolver la ecuación en x a partir de la ecuación en y haciendo un simple cambio de coordenadas implica que ambas ecuaciones tienen el mismo comportamiento.

Ejemplo 1.5.7. Consideremos la ecuación $\dot{x} = x - c$. Si usamos el cambio de variables $y = h(x) = x - c$ obtenemos $\dot{y} = y$ que tiene asociado el flujo $\Phi_0(x, t) = xe^t$. Si queremos calcular el flujo Φ_c asociado a la ecuación original podemos utilizar el cambio h y la fórmula (1.125). Para ello tomamos el dato inicial x , le aplicamos h para obtener $x - c$. Ahora calculamos el flujo Φ_0 de la ecuación en la variable y en $(x - c, t)$ y obtenemos $(x - c)e^t$. Para terminar debemos aplicar h^{-1} , la inversa de h que no es otra cosa que sumar c . Por lo tanto

$$\Phi_c(x, t) = (x - c)e^t + c = \Phi_0(x - c, t) + c = h^{-1}(\Phi_0(h(x), t)). \quad (1.126)$$

Notemos que esta fórmula para el flujo Φ_c coincide con la que obtendríamos a partir de (1.100). ♣

El siguiente ejercicio tiene como objetivo mostrar que efectivamente los cambios de coordenadas respetan aspectos básicos de la dinámica asociada a una ecuación diferencial, como son la existencia de puntos críticos y su tipo de estabilidad.

Ejercicio 1.51. * Mostrar que si la ecuación diferencial $\dot{y} = g(y)$ se obtiene de $\dot{x} = f(x)$ a través de un cambio de variables $y = h(x)$, entonces \bar{x} es un punto crítico de $\dot{x} = f(x)$ sí y sólo sí $\bar{y} = h(\bar{x})$ es un punto crítico de $\dot{y} = g(y)$. Más aún, \bar{x} es estable (inestable, asintóticamente estable) sí y sólo sí \bar{y} es estable (inestable, asintóticamente estable). ♠

1.5.2 Cambios de variables para las ecuaciones lineales

El objetivo de esta sección es comenzar el tratamiento sistemático de las ecuaciones lineales de la forma $\dot{X} = AX$, donde A es una matriz cuadrada $n \times n$ y X representa un vector de \mathbf{R}^n . Es conocido de los cursos de álgebra lineal que todos los cálculos en los que intervienen matrices se simplifican cuando es posible trabajar en una base adecuada del espacio. El caso más claro de esto es el de las matrices diagonalizables, pero aún cuando la matriz no sea diagonalizable es, en general, posible pasar a una situación más conveniente por un cambio de variables lineal adecuado. En este ejemplo estudiaremos el efecto de estos cambios de coordenadas sobre las ecuaciones diferenciales lineales $\dot{X} = AX$, con $A \in M^{n \times n}(\mathbf{R})$, y resolveremos completamente estas ecuaciones cuando la matriz A es diagonalizable sobre el cuerpo real. Pospondremos para las secciones 1.6 y 1.7 la consideración de los otros casos.

Comencemos por recordar que $X \in \mathbf{R}^n$ coincide con el vector X_C de sus coordenadas en la base canónica \mathcal{C} . Al introducir una nueva base \mathcal{B} en \mathbf{R}^n queda definido un cambio de coordenadas $X \mapsto h(X)$, que a cada vector X le asigna sus nuevas coordenadas $Y = X_B$, de la siguiente manera:

$$Y = h(X) = X_B = {}_B I_C X_C = {}_B I_C X. \quad (1.127)$$

Como es usual, con ${}_B I_C$ indicamos la matriz de cambio de base que permite calcular las coordenadas en la base \mathcal{B} a partir de las coordenadas en \mathcal{C} . La inversa ${}_B I_C^{-1}$ de esta matriz es la matriz ${}_C I_B$ que permite realizar el cálculo de las coordenadas en la base canónica X_C de un vector X , a partir de sus coordenadas X_C en la base \mathcal{B} , por la fórmula

$$X = X_C = {}_C I_B X_B.$$

Recordemos que las columnas de la matriz ${}_C I_B$ son los vectores de la base \mathcal{B} (o, equivalentemente, sus coordenadas en la base canónica \mathcal{C}).

Ejemplo 1.5.8. Consideremos en \mathbf{R}^2 la base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}. \quad (1.128)$$

Tenemos entonces que

$${}_C I_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.129)$$

Al calcular su inversa obtenemos

$${}_B I_C = {}_C I_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.130)$$

Notemos que la matriz ${}_C I_B$ se construye sin realizar ningún cálculo una vez que se conoce la base \mathcal{B} . Para hallar la otra matriz de cambio de base sólo hay que invertir ${}_C I_B$. Este procedimiento, que es el que acabamos de usar, es en general el más sencillo para calcular las matrices de cambio de base que resultan de cambios lineales de coordenadas en \mathbf{R}^n . ♣

Transformemos la ecuación diferencial con esta información. Primero lo haremos de manera directa, simplemente derivando para calcular \dot{Y} y sustituyendo en la ecuación. Luego lo haremos retomando los argumentos que nos permitieron derivar la fórmula (1.107).

Es muy sencillo despejar X de la fórmula (1.127) que introduce el cambio de variables para obtener

$$X = {}_B I_C^{-1} Y. \quad (1.131)$$

Si derivamos esta última fórmula para calcular \dot{X} resulta

$$\dot{X} = {}_B I_C^{-1} \dot{Y}, \quad (1.132)$$

porque la matriz ${}_B I_C^{-1}$ es constante. Al sustituir en $\dot{X} = AX$ encontramos que la nueva variable Y debe satisfacer la ecuación

$$\dot{Y} = {}_B I_C A {}_B I_C^{-1} Y. \quad (1.133)$$

Esta es una nueva ecuación lineal, con una matriz ${}_B I_C A {}_B I_C^{-1}$ semejante a la ecuación original. Recordemos que dos matrices A y B son semejantes si existe una matriz invertible P tal que $B = PAP^{-1}$.

Haremos nuevamente la reducción de la ecuación lineal $\dot{X} = AX$ a la forma (1.133), esta vez transformando el campo vectorial que el segundo miembro de la ecuación define por medio del diferencial del cambio de variables h que introducimos en (1.127). Para empezar notemos que h es lineal, así que el diferencial de h en cualquier punto es la propia h . Recordemos además que el campo vectorial de la ecuación original es $f(X) = AX$ y que $X = h^{-1}(Y)$ está dado por la fórmula (1.131). Poniendo toda esta información junta calculamos el campo vectorial $g(Y)$ de la ecuación que se obtiene haciendo el cambio de variables:

$$g(Y) = Dh_{h^{-1}(Y)}f(h^{-1}(Y)) = h(Ah^{-1}(Y)) = {}_B I_C A {}_B I_C^{-1}Y. \quad (1.134)$$

Tal como esperábamos, el resultado es el que aparece en la fórmula (1.133).

Observación 1.5.9. Si la matriz A es diagonalizable, y \mathcal{B} es una base de vectores propios de A entonces la matriz de la ecuación lineal (1.133) es diagonal. En estos caso habremos logrado una importante simplificación de la ecuación por medio del cambio de variables. En general, aunque las matrices no sean diagonalizables, puede encontrarse una matriz de una forma canónica más simple que la matriz original por medio de un cambio de variables como el que acabamos de presentar. Dedicaremos especial atención a esta cuestión cuando presentemos la teoría general para los sistemas lineales. ♠

A continuación mostraremos, con un ejemplo, como la reducción del problema original $\dot{X} = AX$ a otro con matriz diagonal puede utilizarse para resolverlo completamente, en el sentido de poder calcular las soluciones y representar detalladamente el plano de fases correspondiente.

Ejemplo 1.5.10. Vamos a considerar la ecuación lineal $\dot{X} = AX$, en \mathbf{R}^2 , con matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (1.135)$$

Nos ocuparemos tanto de encontrar una fórmula general para sus soluciones, calculando el flujo $\Phi((x_0, y_0), t)$ para un dato inicial (x_0, y_0) , como de comprender la geometría asociada a este flujo, representando detalladamente el plano de fases correspondiente. Para estudiar la ecuación utilizaremos el hecho de que A es una matriz diagonalizable, y transformaremos todo el problema a un nuevo sistema de coordenadas basado en los vectores propios de A . El polinomio característico asociado con A es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2),$$

cuyas raíces son $\lambda = 4$ y $\lambda = 2$. Para calcular los vectores propios buscamos los subespacios $\ker(A - 4I)$ y $\ker(A - 2I)$. Una vez hecho esto resulta evidente que la base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\} \quad (1.136)$$

está formada por dos vectores propios de A , el primero asociado al valor propio 4 y el segundo al valor propio 2. Si observamos el campo vectorial que la

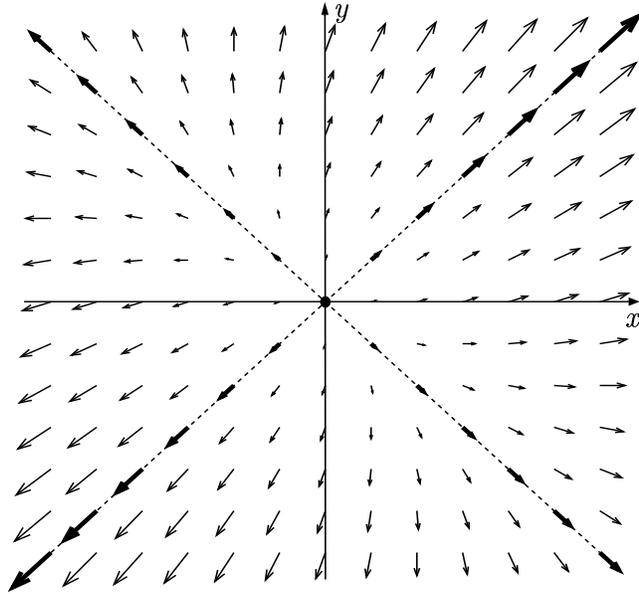


Figura 1.22: el campo vectorial asociado con la ecuación diferencial

ecuación diferencial define sobre el plano (x, y) encontramos que sobre el subespacio generado por $(1, 1)$ el campo es colineal con $(1, 1)$. Algo análogo ocurre sobre el subespacio generado por $(1, -1)$, y estos son los únicos subespacios de \mathbf{R}^2 con esta propiedad, por lo que los hemos destacado en la figura 1.22.

Al calcular las matrices de cambio de base ${}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}$ e ${}_{\mathcal{C}}I_{\mathcal{B}}$, que vinculan las coordenadas en \mathcal{B} con las coordenadas respecto a la base canónica \mathcal{C} , obtenemos las matrices (1.129) y (1.130) que calculamos en el ejemplo 1.5.8.

La ecuación diferencial en las nuevas coordenadas $Y = {}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}X$ es

$$\dot{Y} = {}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}}I_{\mathcal{B}}Y = DY, \quad (1.137)$$

donde D es la matriz diagonal

$$D = {}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}A_{\mathcal{C}}I_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vamos a pasar a coordenadas y escribir un vector Y en la forma $Y = (u, v)$. Es evidente que la ecuación (1.137) resulta entonces equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 4u, \\ \dot{v} &= 2v, \end{aligned} \quad (1.138)$$

cuyas soluciones son, con notación obvia,

$$(u(t), v(t)) = (u_0 e^{4t}, v_0 e^{2t}).$$

Para los cálculos será útil la notación matricial

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{Dt} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (1.139)$$

Esta fórmula permite resolver completamente el problema original. Si tratamos de resolver

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = X_0 = (x_0, y_0). \end{cases} \quad (1.140)$$

debemos comenzar por transformar la condición inicial X_0 a las nuevas coordenadas Y . La condición inicial correspondiente es $Y_0 = {}_B I_C X_0$. Luego resolvemos (1.137) con este dato y obtenemos una solución

$$Y(t) = e^{Dt} Y_0 = e^{Dt} {}_B I_C X_0,$$

que todavía estará expresada en las coordenadas asociadas con la base \mathcal{B} . Para recuperar la solución $X(t)$ al problema original deshacemos el cambio de base, multiplicando a la izquierda por ${}_C I_B$, de modo que la solución resulta ser

$$X(t) = {}_C I_B Y(t) = {}_C I_B e^{Dt} {}_B I_C X_0. \quad (1.141)$$

Si sustituimos en esta fórmula las matrices con las que estamos trabajando en este ejemplo obtenemos

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (1.142)$$

Luego de efectuar la multiplicación entre matrices que está indicada en la expresión anterior, y recordando el significado de la solución $X(t)$ como solución con dato inicial (x_0, y_0) , podemos escribir el flujo asociado con $\dot{X} = AX$ como

$$\Phi((x_0, y_0), t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} + e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & e^{4t} + e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (1.143)$$

Es muy sencillo verificar que ésta es la solución del problema, sustituyendo en la ecuación diferencial para ver que se satisface, y evaluando en $t = 0$ para ver que también se verifica la condición inicial $X(0) = X_0 = (x_0, y_0)$. Notemos

que la matriz que aparece en la fórmula (1.142) es la exponencial de A , ya que permite resolver el problema (1.140) multiplicándola a la derecha por la condición inicial X_0 . Tenemos entonces, para la matriz A con la que estamos trabajando en este ejemplo, que

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} + e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & e^{4t} + e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.52. * Verificar que la matriz es solución de $\dot{X} = AX$ y que al evaluar en $t = 0$ se obtiene la identidad.

Observación 1.5.11. Los argumentos que nos llevaron a la fórmula (1.141) son completamente generales y no dependen de cuáles sean las matrices A y D . Esto implica que al transformar una ecuación diferencial

$$\dot{X} = AX$$

en una ecuación

$$\dot{Y} = JY,$$

introduciendo un cambio de variables lineal

$$Y = {}_B I_C X,$$

podremos calcular las soluciones de la ecuación original a por medio de la fórmula

$$X(t) = {}_C I_B e^{Jt} {}_B I_C X_0. \quad (1.144)$$

En término de las matrices exponenciales esto significa que si

$$A = {}_C I_B J {}_B I_C$$

entonces

$$e^{At} = {}_C I_B e^{Jt} {}_B I_C.$$

Esta observación no depende de que A sea diagonalizable. Por lo tanto la utilizaremos sistemáticamente en las próximas dos secciones, transformando las ecuaciones diferenciales $\dot{X} = AX$ en ecuaciones lineales con una matriz J conveniente. ♠

Todavía está pendiente la cuestión de representar el plano de fases asociado con la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$. Una forma de hacer este trabajo es graficar las curvas parametrizadas que se obtienen de la fórmula (1.142) para las soluciones. Veremos a continuación que hay un método mejor, que consiste en representar en el plano (u, v) el espacio de fases asociado con la ecuación $\dot{Y} = DY$, donde D es la forma diagonal asociada con A , y luego “llevar” este dibujo al plano (x, y) mediante el cambio

$$X = {}_C I_B Y.$$

Representar el plano de fases de $\dot{Y} = DY$ es un trabajo muy sencillo. Esencialmente fue hecho en la sección 1.3, ejercicio 1.29. No es difícil ver que las semirrectas $u > 0$ y $u < 0$ del eje Ou son órbitas que se alejan del origen, y también lo son las semirrectas $v > 0$ y $v < 0$ del eje Ov . El resto de las órbitas

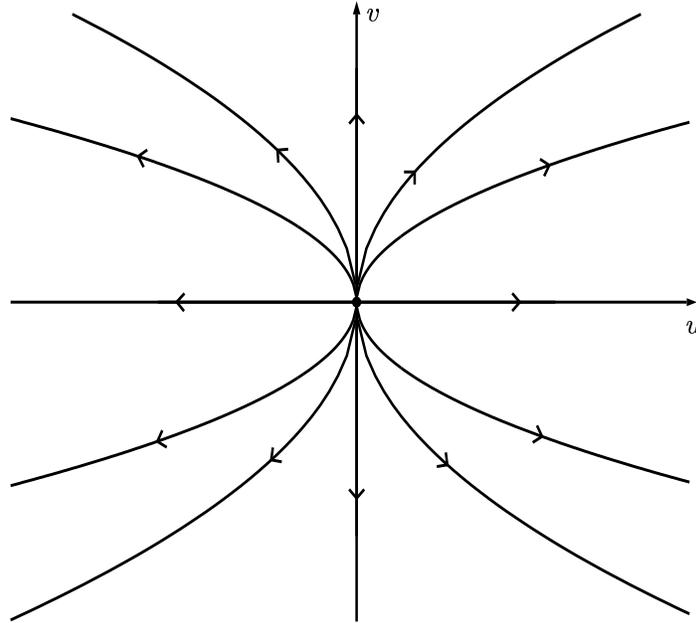


Figura 1.23: el diagrama de fases asociado con la ecuación $\dot{Y} = DY$

está contenido en curvas de la forma $u = v^2$, y “salen” del origen $u = 0, v = 0$, de manera tangente al eje Ov . Toda esta información aparece resumida en la figura 1.23.

Pasemos a analizar en que se transforman todos los elementos del diagrama que aparece en la figura 1.23 al deshacer el cambio de variables lineal que nos llevó a la ecuación $\dot{Y} = DY$.

1. Notemos que el vector $(1, 0)$ del plano (u, v) se transforma en el $(1, 1)$ del (x, y) , por lo que el eje Ou se transforma en la recta de ecuación $x = y$. Por lo tanto, sobre la recta $x = y$ tenemos tres órbitas: la solución estacionaria que corresponde al punto crítico $(0, 0)$; una órbita que se aleja del origen sobre la parte de la recta $x = y$ que está en el primer cuadrante; una tercera órbita, simétrica de la anterior, que está en el tercer cuadrante.
2. Un análisis parecido puede hacerse a partir del hecho de que el vector $Y = (1, 0)$ del plano se transforma en el $X = (1, -1)$ y el eje Ov en

la recta $x = -y$. Sobre esta recta está el origen $(0, 0)$ que es un punto estacionario y hay dos órbitas no triviales, que se alejan del origen.

3. El resto de las órbitas se obtienen “deformando” el dibujo que se obtuvo en el plano (u, v) . En particular, todas ellas salen del origen en forma tangente a la recta $y = -x$ y tienen en el infinito una dirección asintótica paralela a $y = x$.

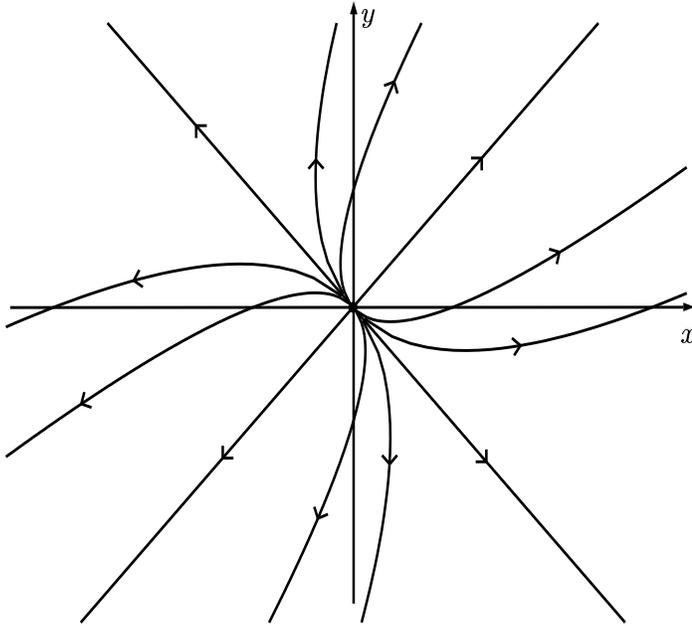


Figura 1.24: el plano de fases de $\dot{X} = AX$

4. Con esta información ya tenemos suficiente para representar el plano de fases asociado con la ecuación, que es el que aparece en la figura 1.24.

Puede ser útil además contrastar la información que se obtiene deformando el plano de fases de la ecuación en su forma diagonal con el análisis de los signos de \dot{x} y \dot{y} . De hecho, en este ejemplo sabemos que sobre la línea $y = -3x$ se anula \dot{x} , y que esta derivada \dot{x} debe cambiar de signo cuando la órbita $x(t)$ atraviesa la recta de ecuación $y = -3x$. En concreto, $x(t)$ es creciente mientras $y > -3x$ y decreciente cuando $y < -3x$. Consideraciones análogas valen para \dot{y} y la recta $x = -3y$: y es creciente en el semiplano $x > -3y$, y decreciente en $x < -3y$. Cuando una órbita atraviesa esta recta cambia el crecimiento de su componente según el eje y , porque cambia el signo de \dot{y} . ♣

Ejercicio 1.53. *

1. Hallar la solución de los problemas

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = (x_0, y_0), \end{cases} \quad (1.145)$$

para cada una de las siguientes matrices;

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.146)$$

2. Dibujar los planos de fases asociados a cada una de las ecuaciones. Para hacerlo obtener primero los planos de correspondientes a las ecuaciones $\dot{Y} = DY$, donde D es la matriz que se obtiene diagonalizando A en cada caso, y utilizar el cambio de coordenadas para obtener el plano de fases de la ecuación original. Estudiar la estabilidad de los puntos críticos.
3. Para cada una de las matrices A y sus formas diagonales D calcular los flujos asociados con las ecuaciones $\dot{X} = AX$ y $\dot{Y} = DY$. Escribir los flujos de una ecuación en términos de los de la otra, usando los cambios de coordenadas lineales que permiten pasar de la variable X a la variable Y . Comparar los resultados con la discusión presentada en la observación 1.5.6.
4. Mostrar que no puede haber ningún cambio de variable que transforme cada una de las ecuaciones lineales de este ejercicio en alguna de las otras dos. Sugerencia: tener en cuenta el ejercicio 1.51.

Aunque una matriz no sea diagonalizable, es decir, aunque no tenga una base de vectores propios, la existencia de valores y vectores propios permite hallar con mucha facilidad algunas soluciones, tal como se muestra en nuestro próximo ejercicio.

Ejercicio 1.54. * Consideremos un vector X_0 de \mathbf{R}^2 , un número real λ y una matriz A real 2×2 . Mostrar que X_0 es un vector propio de A con valor propio λ si y sólo si $X(t) = e^{\lambda t} X_0$ es una solución de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$.

Ejercicio 1.55. ** EL RESORTE AMORTIGUADO

Supongamos que dejamos oscilar una partícula sujeta a un resorte y además la sometemos a un amortiguamiento que supondremos proporcional a la velocidad de desplazamiento de la partícula. Si $k > 0$ es la constante del resorte y $b > 0$ la del amortiguamiento este sistema estará descrito por la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}, \quad (1.147)$$

donde m representa la masa de la partícula.

1. Reducir la ecuación (1.147) a un sistema lineal matricial de la forma $\dot{X} = AX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -\beta \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Las constantes ω y β se determinarán a partir de m , k y b .

2. Hallar el rango de valores de $\omega > 0$ y $\beta > 0$ para los cuales A es diagonalizable. Para estos valores de ω y β hallar las soluciones del sistema lineal y expresarlas en forma matricial como el producto de una matriz 2×2 que depende del tiempo por el vector de los datos iniciales. Graficar las soluciones en el plano (x, y) e interpretar los resultados obtenidos en esta parte del problema.
3. Mostrar, para los valores de ω y β que se encontraron en la parte 2, que el origen $(0, 0)$ es un punto crítico asintóticamente estable del sistema.

Ejercicio 1.56. ** En este ejercicio volveremos sobre el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + x^2,\end{aligned}\tag{1.148}$$

que apareció en el ejercicio 1.47.

1. El sistema (1.148) tiene un punto crítico P distinto del origen $(0, 0)$. Hallarlo y linealizar la ecuación alrededor de P .
2. Resolver completamente el sistema que resulta de linealizar la ecuación alrededor del punto crítico P . Representar el plano de fases correspondiente. Compararlo con el plano de fases de la ecuación original en el entorno del punto P .

Observación 1.5.12. Vamos a cerrar esta sección comentando que si la matriz de un sistema lineal $\dot{X} = AX$ tiene valores propios complejos y es diagonalizable entonces puede utilizarse su forma diagonal para calcular las soluciones de la ecuación. No haremos mucho hincapié en este asunto porque desarrollaremos más adelante un método diferente para hacer los cálculos que proporciona más información geométrica sobre el flujo asociado a la ecuación.

Notemos que en el caso de valores propios reales la forma diagonal de una matriz A permití resolver la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$ porque la reducía a un par de ecuaciones escalares $\dot{x} = \lambda x$, donde λ representa cada uno de los valores propios de la matriz. Veremos a continuación como tratar la ecuación $\dot{x} = \lambda x$ cuando λ es un número complejo.

Ejemplo 1.5.13. LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL EN \mathbf{C}
El objetivo de este ejemplo es estudiar la ecuación diferencial

$$\dot{z} = \lambda z\tag{1.149}$$

en el campo complejo. El número λ es una constante compleja cualquiera. Una solución $z(t)$ de esta ecuación será una función compleja $z(t)$, definida sobre un intervalo I de \mathbf{R} . Si escribimos

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

separando sus partes real e imaginaria, entonces la derivada $\dot{z}(t)$ es

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t).$$

Naturalmente, la condición para que $z(t)$ sea solución de (1.149) es justamente

$$\dot{z}(t) = \lambda z(t), \quad t \in I.$$

Mostraremos a continuación que la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{z} = \lambda z, \\ z(0) = z_0 \in \mathbf{C}, \end{cases}$$

es $z(t) = z_0 e^{\lambda t}$. Esta fórmula es enteramente análoga a la que permite resolver la ecuación diferencial lineal (1.149) en el caso real. Es fácil verificar que

$$\dot{z}(t) = z_0 \frac{de^{\lambda t}}{dt}.$$

Ejercicio 1.57. * Sean z_0 un número complejo cualquiera, y $w(t)$ una función compleja y derivable definida sobre un intervalo $I \subset \mathbf{R}$. Definamos

$$z(t) = z_0 w(t), \quad t \in I.$$

Mostrar que $\dot{z}(t) = z_0 \dot{w}(t)$, para t en el intervalo I .

Sólo nos resta calcular la derivada de la exponencial $e^{\lambda t}$. Si $\lambda = a + ib$ entonces

$$e^{\lambda t} = e^{(at+ibt)} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt).$$

Al derivar esta fórmula resulta

$$\frac{e^{\lambda t}}{dt} = e^{at} (a \cos bt - b \sin bt) + i(a \sin bt + b \cos bt).$$

El miembro de la derecha de esta igualdad es justamente $\lambda e^{\lambda t}$, tal como puede comprobarse por medio de un cálculo directo. Por otra parte, al evaluar $z(t)$ en $t = 0$ obtenemos z_0 , porque $e^0 = 1$. Por lo tanto, hemos mostrado que $z(t)$ es la solución del problema de valores iniciales que estamos considerando. ♣

Ejemplo 1.5.14. Una vez más calcularemos las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.150)$$

que gobierna el comportamiento de un oscilador simple. En esta oportunidad lo haremos diagonalizando la matriz del sistema sobre el campo complejo.

Supongamos que queremos resolver el sistema (1.108) con un dato inicial

$$X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Llamemos A a la matriz del sistema. La matriz A tiene $i\omega$ y $-i\omega$ como valores propios, y se diagonaliza en la base

$$\mathcal{B} = \{(1, i), (1, -i)\} \quad (1.151)$$

de \mathbf{C}^2 . A partir de esta observación, podemos repetir todos los pasos que dimos en el ejemplo 1.5.10 para resolver (1.108). Comenzamos calculando las matrices que vinculan las coordenadas en la base \mathcal{B} con las coordenadas en la base canónica \mathcal{C} de \mathbf{C}^2 :

$${}_C I_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad {}_{\mathcal{B}} I_{\mathcal{C}} = {}_C I_{\mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}. \quad (1.152)$$

Al transformar el vector X_0 del dato inicial a las nuevas coordenadas obtenemos el vector

$$Y_0 = {}_{\mathcal{B}} I_{\mathcal{C}} X_0.$$

Tal como ocurría en el caso con valores propios reales, la ecuación en las nuevas coordenadas toma la forma $\dot{Y} = DY$, donde D es la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}. \quad (1.153)$$

Este sistema es muy fácil de resolver, porque sus ecuaciones quedan desacopladas al ser D diagonal y la solución con dato inicial Y_0 es

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} Y_0. \quad (1.154)$$

Para recuperar la solución del problema original hay que deshacer el cambio de coordenadas. Por lo tanto, ésta es

$$X(t) = {}_C I_{\mathcal{B}} Y(t).$$

Si ponemos juntas todas las operaciones que realizamos, concluimos que

$$X(t) = {}_C I_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} {}_{\mathcal{B}} I_{\mathcal{C}} X_0. \quad (1.155)$$

Si tenemos en cuenta la expresión (1.152) de las matrices de cambio de base, y hacemos las cuentas, encontramos que la solución a nuestro problema de valores iniciales para el sistema (1.108) es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (1.156)$$

Por cierto, esta es la solución que ya habíamos encontrado antes usando otros procedimientos. ♣

A continuación presentamos un ejercicio de aplicación de la técnica que acabamos de desarrollar.

Ejercicio 1.58. *** Calcular las soluciones de la ecuación diferencial lineal que aparece en la parte 1 del ejercicio 1.55, en los casos en que la matriz A tiene valores propios complejos. ♠

1.5.3 Ejemplos sencillos de bifurcaciones.

En esta sección vamos a estudiar algunas ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro y que tienen la propiedad de que el comportamiento de sus soluciones depende fuertemente del valor del parámetro bajo consideración.

Ejemplo 1.5.15. Vamos a considerar ahora las ecuaciones

$$\dot{x} = x^2 - c, \quad (1.157)$$

donde c es un parámetro real. Tal como habíamos observado en general para ecuaciones en la recta, la estructura del flujo asociado con (1.157) puede inferirse del conocimiento de sus puntos críticos y del signo de \dot{x} en las distintas regiones de \mathbf{R} . Los puntos críticos de (1.157) son las raíces de $x^2 = c$, así que es evidente que tenemos que discutir tres casos:

1. CASO $c < 0$. En este rango de valores de c no hay puntos críticos porque $x^2 = c$ no tiene raíces y \dot{x} es positivo en todo \mathbf{R} . Las órbitas de la ecuación viajan desde $-\infty$ a $+\infty$ sin detenerse y necesitan un tiempo finito para hacer todo el recorrido.
2. CASO $c = 0$. Hay un único punto crítico inestable en $x = 0$ y tres órbitas: la estacionaria $x \equiv 0$, la semirrecta $x < 0$ que corresponde a una órbita que se acerca al origen cuando t crece y la semirrecta $x > 0$, una órbita que se aleja del origen y alcanza $+\infty$ en tiempo finito. El cambio de variables $y = -x$ la reduce a la ecuación 1.20 que estudiamos en la primera clase, así que podemos remitirnos a este trabajo que ya hicimos por los detalles.
3. CASO $c > 0$. En este caso hay dos puntos críticos $x = \pm\sqrt{c}$ y en total cinco órbitas. El punto $x = -\sqrt{c}$ es asintóticamente estable y $x = +\sqrt{c}$ es inestable. Si resolvemos la ecuación con un dato x_0 en el intervalo $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ la solución $x(t)$ está definida en $(-\infty, \infty)$, satisface $\lim_{t \rightarrow \mp\infty} x(t) = \pm\sqrt{c}$ y su órbita es el intervalo $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$.

El contenido de la discusión precedente se refleja en los gráficos de la figura 1.25.

Ejercicio 1.59. * Calcular las soluciones de la ecuación en los tres casos arriba reseñados y verificar que las afirmaciones sobre los aspectos cualitativos del flujo son correctas.

Notemos entonces que la ecuación experimenta un brusco cambio en su comportamiento cuando c atraviesa el valor 0. En particular, a diferencia de lo que pasa en nuestro ejemplo 1.5.1, es imposible encontrar un cambio de coordenadas que transforme la ecuación (1.157) con $c > 0$ en la misma ecuación con un valor de c negativo o cero. La razón de esto es que los cambios

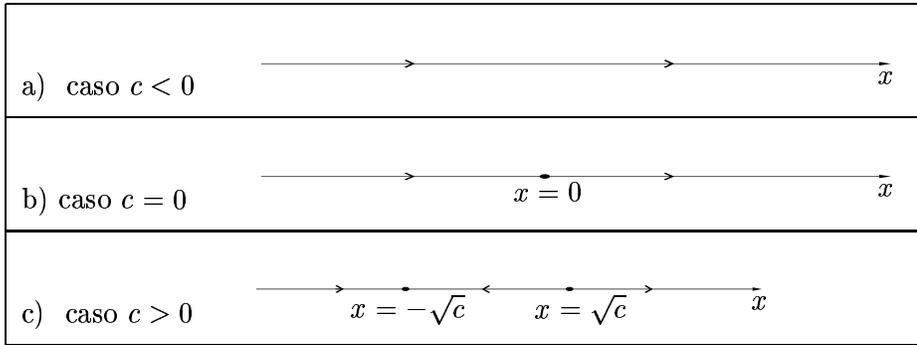


Figura 1.25: diagramas de fase de $\dot{x} = x^2 - c$ en \mathbf{R}

de coordenadas no pueden cambiar los aspectos cualitativos de la dinámica ya que cambiar de coordenadas no es más que ver *lo mismo* desde otro punto de vista. Una manera de justificar esta afirmación es notar que un cambio de coordenadas mantiene la cantidad de puntos críticos de la ecuación y ya vimos que no hay puntos críticos si $c < 0$, hay uno cuando $c = 0$ y dos para $c > 0$.

Ejemplo 1.5.16. BIFURCACIÓN DE HOPF

El siguiente ejemplo que vamos a introducir requiere que pasemos a trabajar en el plano (x, y) , en el que consideraremos la familia de ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\epsilon - (x^2 + y^2)) - y, \\ \dot{y} &= y(\epsilon - (x^2 + y^2)) + x,\end{aligned}\tag{1.158}$$

donde ϵ es un parámetro real. A pesar del aspecto complicado de (1.158) fueron escritas para que al escribirlas en coordenadas polares (r, θ) obtengamos, para $r \neq 0$, el sencillo sistema

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\epsilon - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1,\end{aligned}\tag{1.159}$$

que tiene sus ecuaciones desacopladas. Notemos además que $r = 0$ corresponde al origen, que es un punto crítico del sistema. Este punto crítico cae fuera de la región donde es válido el cambio de coordenadas cartesianas a polares, y por eso no aparece ningún punto crítico en el sistema (1.159). De todos modos sabemos que el origen $(0, 0)$ debe corresponder a una solución estacionaria de la ecuación, por lo que sólo nos interesa estudiar el comportamiento de (1.159) fuera de $(0, 0)$, o, dicho de otra manera, en la región $r > 0$ donde el cambio a coordenadas polares es efectivamente útil.

Ejercicio 1.60. * Mostrar que al pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas polares la ecuación (1.158) se transforma en (1.159).

El sistema (1.159) es relativamente sencillo de estudiar y nos permitirá resolver la ecuación (1.158) sin demasiado trabajo. Como ambas ecuaciones

representan esencialmente lo mismo en coordenadas diferentes nos referiremos a ambos como “la ecuación diferencial”. Si queremos resolverla con dato inicial

$$x_0 = r_0 \cos \theta_0, \quad y_0 = r_0 \sin \theta_0,$$

la segunda ecuación en (1.159) implica que $\theta(t) = \theta_0 + t$. Notemos que cada vez que aumentamos θ en 2π damos una vuelta alrededor del origen, así que las soluciones de nuestra ecuación están dando vueltas en sentido antihorario mientras no estén en $r = 0$. La ecuación para r en (1.159) es algo más complicada, pero es una ecuación en la recta cuyo comportamiento podemos determinar completamente buscando sus puntos críticos y estudiando el signo del miembro de la derecha. En realidad ése es el contenido del ejercicio 1.21. Como r es el radio en coordenadas polares sólo nos ocuparemos de la región $r \geq 0$. Al buscar los puntos críticos es evidente que debemos distinguir dos casos:

1. CASO $\epsilon \leq 0$. Cuando $\epsilon \leq 0$ la única raíz de $r(\epsilon - r^2)$ es $r = 0$, que corresponde al punto crítico que nuestra ecuación tiene en el origen $(x, y) = (0, 0)$. Fuera del origen \dot{r} es siempre negativo y el sistema tiene una única órbita que se va “enrollando” en el origen cuando t crece. El origen es asintóticamente estable y todas las órbitas se aproximan a él.

En la figura 1.26 representamos el diagrama de la ecuación para $\epsilon = 0$ y para un valor negativo de ϵ .

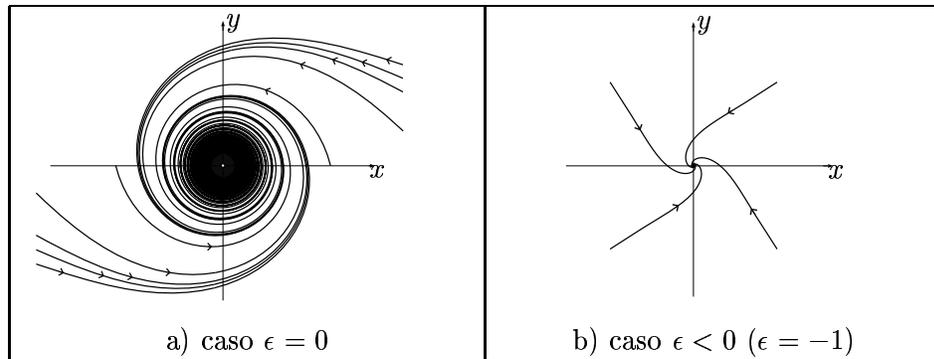


Figura 1.26: diagramas de fase de la ecuación (1.158)

Ejercicio 1.61. ** Explicar por qué aparece un disco negro sobre el origen al intentar representar las soluciones de la ecuación cuando $\epsilon = 0$.

2. CASO $\epsilon > 0$. Ahora hay dos raíces para el segundo miembro de la ecuación de r . Estas son $r = 0$ y $r = \sqrt{\epsilon}$. Igual que en el caso anterior

$r = 0$ corresponde al origen, pero $r = \sqrt{\epsilon}$ corresponde a una solución que tiene r constante y $\theta(t) = \theta_0 + t$, es decir una órbita periódica

$$x(t) = \sqrt{\epsilon} \cos(\theta_0 + t), \quad y(t) = \sqrt{\epsilon} \sin(\theta_0 + t), \quad (1.160)$$

confinada a la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{\epsilon}$. Notemos que es posible verificar directamente que (1.160) es una solución sustituyendo en (1.158). Si r está en el intervalo $(0, \sqrt{\epsilon})$ entonces \dot{r} es positivo y r crece, por lo tanto las órbitas comprendidas en esa región se van alejando del origen y se aproximan a la órbita periódica (1.160). Por el contrario, $\dot{r} < 0$ cuando $r > \sqrt{\epsilon}$ y las órbitas en $r > \sqrt{\epsilon}$ también se aproximan a la circunferencia $r = \sqrt{\epsilon}$. Ahora el origen es un punto crítico inestable. En el diagrama de la figura 1.27 puede apreciarse la órbita periódica que aparece para $\epsilon > 0$, que atrae a todas las soluciones no estacionarias de la ecuación.

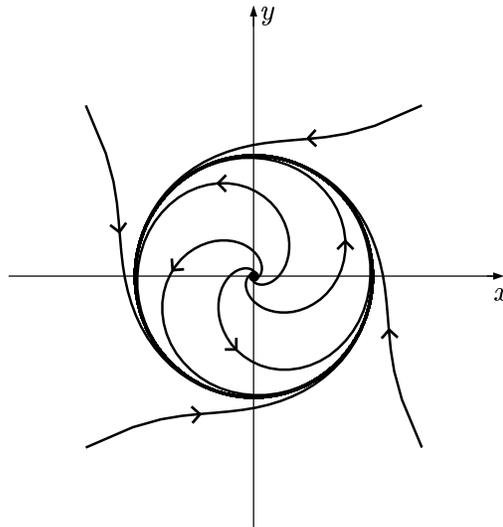


Figura 1.27: diagrama de fase de la ecuación (1.158) para $\epsilon > 0$

Ejercicio 1.62. * Justificar todas las afirmaciones que acabamos de hacer. Para ello resolver explícitamente la ecuación si es preciso. La mejor forma de hacerlo es usar los resultados del ejercicio 1.21 y lo que sabemos sobre los cambios de coordenadas para usar en el plano (x, y) los cálculos en las variables (r, θ) .

Notemos que cuando ϵ pasa de ser negativo a positivo el punto crítico $(0, 0)$ pasa de estable a inestable y aparece una órbita periódica que rodea $(0, 0)$, que crece con ϵ y que además “atrae” todas las demás órbitas.

Ejercicio 1.63. ** Construir un ejemplo en el que un punto inestable se convierta en estable, al mismo tiempo que aparece una órbita periódica que “repele” todo lo que tiene cerca. ♣

Ejercicio 1.64. ** EL PÉNDULO EN UNA GUÍA GIRATORIA LISA.

Cerraremos este capítulo con un ejercicio guiado que consiste en retomar el ejemplo del péndulo y modificarlo para suponer que el plano vertical que contiene al péndulo gira con una velocidad angular constante.

1. † DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES.

En esta parte derivaremos la ecuación diferencial que gobierna el movimiento del sistema. Puede ser omitida en una primera lectura para pasar directamente a trabajar con las ecuaciones del sistema. Pondremos en juego tres sistemas de vectores para describir el movimiento. Introduzcamos primero una terna fija $\{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$, donde \vec{K} apuntará en dirección vertical, hacia arriba. Una terna $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{K}\}$ solidaria con la guía, tal que la guía esté contenida en el plano de los vectores \vec{i} y \vec{K} . Por último, en el plano de la guía usaremos los vectores \vec{e}_r y \vec{e}_φ para “seguir” la partícula en su desplazamiento. Con φ indicaremos la coordenada angular que mide el apartamiento de la partícula del punto más bajo de la guía. Pondremos el origen O de coordenadas en el centro de la guía y, tal como ocurría en el caso de la guía en reposo que tratamos antes, la posición P de la partícula es

$$P = r\vec{e}_r, \quad (1.161)$$

pero ahora

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\varphi\vec{i} - \cos\varphi\vec{K}, \\ \vec{e}_\varphi &= \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{K}. \end{aligned} \quad (1.162)$$

El movimiento de rotación de la guía con velocidad angular ω se refleja en que

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}} &= \cos\omega t\vec{I} + \sin\omega t\vec{J}, \\ \dot{\vec{j}} &= -\sin\omega t\vec{I} + \cos\omega t\vec{J}. \end{aligned} \quad (1.163)$$

Calcular $\dot{\vec{i}}, \dot{\vec{j}}, \dot{\vec{e}}_r$ y $\dot{\vec{e}}_\varphi$. Utilizar este cálculo para mostrar que la ecuación diferencial que gobierna el movimiento del péndulo es

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{r}\sin\varphi + \omega^2\sin\varphi\cos\varphi, \quad (1.164)$$

proyectando la ecuación de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ sobre la dirección tangente a la guía dada por el vector unitario \vec{e}_φ . ††

2. EL PASAJE A UNA ECUACIÓN DE PRIMER ORDEN EN EL PLANO.

Sea $w = \sqrt{g/r}$ y $\lambda = \omega/w$ (no confundir w con ω). Mostrar que al introducir una variable θ tal que $\dot{\varphi} = w\theta$ la ecuación (1.164) se puede escribir como el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= w\theta, \\ \dot{\theta} &= w(\lambda^2\cos\varphi - 1)\sin\varphi. \end{aligned} \quad (1.165)$$

Hacer un primer estudio del plano de fases asociado a este sistema, en particular determinar sus puntos críticos y el signo de $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$ en cada región del plano. Discutir según λ . Verificar que cuando $\lambda > 1$ aparecen puntos críticos que no existen para $\lambda \leq 1$.

3. BÚSQUEDA DE UNA PREINTEGRAL DEL MOVIMIENTO (CANTIDAD CONSERVADA).

Utilizar la ecuación (1.164) para encontrar una magnitud e que se conserva sobre las órbitas del sistema (1.165). Esbozar los conjuntos de nivel de e (para esto puede ser útil graficar $e = e(\varphi, 0)$, la cantidad e sobre el eje φ). Hallar las órbitas de (1.165) y su significado en términos del movimiento del péndulo.

4. ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS CRÍTICOS. Mostrar que el punto crítico $(0, 0)$ es estable si $\lambda \leq 1$. Mostrar que los puntos críticos que aparecen para $\lambda > 1$ son estables. ¿Qué puede decir de la estabilidad de $(0, 0)$ cuando $\lambda > 1$? Estudiar la estabilidad de $(\pi, 0)$.

Ejemplo 1.5.17. † CAMBIOS DE COORDENADAS NO DIFERENCIABLES.

El problema de la equivalencia de las ecuaciones diferenciales a través de cambios de coordenadas es más delicado de lo que parece a primera vista. Por esa razón presentamos esta cuestión con mucho detalle en el ejemplo $\dot{x} = x - c$, el más sencillo de todos los que consideramos en esta clase, y al considerar las ecuaciones lineales. Sin embargo, al introducir la noción de bifurcación no seguimos trabajando al mismo nivel y nos limitamos a mostrar ejemplos en los que se “veía” el cambio del carácter de la ecuación para algún valor crítico del parámetro que estuviera en juego. Veremos ahora otro aspecto de esta cuestión, a través del análisis de una de las ecuaciones más básicas que hemos considerado: la ecuación lineal en la recta

$$\dot{x} = ax, \quad a \in \mathbf{R}. \quad (1.166)$$

Al variar el parámetro a el comportamiento del punto crítico $x = 0$ cambia de estable a inestable cuando a pasa de ser negativo a positivo. Si miramos el comportamiento de las soluciones de esta ecuaciones notamos inmediatamente que hay tres casos diferentes: $a > 0$, $a = 0$ y $a < 0$. En una primera aproximación podríamos intentar reducir todos los casos $a > 0$ al caso $a = 1$ mediante un cambio de variables, ya que el comportamiento cualitativo de ambos es exactamente el mismo. Para hacerlo busquemos un cambio de coordenadas que nos permita pasar a $y = h(x)$ y escribamos la ecuación (1.166) en la coordenada y . Derivando respecto a t tenemos

$$\dot{y} = h'(x)\dot{x}. \quad (1.167)$$

Como estamos buscando reducir la ecuación (1.166) con $a > 0$ cualquiera al caso $a = 1$ pretendemos que $y = h(x)$ satisfaga $\dot{y} = y$, así que usando estas dos últimas igualdades y la ecuación (1.166) obtenemos la siguiente ecuación diferencial para el cambio de variable f :

$$h(x) = ah'(x)x. \quad (1.168)$$

Podemos buscar soluciones de esta ecuación escribiéndola como

$$\frac{1}{x} = a \frac{h'(x)}{h(x)}, \quad (1.169)$$

para concluir que sus soluciones son de la forma

$$|h(x)| = C|x|^{1/a}. \quad (1.170)$$

Como estamos buscando una solución cualquiera de (1.168) tomemos $C = 1$ y consideremos

$$h(x) = \operatorname{sg} x |x|^{1/a}. \quad (1.171)$$

donde $\operatorname{sg} x$ indica el signo de x . Si a es distinto de 1 la función h no define un cambio de variables diferenciable en \mathbf{R} , porque ella o su inversa son singulares en $x = 0$. Sin embargo h es una biyección continua de \mathbf{R} en \mathbf{R} con inversa continua, es decir un *homeomorfismo* de la recta en sí misma. Esta transformación no nos permite transformar la ecuación diferencial, porque tiene problemas de derivabilidad en $x = 0$, pero dado que es una biyección define un “cambio de coordenadas”, porque cada punto x queda determinado por su coordenada $y = h(x)$.

Ejercicio 1.65. * Calcular la inversa h^{-1} de h .

Dado que no podemos derivar para transformar la ecuación veamos si podemos hacer algo con los flujos. Recordemos que las fórmulas (1.124) y (1.125) contienen una noción de equivalencia para las ecuaciones que no requiere calcular derivadas, se expresa simplemente componiendo los flujos con el cambio de coordenadas. Recordemos entonces que, para cada valor de a el flujo correspondiente a (1.166) es

$$\Phi_a(x, t) = xe^{at}. \quad (1.172)$$

Es muy fácil verificar que la función h , aunque no es diferenciable si $a \neq 1$, vincula los flujos Φ_1 , que se obtiene en (1.172) tomando $a = 1$, y Φ_a , este último correspondiente al valor de a que estamos considerando, tal como habíamos encontrado en las fórmulas (1.124) y (1.125) para el caso diferenciable. En efecto

$$h(x_0 e^{at}) = \operatorname{sg}(x_0 e^{at}) |x_0 e^{at}|^{\frac{1}{a}} = \operatorname{sg}(x_0) |x_0|^{\frac{1}{a}} e^t = h(x_0) e^t, \quad (1.173)$$

que no es otra cosa que

$$\Phi_1(h(x), t) = h(\Phi_a(x, t)). \quad (1.174)$$

Aún más, si aplicamos h^{-1} a ambos lados de 1.174 podemos reescribirla en la forma completamente equivalente

$$\Phi_a(x, t) = h^{-1}(\Phi_1(h(x), t)), \quad (1.175)$$

que corresponde a (1.125) para este caso particular. ♣

Los comentarios del ejemplo anterior pueden extenderse para introducir una nueva noción de equivalencia entre flujos de ecuaciones diferenciales que recoge las ideas que hemos introducido. Si tenemos dos ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f_1(x)$ y $\dot{x} = f_2(x)$ definidas en abiertos U_1 y U_2 de \mathbf{R}^n , y llamamos Φ_1 y Φ_2 a los flujos asociados con cada una de ellas diremos que son *conjugados* si existe un homeomorfismo h entre U_1 y U_2 (es decir, una aplicación $f : U_1 \rightarrow U_2$ continua y biyectiva con inversa $f^{-1} : U_2 \rightarrow U_1$ continua) tal que

$$\Phi_1(x, t) = h^{-1}(\Phi_2(h(x), t)). \quad (1.176)$$

En tal caso diremos que h es una *conjugación* entre Φ_1 y Φ_2 o que h *conjuga* Φ_1 y Φ_2 .

Ejercicio 1.66. * Encontrar conjugaciones entre la ecuación $\dot{x} = -x$ y las ecuaciones $\dot{x} = ax$, con $a < 0$.

Ejercicio 1.67. * Mostrar que no hay una conjugación entre $\dot{x} = x$ y $\dot{x} = -x$.

Ejercicio 1.68. *** Mostrar que la relación de conjugación es una relación de equivalencia.

Observación 1.5.18. Aunque las ecuaciones $\dot{x} = c + x^2$ tienen esencialmente el mismo comportamiento para cualquier $c > 0$ no es posible construir una conjugación con el caso $c = 1$. ¿Por qué? (la clave es que para $c > 0$ hay una única órbita que está definida en un intervalo finito de tiempos que depende de c).

Ejercicio 1.69. ** Resolver explícitamente $\dot{x} = c + x^2$, calcular el flujo asociado y contestar la pregunta que se acaba de plantear.

Para introducir una noción que permita identificar todas las ecuaciones

$$\dot{x} = c + x^2,$$

con $c > 0$, entre sí hace falta manejar nociones de equivalencia algo más refinadas, de modo que abandonaremos esta cuestión por aquí. Sin embargo vale la pena retener en la cabeza que no se produce ningún cambio significativo en la dinámica de estas ecuaciones al dejar variar c en el conjunto de los números positivos, recién al alcanzar el valor $c = 0$ aparece un comportamiento diferente. Este tipo de consideraciones son las que uno trata de recoger al introducir definiciones que permitan identificar flujos distintos como “el mismo flujo” visto en coordenadas distintas. ♠ ††

1.6 Ecuaciones lineales a coeficientes constantes I

En esta clase y la siguiente vamos a abordar sistemáticamente el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales

$$\dot{X} = AX, \quad (1.177)$$

en \mathbf{R}^2 . Por lo tanto, supondremos que A es una matriz real 2×2 . Presentaremos también, aunque con menor énfasis y detalle, el problema en dimensión 3.

Los argumentos que vamos a utilizar están basados en transformar la ecuación original (1.177) por medio de un cambio de variables lineal, de manera de obtener una ecuación lineal $\dot{Y} = JY$ equivalente más simple, donde J es una matriz semejante a A de una *forma canónica* para la cual sepamos resolver completamente la ecuación diferencial correspondiente.

La manera en que un cambio de variables lineal afecta las ecuaciones diferenciales (1.177) fue estudiada en el ejemplo 1.5.2. Recordemos que al introducir una nueva base \mathcal{B} en \mathbf{R}^n a cada vector $X \in \mathbf{R}^n$ le asociamos sus nuevas coordenadas

$$Y = {}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}X. \quad (1.178)$$

Al transformar la ecuación diferencial según este cambio de variables obtenemos

$$\dot{Y} = {}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}} A {}_{\mathcal{C}}I_{\mathcal{B}} Y. \quad (1.179)$$

La matriz ${}_{\mathcal{C}}I_{\mathcal{B}}$ es la que hace el cambio de coordenadas desde la base \mathcal{B} a la base canónica \mathcal{C} , y satisface ${}_{\mathcal{C}}I_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}^{-1}$. La clave del método consiste en que

$$J = {}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}} A {}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}}^{-1}$$

sea una matriz tal que podamos resolver

$$\dot{Y} = JY. \quad (1.180)$$

Las soluciones de este nuevo sistema pueden expresarse en términos de la matriz exponencial e^{Jt} como

$$Y(t) = e^{Jt}Y_0,$$

donde Y_0 es el dato inicial prefijado $Y(0)$. Deshaciendo el cambio para volver a la ecuación original encontramos que la solución de (1.177), con condición inicial $X(0) = X_0$ es

$$X(t) = {}_{\mathcal{C}}I_{\mathcal{B}} e^{Jt} {}_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{C}} X_0.$$

Esto es todo lo que hace falta para calcular las fórmulas de las soluciones, una vez que sepamos como resolver (1.180).

Sin embargo, la información que este método proporciona no se agota al hallar una expresión para las soluciones, ya que *todos* los aspectos dinámicos

asociados con la ecuación (1.177) pueden conocerse a partir de los de (1.180). Esto nos permitirá representar el diagrama de fases de la ecuación original a partir del dibujo correspondiente a (1.180), que debe ser transportado a la variable X teniendo en cuenta que $X = {}_cI_B Y$. Casi siempre bastará con ver como transforma este cambio a los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ para obtener el diagrama de fases de la ecuación (1.177) a partir del plano de fases de la ecuación en su forma canónica simple.

Recordemos también que el origen $O = (0, 0)$ siempre es un punto crítico de las ecuaciones lineales. El tipo de estabilidad del origen para las ecuaciones (1.177) y (1.180) es el mismo, por lo que podremos determinarlo usando la reducción de la ecuación a una forma más simple.

El prototipo del procedimiento que acabamos de describir corresponde al caso en que la matriz A es diagonalizable, que siempre puede tratarse siguiendo las líneas del ejemplo 1.5.10. Dado que ya sabemos resolver el caso diagonalizable comenzaremos por una breve sección en la que recopilamos los resultados obtenidos, discutimos la estabilidad según los valores propios de A y presentamos algún ejemplo en \mathbf{R}^3 . Luego nos concentraremos en los casos en que A no se diagonaliza sobre el cuerpo de los números reales. Seguiremos utilizando la matriz exponencial e^{At} para expresar las soluciones de (1.177) como

$$X(t) = e^{At} X_0,$$

donde el vector X_0 es la condición inicial con la que resolvemos la ecuación.

Tal como anunciamos, nos ocuparemos esencialmente de las ecuaciones diferenciales en \mathbf{R}^2 y en \mathbf{R}^3 . Las ideas que tienen que ver con cambiar de variables y transformar las ecuaciones diferenciales de esa manera pueden aplicarse en general en \mathbf{R}^n , con n cualquiera. Sin embargo, en dimensiones más altas el problema de hallar una matriz J semejante a la matriz de la ecuación original, y el cambio de coordenadas que permite pasar de A a J , es más complejo. Esta dificultad es en realidad un problema de Álgebra Lineal, no de ecuaciones diferenciales. Una discusión detallada de las ecuaciones diferenciales lineales, que contiene también las dimensiones más altas, puede encontrarse en los capítulos 3 al 6 del texto [HS]. Los requisitos de álgebra lineal necesarios para lo que sigue están cubiertos en [He]. El capítulo 7 de este libro contiene toda la información sobre la forma canónica de Jordan necesaria para tratar, en cualquier dimensión, los sistemas (1.177) cuya matriz A no es diagonalizable.

1.6.1 El caso diagonalizable

Toda lo que hace falta saber acerca de la resolución de las ecuaciones (1.177) en \mathbf{R}^2 con una matriz A diagonalizable sobre \mathbf{R} está contenida en el ejemplo 1.5.10. Las técnicas que allí se desarrollan permiten tratar cualquier situación de este tipo, calcular las soluciones y representar el plano de fases

correspondiente. Para completar el análisis de este caso discutiremos a continuación la estabilidad del punto crítico $(0, 0)$, según los valores propios de A . Supongamos que sus valores propios son los números reales $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Por supuesto que no es ninguna pérdida de generalidad suponerlos ordenados de esta manera. Tal como vimos, al transformar la ecuación original en un sistema equivalente $\dot{Y} = JY$, con matriz

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

el tipo de estabilidad del origen no cambia. La estabilidad de $(0, 0)$ es entonces, dependiendo de los valores que toman λ_1 y λ_2 , la siguiente:

$\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$	asintóticamente estable
$\lambda_1 \leq \lambda_2 = 0$	estable, pero no asintóticamente estable
$\lambda_2 > 0$	inestable

Notemos que basta con que uno de los valores propios sea mayor que 0 para que haya inestabilidad.

Ejercicio 1.70. * Justificar el cuadro que acabamos de presentar. Sugerencia: volver sobre la discusión de la estabilidad del $(0, 0)$ que se hizo al resolver el ejercicio 1.29.

Ejercicio 1.71. * Determinar la estabilidad del origen $O = (0, 0)$, para la ecuación diferencial lineal $\dot{X} = AX$, siendo A cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -15 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para estudiar los ejemplos de esta sección hemos sacado partido de que la matriz A se diagonaliza en una base adecuada. Naturalmente, los razonamientos que hicimos no dependen de que estemos trabajando en \mathbf{R}^2 y pueden generalizarse a dimensiones más altas para cualquier sistema de ecuaciones lineales $\dot{X} = AX$ en \mathbf{R}^n cuya matriz sea diagonalizable. A continuación presentamos un par de ejemplos en dimensión $n = 3$.

Ejercicio 1.72. * SISTEMAS 3×3 CON MATRICES DIAGONALIZABLES
Resolver completamente los sistemas $\dot{X} = AX$, con matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.181)$$

Representar lo mejor que se pueda el espacio de fases y estudiar la estabilidad del punto crítico $O = (0, 0, 0)$ en ambos casos.

1.6.2 La forma canónica cuando A tiene un valor propio real doble y no es diagonalizable

Existen matrices 2×2 que tienen un valor propio real doble y no se diagonalizan. Ése es, por ejemplo, el caso de todas las matrices de la forma

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (1.182)$$

donde λ es un número real arbitrario. El único valor propio asociado con estas matrices es λ , pero el subespacio propio correspondiente es el generado por $(0, 1)$, que es un subespacio de dimensión 1. Por lo tanto no hay una base de \mathbf{R}^2 formada por vectores propios de esta matriz. Si éstas fueran las únicas matrices de este tipo no tendríamos problemas a la hora de resolver ecuaciones diferenciales, porque ya hemos visto en el ejemplo 1.3.10 y en la observación 1.3.11 que

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix},$$

y esto es todo lo que precisamos para resolver completamente $\dot{X} = JX$. La realidad es un poquito peor que esto, porque hay matrices con valor propio doble que no se diagonalizan ni son de la forma (1.182). Pero no es mucho peor, porque vale el resultado contenido en nuestra próxima proposición.

Proposición 1.3. *Sea $A \in M^{2 \times 2}(\mathbf{R})$ que tiene un valor propio doble λ y no es diagonalizable. Entonces A es semejante a la matriz J que aparece en (1.182).*

PRUEBA. Si la matriz no es diagonalizable entonces $\dim \ker(A - \lambda I) = 1$. Como la dimensión del espacio es igual a 2 tenemos que

$$\dim \operatorname{im}(A - \lambda I) = 2 - \dim \ker(A - \lambda I) = 1.$$

Además $\operatorname{im}(A - \lambda I)$ es un subespacio invariante para A , por lo tanto está formado por vectores propios de A , dado que tiene dimensión 1. Probemos estas dos afirmaciones. Si $v \in \operatorname{im}(A - \lambda I)$ entonces existe $w \in \mathbf{R}^2$ tal que $v = (A - \lambda I)w$. Entonces

$$Av = A(A - \lambda I)w = (A - \lambda I)Aw$$

está en la imagen de $A - \lambda I$. La segunda afirmación es completamente general: todos los vectores no nulos de un subespacio S de dimensión 1 que es invariante para una transformación lineal T son vectores propios de la transformación. En efecto, el conjunto $\{v\}$ formado por cualquier vector v no nulo de S es una base de S . El vector Tv está en S por la invariancia de S bajo T . Por lo tanto existe un escalar μ tal que

$$Tv = \mu v$$

y v es un vector propio con valor propio μ . Por lo tanto todos los vectores de S , que son colineales con v , son vectores propios de T con el mismo valor propio.

Volviendo a nuestra matriz A hemos mostrado entonces que la imagen de $A - \lambda I$ está formada por vectores propios de A . Como hemos supuesto que A sólo tiene el valor propio λ entonces los vectores de la imagen de A son vectores propios con valor propio λ , lo que implica inmediatamente que

$$\text{im}(A - \lambda I) \subset \ker(A - \lambda I).$$

Como ambos subespacios tienen la misma dimensión la inclusión no puede ser estricta y tenemos entonces que

$$\text{im}(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I).$$

Tomemos ahora cualquier vector v_1 de \mathbf{R}^2 que no esté en el núcleo de $A - \lambda I$. Entonces

$$v_2 = (A - \lambda I)v_1 \in \text{im}(A - \lambda I) = \ker(A - \lambda I). \quad (1.183)$$

De esto se desprende que v_1 y v_2 son linealmente independientes, por lo tanto forman una base \mathcal{B} de \mathbf{R}^2 . Además, como v_2 está en el núcleo de $A - \lambda I$ es un vector propio de A con valor propio λ y se satisface entonces

$$Av_2 = \lambda v_2. \quad (1.184)$$

Por otra parte, de la primera igualdad en (1.183) concluimos

$$Av_1 = \lambda v_1 + v_2. \quad (1.185)$$

Naturalmente, las fórmulas (1.184) y (1.185) son las que hacen falta para escribir la matriz A en la base \mathcal{B} , porque nos dicen que las coordenadas de Av_1 y Av_2 en la base \mathcal{B} son $(\lambda, 1)$ y $(0, \lambda)$ respectivamente. Por lo tanto, al expresar la acción de la matriz A en la base \mathcal{B} obtenemos la matriz (1.182). \diamond

Observación 1.6.1. Notemos que el razonamiento que acabamos de presentar nos dice como construir una base de \mathbf{R}^2 en la que la matriz A toma la forma J . Debemos tomar cualquier vector v_1 que no esté en el núcleo de $A - \lambda I$, y luego usar $(A - \lambda I)v_1$ como v_2 . \spadesuit

Observación 1.6.2. Como la imagen de $A - \lambda I$ está contenida en el núcleo de $A - \lambda I$ tendremos que $A - \lambda I$ es nilpotente de orden 2. En efecto, para cualquier vector $v \in \mathbf{R}^2$ se tiene que

$$(A - \lambda I)v \in \text{im}(A - \lambda I) \subset \ker(A - \lambda I).$$

Por lo tanto

$$0 = (A - \lambda I)(A - \lambda I)v = (A - \lambda I)^2 v, \quad v \in \mathbf{R}^2.$$

Esto implica $(A - \lambda I)^2 = 0$. \spadesuit

Ejemplo 1.6.3. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.186)$$

Su polinomio característico es $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, que tiene raíz 1 doble. Al calcular $A - I$ obtenemos

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.187)$$

cuyo núcleo está formado por los vectores (x, y) que satisfacen $x = y$. Este espacio tiene dimensión 1 y A no se diagonaliza. Notemos que, tal como señalábmós en nuestra última observación, al calcular $(A - I)^2$ obtenemos la matriz nula.

Buscaremos una base que nos permita llevar A a la forma (1.182), con $\lambda = 1$. Para ello escojamos cualquier vector que no esté en el núcleo de $A - I$, por ejemplo $v_1 = (1, 0)$ sirve. Esta elección tiene la ventaja de que el primer vector de la nueva base coincide con el primer vector de la base canónica, cosa que simplifica las matrices de cambio de base. Escojamos como v_2 al vector

$$v_2 = (A - I)v_1 = (-1, -1).$$

Es evidente en este ejemplo que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base de \mathbf{R}^2 , y que

$$\begin{aligned} Av_1 &= (0, -1) = (1, 0) + (-1, -1) = v_1 + v_2, \\ Av_2 &= (-1, -1) = v_2, \end{aligned}$$

por lo que la expresión de A en la nueva base es de la forma

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.188)$$

tal como anunciábmós. No es difícil calcular las matrices de cambio de base. La matriz que permite pasar de \mathcal{B} a la base canónica \mathcal{C} es

$${}_C I_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Invirtiéndola obtenemos

$${}_{\mathcal{B}} I_{\mathcal{C}} = {}_C I_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo ambas matrices de cambio de base coinciden, pero este es un hecho puramente casual. Es trivial verificar que $A = {}_C I_{\mathcal{B}} J {}_{\mathcal{B}} I_{\mathcal{C}}$ multiplicando las tres matrices del miembro de la derecha de esta igualdad.

Busquemos ahora las soluciones de $\dot{X} = AX$. Sabemos que si el dato inicial $X(0)$ es $X_0 \in \mathbf{R}^2$ entonces la solución es

$$e^{At} X_0 = {}_C I_B e^{Jt} {}_B I_C X_0,$$

donde J es la forma canónica (1.188) asociada con A , cuya exponencial es

$$e^{Jt} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$e^{At} = e^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$$

No es difícil verificar que la matriz que acabamos de calcular es solución de la ecuación diferencial matricial $\dot{X} = AX$ y que al evaluarla en $t = 0$ se obtiene la matriz identidad I .

Ejercicio 1.73. * Hacer las verificaciones correspondientes. Observar nuevamente que cada columna de la matriz es una solución de la ecuación diferencial, ¿cuál es el dato inicial que corresponde a cada una de las columnas? ♣

1.6.3 Estudio del plano de fases para las formas canónicas

Naturalmente, del conocimiento de las fórmulas para las soluciones no se deduce inmediatamente cuál es el aspecto del plano de fases para la ecuación $\dot{X} = AX$. Abordaremos esta cuestión estudiando primero los planos de fases de las posibles formas canónicas J que corresponden al caso que estamos analizando. Comencemos por estudiar la ecuación $\dot{Y} = JY$, con J como en (1.188), para $\lambda > 0$. Cuando necesitemos pasar a coordenadas llamaremos u a la primera coordenada de Y y v a la segunda, es decir, escribiremos Y como $Y = (u, v)$. Con esta convención acerca de la notación, las soluciones de $\dot{Y} = JY$ son curvas de la forma

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{\lambda t}, \\ v(t) &= u_0 t e^{\lambda t} + v_0 e^{\lambda t}, \end{aligned} \tag{1.189}$$

con $t \in (-\infty, +\infty)$. Si $u_0 = 0$ entonces

$$u(t) \equiv 0, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda t}.$$

Notemos que el signo de $v(t)$ siempre es el mismo que el de v_0 . El eje v está formado por tres órbitas: el punto crítico $(0, 0)$, y las dos semirrectas

$$\{u = 0, v > 0\}, \quad \{u = 0, v < 0\}.$$

Cada una de estas semirrectas es una órbita que se aleja del origen O cuando $t \rightarrow \infty$, porque $\lambda > 0$. Este hecho ya nos permite afirmar que O es un punto crítico inestable para la ecuación. También es posible afirmar a partir de (1.189) que para cualquier solución $Y(t)$ que no sea la solución estacionaria $Y(t) \equiv (0, 0)$ se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |Y(t)| = +\infty.$$

Esto indica que $O = (0, 0)$ no solo es inestable sino que repele todas las soluciones de la ecuación diferencial.

Para completar el análisis del plano de fases recordemos que cualquier ecuación diferencial $\dot{Y} = JY$ tiene la propiedad de que si Y es una solución entonces $-Y$ también lo es. Por lo tanto el plano de fases no se modifica al cambiar Y por $-Y$, lo que indica que debe tener simetría respecto al origen O . Este es un hecho general, válido para cualquier ecuación diferencial lineal, que conviene recoger como una observación.

Observación 1.6.4. Los planos de fase de las ecuaciones diferenciales lineales $\dot{X} = AX$ en \mathbf{R}^2 siempre son simétricos respecto al origen $O = (0, 0)$. ♠

El hecho que acabamos de señalar nos permite estudiar solamente lo que ocurre en la región $u > 0$ del plano (u, v) para completar nuestro análisis.

Si el dato u_0 es mayor que 0 la primera fórmula en (1.189) nos dice que $u(t)$ es siempre positivo, estrictamente creciente, y recorre todo el intervalo $(0, \infty)$ cuando t varía entre $-\infty$ y $+\infty$. Si analizamos el comportamiento de $v(t)$ encontramos que es negativo para $t < -v_0/u_0$ y positivo para $t > -v_0/u_0$. Podemos derivar para calcular $\dot{v}(t)$, o recurrir a la ecuación, para obtener

$$\dot{v}(t) = u(t) + \lambda v(t) = e^{\lambda t} (\lambda t u_0 + u_0 + \lambda v_0).$$

Notemos que $\dot{v} < 0$ se anula para un único valor \bar{t} de t (que podríamos calcular, pero no lo haremos porque no nos hace falta para nada su valor exacto), es negativo para $t < \bar{t}$ y positivo para $t > \bar{t}$. Para ubicar en plano los puntos donde $\dot{v} = 0$ no es necesario calcular \bar{t} y sustituir en las expresiones de $u(t)$ y $v(t)$: basta tener en cuenta que la ecuación diferencial nos dice que los puntos del plano (u, v) donde \dot{v} es nula están sobre la recta $v = -u/\lambda$. Para completar esta parte del análisis notemos que para cualquier dato inicial (u_0, v_0) , con $u_0 > 0$, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} v(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = +\infty.$$

Si estudiamos el cociente $v(t)/u(t)$ encontramos que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{v(t)}{u(t)} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{v(t)}{u(t)} = +\infty.$$

Por lo tanto, combinando este hecho con la información que tenemos sobre los signos y el crecimiento de $u(t)$ y $v(t)$ encontramos que todas las órbitas “salen” del origen O hacia el cuadrante $\{u > 0, v < 0\}$, tangentes al eje v . La coordenada v disminuye y la u aumenta hasta que alcanzan la recta $v = -u/\lambda$. Luego de cruzar esta recta la v empieza a crecer. En algún instante posterior la órbita cruza el eje u y luego tanto u como v tienden a $+\infty$, con una dirección asintótica paralela al eje v .

El análisis que acabamos de hacer permite esbozar con bastante exactitud el plano de fases en la región $u > 0$. Para completar el dibujo a $u < 0$ sólo hay que simetrizar respecto al origen lo que acabamos de encontrar para $u > 0$. Los diagramas que corresponden a la ecuación diferencial que estamos analizando son, esencialmente, los que aparecen en el ejemplo 1.3.10, página 45, por lo que no los representaremos nuevamente aquí.

Un caso interesante es el que corresponde a la ecuación $\dot{Y} = JY$ cuando $\lambda = 0$. La fórmula (1.189) para las soluciones sigue valiendo, y se reduce a

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0, \\ v(t) &= u_0 t + v_0. \end{aligned} \tag{1.190}$$

El diagrama de fases correspondiente es trivial de dibujar, porque ahora las soluciones son líneas rectas con $u = \text{cte}$, y es el que aparece en la figura 1.28. Por supuesto que el valor de la constante es el de la condición inicial u_0 . Cuando $u_0 < 0$ las soluciones “viajan” hacia las v negativas; cuando $u_0 = 0$ son estacionarias, lo que corresponde a que todos los puntos con $u = 0$ son puntos críticos de la ecuación cuando $\lambda = 0$; si $u_0 > 0$ la coordenada v crece cuando t crece. Notemos que si $u_0 \neq 0$ entonces

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |v(t)| = +\infty.$$

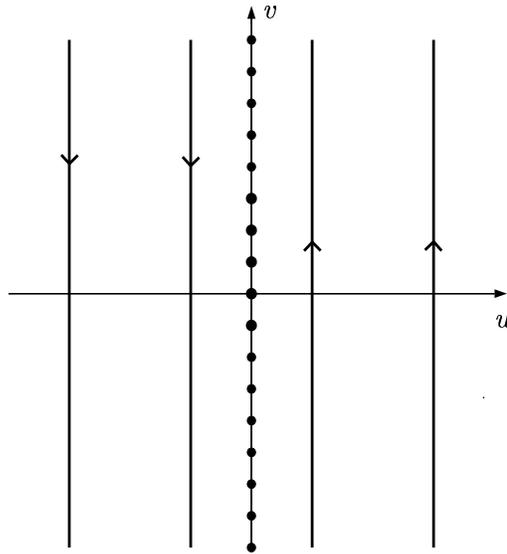
En particular, esto es cierto para las órbitas con condición inicial cercana al origen O , lo que da la pauta de que este punto es inestable.

Ejercicio 1.74. * Mostrar rigurosamente la inestabilidad de todos los puntos críticos de la ecuación $\dot{Y} = JY$ cuando $\lambda = 0$, recurriendo a la definición de punto crítico inestable.

Ejercicio 1.75. * Dibujar el diagrama de fases de $\dot{Y} = JY$ cuando $\lambda < 0$. Mostrar que $O = (0, 0)$ es asintóticamente estable.

1.6.4 El análisis de la ecuación original

Veremos ahora como obtener el plano de fases de la ecuación original $\dot{X} = AX$ a partir de lo que sabemos para la ecuación en su forma canónica. Para ello volveremos sobre el ejemplo con el que hemos trabajado a lo largo de esta sección.

Figura 1.28: el diagrama de fases para $\lambda = 0$

Ejemplo 1.6.5. Ahora estamos en condiciones de retomar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.191)$$

del ejemplo 1.6.3 y representar el plano de fases asociado a $\dot{X} = AX$. Para ello sólo hay que “deformar” el diagrama de fase de la ecuación $\dot{Y} = JY$ por el cambio

$$X = {}_c I_B Y.$$

No hace falta hacer más cálculos para esto. Sólo hay que tener en cuenta que a los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ del plano (u, v) les corresponden el $(1, 0)$ y el $(-1, -1)$ del plano (x, y) respectivamente. Por lo tanto las órbitas salen del origen hacia la región $\{u > 0, v < 0\}$ del plano (u, v) se transforman en órbitas que salen hacia el primer cuadrante del plano (x, y) siendo tangentes a la recta del vector $(-1, -1)$, con x e y crecientes. Luego giran, primero la y pasa a ser decreciente, más tarde le ocurre lo mismo a la x . Finalmente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$$

y las órbitas se escapan al infinito con una dirección asintótica paralela a la recta $x = y$. Esto describe el comportamiento de todas las órbitas que están

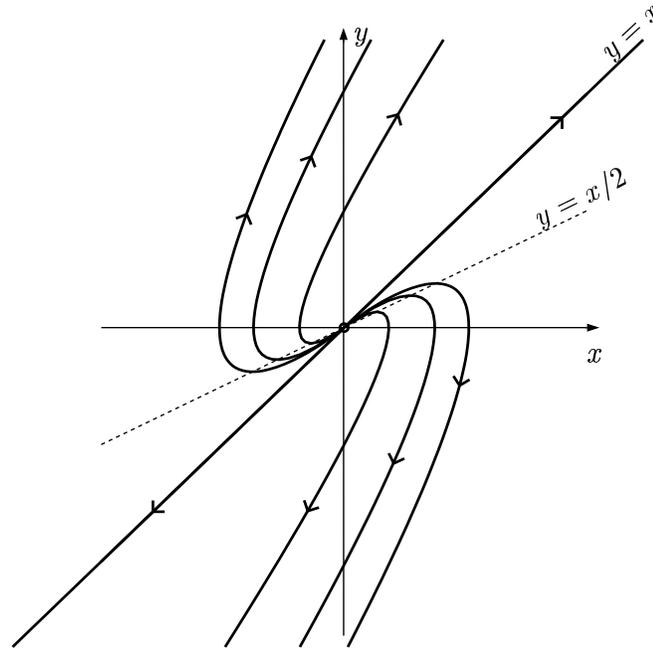


Figura 1.29: el diagrama de fases para la ecuación $\dot{X} = AX$

en la región $x > y$. Por supuesto, la línea $x = y$ está formado por el punto crítico $O = (0, 0)$ y dos órbitas, sobre las dos semirrectas en que O divide la recta $x = y$, que se alejan del origen. Para hallar el dibujo correspondiente al semiplano $x < y$ sólo hay que simetrizar respecto al origen lo que acabamos de hacer, con lo que obtenemos el diagrama que aparece en la figura 1.29.

Es interesante confirmar nuestras predicciones dibujando en el plano (x, y) las rectas sobre las que se tiene $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = 0$. Para $\dot{x} = 0$ encontramos la recta $y = 0$, en tanto que la condición para $\dot{y} = 0$ es $y = x/2$. Este hecho es completamente coherente con nuestra predicción de que en el semiplano $x > y$ primero cambia el crecimiento de y , pasando de creciente a decreciente, y luego ocurre lo mismo con el de x .

Por supuesto, una vez más la estabilidad del origen es la misma para la ecuación original que para la ecuación puesta en su forma canónica por medio del cambio de coordenadas que permite pasar de X a Y . Por lo tanto el origen es un punto crítico inestable de $\dot{X} = AX$. Más aún, el origen repele todo lo que tiene cerca. ♠

Como resumen de nuestra discusión sobre la estabilidad del origen en el caso que estamos considerando, digamos que cuando A es una matriz 2×2 no diagonalizable, con un valor propio real doble λ la estabilidad del $(0, 0)$ como

punto crítico de $\dot{X} = AX$ es la que se muestra en el siguiente cuadro:

$\lambda < 0$	asintóticamente estable
$\lambda = 0$	inestable
$\lambda > 0$	inestable

Ejercicio 1.76. * Resolver completamente los problemas $\dot{X} = AX$ con matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiar en ambos casos la estabilidad de los puntos críticos y representar detalladamente los planos de fase correspondientes.

A continuación presentamos un ejercicio en el que se trata de resolver sistemas de ecuaciones lineales en \mathbf{R}^3 cuyas matrices tienen valores propios reales pero no son diagonalizables. Estas matrices pueden reducirse a una de las formas canónicas siguientes:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad J_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (1.192)$$

El valor propio λ_1 puede ser igual a λ_2 en la primera de estas matrices. Dada una matriz A no diagonalizable, con valores propios reales, es fácil saber cuál es la forma canónica J_1 o J_2 que le corresponde calculando los subespacios propios generalizados $\ker(A - \lambda)^i$, donde λ indica un valor propio de A y $i = 1, 2$. El conocimiento de estos subespacios permite también construir una base en la que la matriz toma la forma canónica J_1 o J_2 , tal como ocurre en el caso de dimensión 2. Una parte sustancial de la dificultad del ejercicio que proponemos a continuación es resolver estos problemas algebraicos. El resto consiste en resolver las ecuaciones para las formas canónicas correspondientes y utilizar la información así obtenida para la ecuación original.

Ejercicio 1.77. ** LAS MATRICES 3×3 NO DIAGONALIZABLES CON VALORES PROPIOS REALES.

Calcular las soluciones de $\dot{X} = AX$, para las matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (1.193)$$

Como siempre, tratar de representar el espacio de fases y estudiar la estabilidad de los puntos críticos. ♠

Ejercicio 1.78. **

1. Si A es una matriz 2×2 no diagonalizable con un valor propio real doble λ , probar que

$$e^{At} = e^{\lambda t} (I + (A - \lambda I)t), \quad (1.194)$$

donde I es la matriz identidad 2×2 .

2. Calcular e^{At} para las matrices del ejercicio 1.76 usando (1.194).

1.7 Ecuaciones lineales a coeficientes constantes II

En esta sección vamos a completar el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales, con coeficientes constantes, en el plano discutiendo el caso que en que la matriz del sistema tiene valores propios complejos.

1.7.1 El caso con valores propios complejos: la forma canónica real

Consideraremos en esta sección el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1.195)$$

cuando la matriz $A \in M^{2 \times 2}(\mathbf{R})$ tiene valores propios complejos. Sobre el final estudiaremos algún caso con matrices 3×3 , pero nuestro objetivo principal será elucidar completamente el caso 2×2 . Recordemos que si una matriz A real tiene como valor propio $\lambda \in \mathbf{C}$ entonces también el conjugado $\bar{\lambda}$ de λ es un valor propio de A . Más aún, si v_λ es un vector propio de A —que necesariamente es un vector propio complejo tal que alguna de sus componentes tiene parte imaginaria no nula— entonces el vector \bar{v}_λ , que se obtiene conjugando cada una de las componentes de v_λ , es un vector propio asociado al valor propio $\bar{\lambda}$.

Ejemplo 1.7.1. Consideremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.196)$$

Su polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5,$$

que tiene raíces

$$\lambda = 1 \pm 2i.$$

Al calcular los vectores propios asociados a $\lambda = 1 + 2i$ vemos que son de la forma $\mu(2, 1 - i)$, donde μ es cualquier número complejo no nulo. Cuando calculamos los vectores propios que corresponden a $\lambda = 1 - 2i$ encontramos que son todos los de la forma

$$\mu(2, 1 + i), \quad \mu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Notemos que el vector $(2, 1 + i)$ es el que se obtiene conjugando cada una de las componentes de $(2, 1 - i)$. ♣

En general, si v es un vector en \mathbf{C}^2 , indicaremos con \bar{v} al vector conjugado de v , que se obtiene conjugando todas sus componentes. Con esta notación tenemos que

$$(2, 1 + i) = \overline{(2, 1 - i)}.$$

El resultado del ejemplo anterior es completamente general, y vale la pena enunciarlo como un lema.

Lema 1.4. *Sean A una matriz real $n \times n$, λ un valor propio de A y v_λ un vector propio asociado a λ . Entonces \bar{v}_λ es un vector propio asociado al valor propio $\bar{\lambda}$.*

PRUEBA. Para cualquier matriz A compleja indiquemos con \bar{A} la matriz que se obtiene conjugando todas sus componentes. Además, es trivial verificar que se satisfacen

$$\begin{aligned} \overline{Av} &= \bar{A}\bar{v}, & A &\in M^{n \times n}(\mathbf{C}), & v &\in \mathbf{C}^n, \\ \overline{\lambda v} &= \bar{\lambda}\bar{v}, & \lambda &\in \mathbf{C}, & v &\in \mathbf{C}^n. \end{aligned}$$

Naturalmente, para una matriz real tendremos $\bar{A} = A$, por lo tanto

$$\overline{Av_\lambda} = \bar{A}\bar{v}_\lambda = A\bar{v}_\lambda.$$

Por otra parte, como v_λ es vector propio con valor propio λ tenemos

$$\overline{Av_\lambda} = \overline{\lambda v_\lambda} = \bar{\lambda}\bar{v}_\lambda.$$

Juntando ambas igualdades concluimos que

$$A\bar{v}_\lambda = \bar{\lambda}\bar{v}_\lambda,$$

por lo que \bar{v}_λ es vector propio con valor propio $\bar{\lambda}$. \diamond

Corolario 1.5. *Si $A \in M^{2 \times 2}(\mathbf{R})$, λ es un valor propio con parte imaginaria no nula y v_λ un vector propio asociado a λ . Entonces $\{v_\lambda, \bar{v}_\lambda\}$ es una base de \mathbf{C}^2 formada por vectores propios de A y A es diagonalizable sobre \mathbf{C} .*

PRUEBA. Como λ tiene parte imaginaria no nula entonces $\lambda \neq \bar{\lambda}$. Por lo tanto v_λ y \bar{v}_λ son vectores propios asociados a valores propios distintos, de lo que se deduce que son linealmente independientes. En consecuencia, forman una base de \mathbf{C}^2 ya que este espacio vectorial tiene dimensión 2. La afirmación de que A es diagonalizable sobre \mathbf{C} es equivalente a la existencia de una base de \mathbf{C}^2 formada por vectores propios de A . \diamond

Notemos que el lema y el corolario simplifican un poco la tarea de buscar los vectores propios de una matriz real con autovalores complejos. Si hallamos los vectores propios correspondientes a λ no hace falta calcular el núcleo de $A - \bar{\lambda}I$ para determinar los de $\bar{\lambda}$, ya que es suficiente tomar los conjugados de los vectores propios con valor propio λ .

Observación 1.7.2. RESOLUCIÓN DIAGONALIZANDO SOBRE \mathbf{C}

Como acabamos de ver, cuando una matriz $A \in M^{2 \times 2}(\mathbf{R})$ tiene un valor propio complejo entonces es diagonalizable sobre \mathbf{C} . Esto permite resolver completamente la ecuación $\dot{X} = AX$ diagonalizando la matriz del sistema sobre los complejos, tal como señalamos en la observación 1.5.12, página 85. En el ejemplo 1.5.14 de esa observación aplicamos este método para calcular las soluciones del sistema que describe el comportamiento de una masa sujeta a un resorte, pero el procedimiento es completamente general.

Ejercicio 1.79. ** Calcular las soluciones del problema de Cauchy (1.195) con la matriz A que aparece en (1.196) usando las técnicas que conocemos para ecuaciones con matrices diagonalizables. ♠

El método de diagonalizar sobre el campo complejo que aparece en la observación anterior permite hallar las fórmulas de las soluciones de $\dot{X} = AX$, pero nos da poca o nula información acerca de la geometría de su plano de fases. Por esta razón vamos a buscar una forma canónica real para esta situación. Luego resolveremos completamente las ecuaciones en su forma canónica, estudiaremos el plano de fases correspondiente con detalle, y finalmente volveremos de la ecuación en la forma canónica a la ecuación original, tal como hicimos al tratar los casos con valores propios reales. La clave para este procedimiento es que las partes real e imaginaria de un vector propio v_λ de la matriz A forman una base de \mathbf{R}^2 en la que resulta conveniente expresar la ecuación $\dot{X} = AX$ para resolverla.

Si representamos con z al número complejo $a + ib$, donde a y b son números reales, entonces la *parte real* de z es

$$\Re z = a,$$

en tanto que su *parte imaginaria* es

$$\Im z = b.$$

Podemos extender estas nociones a los vectores de \mathbf{C}^2 . Para un vector

$$v = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$$

definimos su parte real como

$$\Re v = (\Re z_1, \Re z_2) \in \mathbf{R}^2, \quad (1.197)$$

cuyas componentes son las partes reales de z_1 y z_2 . La parte imaginaria de v es

$$\Im v = (\Im z_1, \Im z_2) \in \mathbf{R}^2. \quad (1.198)$$

Naturalmente, valen las expresiones

$$\begin{aligned} v &= \Re v + i\Im v, \\ \bar{v} &= \Re v - i\Im v \\ \Re v &= \frac{1}{2}(v + \bar{v}), \\ \Im v &= \frac{1}{2i}(v - \bar{v}), \end{aligned} \tag{1.199}$$

para cualquier $v \in \mathbf{C}^2$.

Ejemplo 1.7.3. Consideremos el vector $(2, 1 - i)$. Sus partes real e imaginaria son

$$\Re(2, 1 - i) = (2, 1), \quad \Im(2, 1 - i) = (0, -1),$$

respectivamente. Recordemos que $(2, 1 - i)$ es un vector propio asociado al valor propio $1 + 2i$ para la matriz del ejemplo 1.7.1, y observemos que sus partes real e imaginaria forman una base de \mathbf{R}^2 . ♣

Lema 1.6. *Sea A una matriz real 2×2 que tiene un valor propio λ con parte imaginaria no nula. Sea v_λ un vector propio asociado a λ . Entonces el conjunto*

$$\mathcal{B} = \{\Re v_\lambda, \Im v_\lambda\} \tag{1.200}$$

es una base de \mathbf{R}^2 .

PRUEBA. Comencemos por notar que \mathcal{B} está formada por vectores cuyas componentes son reales, de modo que $\mathcal{B} \subset \mathbf{R}^2$. Por otra parte, el par de vectores $\{v_\lambda, \bar{v}_\lambda\}$ es una base de \mathbf{C}^2 , y podemos expresar cada uno de ellos como una combinación lineal de los vectores de \mathcal{B} , tal como se indica en la primera y segunda fórmula de (1.199). Por lo tanto \mathcal{B} es un generador de \mathbf{C}^2 y, en definitiva, una base de este espacio. En particular la familia \mathcal{B} es linealmente independiente sobre \mathbf{C} . Esto implica la independencia lineal sobre \mathbf{R} , ya que $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Como el espacio vectorial \mathbf{R}^2 tiene dimensión 2 la familia \mathcal{B} es una base de \mathbf{R}^2 . ◇

Nuestro próximo paso será representar la acción de una matriz real 2×2 , a la que llamaremos A , con un valor propio

$$\lambda = a + ib, \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad b \neq 0,$$

en la base $\mathcal{B} = \{\Re v_\lambda, \Im v_\lambda\}$. Para ello calcularemos la acción de A sobre los vectores $\Re v_\lambda$ y $\Im v_\lambda$. Recordando la expresión para la parte real de un vector, y usando la linealidad de la operación de multiplicar por A tenemos

$$A(\Re v_\lambda) = A\left(\frac{v_\lambda + \bar{v}_\lambda}{2}\right) = \frac{1}{2}(Av_\lambda + A\bar{v}_\lambda).$$

Como A es real $A\bar{v}_\lambda = \overline{Av_\lambda}$, de modo que

$$A(\Re v_\lambda) = \frac{1}{2}(Av_\lambda + \overline{Av_\lambda}) = \Re(Av_\lambda).$$

Al tener en cuenta en esta última fórmula que v_λ es un vector propio de A con valor propio λ obtenemos

$$A(\Re v_\lambda) = \Re(\lambda v_\lambda)$$

Esta parte real es relativamente sencilla de calcular. Escribamos el número complejo λ y el vector v_λ en la forma

$$\lambda = a + ib, \quad v_\lambda = \Re v_\lambda + i\Im v_\lambda,$$

y hagamos la multiplicación. Entonces

$$\lambda v_\lambda = (a + ib)(\Re v_\lambda + i\Im v_\lambda) = (a\Re v_\lambda - b\Im v_\lambda) + i(b\Re v_\lambda + a\Im v_\lambda).$$

Por lo tanto

$$\Re(\lambda v_\lambda) = a\Re v_\lambda - b\Im v_\lambda.$$

En resumen, si escribimos $\lambda = a + ib$ la acción de A sobre el primer vector de la base \mathcal{B} se resume por

$$A(\Re v_\lambda) = a\Re v_\lambda - b\Im v_\lambda. \quad (1.201)$$

Ejercicio 1.80. * Mostrar que

$$A(\Im v_\lambda) = b\Re v_\lambda + a\Im v_\lambda. \quad (1.202)$$

Lás fórmulas (1.201) y (1.202) son lo que necesitamos para hallar la matriz asociada con A en la base \mathcal{B} . Su primera columna está formada por las coordenadas en la base \mathcal{B} del vector que resulta de multiplicar por A el primer vector de la base \mathcal{B} . Su segunda columna se obtiene haciendo la misma operación con el segundo vector de la base \mathcal{B} . Por lo tanto la matriz que corresponde a A en esta base, a la que llamaremos J , es

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (1.203)$$

Ejemplo 1.7.4. Consideremos una vez más la matriz A del ejemplo 1.7.1. Encontramos que $\lambda = 1 + 2i$ es un valor propio de esta matriz, y $(2, 1 - i)$ es un vector propio asociado con este valor propio. De acuerdo con la discusión que estamos presentando la matriz asociada con A en la base

$$\mathcal{B} = \{(2, 1), (0 - 1)\}$$

de \mathbf{R}^2 debería ser la que se obtiene sustituyendo a por 1 y b por 2 en la matriz (1.203). Verifiquemos esto calculando el resultado de multiplicar por A cada uno de los vectores de la base \mathcal{B} . Comencemos por el vector $(2, 1)$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el vector de las coordenadas de su transformado en la base \mathcal{B} es $(1, -2)$. Al hacer las cuentas para el vector $(0, -1)$ resulta

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

que da lugar al vector de coordenadas $(2, 1)$. Al colocar las coordenadas que acabamos de calcular como columnas de la matriz J obtenemos

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.204)$$

lo que está en completo acuerdo, para este caso particular, con (1.203).

Las matrices de cambio de base que permiten pasar de A a J y viceversa se calculan como siempre. Expresando los vectores de la nueva base \mathcal{B} en la base canónica \mathcal{C} de \mathbf{R}^2 obtenemos

$${}_C I_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En tanto que su inversa da la matriz de cambio de base ${}_B I_{\mathcal{C}}$, que resulta ser entonces

$${}_B I_{\mathcal{C}} = {}_C I_{\mathcal{B}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente

$$A = {}_C I_{\mathcal{B}} J {}_B I_{\mathcal{C}},$$

en tanto que para las matrices exponenciales tendremos

$$e^{At} = {}_C I_{\mathcal{B}} e^{Jt} {}_B I_{\mathcal{C}}.$$

Subrayemos una vez más que usando esta última expresión podemos hallar las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$, por medio del calculo de la matriz e^{Jt} que permite resolver la ecuación en su forma canónica $\dot{Y} = JY$. ♣

1.7.2 Resolución de la ecuación en su forma canónica

Tal como anotábamos al final del último ejemplo. los argumentos que hemos presentado hasta ahora muestran que la ecuación $\dot{X} = AX$, donde A es una matriz real 2×2 con un valor propio complejo $\lambda = a + ib$, siempre puede reducirse a la forma $\dot{Y} = JY$, con J de la forma (1.203). Debemos entonces estudiar el problema $\dot{Y} = JY$. Tomemos entonces una matriz

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (1.205)$$

y calculemos e^{Jt} . Es decir, resolvamos el sistema $\dot{Y} = JY$.

Ejemplo 1.7.5. Ya hemos estudiado el caso en que $a = 0$, cuando tratamos los sistemas con matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.206)$$

Esta matriz corresponde al caso particular $a = 0$, $b = \omega$, de (1.203). Recordemos que en esta situación se tiene

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}. \quad (1.207)$$

En el curso de esta sección vamos a derivar nuevamente este resultado. ♣

El cálculo en el campo complejo \mathbf{C}

Vamos a resolver la ecuación $\dot{Y} = JY$ utilizando el hecho de que podemos identificar \mathbf{R}^2 con \mathbf{C} de la manera canónica, por medio de la correspondencia

$$Y = (x, y) \mapsto x + iy = z.$$

Escojamos $\lambda = a - ib$. Mostraremos a continuación que la ecuación diferencial en \mathbf{C}

$$\dot{z} = \lambda z$$

es completamente equivalente a

$$\dot{Y} = JY.$$

Para ello escribamos la ecuación compleja haciendo explícitas sus partes real e imaginaria. Obtenemos

$$\dot{x} + i\dot{y} = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay),$$

que es equivalente al par de ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - by, \\ \dot{y} &= bx + ay. \end{aligned}$$

Este sistema no es otra cosa que la ecuación $\dot{Y} = JY$ en \mathbf{R}^2 .

Observación 1.7.6. Los cálculos que estamos haciendo están relacionados con el hecho de que multiplicar por la matriz J en \mathbf{R}^2 tiene el mismo efecto que multiplicar por en \mathbf{C} por el número complejo $\lambda = a - ib$. ♠

Por lo tanto, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{Y} = JY, \\ Y(0) = (x_0, y_0), \end{cases}$$

en \mathbf{R}^2 es completamente equivalente a

$$\begin{cases} \dot{z} = \lambda z, \\ z(0) = x_0 + iy_0, \end{cases}$$

Ya aprendimos como resolver este último problema en el ejemplo 1.5.13 de la página 85, y su solución es

$$z(t) = (x_0 + iy_0)e^{\lambda t}.$$

Si recordamos que $\lambda = a - ib$ y la definición de la exponencial compleja vemos que $z(t)$ también puede escribirse como

$$x(t) + iy(t) = e^{at}(x_0 + iy_0)(\cos bt - i \sin bt).$$

Al hacer los cálculos que aparecen indicados en esta fórmula resulta

$$x(t) + iy(t) = e^{at}((x_0 \cos bt + y_0 \sin bt) + i(-x_0 \sin bt + y_0 \cos bt)).$$

La igualdad entre estos números complejos es equivalente a la igualdad entre sus partes reales e imaginarias, que puede ser escrita matricialmente como

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Esta expresión matricial para las soluciones $(x(t), y(t))$ del problema de valores iniciales para la ecuación $\dot{Y} = JY$ implica que

$$e^{Jt} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}. \quad (1.208)$$

Observación 1.7.7. LA ACCIÓN DE LA MATRIZ e^{Jt}

En esta observación estudiaremos el efecto de la matriz (1.208) al multiplicarla por vectores de \mathbf{R}^2 . Facilita esta interpretación geométrica recordar que su acción sobre \mathbf{R}^2 es la misma que la de multiplicar por $e^{(a-ib)t}$ en \mathbf{C} . El complejo $e^{(a-ib)t}$ tiene módulo e^{at} y argumento $-bt$, por lo tanto al multiplicarlo por cualquier otro número complejo produce una dilatación de factor e^{at} en su módulo, y un giro en sentido directo (antihorario) de ángulo $-bt$.

Vamos a ver ahora este efecto a partir de la fórmula (1.208). Notemos en primer lugar que el factor e^{at} produce una dilatación o contracción de los vectores (según que at sea mayor o menor que 0) por un factor e^{at} . La matriz cuyas entradas son los senos y cosenos es la matriz de una rotación en el plano. Para justificar esta última afirmación calculemos la matriz asociada con esta transformación en \mathbf{R}^2 . Supongamos que aplicamos un giro G de ángulo θ , donde estamos midiendo el ángulo en sentido directo (antihorario). Su efecto aparece en la figura 1.30. Las imágenes de los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$

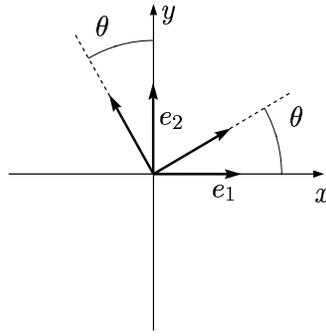


Figura 1.30: la acción de un giro en el plano (x, y)

de la base canónica de \mathbf{R}^2 por esta transformación son

$$\begin{aligned} Ge_1 &= (\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \\ Ge_2 &= (-\sin \theta, \cos \theta) = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2. \end{aligned}$$

Estas expresiones permiten calcular la matriz de G respecto a la base canónica, “colgando” las coordenadas de Ge_1 y Ge_2 como columnas de la matriz. Tenemos entonces que esta matriz es

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Una vez que hemos identificado que las matrices de esta forma representan un giro en el plano estamos en condiciones de comprender completamente el efecto de (1.208): produce un giro en el plano de ángulo $-bt$ (estamos midiendo los ángulo en sentido directo, de modo que esto es equivalente a decir que tenemos un giro de ángulo bt en sentido horario), acompañado de una multiplicación por un factor e^{at} . El efecto preciso de la combinación de estas dos cosas depende de los valores de a y b , esencialmente de sus signos. ♠

Resolución de la forma canónica pasando a coordenadas polares

La observación 1.7.7 de la sección anterior sugiere que las coordenadas polares (r, θ) son un buen sistema de referencia para estudiar la ecuación $\dot{Y} = JY$, donde J es la matriz (1.205), con a y b dos números reales. Esto es así porque el flujo asociado con la ecuación, cuyo efecto está dado por la matriz exponencial e^{Jt} , produce un giro en el plano acompañado de una rotación, y estas dos operaciones admiten expresiones analíticas muy sencillas cuando se trabaja en coordenadas polares.

Observación 1.7.8. Aunque hemos utilizado los resultados de la última sección como motivación para introducir el cambio a coordenadas polares, los cálculos que haremos a continuación son completamente independientes de lo que hicimos antes. Por lo tanto, el pasaje a coordenadas polares es otra técnica diferente para calcular la exponencial e^{Jt} , que no requiere operar en el campo complejo. ♠

Escribamos $Y = (u, v)$, entonces la ecuación en \mathbf{R}^2 que estamos tratando es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}\dot{u} &= au + bv, \\ \dot{v} &= -bu + av.\end{aligned}$$

Al introducir coordenadas polares

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta,$$

y expresar las ecuaciones en estas coordenadas obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar, \\ \dot{\theta} &= -b.\end{aligned}\tag{1.209}$$

Ya hemos discutido como hacer el pasaje a coordenadas polares, de modo que en esta ocasión omitiremos los detalles correspondientes al cambio de coordenadas que acabamos de realizar. Si expresamos la condición inicial $Y_0 = (u_0, v_0)$ como

$$u_0 = r_0 \cos \theta, \quad v_0 = r_0 \sin \theta,$$

y resolvemos (1.209) con dato inicial $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0$ obtenemos las soluciones

$$\begin{aligned}r(t) &= e^{at} r_0, \\ \theta(t) &= \theta_0 - bt.\end{aligned}\tag{1.210}$$

A los efectos del cálculo de la matriz exponencial solo nos interesan los vectores

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1)$$

de la base canónica de \mathbf{R}^2 . Ambos tienen coordenada radial $r = 1$. El argumento de e_1 es $\theta = 0$, y el de e_2 es $\theta = \pi/2$.

Podemos volver a las coordenadas cartesianas (u, v) y utilizar las fórmulas (1.210) para hallar $Y(t) = (u(t), v(t))$. Esto da lugar a

$$\begin{aligned}u(t) &= e^{at} r_0 \cos(\theta_0 - bt), \\ v(t) &= e^{at} r_0 \sin(\theta_0 - bt).\end{aligned}$$

Al aplicar esta fórmula para los vectores de la base canónica, obtenemos que las soluciones $E_i(t)$ de la ecuación, con dato inicial $E_i(0) = e_i$, son

$$\begin{aligned}E_1(t) &= e^{at} (\cos bt, -\sin bt), \\ E_2(t) &= e^{at} (\sin bt, \cos bt).\end{aligned}$$

Estas soluciones son justamente las columnas de la matriz exponencial, por lo que hemos encontrado nuevamente la expresión (1.208) para e^{Jt} .

Para finalizar, observemos que cuando escogemos los valores $a = 0$ y $b = \omega$ que corresponden a la ecuación del oscilador simple, obtenemos nuevamente la matriz (1.207).

Ejercicio 1.81. * Realizar las verificaciones necesarias para asegurarnos de que hemos calculado bien la exponencial e^{Jt} :

1. evaluar la matriz (1.208) en $t = 0$ y comprobar que se obtiene la matriz identidad;
2. derivarla respecto al tiempo y ver que se satisface

$$\frac{de^{Jt}}{dt} = Je^{Jt}.$$

Ejercicio 1.82. * Comprobar que la matriz e^{Jt} satisface todas las propiedades que se enuncian en el ejercicio 1.34, página 50. \heartsuit

El cálculo de e^{Jt} nos permite resolver completamente la ecuación $\dot{Y} = JY$. También nos permite resolver cualquier ecuación $\dot{X} = AX$, cuya matriz sea semejante a una matriz J de la forma (1.205). Mostramos a continuación un ejemplo de esto.

Ejemplo 1.7.9. Vamos a calcular las soluciones del problema $\dot{X} = AX$, $X(0) = X_0$, donde A es la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

del ejemplo 1.7.1. En el ejemplo 1.7.4 mostramos que era semejante a una matriz J de la forma (1.205), con $a = 1$ y $b = 2$. Calculamos también las matrices de cambio de base ${}_C I_B$ e ${}_B I_C$ que hacen

$$A = {}_C I_B J {}_B I_C.$$

Utilizando estas matrices podemos calcular e^{At} , para ello no hay más que sustituir en

$$e^{At} = {}_C I_B e^{Jt} {}_B I_C$$

cada matriz del miembro de la derecha por su forma explícita y hacer las cuentas. Tenemos entonces

$$e^{At} = \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Realizando los productos entre matrices que quedaron indicados en la fórmula anterior concluimos que la solución de $\dot{X} = AX$, con dato $X(0) = X_0$ es

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t & -2 \sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} X_0.$$

Ejercicio 1.83. * Verificar que $\dot{x}(t) = AX(t)$ y que $X(0) = X_0$.

Es posible hacer la representación del plano de fases asociado con la ecuación a partir de la fórmula de sus soluciones, pero preferimos posponer este punto hasta presentar una discusión general basada en el estudio de los planos de fase asociados a las ecuaciones en su forma canónica. ♣

1.7.3 El plano de fases asociado a la forma canónica

Discutamos ahora el comportamiento de las soluciones a partir de su expresión en coordenadas polares, dada por (1.210). Comenzaremos por el caso $a > 0$, $b > 0$; los otros casos se tratan de manera análoga. Por cierto, llegaremos al mismo tipo de conclusiones que esbozamos en la observación 1.7.7.

Supongamos $r_0 > 0$. El caso $r_0 = 0$ corresponde al origen, que es un punto crítico, y cae fuera de la región de validez del cambio a coordenadas polares. Cuando $a > 0$ la coordenada r (distancia al origen) crece exponencialmente, de modo que la solución se va alejando del origen. Además

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = +\infty.$$

La coordenada angular $\theta(t)$ va disminuyendo, lo que significa que la solución está girando alrededor del origen en sentido horario. Notemos que cada vez que t aumenta en $2\pi/b$ unidades damos una vuelta completa alrededor del origen. Esto implica que la solución da infinitas vueltas alrededor del origen cuando t varía en $(-\infty, \infty)$. A medida que t crece va “desenrollándose” desde el origen en sentido horario. Naturalmente, en este caso $a > 0$, el origen es inestable. Más aún, repele todas las soluciones.

Repitiendo los argumentos que acabamos de hacer para el caso $a > 0$, $b > 0$ pueden estudiarse todos los valores posibles para a y b . Sólo consideraremos los casos en que $b \neq 0$, que corresponden a la existencia de autovalores con parte imaginaria no nula.

A continuación presentamos un resumen de la discusión acerca del comportamiento de las soluciones de $\dot{Y} = JY$, donde J es la matriz

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

En la figura 1.31 hemos incluido algunos de los diagramas de fase.

- $a > 0$, $b > 0$. Este es el caso que ya analizamos, y vimos que todas las soluciones se alejan del origen girando en sentido horario. El origen O es un punto crítico inestable y repulsor, en el sentido de que *todas* las soluciones se alejan de él. Además todas las soluciones escapan al infinito.

- $a > 0, b < 0$. El comportamiento es idéntico al del caso anterior, salvo por el sentido en el que las soluciones giran alrededor del origen que ahora es antihorario. El origen también es inestable y repulsor.
- $a = 0, b > 0$. En esta situación la distancia de las soluciones al origen permanece constante y son todas periódicas. Se trata entonces de soluciones periódicas que se mueven en sentido horario sobre circunferencias centradas en O . El origen es un punto crítico estable pero no asintóticamente estable.
- $a = 0, b < 0$. En este caso las órbitas giran en sentido antihorario. Todas las demás características de su comportamiento son idénticas a las del caso anterior.
- $a < 0, b > 0$. En esta situación el origen es asintóticamente estable. Más aún, todas las soluciones tienden a O cuando $t \rightarrow +\infty$. Las soluciones se “enrollan” en O girando en sentido horario.
- $a < 0, b < 0$. Es igual que el caso $a < 0, b > 0$, pero ahora las soluciones se “enrollan” en el origen en sentido antihorario.

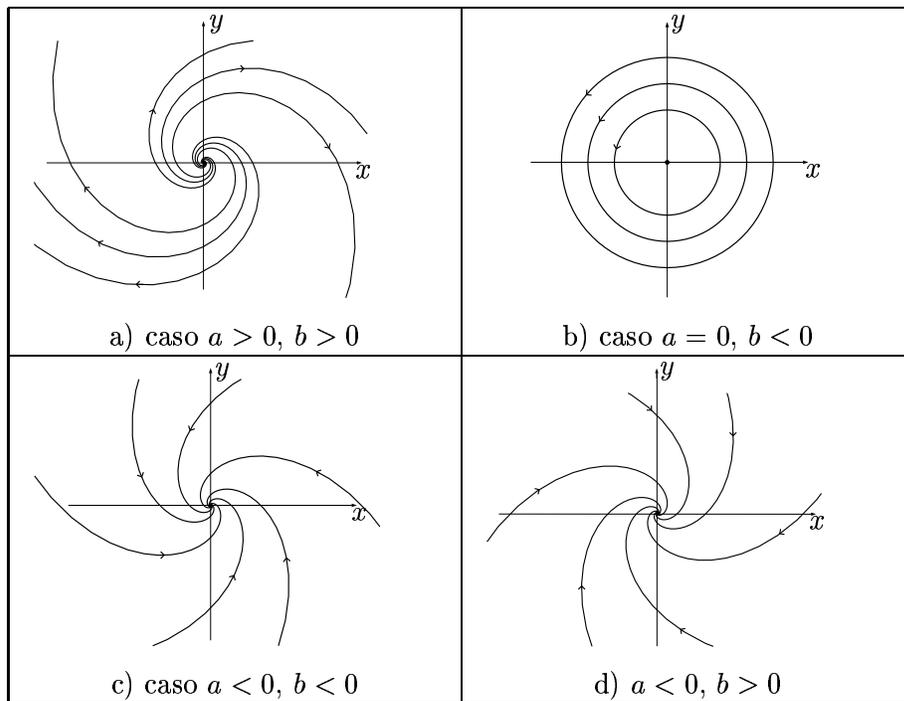


Figura 1.31: diagramas de formas canónicas con autovalores complejos

Ejercicio 1.84. * Verificar que la discusión que acabamos de presentar es correcta analizando detalladamente cada caso, y hacer los dibujos que no aparecen en la figura 1.31.

1.7.4 Resolución del problema original

Tal como hicimos en los casos anteriores, una vez que hemos comprendido cómo es el aspecto del plano de fases para la ecuación en su forma canónica utilizaremos la información disponible para volver al problema original.

Ejemplo 1.7.10. Completaremos el estudio de la ecuación $\dot{X} = AX$, para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

que introdujimos en el ejemplo 1.7.1. Ya vimos que la forma canónica asociada

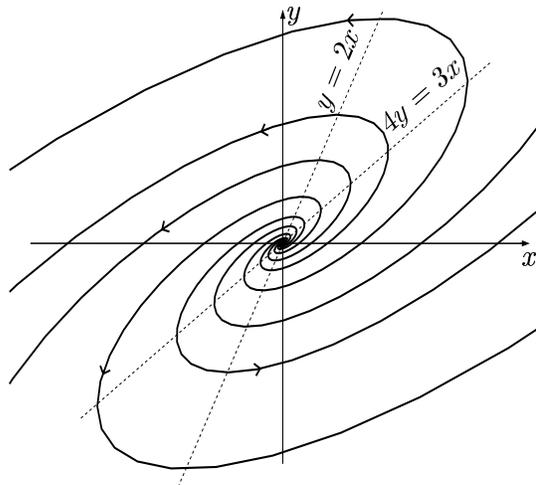


Figura 1.32: el diagrama correspondiente a $\dot{X} = AX$

con esta matriz es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

y se obtiene en la base

$$\mathcal{B} = \{(2, 1), (0, -1)\}.$$

Las soluciones de $\dot{Y} = JY$ se alejan del origen O del plano (u, v) y escapan hacia el infinito cuando $t \uparrow +\infty$ girando en sentido horario. El diagrama de fases de la ecuación en su forma canónica es el que aparece en el caso a) de la figura 1.31. El origen es inestable para este sistema. Naturalmente, las soluciones de la ecuación diferencial $\dot{X} = AX$ también escapan hacia

el infinito cuando t crece, y el origen también es un punto crítico inestable para esta ecuación. Sin embargo, las soluciones giran en sentido *antihorario* a medida que t crece. La razón es que el cambio de coordenadas que permite pasar de la ecuación $\dot{X} = AX$ a $\dot{Y} = JY$ invierte la orientación del plano. En efecto, al calcular los determinantes de las matrices de cambio de base correspondientes a este cambio encontramos que son negativos. Otra manera de ver esto es analizar las orientaciones de la base canónica y la base \mathcal{B} de \mathbf{R}^2 . Observemos en primer lugar que el sentido antihorario es el que hay que seguir para pasar del vector $(1, 0)$ del plano (u, v) al $(0, 1)$ haciendo el giro con menor ángulo posible. En nuestro cambio de coordenadas a los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ del plano (u, v) les corresponden los vectores $(2, 1)$ y $(0, -1)$ del plano (x, y) , respectivamente. Notemos ahora que, tal como se ilustra en la figura 1.33, para pasar del $(2, 1)$ al $(0, -1)$ hay que seguir el sentido horario, de modo que

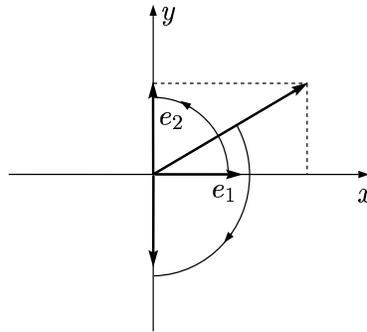


Figura 1.33: la base \mathcal{B} y el cambio de orientación en el plano

hemos invertido el sentido de giro con nuestro cambio de coordenadas.

La discusión que acabamos de presentar es suficiente para representar el diagrama de fases de $\dot{X} = AX$, pero es conveniente complementarla con el análisis de los signos de \dot{x} y \dot{y} en el plano (x, y) . La coordenada $x(t)$ de la solución $X(t)$ crece mientras $X(t)$ está en el semiplano $3x > 4y$, y decrece en $3x < 4y$. Los vectores tangentes a las soluciones sobre los puntos de la recta $3x = 4y$ son verticales, porque allí se tiene que $\dot{x} = 0$. Análogamente, \dot{y} es positivo en $2x > y$, negativo en $2x < y$ y se anula sobre la recta que separa estos dos semiplanos. Teniendo en cuenta estos elementos es posible dibujar con bastante precisión el plano de fases asociado con $\dot{X} = AX$ (ver la figura 1.32).

Observación 1.7.11. Para identificar a grandes rasgos el diagrama de fases de una ecuación lineal cuya matriz tiene autovalores complejos muchas veces es suficiente con determinar sus valores propios $a \pm ib$ y hacer un somero análisis

del signo de \dot{x} y \dot{y} . Esto es así porque sabemos que cuando $b \neq 0$ las soluciones de la ecuación dan vueltas alrededor del origen O . Sabemos además que se escapan al infinito, tienden a 0, o son periódicas según que a sea mayor, menor o igual que 0. Podemos saber si las soluciones dan vueltas en sentido horario o antihorario examinando el signo de \dot{x} y \dot{y} en alguna región del plano. Con esto habremos completado la determinación de los detalles “más gruesos” del diagrama de fases correspondiente a la ecuación. ♠

La matriz A de este ejemplo tiene los valores propios complejos $1 + 2i$ y $1 - 2i$. Si revisamos la manera en que hemos resuelto $\dot{X} = AX$ a lo largo de esta sección encontraremos que hemos “privilegiado” el valor $1 + 2i$ al decidir que $\lambda = 1 + 2i$ y $\bar{\lambda} = 1 - 2i$. Por supuesto que esta elección es completamente arbitraria, por lo que nos proponemos explorar que ocurre al fijar $\lambda = 1 - 2i$ y resolver la ecuación a partir de esta elección.

Ejercicio 1.85. * Resolver $\dot{X} = AX$ escogiendo $\lambda = 1 - 2i$. Utilizar un vector propio v_λ asociado a este valor propio para hallar la forma canónica J que corresponde a A en la base $\{\Re v_\lambda, \Im v_\lambda\}$. Resolver completamente la ecuación y estudiar su plano de fases. ¿Qué diferencias aparecen respecto a la resolución que hemos presentado antes? ♣

Hemos visto que el tipo de estabilidad del origen O sólo depende del valor de a , la parte real del valor propio λ . En resumen, si A es una matriz 2×2 que tiene valores propios complejos λ y $\bar{\lambda}$ la estabilidad del origen O es la siguiente:

$\Re\lambda < 0$	asintóticamente estable
$\Re\lambda = 0$	estable, pero no asintóticamente estable
$\Re\lambda > 0$	inestable

Ejercicio 1.86. * Considerar las ecuaciones $\dot{X} = AX$, con matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En cada caso determinar la estabilidad del origen O . Resolver completamente las ecuaciones y representar detalladamente su plano de fases.

Ejercicio 1.87. ** Retomar el estudio del sistema

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -\beta \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

al que redujimos la ecuación $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$ del oscilador amortiguado en el ejercicio 1.55, página 84. Completar su estudio para todos los valores positivos de las constantes ω y β . Representar los planos de fases correspondientes y analizar la estabilidad del origen. Interpretar los resultados encontrados describiendo el comportamiento del oscilador en cada caso.

No es difícil generalizar lo que acabamos de hacer para el caso de matrices 3×3 con un autovalor complejo λ tal que $\Im \lambda \neq 0$. En este caso las matrices necesariamente se diagonalizan sobre el campo complejo, porque necesariamente tienen tres autovalores diferentes: λ , $\bar{\lambda}$ y un tercer valor propio real.

Ejercicio 1.88. ** MATRICES 3×3 CON UN VALOR PROPIO COMPLEJO

1. Mostrar que una ecuación $\dot{X} = AX$, donde $A \in M^{3 \times 3}(\mathbf{R})$ que tiene un valor propio complejo $\lambda = a + ib$ con $b \neq 0$, puede reducirse mediante un cambio de coordenadas adecuado a una ecuación de la forma $\dot{Y} = BY$, donde

$$B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (1.211)$$

y λ_1 es un autovalor real de A . Discutir la estabilidad del origen según los valores de a , b y λ_1 .

2. Resolver el sistema $\dot{X} = AX$ y estudiar la estabilidad del origen para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.212)$$

Representar tan detalladamente como sea posible el espacio de fases correspondiente a esta ecuación.

En esta sección hemos completado el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales en el plano. Por lo tanto, para cualquier matriz $A \in M^{2 \times 2}(\mathbf{R})$ sabemos como calcular su exponencial e^{At} . El siguiente ejercicio está destinado a demostrar algunas propiedades de la exponencial para matrices 2×2 . En realidad las propiedades valen para matrices cuadradas cualesquiera, pero probaremos esto recién en el capítulo 3, una vez que hayamos desarrollado una teoría general para las ecuaciones diferenciales.

Ejercicio 1.89. Sea A una matriz real 2×2 . Demostrar que la exponencial e^{At} satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} e^{A(t+s)} &= e^{At} e^{As}, & s, t \in \mathbf{R}, \\ e^{At} e^{As} &= e^{As} e^{At}, & s, t \in \mathbf{R}, \\ (e^{At})^{-1} &= e^{-At}, & t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Sugerencia: ya hemos demostrado estas propiedades, en los ejercicios 1.34, página 50, y 1.82, página 118, cuando la matriz A adopta alguna de las tres formas canónicas que hemos empleado para resolver las ecuaciones diferenciales lineales. Para tratar el caso general usar que e^{At} es semejante a la exponencial e^{Jt} , donde J es una matriz que tiene una de las formas canónicas.

1.7.5 Algunos comentarios finales sobre la estabilidad e inestabilidad del origen.

Si revisamos todo el estudio de las ecuaciones $\dot{X} = AX$ en el plano, donde A es una matriz real 2×2 encontraremos que el origen O es inestable cuando hay algún valor propio positivo o con parte real positiva, en tanto que es asintóticamente estable si todos los valores propios son negativos o tienen parte real negativa. Esto es un caso particular del siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Consideremos la ecuación lineal $\dot{X} = AX$ en \mathbf{R}^n . Si todos los valores propios de A tienen parte real negativa entonces el origen es un punto crítico asintóticamente estable. Si algún valor propio tiene parte real positiva el origen es inestable.*

El caso en que hay valores propios nulos, o con parte real 0 es algo más delicado y requiere un estudio más detallado de cada caso. Por supuesto que es posible determinar el tipo de estabilidad del origen cuando se trata de ecuaciones lineales, tal como lo hicimos en todos los casos con matrices $A \in M^{2 \times 2}(\mathbf{R})$ en que apareció un valor propio con parte real nula. Recordemos que en los ejemplos que tratamos aparecían algunas situaciones con comportamiento inestable y otras con comportamiento estable.

Para cerrar esta sección mencionemos que cuando no hay valores propios con parte real nula el tipo de estabilidad del origen no cambia si perturbamos ligeramente la ecuación $\dot{X} = AX$. Esto no es cierto cuando algún valor propio es 0 o imaginario puro, porque cualquier perturbación del sistema puede modificar el tipo de estabilidad de O . Volveremos sobre estas cuestiones en las secciones destinadas a presentar un estudio de la estabilidad de los puntos críticos de las ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x)$, en las que $f(x)$ no será, en general, una función lineal.

1.8 Resolución explícita de algunas ecuaciones diferenciales

Es importante notar que en las secciones anteriores hemos podido construir soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias exclusivamente en casos muy simples. En realidad, sólo tenemos procedimientos sistemáticos para calcular las soluciones de las ecuaciones lineales $\dot{X} = AX$ y de las ecuaciones autónomas, de la forma $\dot{x} = f(x)$, en \mathbf{R} .

En esta sección presentaremos algunos métodos que nos permitirán hallar soluciones de otras ecuaciones diferenciales, entre ellas las ecuaciones lineales no homogéneas, o forzadas, de la forma $\dot{X} = AX + B(t)$, donde $B(t)$ es un vector que depende del tiempo. En estas ecuaciones el tiempo t aparece explícitamente en el miembro de la derecha. Como esta situación surge corrientemente al modelar diversos fenómenos por medio de ecuaciones diferenciales extenderemos nuestra teoría para incluir las ecuaciones de la forma $\dot{x} = f(x, t)$. El primer paso será introducir una noción de solución dando la definición correspondiente.

Definición 1.7. SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Supongamos que f es una función continua definida en un abierto $Q \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Diremos que $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$, definida sobre un intervalo abierto $I \subset \mathbf{R}$, es una solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, t)$$

si la igualdad

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \tag{1.213}$$

se satisface para todo t en el intervalo I .

Observemos que esta definición no es mucho más que una generalización obvia de la que dimos para ecuaciones diferenciales autónomas. Algunos comentarios se imponen:

1. si $x(t)$ es una solución de la ecuación entonces para todo $t \in I$ la pareja $(x(t), t)$ debe pertenecer al conjunto Q en que la ecuación diferencial está definida. Si no fuera así entonces el miembro de la derecha de (1.213) ni siquiera estaría definido y esa igualdad no tendría sentido.
2. Por la misma razón, la definición implica que una solución $x(t)$ debe ser una función derivable.
3. Una vez que sabemos que $x(t)$ es derivable, resulta ser continua. Como estamos asumiendo que f también lo es entonces $f(x(t), t)$ es una función continua de t . En consecuencia la derivada $\dot{x}(t)$ es continua y $x(t)$ es de clase C^1 .

Observación 1.8.1. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA EN EL CASO $n = 1$

La interpretación geométrica de las soluciones de la ecuación $\dot{x} = f(x, t)$ en dimensión $n = 1$ coincide con la que se dió en la observación 1.1.2 para las ecuaciones autónomas. La única diferencia es que la pendiente de la solución $x(t)$ es ahora el valor $f(x(t), t)$ que depende del valor de t , a diferencia de lo que ocurre para las ecuaciones autónomas en que sólo depende de $x(t)$. Recomendamos ver los dibujos en los ejemplos 1.8.2 y 1.8.7 de esta misma sección. ♠

Aunque el fin principal de esta sección es desarrollar algunas técnicas de cálculo y resolver una serie de ecuaciones, vale la pena mencionar que no siempre es posible hallar un fórmula explícita para las soluciones de una ecuación diferencial. De hecho, hay ecuaciones diferenciales cuyas soluciones no pueden expresarse en términos de fórmulas cerradas que involucren una combinación de funciones elementales. Hay casos en que es posible hallar tales fórmulas, pero luego puede ser trabajoso determinar las propiedades de las soluciones a partir de ellas. En este sentido es interesante subrayar que, en general, el objetivo del estudio de una ecuación diferencial es conocer algunas propiedades de sus soluciones, y aunque una fórmula puede ser una herramienta útil para determinarlas no constituye casi nunca un fin en sí misma ni nuestro principal interés. Puede ocurrir perfectamente que sea más fácil obtener la información que se quiere por otros medios, como el análisis cualitativo de la ecuación, o su estudio numérico. En la sección 1.9 comenzaremos el desarrollo sistemático de una teoría de existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones diferenciales, y extenderemos estos comentarios acerca de adoptar un punto de vista más cualitativo para nuestra teoría, que será el que desarrollaremos en el capítulo 3 de este texto.

Lo dicho hasta ahora no debe hacernos despreciar la posibilidad de encontrar soluciones explícitas. Si es factible construirlas mejor que mejor. En muchos casos son de gran ayuda así que las buscaremos cuando se pueda¹⁰, y, en particular, dedicaremos toda esta sección a hacerlo. Primero estudiaremos las ecuaciones lineales no homogéneas, y luego presentaremos una serie de ejercicios en los que se busca calcular explícitamente las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales.

1.8.1 Ecuaciones lineales no homogéneas con matriz constante

Llamaremos así a las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{X} = AX + B(t),$$

¹⁰vale la pena mencionar que, además de la habilidad propia para calcular, para esta tarea son de utilidad los programas de computadora para cálculo simbólico que tienen incorporadas subrutinas capaces de resolver en forma exacta ecuaciones diferenciales

donde $A \in M^{n \times n}(\mathbf{R})$ y $B : J \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una función vectorial continua, que supondremos definida sobre un intervalo abierto J contenido en la recta real \mathbf{R} . Naturalmente, cuando B es idénticamente nulo estas ecuaciones se reducen a una ecuación lineal homogénea con matriz constante, de la forma

$$\dot{X} = AX,$$

como las que estudiamos en las secciones 1.6 y 1.7, y que sabemos resolver completamente (al menos en los casos $n = 1$ y $n = 2$). Mostraremos en esta sección que el conocimiento de las soluciones de las ecuaciones homogéneas permite resolver completamente las no homogéneas. Comenzaremos con un ejemplo en dimensión 1.

Ejemplo 1.8.2. En este ejemplo calcularemos las soluciones del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = x + te^t, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.214)$$

para t_0 y x_0 reales cualesquiera.

Antes de empezar a calcular dibujaremos el campo de pendientes asociado con la ecuación. Los gráficos de las soluciones deben ser tangentes a este campo de pendientes en cada punto del plano (t, x) .

Para calcular las soluciones utilizaremos una técnica conocida como *método de variación de constantes*. Éste consiste en considerar la parte homogénea de la ecuación diferencial en (1.214), es decir la ecuación lineal

$$\dot{x} = x,$$

cuyas soluciones son de la forma ye^t , donde y representa una constante real cualquiera. Luego buscamos soluciones de la forma

$$x(t) = y(t)e^t \quad (1.215)$$

para el problema de valores iniciales (1.214). En esta expresión hemos sustituido la constante y por una función de t que tendremos que determinar. Esta operación es la que da el nombre al método.

Debemos imponer ahora que (1.215) sea una solución del problema. Busquemos primero las condiciones para que satisfaga la ecuación diferencial. Tenemos

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t)e^t + y(t)e^t.$$

El miembro de la derecha de la ecuación es

$$x(t) + te^t = y(t)e^t + te^t.$$

Al igualar y hacer una cancelación obvia obtenemos

$$\dot{y}(t)e^t = te^t.$$

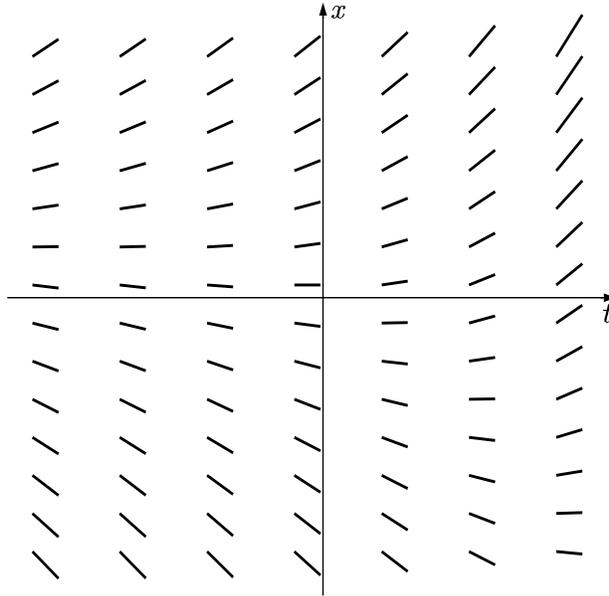


Figura 1.34: el campo vectorial asociado con la ecuación del problema (1.214)

Notemos que la simplificación que obtuvimos fue posible porque el factor e^t que aparece en $x(t)$ es una solución de la ecuación $\dot{x} = x$. Un paso más en nuestros cálculos nos da

$$\dot{y}(t) = t.$$

Ahora podemos calcular $y(t)$ por medio de una integración. Es aquí donde entrarán en juego las condiciones iniciales. Como queremos que se satisfaga $x(t_0) = x_0$ debemos imponer

$$y(t_0) = e^{-t_0} x_0.$$

Por lo tanto la función $y(t)$ que estamos buscando es

$$y(t) = e^{-t_0} x_0 + \int_{t_0}^t s \, ds = e^{-t_0} x_0 + \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2).$$

Al sustituir en la fórmula (1.215) obtenemos

$$x(t) = e^{t-t_0} x_0 + \frac{e^t}{2}(t^2 - t_0^2).$$

Verificar que $x(t)$ es efectivamente una solución del problema es sólo un par de cálculos directos que omitiremos. En la figura 1.35 graficamos algunas

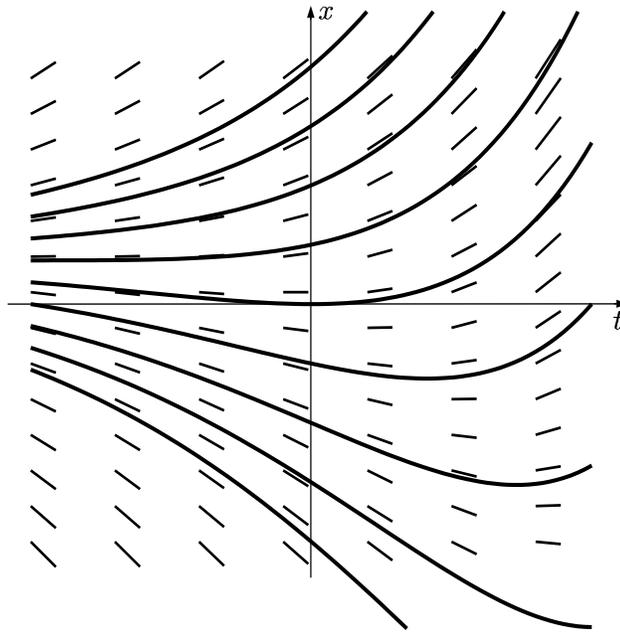


Figura 1.35: el campo de pendientes y algunas soluciones del problema (1.214)

soluciones del problema (1.214). Observar que, a diferencia de lo que pasaba para las ecuaciones autónomas, si trasladamos horizontalmente el gráfico de una solución no volvemos a obtener una solución. ¿Por qué? ♣

Ejercicio 1.90. * Hallar las soluciones de la ecuación $\dot{x} = -bx + \sin t$, donde b es una constante positiva, con condición inicial $x(t_0) = x_0$. Discutir el efecto de la constante b sobre las soluciones. ¿A qué se aproxima el comportamiento de las soluciones cuando $t \rightarrow +\infty$?

Ejercicio 1.91. * El método de variación de constantes permite derivar una fórmula general para resolver cualquier problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

a partir de las soluciones de la ecuación lineal $\dot{x} = ax$. Mostrar que la solución del problema es

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{t-s} b(s) ds.$$

Observación 1.8.3. Los problemas de valores iniciales para ecuaciones lineales no homogéneas pueden resolverse completamente buscando en primer lugar *una* solución particular cualquiera. En general esta solución particular no va a

satisfacer las condiciones iniciales, pero esto se arregla sumando una solución de la ecuación homogénea que ajuste las condiciones iniciales. Puede usarse este procedimiento porque la suma de una solución cualquiera de la ecuación no homogénea con una solución cualquiera de la homogénea produce una solución de la ecuación no homogénea. Esto es completamente general y vale en cualquier dimensión. En efecto, supongamos que tenemos una solución $X_h(t)$ de la ecuación homogénea, y una $X_{nh}(t)$ de la no homogénea. Por lo tanto se satisfacen

$$\begin{aligned}\dot{X}_h &= AX_h, \\ \dot{X}_{nh} &= AX_{nh} + B.\end{aligned}$$

Entonces su suma $Y = X_h + X_{nh}$ verifica

$$\dot{Y} = \dot{X}_h + \dot{X}_{nh} = AX_h + AX_{nh} + B = A(X_h + X_{nh}) + B = AY + B.$$

En algunos casos este procedimiento es mucho más simple de utilizar, porque puede evitar calcular las integrales que produce el método de variación de constantes. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.8.4. Hallar la solución de $\dot{x} = x + t$ que satisface $x(1) = 2$. Es fácil conjeturar que en este caso puede haber soluciones particulares de la forma

$$y(t) = at + b.$$

Tratemos de determinar las constantes a y b para obtener una solución de este tipo. Al sustituir en la ecuación diferencial tenemos

$$a = at + b + t,$$

de modo que debe ser $a = b = -1$. Efectivamente $y(t) = -1 - t$ es una solución de la ecuación diferencial que satisface $y(1) = -2$. Para ajustar la condición inicial sumamos una solución cualquiera ce^t de la homogénea, donde c es una constante que podemos fijar a nuestro antojo. Obtenemos

$$x(t) = -1 - t + ce^t.$$

Al imponer la condición inicial $x(1) = 2$ vemos que tenemos que elegir $c = 4/e$, y así llegamos a la fórmula

$$x(t) = 4e^{t-1} - t - 1$$

para la solución de nuestro problema. ♣

Ejercicio 1.92. * Rehacer el ejercicio 1.90 buscando una solución particular de la forma

$$x(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t.$$

Este método de buscar soluciones particulares por tanteo puede ser de ayuda también para resolver las ecuaciones no homogéneas en \mathbf{R}^n . ♠

Ecuaciones lineales no homogéneas en \mathbf{R}^n

Veremos que una nueva aplicación del método de variación de constantes que presentamos para el caso unidimensional nos permitirá resolver cualquier problema de valores iniciales para la ecuación diferencial

$$\dot{X} = AX + B(t). \quad (1.216)$$

en \mathbf{R}^n . La parte homogénea de la ecuación es $\dot{X} = AX$, y sabemos que la forma general de sus soluciones es

$$X(t) = e^{At}X_0 \quad (1.217)$$

donde X_0 es un vector fijo de \mathbf{R}^n . Buscaremos entonces una solución

$$X(t) = e^{At}Y(t) \quad (1.218)$$

de (1.216). Notemos que $X(t)$ es de la misma forma que (1.217), con la salvedad de que el vector $Y(t)$ depende del tiempo t en vez de ser el vector constante X_0 . La dificultad pasa ahora por determinar correctamente el vector $Y(t)$. Para poder derivar $X(t)$ y sustituir en (1.216) nos hará falta el resultado contenido en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.93. * Consideremos un intervalo abierto $I \subset \mathbf{R}$ y dos funciones derivables

$$\begin{aligned} A : I \subset \mathbf{R} &\rightarrow M^{n \times n}(\mathbf{R}), \\ X : I &\rightarrow \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

Naturalmente, podemos definir la función producto

$$AX : I \rightarrow \mathbf{R}^n$$

haciendo, para cada $t \in I$, la multiplicación $A(t)X(t)$. Mostrar que la función AX es derivable y que se satisface

$$\frac{d(AX)}{dt}(t) = \frac{dA}{dt}(t)X(t) + A(t)\frac{dX}{dt}(t).$$

Observar que, formalmente, este resultado es el mismo que el que se obtiene al derivar el producto de dos funciones reales. Sugerencia: usar la expresión de las componentes del vector AX en término de los coeficientes A_{ij} de la matriz A y de las componentes de X . ♡

Ahora ya sabemos derivar el producto de e^{At} por $Y(t)$. Al hacerlo obtenemos

$$\dot{X}(t) = Ae^{At}Y(t) + e^{At}\dot{Y}(t).$$

El segundo miembro de la ecuación diferencial es

$$AX(t) + B(t) = Ae^{At}Y(t) + B(t).$$

Al combinar nuestras dos últimas ecuaciones obtenemos

$$e^{At}\dot{Y}(t) = B(t). \quad (1.219)$$

Ahora desearíamos despejar $\dot{Y}(t)$, tal como hicimos en el caso unidimensional. Para esto utilizaremos las propiedades de la exponencial que enunciamos en el ejercicio 1.89, página 124. Éstas son

$$\begin{aligned} e^{A(t+s)} &= e^{At}e^{As}, & s, t \in \mathbf{R}, \\ e^{At}e^{As} &= e^{As}e^{At}, & s, t \in \mathbf{R}, \\ (e^{At})^{-1} &= e^{-At}, & t \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (1.220)$$

Por lo tanto, multiplicando a la izquierda por e^{-At} en (1.219) despejamos

$$\dot{Y}(t) = e^{-At}B(t). \quad (1.221)$$

Para calcular $Y(t)$ sólo tenemos que integrar¹¹ usando las condiciones iniciales. Supongamos que éstas han sido fijadas en un instante t_0 , prescribiendo $X(t_0) = X_0$. Entonces, evaluando la función $X(t)$ en t_0 resulta

$$X(t_0) = e^{At_0}Y(t_0) = X_0.$$

Nuevamente despejamos, esta vez multiplicando a la izquierda por e^{-At_0} , y encontramos que $Y(t)$ debe satisfacer

$$Y(t_0) = e^{-At_0}X_0.$$

Integrando (1.221) entre t_0 y t obtenemos

$$Y(t) = e^{-At_0}X_0 + \int_{t_0}^t e^{-As}B(s) ds.$$

Al multiplicar por e^{At} resulta

$$X(t) = e^{At}e^{-At_0}X_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As}B(s) ds.$$

Como la matriz e^{At} es constante a los efectos de la integración en s podemos ponerla dentro de la integral. Haciendo esta operación y aplicando las propiedades de la exponencial concluimos que

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}B(s) ds. \quad (1.222)$$

¹¹recordemos que integrar una función vectorial es lisa y llanamente integrar cada una de sus componentes

es la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B(t), \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (1.223)$$

Subrayemos además que la ecuación que estamos resolviendo no es autónoma. Por lo tanto no podremos, en general, hallar la solución con dato inicial $X(t_0) = X_0$, fijado en tiempo t_0 , haciendo una traslación en el tiempo de la solución con dato inicial $X(0) = X_0$. Es por esta razón que el tiempo t_0 aparece explícitamente en la formulación del problema de valores iniciales (1.223).

Observación 1.8.5. El primer sumando en el miembro de la derecha es una solución de la ecuación homogénea $\dot{X} = AX$ que satisface la condición inicial X_0 al evaluarlo en $t = t_0$. El segundo es una solución particular de la ecuación no homogénea $\dot{X} = AX + B$ que se anula en t_0 . ♠

Ejemplo 1.8.6. OSCILACIONES FORZADAS

Como una aplicación de las técnicas que acabamos de desarrollar vamos a considerar el oscilador simple, cuya ecuación es

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

forzado por un término sinusoidal $\sin \omega t$, lo que da lugar a la ecuación

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \sin \omega t.$$

Recordemos que las soluciones de la ecuación homogénea, sin el término sinusoidal, son de la forma

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

de modo que la frecuencia del término que fuerza la ecuación es la misma que la de las oscilaciones que se producen en ausencia de ese término.

Vamos a estudiar que es lo que ocurre con esta ecuación si partimos de una configuración de reposo $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Para simplificar los cálculos tomaremos ω igual a 1. Si introducimos una nueva variable $y = \dot{x}$ vemos que nuestro problema es equivalente a

$$\begin{cases} \dot{X} = JX + B, \\ X(0) = 0, \end{cases}$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

La fórmula (1.222) nos dice que la solución del problema es

$$X(t) = \int_0^t e^{J(t-s)B(s)} ds,$$

ya que en este caso la condición inicial es nula. Usando las fórmulas de la exponencial de J y de $B(s)$ encontramos que el integrando es

$$\begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t-s) \sin s \\ \cos(t-s) \sin s \end{pmatrix}.$$

Desempolvando un par de fórmulas trigonométricas¹² que pueden encontrarse, por ejemplo, en [B], escribimos este vector como

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(2s-t) - \cos t \\ \sin(2s-t) + \sin t \end{pmatrix}.$$

Ahora sólo nos resta integrarlo entre 0 y t . Hacer esta operación consiste en calcular la integral sobre $[0, t]$ de cada una de sus componentes, que arroja como resultado

$$X(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin t - t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}.$$

La solución $x(t)$ de la ecuación escalar de segundo orden es la primera componente de este vector, es decir $x(t) = (\sin t - t \cos t)/2$, cuyo gráfico aparece en la figura 1.36. Las oscilaciones del sistema van aumentando de amplitud a medida que pasa el tiempo, y se hacen arbitrariamente grandes cuando t crece. Este es un ejemplo del fenómeno conocido como *resonancia*, que se produce cuando un sistema es excitado en una frecuencia que coincide con la de sus oscilaciones libres. Para completar este ejemplo veamos que ocurre cuando se utilizan otras frecuencias para forzar el sistema.

Ejercicio 1.94. * Calcular la solución de

$$\ddot{x} + x = \sin \omega t,$$

con dato inicial $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ para $\omega > 0$ y distinto de 1. Discutir según ω el comportamiento de las soluciones.

En el ejercicio 1.98 presentamos una ampliación de este ejemplo. ♣

Ejercicio 1.95. * Resolver el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + t, \end{aligned} \tag{1.224}$$

con dato inicial $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

Ejercicio 1.96. * Resolver el sistema

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3e^t + 2te^t \\ 2e^t + te^t \end{pmatrix} \tag{1.225}$$

con dato inicial (x_0, y_0) en $t = 0$.

¹² $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$, $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$

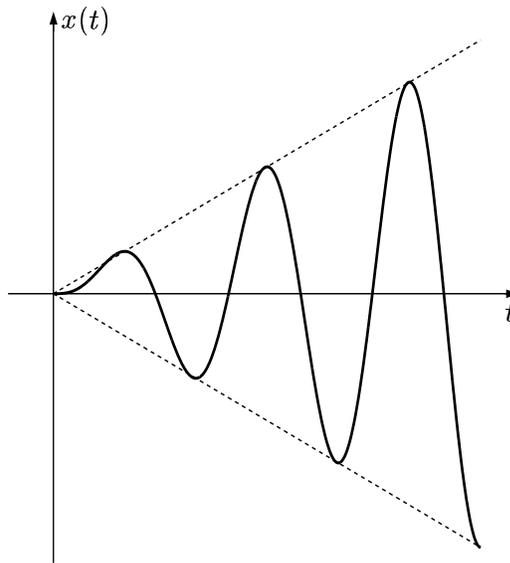


Figura 1.36: la gráfica de $x(t)$

Ejercicio 1.97. * Resolver el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y + z, \\ \dot{y} &= -2y + t, \\ \dot{z} &= 2z + \sin t, \end{aligned} \tag{1.226}$$

con dato inicial (x_0, y_0, z_0) en $t = 0$.

Ejercicio 1.98. ** OSCILACIONES FORZADAS.

La ecuación

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t) \tag{1.227}$$

gobierna el movimiento de una partícula de masa m sometida a la acción de un resorte de constante k , a una fuerza $f(t)$ que depende del tiempo y a un amortiguador de constante b . Supondremos $m > 0$, $b \geq 0$, $k \geq 0$.

1. Transformar la ecuación (1.227) en un sistema lineal en \mathbf{R}^2 .
2. Resolver el sistema para $f(t) = A \sin \omega t$.
3. Hallar las condiciones iniciales que dan lugar a una solución periódica. Calcular la amplitud de estas oscilaciones. Discutir según los valores de las constantes m , b , k , A y ω que aparecen en el problema.
4. Estudiar el comportamiento de las soluciones cuando $t \rightarrow \infty$.

1.8.2 Otros ejemplos que pueden resolverse completamente

Ejemplo 1.8.7. Consideraremos ahora con cierto detalle la ecuación $\dot{x} = tx$. Nuevamente, el campo de pendientes asociado con ella depende tanto de x como de t , porque ambos aparecen en el segundo miembro de la ecuación. Además es simétrico respecto a los ejes t y x . Veremos al resolver la ecuación que esta simetría se traslada a las soluciones. Ambos hechos pueden apreciarse en la figura 1.37.

Para calcular las soluciones fijemos una condición inicial cualquiera, por ejemplo $x(t_0) = x_0$, y notemos que podemos *separar las variables* escribiendo la ecuación diferencial en la forma

$$\frac{\dot{x}}{x} = t.$$

Esto no puede hacerse si $x = 0$, pero no es grave, porque $x(t) \equiv 0$ es una solución de la ecuación, como es inmediato apreciar. Si integramos entre t_0 y t la fórmula que acabamos de obtener resulta,

$$\log |x(t)| - \log |x(t_0)| = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}.$$

Entonces

$$|x(t)| = |x_0| e^{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)}.$$

Como el miembro de la derecha nunca se anula $x(t)$ no puede cambiar de signo, así que debe tener siempre el mismo signo que $x(t_0) = x_0$, y obtenemos

$$x(t) = x_0 e^{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)}$$

como fórmula para las soluciones. Las graficamos en la figura 1.37. Las soluciones también tienen simetría respecto a los ejes. En efecto, si $x(t)$ es una solución de la ecuación entonces $x_1(t) = x(-t)$ e $x_2(t) = -x(t)$ también lo son, lo que explica la simetría que observamos. Verifiquemos que x_1 y x_2 son soluciones. Para x_1 tenemos

$$\dot{x}_1(t) = -\dot{x}(-t).$$

Como x es una solución entonces la ecuación implica que

$$\dot{x}(-t) = (-t)x(-t).$$

Vemos entonces que

$$\dot{x}_1(t) = -(-t)x(-t) = tx(-t) = tx_1(t),$$

por lo que x_1 también satisface la ecuación. Los cálculos para x_2 son similares, pero aún más sencillos, ya que se reducen a

$$\dot{x}_2(t) = -\dot{x}(t) = -tx(t) = tx_2(t),$$

lo que muestra que también x_2 es solución. Observar que en realidad las soluciones de esta ecuación son pares, es decir, satisfacen $x(t) = x(-t)$. ♣

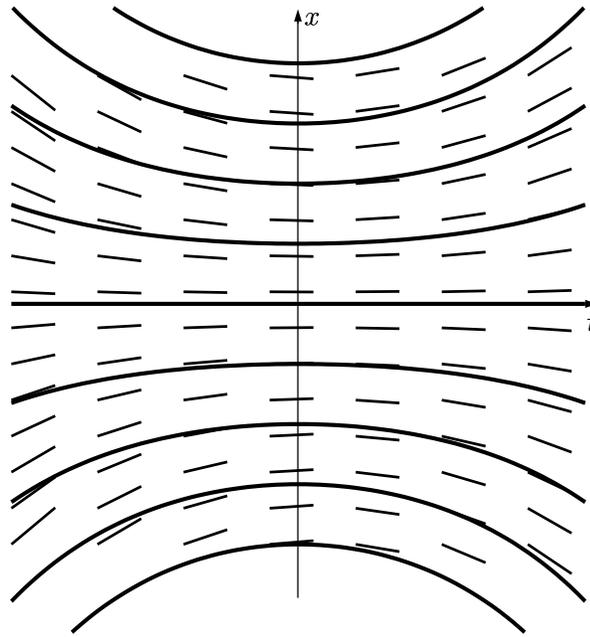


Figura 1.37: el campo de pendientes y algunas soluciones de $\dot{x} = tx$

Ejercicio 1.99. * ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES.

1. Consideremos en \mathbf{R} una ecuación de la forma $\dot{x} = f(x)g(t)$. Describir un método para buscar la solución de la ecuación que satisface $x(t_0) = x_0$.

2. Resolver

$$\dot{x} = \frac{t^2 + 1}{2 - x}, \quad x(-3) = 4. \quad (1.228)$$

3. Resolver $t\dot{x} - x = 2t^2x$

Ejercicio 1.100. ** ECUACIONES HOMOGÉNEAS.

1. Mostrar que la ecuación homogénea $\dot{x} = f(x/t)$, donde f no es la función identidad, se transforma en la ecuación de variables separables

$$\dot{u} = \frac{f(u) - u}{t} \quad (1.229)$$

por medio del cambio de variables $x = ut$.

2. Resolver

$$\dot{x} = \frac{t - x}{t + x}. \quad (1.230)$$

3. Resolver

$$\dot{x} = \frac{x+t}{t}, \quad x(1) = 0. \quad (1.231)$$

Ejercicio 1.101. *** DIFERENCIALES EXACTAS.

Para hacer este ejercicio es necesario utilizar el siguiente resultado:

Teorema 1.2. Si (X, Y) es una pareja de funciones de clase C^1 , definidas sobre \mathbf{R}^2 , tal que $X_y = Y_x$, entonces existe una función $U(x, y)$ tal que $X = U_x$ y $Y = U_y$.

1. Consideremos la ecuación

$$\dot{x} = -\frac{M(x, t)}{N(x, t)}, \quad (1.232)$$

donde M y N son dos funciones de clase C^1 , definidas en \mathbf{R}^2 tales que N nunca se anula y $M_x = N_t$. Mostrar que existe una función diferenciable U con la propiedad de que si $x(t)$ es una solución de la ecuación entonces $U(x(t), t)$ es una constante que no depende de t .

2. Resolver las ecuaciones

$$\dot{x} = -\frac{2xt + 3t^2}{t^2} \quad \text{y} \quad \dot{x} = -\frac{2xt}{t^2 + \cos x} \quad (1.233)$$

3. Consideremos dos funciones M y N como en 1, pero que no satisfagan

$$M_x = N_t.$$

Una función $\mu = \mu(x, t)$ es un *factor integrante* para la ecuación (1.232) si

$$(\mu M)_x = (\mu N)_t.$$

Mostrar que si existe una función $f(t)$ tal que

$$\frac{M_x - N_t}{N} = f(t), \quad (1.234)$$

entonces

$$\mu(t) = \exp \int_{t_0}^t f(s) ds \quad (1.235)$$

es un factor integrante. Análogamente, si existe $g(x)$ tal que

$$\frac{N_t - M_x}{M} = g(x), \quad (1.236)$$

entonces

$$\mu(x) = \exp \int_{x_0}^x g(s) ds \quad (1.237)$$

es un factor integrante. La utilidad de un factor integrante μ es que podemos considerar la ecuación $\dot{x} = -\mu M / \mu N$ en vez de $\dot{x} = -M/N$ y aplicar el resultado de la primera parte de este ejercicio.

4. Resolver

$$\dot{x} = \frac{3 + 3t - x}{-t}. \quad (1.238)$$

Ejercicio 1.102. * ECUACIÓN DE BERNOULLI.

Consideremos la ecuación $\dot{x} + a(t)x = b(t)x^n$, donde a y b son dos funciones continuas definidas en \mathbf{R} y n un número natural.

1. Resolverla en los casos $n = 0$ y $n = 1$.
2. Si $n > 1$ mostrar que el cambio de variable $y = x^{-(n-1)}$ la reduce a una ecuación lineal de primer orden.
3. Resolver las ecuaciones $\dot{x} = tx + x^2$ y $\dot{x} = -2tx + tx^3$.

Ejercicio 1.103. ** ECUACIÓN DE RICATTI.

Con este nombre se conoce a la ecuación $\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2$, donde a , b y c son funciones continuas definidas en \mathbf{R} . Si x es una solución particular es posible obtener nuevas soluciones $y(t)$ intentando escribirlas en la forma $y(t) = x(t) + 1/v(t)$, donde $v(t)$ es una función a determinar.

1. Mostrar que v satisface una ecuación lineal de primer orden, de la forma

$$\dot{v} = A(t)v + B(t).$$

2. Utilizar este método para resolver

- (a) $\dot{x} = 1 + t^2 - 2tx + x^2$ a partir de la solución $x(t) = t$.
- (b) $\dot{x} = 1 - t^2 + x^2$, sabiendo que tiene una solución polinómica.

Ejercicio 1.104. * ECUACIÓN DE HERMITE.

La ecuación de Hermite es $\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2nx = 0$, con $n \in \mathbf{N}$. Mostrar que para cada n la ecuación tiene una solución H_n que es un polinomio mónico de grado n . Calcular H_n para $n = 0, 1, 2, 3$.

Ejercicio 1.105. ** ECUACIÓN DE LEGENDRE.

Con este nombre designamos a $(1 - t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + n(n + 1)x = 0$, con $n \in \mathbf{N}$. Mostrar que para cada n la ecuación tiene una solución P_n , polinómica de grado n que satisface $P_n(1) = 1$. A estas soluciones se les llama *polinomios de Legendre*. Hallar los polinomios de Legendre que corresponden a $n = 0, 1, 2, 3$.

1.9 Construcción de soluciones para las ecuaciones diferenciales ordinarias

Expondremos en esta sección dos métodos para construir soluciones del problema de valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria: un *método de discretización* de la ecuación, conocido como *método de Euler* y el *método iterativo* o *método de Picard*. Utilizaremos este último para demostrar una versión local de un resultado de existencia y unicidad de soluciones conocido como *Teorema de Picard*, pero completaremos la prueba recién en el capítulo 3, porque encontraremos diversas dificultades en el análisis matemático necesario para la aplicación del método, lo que nos llevará a considerar en profundidad los problemas de *convergencia de sucesiones de funciones* que son el núcleo del capítulo 2.

En lo que tiene que ver con el estudio de las ecuaciones diferenciales, describamos brevemente el plan que pretendemos desarrollar de aquí en adelante:

1. Presentaremos primero una teoría que asegura la existencia y unicidad de soluciones para los problemas de valores iniciales del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.239)$$

donde f es una función continua definida en un cierto abierto $Q \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ y (x_0, t_0) es un punto de Q . Tendremos que imponer luego algunas hipótesis adicionales sobre f , pero iremos introduciéndolas a medida que nos hagan falta. Vale la pena recordar una vez más que nuestra “incógnita” es una función $x : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, definida en algún intervalo I que contenga a t_0 .

2. Pondremos énfasis en presentar un análisis cualitativo de las ecuaciones, que nos permitirá extraer información de ellas aún sin conocer todos los detalles acerca de sus soluciones. Vale la pena destacar que ya en las primeras secciones del curso presentamos en varias oportunidades argumentos de este tipo, que nos permitían saber cosas de las soluciones sin recurrir a fórmulas explícitas. Como estos son los argumentos que luego podremos generalizar vale la pena hacer el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.106. * Repasar lo que se hizo hasta ahora y encontrar los argumentos que no descansan sobre el conocimiento de fórmulas explícitas para las soluciones.

Otro ingrediente en el análisis de las ecuaciones diferenciales, de gran importancia y desarrollo debido a la potencia de las computadoras modernas, es su estudio numérico. En este curso nos limitaremos a indicar tímidamente algunas excursiones en esta dirección. Sin embargo, hay dos aspectos de esta cuestión que queremos subrayar

- el análisis numérico de las ecuaciones resulta mucho más poderoso y económico si está precedido de una buena comprensión teórica del problema. Más importante aún: hay problemas que la teoría por sí sola no puede resolver completamente y se debe recurrir al numérico para aclararlos; hay cosas que el numérico por sí sólo no puede hacer y hace falta cierta comprensión previa de los fenómenos dinámicos para no gastar horas de computadora en calcular a ciegas.
- los elementos de análisis que se introducirán en este curso también son necesarios para el estudio numérico de las ecuaciones diferenciales (y distan mucho de ser suficientes).

1.9.1 † Método de Euler.

El primer método que presentaremos para atacar el problema de existencia consiste en hacer una discretización en el tiempo, que conduce a aproximar la solución por una poligonal. La idea es simple y además se adapta bien al cálculo numérico, pero no es la que más utilizaremos porque a los efectos teóricos el método iterativo que presentaremos más adelante es mejor.

Supongamos que queremos resolver el problema de valores iniciales (1.239) en un intervalo $[t_0, t_1]$. Notemos que el conocimiento de la condición inicial $x(t_0) = x_0$, junto con la ecuación, nos dice que la derivada, o vector velocidad, de la solución en tiempo $t = t_0$ es $\dot{x}(t_0) = f(x_0, t_0)$. Esto permite aproximar $x(t)$ cerquita de t_0 por la fórmula

$$x(t) \simeq x_0 + f(x_0, t_0)(t - t_0). \quad (1.240)$$

Está claro que no podemos pensar que la aproximación será buena si $t - t_0$ es grande. Para salvar esta dificultad razonaremos de la siguiente manera: dividiremos el intervalo $[t_0, t_1]$ en m subintervalos, cada uno de ellos de longitud

$$h = \frac{t_1 - t_0}{m} \quad (1.241)$$

y llamamos

$$s_0 = t_0, \quad s_i = s_0 + ih, i = 1, 2, \dots, m$$

a cada uno de sus extremos. Si, para un m fijo, en cada intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ tomamos una aproximación lineal de la solución generaremos una poligonal x_m saliendo del punto (t_0, x_0) de la siguiente manera:

1. En $s_0 = t_0$ simplemente tomamos $x_m(s_0) = x_0$.
2. Para definirla en s_1 utilizamos la aproximación lineal (1.240) a partir de (x_0, t_0) y obtenemos

$$x_m(s_1) = x_0 + f(x_0, t_0)h = x(s_0) + f(x(s_0), s_0)h. \quad (1.242)$$

3. Repetimos el procedimiento a partir del punto $(x_m(s_1), s_1)$, para conseguir

$$x_m(s_2) = x_m(s_1 + h) = x_m(s_1) + f(x_m(s_1), s_1)h. \quad (1.243)$$

4. Iterando el paso anterior definimos, de manera general,

$$x_m(s_{i+1}) = x_m(s_i + h) = x_m(s_i) + f(x_m(s_i), s_i)h, \quad i = 0, 1 \dots m-1. \quad (1.244)$$

Notemos que para $i = m-1$ tenemos $s_{i+1} = t_1$.

5. Una vez fijado el valor de la poligonal x_m en los puntos s_i sólo resta extenderla a todo $[t_0, t_1]$. Para ello, en cada intervalo (s_i, s_{i+1}) , definimos x_m interpolando linealmente por la formula

$$x_m(t) = \frac{t - s_i}{h}x_m(s_{i+1}) + \frac{s_{i+1} - t}{h}x_m(s_i), \quad t \in (s_i, s_{i+1}). \quad (1.245)$$

Cuando $m \rightarrow \infty$ la longitud h de los intervalos tiendo a cero y, bajo hipótesis adecuadas, la poligonal x_m converge a la solución.

Ejercicio 1.107. * Resolver $\dot{x} = x$, $x(0) = 1$ en $[0, t]$ por el método de las poligonales. ¿A qué converge $x_m(t)$ cuando $m \rightarrow \infty$?

A los efectos de mostrar la existencia de soluciones de las ecuaciones diferenciales el método de Euler presenta el inconveniente de que las aproximaciones x_m que produce no son diferenciables, ya que una poligonal sólo lo es a trozos, pero en los puntos s_i no existe un vector tangente. A continuación presentaremos otro método, que no adolece de este inconveniente. ††

1.9.2 Método iterativo o de Picard

Para aplicar el método iterativo cambiaremos el punto de vista al abordar nuestro problema de valores iniciales. La novedad consiste en considerar todas las operaciones de diferenciación, composición, etc., como transformaciones que están definidas en un cierto espacio de funciones. En efecto, para hallar una solución de

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

pensaremos que el miembro de la izquierda es el resultado de aplicar la transformación

$$T_1 : x \mapsto \dot{x} \quad (1.246)$$

a la función $x(t)$. Y el de la derecha como el resultado de la transformación definida por

$$T_2(x)(t) = f(x(t), t). \quad (1.247)$$

Si miramos las cosas de este modo, resolver el problema de valores iniciales (1.239) es lo mismo que encontrar una solución de

$$T_1(x) = T_2(x) \quad (1.248)$$

en el conjunto de funciones que satisfacen $x(t_0) = x_0$.

Este enfoque es el que seguiremos a partir de ahora. Como primer paso vamos a simplificar el problema y desembarazarnos de la operación de derivar por una simple integración, ya que la ecuación diferencial y la condición inicial son equivalentes a que se satisfaga la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds. \quad (1.249)$$

Ejercicio 1.108. * Probar que si $x(t)$ es una función de clase derivable entonces la ecuación (1.249) es equivalente al problema de valores iniciales (1.239).

Ejercicio 1.109. * Hallar una solución de la ecuación integral

$$x(t) = 10 + \int_1^t x(s) ds.$$

Ahora interpretaremos el lado derecho de (1.249) como el resultado de aplicar una transformación T que produce la nueva función

$$x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds,$$

a partir de la función $x(s)$. Es decir, como la transformación

$$x(t) \mapsto T(x) \quad \text{con} \quad T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds. \quad (1.250)$$

Está claro entonces que tendremos una solución del problema (1.239) si encontramos una función x tal que

$$x = T(x). \quad (1.251)$$

Si x tiene esta propiedad diremos que x es un *punto fijo* del operador T . El término punto fijo se explica por sí sólo, ¿no?

Observación 1.9.1. Recordemos que el operador integral T que introdujimos en (1.250) es una transformación entre conjuntos de funciones. Este hecho explica el significado de la expresión $T(x)(t)$: es el valor en t de la nueva función $T(x)$, que se obtiene aplicándole a x la transformación T . Vistas las cosas de esta manera, el resultado de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales que estamos buscando será esencialmente un resultado de existencia de un

punto fijo para un cierto operador T , definido en un espacio de funciones adecuado¹³ ♠

Antes de comenzar a discutir la relación entre el método iterativo y la búsqueda de puntos fijos para el operador T definido por (1.250), vamos a presentar un resultado sobre la existencia de puntos fijos para funciones continuas.

Ejercicio 1.110. *** Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Mostrar que existe al menos un punto $x \in [0, 1]$ que satisface $x = f(x)$. Sugerencia: evaluar la función auxiliar $x - f(x)$ en 0 y en 1.

Generalidades sobre el método iterativo y la búsqueda de puntos fijos

Para buscar un punto fijo de T utilizaremos un método iterativo que consiste en tratar de llegar a la solución por sucesivas aproximaciones. Recordemos que estamos buscando una solución de la ecuación $x = T(x)$. La idea del método es comenzar con un primer candidato a solución, al que llamaremos x_0 , y calcular a partir de éste

$$x_1 = T(x_0).$$

Si se satisface $x_1 = x_0$ entonces x_0 satisface $x_0 = T(x_0)$ y es un punto fijo para T , de modo que no hace falta hacer más nada. En general, esto no ocurre así y entonces repetimos la operación calculando

$$x_2 = T(x_1), \quad x_3 = T(x_2), \quad \dots$$

De esta manera generamos una sucesión x_m definida por

$$x_{m+1} = T(x_m), \quad m = 0, 1, \dots \quad (1.252)$$

Si la sucesión x_m converge a un límite x_∞ , y el operador T tiene alguna propiedad de continuidad que nos permita asegurar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T(x_m) = T(\lim_{m \rightarrow \infty} x_m) = T(x_\infty), \quad (1.253)$$

entonces x_∞ es un punto fijo para T . En efecto, podemos pasar al límite cuando $m \rightarrow \infty$ en (1.252), usando (1.253) para manejar el miembro de la derecha. Entonces obtenemos

$$x_\infty = T(x_\infty), \quad (1.254)$$

¹³seguramente, este punto de vista abstracto es conocido para el lector de la teoría de espacios vectoriales, en la que los “vectores” (o puntos) de un espacio vectorial pueden ser n -uplas, matrices, polinomios, funciones generales, clases de equivalencia, etc., para las que podemos definir transformaciones. La aplicación T que estamos considerando casi nunca es lineal, por eso hemos usado la notación $T(x)$ para la imagen de x por T , en vez de la Tx que se reserva para las transformaciones lineales

que es justamente la condición para que x_∞ sea un punto fijo de T .

La discusión que presentamos hasta aquí es bastante general. En el siguiente ejercicio usaremos las ideas que acabamos de desarrollar, pero lo haremos en el contexto relativamente familiar de las funciones reales de variable real.

Ejercicio 1.111. * Sea $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función continua. Tomemos un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ y definamos una sucesión x_n haciendo

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.255)$$

Supongamos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty$. Probar que x_∞ es un punto fijo de f .

Observación 1.9.2. ITERACIÓN DE UNA FUNCIÓN f .

Notemos que cada x_n en la sucesión del ejercicio anterior se obtiene aplicando n veces la función f al punto inicial x_0 . Es corriente utilizar notación $f^n(x_0)$ para esto, de modo que tenemos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$, etc. En general será $x_n = f^n(x_0)$. ♠

De acuerdo con los comentarios que hicimos hasta aquí, en primer lugar nos interesará saber si la sucesión x_m definida por (1.252) converge a algo. Para que esto ocurra es necesario que la diferencia

$$x_{m+1} - x_m = T(x_m) - x_m = T(x_m) - T(x_{m-1}) \quad (1.256)$$

tienda a cero cuando m tiende a infinito. Naturalmente, esta condición no es suficiente. La siguiente observación tiene que ver con el empleo de una condición de este tipo al buscar una solución aproximada de la ecuación $x = T(x)$.

Observación 1.9.3. CRITERIOS DE PARADA DE LA ITERACIÓN EN CÁLCULOS APROXIMADOS

Hay muchos ejemplos en los que se busca conocer con un cierto grado de aproximación una raíz de una ecuación de la forma $x = T(x)$, por medio de un método iterativo. Un ejemplo puede encontrarse en el ejercicio 1.116, acerca del método de Newton para buscar los ceros de una función real. En situaciones de este tipo es evidente que no se puede seguir iterando eternamente, y debemos conformarnos con tomar como valor para la solución un valor aproximado x_m , con tal de que difiera poco del valor real x_∞ . Si suponemos que los x_m son una sucesión de números reales, esta condición de parada puede escribirse como

$$|x_m - x_\infty| < \epsilon,$$

donde ϵ es un nivel de error tolerable y fijado de antemano. El problema que este criterio enfrenta en la práctica es que x_∞ es desconocido y si no se dispone de buenas estimaciones para el error suele sustituirse por el criterio

$$|x_m - x_{m+1}| < \epsilon,$$

que es fácilmente computable a partir de la iteración. Hay muchas situaciones en que esto funciona bien y la diferencia $|x_m - x_{m+1}|$ es una buena estimación del error. Por ejemplo, tal cosa ocurre en la mayoría de las aplicaciones del método de Newton. Sin embargo, hay casos en los que no se puede confiar en un criterio de este tipo. El ejercicio que presentamos a continuación nos muestra una de estas situaciones. Recordemos además que el hecho de que $|x_m - x_{m+1}|$ tienda a cero ni siquiera asegura la convergencia de las x_m a un límite.

Ejercicio 1.112. ** Consideremos la ecuación

$$x = f(x), \quad x > 0, \quad \text{con } f(x) = \frac{x^3 + x - 1}{x^2}.$$

1. Hallar la única solución \bar{x} de la ecuación.
2. Mostrar que si se intenta hallar la solución iterando la función f a partir de un $x_0 > 1$ entonces la sucesión x_m que resulta del método tiende a $+\infty$.
3. Mostrar que aún así se satisface $\lim_m |x_m - x_{m+1}| = 0$.
4. Supongamos que se fija de antemano un error ϵ y se decide detener la iteración cuando $|x_m - x_{m+1}| < \epsilon$, para aceptar x_{m+1} como valor de la raíz. Estudiar como depende de ϵ el error cometido al calcular la raíz de esta manera. ♠

Tal como mencionamos, la condición de que $x_m - x_{m+1}$ sea pequeña no es suficiente para asegurar la convergencia de las x_m . Sigamos considerando por el momento que los x_m son reales. En este contexto hay una condición similar a la que estamos considerando, pero bastante más fina, que asegura la convergencia de la sucesión. Es la *condición de Cauchy* que requiere que todas las diferencias

$$x_{m+k} - x_m, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.257)$$

sean chicas, con tal de tomar m suficientemente grande. La definición precisa es la siguiente.

Definición 1.8. CONDICIÓN DE CAUCHY PARA UNA SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES

Una sucesión de números reales

$$a_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

satisface la *condición de Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar un número natural $N = N(\epsilon)$ tal que

$$|a_{n+k} - a_n| < \epsilon, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{si } n > N.$$

Es usual llamar *sucesión de Cauchy* a una sucesión que satisface la condición de Cauchy. Nuestra próxima proposición es un resultado fundamental para el análisis en \mathbf{R} que desempeñará un papel importante en nuestra construcción.

Teorema 1.3 (Completitud de \mathbf{R}). *Una sucesión de números reales satisface la condición de Cauchy si y sólo si es convergente.*

Haremos uso de este teorema escribiendo las diferencias (1.257) en la forma

$$x_{m+k} - x_m = \sum_{l=m}^{m+k-1} (x_{l+1} - x_l).$$

Luego las estimaremos usando la desigualdad triangular:

$$|x_{m+k} - x_m| \leq \sum_{l=m}^{m+k-1} |x_{l+1} - x_l|,$$

y resulta entonces que si la serie de término general $|x_{l+1} - x_l|$ es convergente la sucesión x_m es de Cauchy (suponemos conocido este hecho, pero de todos modos lo exponemos con cierto detalle cuando tengamos que utilizarlo). En consecuencia la condición de que esta serie sea convergente es suficiente para asegurar que la sucesión x_m tiene un límite. Por supuesto, de la convergencia de la serie puede concluirse que su término general tiende a cero, aunque la implicación contraria es en general falsa.

Antes de cerrar esta introducción, mencionemos que este es el tipo de argumentos que presentaremos para obtener la convergencia de la sucesión que se genera al aplicar el método iterativo para resolver ecuaciones diferenciales: buscaremos buenas estimaciones de las diferencias $|x_{m+1} - x_m|$, que aseguren que la serie $\sum_m |x_{m+1} - x_m|$ es convergente. Presentaremos los detalles en una de nuestras próximas secciones. A continuación abordaremos una serie de ejemplos.

Aplicación del método iterativo para la resolución de ecuaciones diferenciales

Vamos a aplicar ahora el método iterativo basado en el operador integral T definido por

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds,$$

en algunos ejemplos. Recordemos que T apareció al dar una formulación integral al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Al aplicar reiteradamente T , a partir de una función inicial $x_0(t)$, produciremos una sucesión de funciones $x_m(t)$.

Hay una pequeña ambigüedad en la notación que estamos usando. Hemos designado con x_0 la función $x_0(t)$ con la que comienza el proceso iterativo. Por otra parte estamos llamando x_0 al punto de \mathbf{R}^n que es la condicional inicial para la solución $x(t)$ en tiempo t_0 . Esto no debería inducirnos a confusión porque siempre estará claro por el contexto de qué estamos hablando. Además, en casi todos los casos vamos a escoger como función inicial $x_0(t)$ a la función constante x_0 , y esta elección vuelve natural la notación que acabamos de fijar.

Ejemplo 1.9.4. Comenzaremos por construir la sucesión de iterados que corresponde al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, \\ x(0) = 1, \end{cases} \quad (1.258)$$

donde a es una constante real cualquiera. En este caso el operador integral es

$$T(x)(t) = 1 + \int_0^t ax(s) ds.$$

Tomamos como función x_0 la función constante $x_0(s) = 1$. Entonces

$$x_1(t) = T(x_0)(t) = 1 + \int_0^t a ds = 1 + at.$$

Avanzamos un paso más en la iteración y obtenemos

$$x_2(t) = T(x_1)(t) = 1 + \int_0^t a(1 + as) ds = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2}.$$

A riesgo de aburrirnos computamos x_3 :

$$x_3(t) = T(x_2)(t) = 1 + \int_0^t a\left(1 + at + \frac{a^2 t^2}{2}\right) ds = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2} + \frac{a^3 t^3}{6}.$$

Notemos que a medida que avanzamos la iteración vamos obteniendo más y más términos del desarrollo de la función exponencial e^{at} . En realidad, es sencillo verificar utilizando un razonamiento inductivo que

$$x_n(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(at)^i}{i!}.$$

Por lo tanto $x_n(t)$ converge a la función e^{at} en todo \mathbf{R} . Recordemos que e^{at} es la solución del problema de valores iniciales que estamos considerando. ♣

Además de tratar el ejemplo anterior y resolver el ejercicio 1.107 en forma analítica es muy recomendable utilizar una computadora para graficar las

distintas aproximaciones y ver cómo se van acercando a la solución de la ecuación diferencial. También es posible hacer ambos ejercicios numéricamente de principio a fin. Para el método de las iteraciones hará falta la ayuda de alguna rutina de integración numérica y el número de operaciones necesarias para ejecutarlo será sensiblemente mayor que para el método de Euler¹⁴.

Ejercicio 1.113. * Calcular por el método iterativo la solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = tx, \\ x(0) = 10. \end{cases}$$

Con las técnicas que estamos presentando es posible tratar ecuaciones definidas en cualquier espacio \mathbf{R}^n . Al considerar estas ecuaciones aparece en la definición del operador T la integral

$$\int_{t_0}^t f(x(s), s) ds,$$

en la que f toma valores en \mathbf{R}^n . En este contexto, la operación de integrar una función vectorial de s no es otra cosa que integrar cada una de sus componentes.

Observación 1.9.5. EL MÉTODO ITERATIVO PARA ECUACIONES LINEALES
En el caso en que tratemos con ecuaciones lineales de la forma $\dot{X} = AX$ en \mathbf{R}^n , con condición inicial $X(0) = X_0$, encontraremos que los cálculos son esencialmente los mismos que hicimos en el ejemplo 1.9.4, y que luego de n pasos tendremos que el iterado n -ésimo es

$$X_n(t) = \left(\sum_{i=0}^n \frac{(At)^i}{i!} \right) X_0.$$

La analogía con el desarrollo de la exponencial en el caso unidimensional puede llevarse al límite, ya que en realidad es cierto que vale la fórmula

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(At)^i}{i!}.$$

Esta fórmula es una justificación más para la notación e^{At} y el nombre “matriz exponencial” para la matriz que permite escribir las soluciones de los sistemas lineales. ♠

¹⁴vale la pena mencionar que una manera de definir la función exponencial e^t es introducirla por medio de la ecuación diferencial $\dot{x} = x$, caracterizándola como la única solución de la ecuación que toma el valor $x(0) = 1$. Al resolver la ecuación por el método de Euler obtenemos la conocida aproximación $(1 + t/n)^n$ para e^t . Al utilizar el método de Picard vamos construyendo el desarrollo en serie de e^t

Ahora que hemos presentado en algunos ejemplos el tipo de cálculos a los que conduce la aplicación del método iterativo, vamos a emplearlo para tratar el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.259)$$

en una situación general. Introduciremos aquí una hipótesis adicional sobre f , que utilizaremos a lo largo de esta sección: supondremos que su dominio es un conjunto

$$Q = \mathbf{R}^n \times J, \quad (1.260)$$

donde J es un intervalo abierto de \mathbf{R} . No pondremos ninguna restricción adicional sobre J , que podrá ser entonces todo \mathbf{R} , una semirrecta abierta o un intervalo (a, b) acotado.

Observación 1.9.6. La hipótesis que acabamos de introducir no es esencial pero nos evitará algunos problemas técnicos. En particular, si $I \subset J$ es un intervalo cerrado y acotado cualquiera que contiene a t_0 , la aplicación T estará definida para cualquier función $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ continua. Cuando f sólo está definida en un conjunto Q , estrictamente incluido en $\mathbf{R}^n \times J$ debemos asegurarnos de que

$$(x(t), t) \in Q, \quad t \in I, \quad (1.261)$$

para que $T(x)$ esté definida sobre I . Esto es así porque hay que poder evaluar $f(x(t), t)$ en cada punto $t \in I$ para calcular la integral que aparece en la definición de T . Si $Q = \mathbf{R}^n \times J$ la condición (1.261) se satisface trivialmente una vez que $I \subset J$ y ya no debemos prestarle atención. ♠

Además, para fijar ideas nos limitaremos al caso de dimensión $n = 1$, pero todos los razonamientos que presentaremos se adaptan con poco esfuerzo a dimensiones más altas.

Ejercicio 1.114. ** Puede ser un buen ejercicio ir extendiendo todo lo que haremos a partir de ahora al caso $n > 1$.

En realidad el ejercicio anterior no es muy difícil. La mayor parte del tiempo sólo hay que considerar que si $x \in \mathbf{R}^n$ entonces $|x|$ indica su módulo o norma, en vez del valor absoluto.

Comenzaremos por fijar el espacio de funciones sobre el que definiremos el operador T . Como las soluciones de las ecuaciones diferenciales son de clase C^1 vamos a trabajar con funciones de esta clase. Además nos limitaremos a considerar funciones definidas sobre un intervalo $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Al trabajar en un intervalo cerrado y acotado con funciones de clase C^1 , que son funciones continuas, estamos seguros de que sólo tendremos que manejar funciones acotadas. Ya vimos en algunos ejemplos que las soluciones de las

ecuaciones diferenciales no tienen por qué estar definidas sobre todo \mathbf{R} , de modo que la restricción a algún subintervalo de la recta, que contenga el tiempo t_0 en que se fija la condición inicial, puede ser imprescindible en algunos casos. La elección precisa del $\delta > 0$ surgirá de la discusión que vamos a presentar. En resumen, consideraremos el espacio

$$\mathbf{E} = \{x : I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbf{R}, x \text{ de clase } C^1\}, \quad (1.262)$$

sobre el cual definiremos el operador integral T .

Comencemos ahora con la función $x_0(s) \equiv x_0$, y apliquemos T reiteradamente para generar una sucesión definida por la fórmula de recurrencia

$$x_{m+1} = T(x_m).$$

Es importante subrayar que nuestro procedimiento iterativo fabrica de manera natural una sucesión x_m de funciones definidas sobre I . En particular, si fijamos un punto cualquiera t en el intervalo I , y evaluamos allí cada función x_m , obtenemos la sucesión numérica $x_m(t)$.

Ejemplo 1.9.7. Si consideramos la sucesión de funciones $x_n(t) = \cos nt$ obtenemos las sucesiones numéricas $x_n(\pi) = (-1)^{n+1}$ y $x_n(0) = 1$, al evaluarla en los puntos $t = \pi$ y $t = 0$ respectivamente. ♣

Vistas las cosas desde este punto de vista, al tener una sucesión de funciones x_m podemos pensar que t no es más que un parámetro que “etiqueta” cada una de las sucesiones que podemos producir evaluando las x_m . Aplicaremos a cada una de estas sucesiones $x_m(t)$ algunas de las herramientas conocidas para el estudio de sucesiones en \mathbf{R} . En particular, podemos tratar de mostrar que cada sucesión $x_m(t)$ satisface la condición de Cauchy para deducir de ahí la existencia de un límite.

Ejemplo 1.9.8. Si tomamos $I = \mathbf{R}$ y para cada m natural la función

$$x_m(t) = (1 + t/m)^{1/m},$$

encontramos que para cada $t \in \mathbf{R}$ se satisface

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t) = e^t.$$

La sucesión de funciones x_m converge a la exponencial, en este sentido de convergencia que estamos manejando. Naturalmente, cada sucesión $x_m(t)$ satisface la condición de Cauchy. ♣

Intentaremos mostrar ahora que cada una de las sucesiones numéricas $x_m(t)$, para t en I , que produce el método iterativo, es una sucesión de Cauchy.

Ya anunciamos que para esto es suficiente conseguir buenas estimaciones para las diferencias

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)|, \quad m = 0, 1, 2 \dots, \quad t \in I,$$

con el fin de asegurar que cada una de las sumas

$$\sum_m |x_{m+1}(t) - x_m(t)|,$$

con $t \in I$, es finita. Escribamos entonces la diferencia entre dos pasos sucesivos e intentemos estimarla. Dado que la sucesión de funciones que estamos considerando proviene de la iteración del operador T , trataremos de que nuestra estimación utilice esta información. Para ello tendremos en cuenta que

$$x_{m+1}(t) - x_m(t) = T(x_m)(t) - T(x_{m-1})(t).$$

Una vez que hemos escrito la diferencia de este modo podemos utilizar la definición del operador T y estimar las integrales resultantes. Vamos a trabajar para $t \geq t_0$, pero una modificación obvia de nuestros argumentos permite tratar el caso $t \leq t_0$. Obtenemos

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq \int_{t_0}^t |(f(x_m(s), s) - f(x_{m-1}(s), s))| ds. \quad (1.263)$$

Acotar el integrando del término de la derecha es ahora nuestro principal problema. Para poder manejarlo vamos a introducir una hipótesis acerca de la función f .

Observación 1.9.9. La función f está definida en todo $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Supongamos además que es de clase C^1 . Entonces la diferencia que aparece en el integrando de (1.263) es, como consecuencia del teorema del valor medio¹⁵,

$$f(x_m(s), s) - f(x_{m-1}(s), s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, s)(x_m(s) - x_{m-1}(s)), \quad (1.264)$$

donde \bar{x} es algún valor entre $x_m(s)$ y $x_{m-1}(s)$. Si disponemos de una cota L para la derivada parcial entonces

$$|f(x_m(s), s) - f(x_{m-1}(s), s)| \leq L|x_m(s) - x_{m-1}(s)|. \quad (1.265)$$

Tal como veremos, una estimación del tipo de la que acabamos de encontrar, en la que los incrementos de f están controlados linealmente por el incremento en la variable x , es suficiente para nuestros propósitos. Además, es una

¹⁵recordemos que estamos trabajando con funciones f definidas sobre un conjunto Q de la forma $\mathbf{R} \times J$, donde J es algún intervalo abierto. Entonces cualquier punto intermedio (\bar{x}, s) cae en el dominio de definición de f , y estamos seguros de que se puede aplicar el teorema del valor medio.

condición relativamente sencilla de verificar que nos permitirá desarrollar una teoría bastante general. Volveremos sobre estas cuestiones más adelante. La proposición 3.1, página 218, extiende esta observación. Recomendamos ver también la observación 3.1.2. ♠

Vamos a *introducir* ahora una hipótesis adicional sobre el comportamiento de f , *suponiendo* que la acotación (1.265) es posible. Hagamos previamente la siguiente definición:

Definición 1.9. FUNCIÓN DE LIPSCHITZ

Diremos que una función $f(x, t)$ definida sobre un conjunto $Q \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ es *Lipschitz respecto a la variable x* si existe una constante $L > 0$ tal que se satisface

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|, \quad \text{para todo } (x, t), (y, t) \in Q. \quad (1.266)$$

Diremos también que L es una *constante de Lipschitz* para la función.

Ejemplo 1.9.10. Todas las funciones $f(x, t)$ de clase C^1 , definidas en $\subset \mathbf{R}^2$, cuya derivada parcial respecto a x satisface una acotación del tipo

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq L, \quad (x, t) \in Q$$

son Lipschitz respecto a x con constante L , tal como se desprende de (1.264) y (1.265). ♣

Ejemplo 1.9.11. La función

$$f(x, t) = |x| + t$$

es de Lipschitz respecto a x , con constante $L = 1$, pero no es de clase C^1 . ♣

Asumiremos entonces que la función f que aparece en el segundo miembro de la ecuación diferencial es Lipschitz respecto a su primera variable.

Veremos luego que esta hipótesis es suficiente para probar un resultado local de existencia y unicidad de soluciones para el problema de valores iniciales (1.259). También es posible obtener tal resultado con hipótesis algo más débiles sobre la función f que las que estamos usando, aunque la prueba resulta bastante más técnica. Todas las ideas esenciales para la prueba en el caso más general ya aparecen al considerar la situación particular en que $f(x, t)$ está definida en un conjunto de la forma $\mathbf{R} \times J$ (o $\mathbf{R}^n \times J$) y satisface la condición (1.266).

Si volvemos a nuestro cálculo (1.263), y utilizamos nuestra nueva hipótesis (1.266), obtenemos

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq L \int_{t_0}^t |x_m(s) - x_{m-1}(s)| ds. \quad t \in I \quad (1.267)$$

Esto todavía permite dar un paso más para obtener

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq L|t - t_0| \sup_{s \in I} |x_m(s) - x_{m-1}(s)|, \quad t \in I, \quad (1.268)$$

donde hemos estimado el integrando en el miembro de la derecha de la desigualdad por su supremo sobre el intervalo I y usado el hecho de que supremo ya no depende de s (en realidad este supremo es un máximo, porque estamos trabajando en un intervalo compacto con una función continua, pero este hecho es irrelevante para nosotros en este momento). En (1.268) todavía podemos acotar $|t - t_0|$ por δ . Una vez hecho esto, el término de la derecha en la desigualdad ya no depende de t , entonces podemos tomar el supremo del término de la izquierda para concluir

$$\sup_{t \in I} |x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq L\delta \sup_{s \in I} |x_m(s) - x_{m-1}(s)|. \quad (1.269)$$

Observación 1.9.12. En muchas ocasiones resulta conveniente simplificar un poco la notación que estamos usando para los supremos, omitiendo escribir la variable independiente. Escribiremos entonces

$$\sup_X f$$

en vez de

$$\sup_{x \in X} f(x).$$

Con esta convención, la fórmula

$$\sup_I |x_{m+1} - x_m| \leq L\delta \sup_I |x_m - x_{m-1}|. \quad (1.270)$$

no es más que una versión más concisa de (1.269). \spadesuit

La desigualdad (1.269)-(1.270) es muy adecuada para nuestras intenciones. En primer lugar notemos que tiene una enorme ventaja sobre (1.267) y (1.268): la cantidad que estimamos es la misma que usamos para la estimación, sólo que un paso después. Esto es perfecto para iterar. Además estábamos buscando que las iteraciones sucesivas se fueran aproximando, y podemos lograrlo tomando δ suficientemente pequeño para tener $L\delta < 1$. Notemos que no podemos tocar la constante L porque es una característica de la función f , para hacerlo deberíamos agregar una hipótesis adicional. Sin embargo la restricción de tomar

$$\delta < 1/L \quad (1.271)$$

sólo significa que estamos intentando construir la solución del problema en un intervalo

$$I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

relativamente chico alrededor de t_0 . Al fin y al cabo esto no está tan mal, porque si recordamos la idea de que resolver la ecuación diferencial puede interpretarse como calcular la trayectoria de un móvil, lo que estamos haciendo nos permite avanzar un poquito, por ejemplo hasta $t_0 + \delta$. A partir de ahí podemos recomenzar todo el proceso. Al fin y al cabo cuando caminamos damos un paso cada vez y eso no nos impide recorrer distancias largas.

Observación 1.9.13. LA APLICACIÓN T ES CONTRACTIVA SI δ ES CHICO. En la discusión anterior no es esencial que estemos aplicando T a las funciones x_m y x_{m-1} que se obtienen por el procedimiento iterativo. Los mismos cálculos que acabamos de hacer permiten mostrar que si tomamos dos funciones x e y cualesquiera en el espacio \mathbf{E} sobre el que está definido T , y les aplicamos el operador, obtenemos la desigualdad

$$\sup_I |T(x) - T(y)| \leq L\delta \sup_I |x - y|. \quad (1.272)$$

En realidad la estimación (1.269)-(1.270) no es otra cosa que (1.272) aplicada en el caso $x = x_{m-1}$, $y = x_m$. Notemos que cuando $\delta < 1/L$ la estimación (1.272) implica

$$\sup_I |T(x) - T(y)| < \sup_I |x - y|, \quad (1.273)$$

salvo en el caso trivial en que $x \equiv y$ en I , porque entonces también $T(x) \equiv T(y)$ en I y los dos miembros de (1.273) son iguales a 0. La desigualdad (1.273) tiene como consecuencia que T “acerca” las funciones a las que se le aplica, ya que al tomar el supremo en I del módulo de la diferencia entre dos funciones estamos midiendo que tanto se separan. Podemos interpretar entonces (1.273) como una fórmula que nos dice que la función $T(x)$ está menos lejos de $T(y)$ que lo que x dista de y , en este sentido de “distancia” entre dos funciones que estamos introduciendo al tomar el supremo de su diferencia. ♠

Si llamamos $k = L\delta < 1$ y aplicamos iterativamente (1.270) a partir de $n = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sup_I |x_2 - x_1| &\leq k \sup_I |x_1 - x_0|, \\ \sup_I |x_3 - x_2| &\leq k \sup_I |x_2 - x_1| \leq k^2 \sup_I |x_1 - x_0|, \\ \sup_I |x_4 - x_3| &\leq k \sup_I |x_3 - x_2| \leq k^3 \sup_I |x_1 - x_0|, \end{aligned} \quad (1.274)$$

y con un argumento inductivo evidente

$$\sup_I |x_{m+1} - x_m| \leq k^m \sup_I |x_1 - x_0|. \quad (1.275)$$

Para simplificar la notación introduzcamos

$$c_0 = \sup_I |x_1 - x_0|.$$

La desigualdad (1.275) puede escribirse entonces como

$$\sup_I |x_{m+1} - x_m| \leq c_0 k^m, \quad (1.276)$$

y es equivalente a que para cada t en el intervalo I se satisfaga

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq c_0 k^m. \quad (1.277)$$

Como $k < 1$ la serie $\sum k^m$ es convergente. De aquí se desprende que, para cada $t \in I$, la sucesión $x_m(t)$ satisface la condición de Cauchy y por lo tanto es convergente. Naturalmente, como para cada t obtenemos una sucesión diferente, el límite correspondiente dependerá del valor de t . Por lo tanto, llamaremos $x(t)$ al límite de la sucesión $x_m(t)$, para cada $t \in I$. Vamos a recoger todos estos hechos y probarlos con detalle, en el lema que enunciamos a continuación.

Lema 1.7. *Si $\delta < 1/L$ e $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, entonces existe una función*

$$x : I \rightarrow \mathbf{R}$$

tal que cada una de las sucesiones $x_m(t)$ con $t \in I$, que produce el método iterativo, satisfice

$$x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t). \quad (1.278)$$

PRUEBA. Probaremos que cada sucesión $x_m(t)$ es de Cauchy. Esto implica que la sucesión tiene un límite al que llamaremos $x(t)$, para poner en evidencia que, en general, dependerá del valor de $t \in I$ con el que estemos trabajando. Si definimos la función x en I por la correspondencia $t \mapsto x(t)$, que a cada t la asigna el límite $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t)$ la fórmula (1.278) es inmediata.

Fijemos $t \in I$. Para probar que $x_m(t)$ es una sucesión de Cauchy fijemos un $\epsilon > 0$. Debemos mostrar que existe un número M con la propiedad de que

$$|x_{m+l}(t) - x_m(t)| < \epsilon \quad (1.279)$$

si $m \geq M$ y l es un número natural cualquiera. Como tenemos estimaciones para las diferencias entre pasos consecutivos de la iteración escribimos

$$|x_{m+l}(t) - x_m(t)| \leq \left| \sum_{i=m}^{m+l-1} x_{i+1}(t) - x_i(t) \right| = \sum_{i=m}^{m+l-1} |x_{i+1}(t) - x_i(t)|, \quad t \in I. \quad (1.280)$$

Podemos acotar cada uno de los términos de la sumatoria utilizando (1.277) para concluir que la desigualdad

$$|x_{m+l}(t) - x_m(t)| \leq c_0 \sum_{i=m}^{m+l-1} k^i, \quad t \in I. \quad (1.281)$$

se satisface. Notemos que esta igualdad es cierta para cualquier t en I , en particular para el que hemos fijado. Como la serie de término general k^i es convergente, el miembro de la derecha puede hacerse tan chico como se quiera con tal de tomar m suficientemente grande y $l \geq 0$. Este hecho completa la prueba del lema. \diamond

Es sumamente importante señalar que las estimaciones de que disponemos contienen más información que la que hemos usado. Hasta el momento hemos razonado dejando $t \in I$ fijo. Sin embargo podemos hacer más si tenemos en cuenta que en muchas de nuestras estimaciones el término de la derecha *no* depende de t , es decir, son estimaciones *uniformes* en el intervalo I . En particular, esto es cierto para la desigualdad (1.281) de la cual dedujimos la condición de Cauchy para la sucesión $x_m(t)$. Esta desigualdad vale para *cualquier* punto $t \in I$.

Notemos que el resultado de convergencia contenido en la fórmula (1.278) es equivalente a afirmar que para cada t en I se satisface

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x(t) - x_m(t)| = 0. \quad (1.282)$$

A continuación probaremos un resultado más fuerte, usando que nuestras estimaciones son uniformes en $t \in I$. No sólo concluiremos que cada una de las diferencias $|x(t) - x_m(t)|$ tiende a cero cuando $m \rightarrow \infty$, sino que el supremo de las diferencias también tiende a cero. Enunciaremos este hecho como un nuevo lema que mejora sustancialmente los resultados de convergencia del lema 1.7.

Lema 1.8.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |x(t) - x_m(t)| = 0. \quad (1.283)$$

PRUEBA. Volvamos a la estimación (1.281). Los argumentos que usamos en la prueba del lema 1.7 permiten concluir que

$$|x_{m+l}(t) - x_m(t)| \leq c_0 \sum_{i=m}^{m+l-1} k^i < c_0 \sum_{i=m}^{\infty} k^i < \epsilon, \quad t \in I, \quad l > 0, \quad (1.284)$$

si m es suficientemente grande (mayor que el número que llamamos $M(\epsilon)$ en la prueba del lema 1.7).

Si hacemos l tender a infinito, con t y m fijos, la sucesión $x_{m+l}(t)$ converge a $x(t)$. Por lo tanto podemos tomar límite en nuestra última estimación, haciendo $l \rightarrow \infty$, para obtener

$$|x(t) - x_m(t)| \leq \epsilon, \quad t \in I, \quad (1.285)$$

si $m > M$. Es fundamental el hecho de que esta desigualdad no depende de t , porque entonces el supremo del miembro de la izquierda, cuando t varía en el intervalo I satisface

$$\sup_{t \in I} |x(t) - x_m(t)| \leq \epsilon, \quad (1.286)$$

siempre y cuando m sea mayor que M . Como ϵ es un número arbitrario, y podemos asegurar la existencia de $M > 0$ tal que (1.286) es cierta si $m > M$, hemos probado (1.283). \diamond

Observación 1.9.14. Para probar que la sucesión de iterados $x_m(t)$ converge en el intervalo I a un límite $x(t)$ no hemos utilizado para nada la función $x_0(t)$ a partir de la cual comenzamos la iteración. Una rápida inspección de los argumentos empleados bastará para comprobar que tal límite existe, independientemente de cuál sea la función $x_0(s)$. Probaremos más adelante, en la sección 3.1, que el límite del proceso iterativo es efectivamente una solución del problema de valores iniciales (1.239) en el intervalo $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, y que la solución es única. Esto permitirá concluir inmediatamente que el límite del proceso iterativo es independiente de la función con la que se empieza la iteración. \spadesuit

Para cerrar esta sección, antes de pasar a discutir las cuestiones que tienen que ver con la convergencia de las funciones $x_m(t)$ al límite $x(t)$ vamos a presentar algunos ejercicios sobre este asunto de resolver ecuaciones obteniendo un punto fijo de alguna función por un método iterativo. Las ideas necesarias para resolverlas están presentes en los razonamientos que acabamos de desarrollar, al punto de que nuestro próximo ejercicio puede hacerse siguiendo los argumentos que presentamos hasta ahora para hallar un punto fijo de T y adaptándolos en lo que haga falta.

Ejercicio 1.115. * Consideremos una función $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ con la propiedad de que existe una constante positiva $k < 1$ tal que

$$|f(y) - f(x)| \leq k|x - y|, \quad \text{para } x \in \mathbf{R}, \quad y \in \mathbf{R}. \quad (1.287)$$

1. Mostrar que para cualquier $x_0 \in \mathbf{R}$ la sucesión $f^n(x)$ es de Cauchy y concluir que converge a un punto fijo x de f .
2. Mostrar que la ecuación $x = f(x)$ tiene una única solución. Sugerencia: mostrar que dos soluciones x_1 y x_2 deben satisfacer

$$|x_1 - x_2| \leq k|x_1 - x_2|. \quad (1.288)$$

3. Para terminar, probar que los resultados que acabamos de encontrar también son ciertos si $I \subset \mathbf{R}$ es un intervalo cerrado y $f : I \rightarrow I$ una función que satisface (1.287) para alguna constante $k \in (0, 1)$ y dos puntos cualesquiera en I .

Ejercicio 1.116. *** EL MÉTODO DE NEWTON PARA BUSCAR RAÍCES

Supongamos que queremos conocer los puntos donde una función f , definida en algún conjunto abierto de \mathbf{R} y derivable, se anula. Como la ecuación $f(x) = 0$ puede ser difícil de resolver podemos razonar de la siguiente manera. Fijamos un punto x_0 , cerca de una raíz, y sustituimos f por su aproximación lineal alrededor de x_0 , cuya fórmula es

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1.289)$$

Ahora resolvemos $l(x) = 0$, cosa muy fácil si $f'(x_0) \neq 0$ (e imposible si esta derivada se anula, salvo que x_0 ya sea una raíz de f) y cuyo resultado es

$$x_1 = \Phi(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (1.290)$$

Esta última expresión define la función Φ . El nuevo punto x_1 es, en general, una aproximación mejor de la raíz que estamos buscando que el punto x_0 . Si no estamos conformes con la aproximación podemos iterar el procedimiento a partir de x_1 y calcular $x_2 = \Phi(x_1) = \Phi^2(x_0)$. En general, podremos fabricar la sucesión $\Phi^n(x_0)$ que suele converger rápidamente a la raíz si el punto x_0 está bien elegido.

1. Si $f'(\bar{x}) \neq 0$ probar que \bar{x} es un punto fijo de Φ sí y sólo sí se satisface $f(\bar{x}) = 0$.
2. Supongamos que f es una función de clase C^2 y que \bar{x} es una solución de $f(x) = 0$ tal que $f'(\bar{x}) \neq 0$. Mostrar que existe un intervalo $I_\delta = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ tal que la sucesión $\Phi^n(x_0)$ del método de Newton converge a \bar{x} para cualquier $x_0 \in I_\delta$.
3. Calcular aproximadamente las raíces de

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 12 = 0 \quad (1.291)$$

y estudiar desde que intervalos el método de Newton converge a cada una de ellas. Para hallar las raíces e investigar el comportamiento del método puede ser muy útil programar un algoritmo que haga el cálculo, aunque es posible hacerlo a mano con una calculadora y un poquito de paciencia.

1.9.3 Convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones

En este punto conviene notar que la fórmula (1.283) contiene una noción nueva que será fundamental en lo que sigue, la noción de *convergencia uniforme* de una sucesión de funciones, que pasamos a definir a continuación. Para definir esta noción denotaremos con X un conjunto cualquiera (puede ser un intervalo de \mathbf{R} , una región del plano complejo, un subconjunto de \mathbf{R}^n o cualquier conjunto que se nos ocurra).

Definición 1.10. CONVERGENCIA UNIFORME DE UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES

Una sucesión de funciones $f_n : X \rightarrow \mathbf{R}$ converge uniformemente en el conjunto X a una función $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (1.292)$$

Observación 1.9.15.

- Cuando está claro cuál es el conjunto X de que estamos hablando es común decir simplemente “ f_n converge uniformemente a f ”, en vez de “ f_n converge uniformemente a f en X ”.

- Utilizaremos la siguiente notación para la convergencia uniforme: $f_n \rightrightarrows f$.
- Volviendo al problema original de analizar el método iterativo, podemos decir ahora lo siguiente: hemos probado que existe un intervalo

$$I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

y una función x definida en I tales que $x_m \rightarrow x$ en I . Lo que todavía no hemos probado es que esta función es una solución de la ecuación diferencial. Más en general, ni siquiera conocemos ninguna propiedad de la función x . ♠

Para construir la función x hemos utilizado el hecho de que todas las sucesiones numéricas $x_m(t)$ convergían a algo, y hemos llamado $x(t)$ a su límite. En este sentido t no era más que una etiqueta para cada una de las sucesiones. Sin embargo, podemos cambiar el punto de vista para centrar nuestra atención en las funciones x_m y x , y considerar que tenemos entre manos otra noción de convergencia de x_m a x . Esta noción consiste en que para cada $t \in I$ la sucesión numérica $x_n(t)$ converge a $x(t)$. A este tipo de convergencia se le llama *convergencia puntual* y es suficientemente importante como para que nos detengamos a definirla.

Definición 1.11. CONVERGENCIA PUNTUAL DE UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES

Una sucesión de funciones $f_n : X \rightarrow \mathbf{R}$ converge puntualmente en X a una función $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ si para cada $x \in X$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Para la convergencia puntual utilizaremos la notación $f_n \rightarrow f$. También en este caso hay que precisar en que conjunto se produce la convergencia puntual de las f_n a su límite f .

Observación 1.9.16. Las definiciones de convergencia puntual y uniforme pueden extenderse de manera obvia a funciones con valores en \mathbf{R}^n o con valores complejos, en vez de valores reales. Ver la observación 2.1.2. ♠

Debería resultar más o menos evidente que la convergencia uniforme es más fuerte que la convergencia puntual, en el sentido de que si f_n converge uniformemente a f entonces lo hace puntualmente. No nos detendremos en este tipo de cosas ahora porque más adelante dedicaremos bastante tiempo a explorar las propiedades de estas nociones de convergencia. Lo que sí es importante hacer, antes de abandonar esta sección dedicada al método iterativo, es señalar una vez más que todavía nos queda bastante trabajo para probar que la función $x(t)$ que hemos construido iterando el operador T es efectivamente una solución de la ecuación. Un primer paso es tratar de ver que es solución de la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds. \quad (1.293)$$

La definición de la sucesión x_n a partir de la iteración del operador T introducido en (1.250) nos dice

$$x_{n+1}(t) = T(x_n)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_n(s), s). \quad (1.294)$$

Al hacer $n \rightarrow \infty$ el término de la izquierda converge a $x(t)$ y, como la f es continua, el integrando en el de la derecha converge a $f(x(s), s)$. Todo parece fantástico y aparentemente podemos pasar al límite en (1.294) para obtener (1.249), lo que implicaría que $x(t)$ es solución de la ecuación diferencial con la condición inicial $x(t_0) = x_0$. Pero no nos apresuremos, ¿podemos asegurar que vale la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(x_n(s), s) = \int_{t_0}^t \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n(s), s)? \quad (1.295)$$

De hecho esto es lo que necesitamos para obtener (1.249) pasando al límite en (1.294). La respuesta es que sí, pero todavía tenemos que trabajar un poco para probar que en la situación en que estamos es posible intercambiar el orden de las operaciones de integración y paso al límite en (1.294).

Éste no es el único problema que tendremos que resolver. Veamos. Si una función $x(t)$ satisface (1.293) y es continua entonces $f(x(s), s)$ es continua y podemos derivar la integral respecto a t para concluir que existe $\dot{x}(t)$ y que es igual a $f(x(t), t)$. Pero, ¿es continua la función $x(t)$ que obtuvimos en nuestro paso al límite? Las funciones x_n lo son por su construcción, así que debemos estudiar si el límite de funciones continuas es continuo. En resumen, el método iterativo abre un camino para resolver las ecuaciones diferenciales pero nos obliga a plantearnos diversas cuestiones sobre la convergencia de sucesiones de funciones. Éste será el tema central de nuestro próximo capítulo.

Capítulo 2

Elementos de análisis en espacios de funciones

El objetivo de este capítulo es presentar algunas nociones básicas del análisis que son imprescindibles para poder avanzar en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.

En la sección 2.1 se introducen dos nociones de convergencia para sucesiones de funciones: la *convergencia puntual* y la importante noción de *convergencia uniforme*. En esa sección se discuten algunos criterios que permiten determinar cuándo una sucesión de funciones converge uniformemente a una función límite y se analiza la relación entre los dos tipos de convergencia. La sección 2.2 está dedicada a estudiar las propiedades de la convergencia uniforme, y su relación con la continuidad y las operaciones de integración y diferenciación.

Mencionemos que como un resultado más o menos inmediato de la teoría desarrollada en las secciones 2.1 y 2.2 es posible completar una primera versión del Teorema de Picard, acerca de la existencia y unicidad de soluciones de los problemas de valores iniciales para las ecuaciones diferenciales ordinarias. Recordemos que habíamos comenzado a tratar la teoría de existencia por medio de un método iterativo que nos condujo a considerar los problemas de convergencia de sucesiones de funciones (ver la sección 1.9). Terminaremos la prueba en el capítulo dedicado a la teoría básica de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

La convergencia uniforme de una sucesión de funciones puede verse como la convergencia respecto a una norma definida sobre un espacio vectorial de dimensión infinita. En la sección 2.3 adoptaremos este punto de vista y mostraremos además que es posible definir varias normas distintas que dan lugar a *diferentes* nociones de convergencia. Este hecho contrasta fuertemente con lo que ocurre en el espacio finito dimensional \mathbf{R}^n , en el que todas las normas dan lugar a *la misma* noción de convergencia, e ilustra acerca de los fenómenos que pueden aparecer al hacer análisis en espacios de dimensión infinita. Este tipo de cuestiones no está para nada alejado de las aplicaciones. Por ejemplo, si un problema puede modelarse por una ecuación diferencial e intentamos resolver numéricamente esta ecuación tenemos que asegurarnos de que nuestro cálculo numérico (aproximado) sea fiel (converja en algún sentido) a la verdadera solución del problema¹.

Emplearemos algunas de las ideas y resultados de la sección 2.3 en el capítulo 5, al tratar las series de Fourier.

¹por cierto, también hay que asegurarse de que la ecuación diferencial con la que se trabaja sea un buen modelo de la realidad, pero eso ya deja de ser un problema puramente matemático y entra en el terreno de la *modelización*

2.1 Convergencia puntual y uniforme de sucesiones y series de funciones

Abordaremos ahora el estudio de los problemas relativos a la convergencia de sucesiones de funciones que quedaron planteados en el final del capítulo 1. Sobre todo nos dedicaremos a investigar las nociones de convergencia puntual y convergencia uniforme que surgieron en nuestra búsqueda de soluciones de las ecuaciones diferenciales².

Como los problemas relativos a la convergencia de sucesiones de funciones son interesantes en sí mismos y también por sus aplicaciones a diversas cuestiones es preferible estudiarlos en un marco más amplio, que englobe lo que hicimos hasta ahora y que nos permita utilizar nuestros resultados en otros contextos. Por esta razón, vamos a comenzar por retomar las definiciones que introdujimos al final del último capítulo.

Definición 1.11. CONVERGENCIA PUNTUAL DE UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES

Una sucesión de funciones $f_n : X \rightarrow \mathbf{R}$ converge puntualmente en X a una función $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ si para cada $x \in X$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Observación 1.1.1. Notemos que la convergencia puntual de la sucesión f_n a f es equivalente a que se satisfaga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \quad (1.2)$$

para cada $x \in X$. ♠

Definición 1.10. CONVERGENCIA UNIFORME DE UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES

Una sucesión de funciones $f_n : X \rightarrow \mathbf{R}$ converge uniformemente en X a una función $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \quad (1.3)$$

Observación 2.1.2. CONVERGENCIA DE SUCESIONES DE FUNCIONES QUE TOMAN VALORES EN \mathbf{R}^m O \mathbf{C} .

Las definiciones de convergencia puntual y uniforme pueden extenderse al caso en que las funciones f_n , $n = 1, 2, \dots$, y f toman valores en \mathbf{R}^m , con $m > 1$, o en \mathbf{C} , tal como adelantamos en la observación 1.9.16. Para fijar ideas

²una buena referencia para todos estos temas, que incluye también el tratamiento de las series de potencias, es el capítulo 7 del texto [CJ1]

supongamos que el codominio de f_n y f es algún \mathbf{R}^m , con $m > 1$. Entonces las definiciones apropiadas de convergencia puntual y uniforme son precisamente las definiciones 1.11 y 1.10 respectivamente, pero hay que interpretar

$$|f_n(x) - f(x)|$$

como el módulo del vector

$$f_n(x) - f(x) \in \mathbf{R}^m.$$

Si pasamos a coordenadas podemos escribir

$$\begin{aligned} f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \\ f_n(x) &= (f_{n,1}(x), f_{n,2}(x), \dots, f_{n,m}(x)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

De este modo, cada una de las funciones f y f_n define m funciones reales

$$f_i, f_{n,i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

respectivamente. Es muy fácil verificar que la convergencia puntual de las funciones f_n a f es equivalente a que cada una de las funciones $f_{n,i}$ converja puntualmente a f_i . También, la convergencia uniforme de f_n a f es equivalente a que las m sucesiones $f_{n,i}$ converjan uniformemente a las f_i . El caso de funciones a valores complejos puede reducirse al caso de \mathbf{R}^m , con $m = 2$, identificando a cada número complejo $a + ib$ con el par (a, b) . ♠

Observación 2.1.3. La definición 1.10 de convergencia uniforme es completamente equivalente a la siguiente definición: una sucesión de funciones reales f_n converge uniformemente en X a f si para cada $\epsilon > 0$ existe un natural n_0 tal que la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (2.5)$$

se satisface para todo $x \in X$ y para todo $n \geq n_0$. Podemos expresar esta última condición en la forma

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon, \quad x \in X,$$

cuando $n \geq n_0$. Si el conjunto X es un intervalo $[a, b]$ encontramos entonces que el gráfico de las f_n estará comprendido, para $n \geq n_0$, entre los gráficos de las funciones $f(x) - \epsilon$ y $f(x) + \epsilon$, tal como se muestra en la figura 2.1.

Ejercicio 2.1. * Completar los detalles correspondientes a esta observación. ♠

Observación 2.1.4. Para una función $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ (o con valores en \mathbf{C} o \mathbf{R}^n) considerar $\sup_{x \in X} |f(x)|$ es una manera de medir el “tamaño” de la función. Efectivamente, si estamos considerando funciones f en un espacio formado por funciones acotadas el supremo de su valor absoluto define una

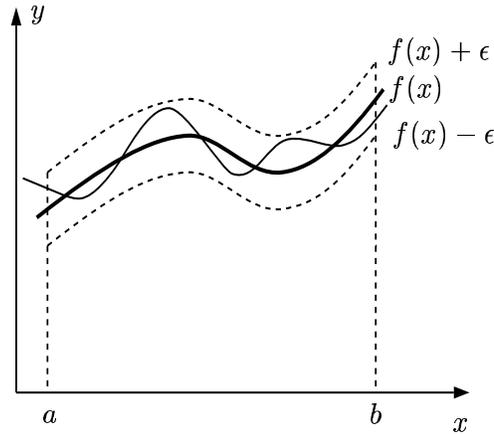


Figura 2.1: ilustración de la convergencia uniforme de f_n a f

norma en ese espacio (la definición de norma puede encontrarse al comienzo de la sección 2.3). Recordemos que una norma en un espacio vectorial es una medida de la “longitud” o “tamaño” de los vectores del espacio. Por ejemplo, si consideramos el espacio vectorial $C([a, b])$, formado por las funciones reales continuas, definidas sobre el intervalo $[a, b]$ podemos definir la norma $\|\cdot\|_\infty$ como

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (2.6)$$

(luego explicaremos por qué etiquetamos esta norma con el subíndice ∞). En este contexto, decir que una sucesión f_n converge uniformemente a f es equivalente a decir que la sucesión numérica $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. Por lo tanto, en $C([a, b])$ la convergencia uniforme no es otra cosa que *la convergencia respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$, o norma del supremo en $C([a, b])$* . Retomaremos estas cuestiones y las discutiremos con cierto detalle en la sección 2.3. ♠

Ejemplo 2.1.5. Sea

$$f_n(x) = \frac{1}{n + x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Para cada valor fijo de x esta sucesión tiende a cero. Por ejemplo, si $x = 0$ obtenemos la sucesión numérica $f_n(0) = 1/n$, si $x = 1$ resulta

$$f_n(1) = 1/(n + 1),$$

etcétera. En general, como $x^2 \geq 0$ tenemos $f_n(x) \leq 1/n$, así que $f_n(x) \rightarrow 0$ para cada $x \in \mathbf{R}$. La estimación que acabamos de encontrar muestra también

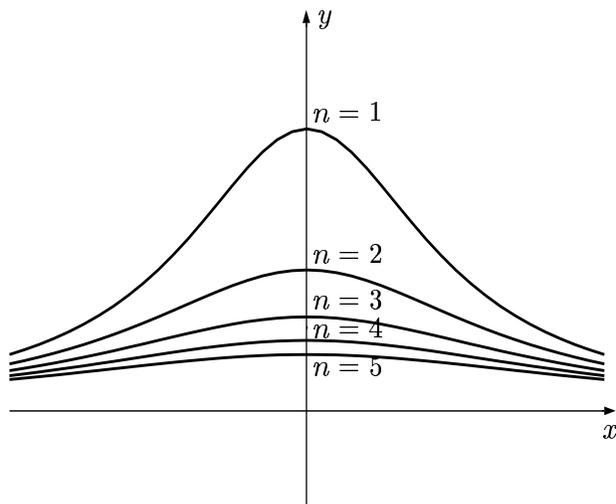


Figura 2.2: los gráficos de f_n para algunos valores de n

que hay convergencia uniforme a la función constante 0. El comportamiento de esta sucesión de funciones es el que aparece en la figura 2.2, en la que podemos apreciar que los gráficos de las f_n se van aproximando “uniformemente” al de la función constante 0. Mostraremos que la convergencia a 0 es uniforme con un sencillo cálculo. Podemos estimar

$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{n + x^2} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Por lo tanto, podemos tomar el supremo del miembro de la izquierda, dejando variar x en \mathbf{R} , para concluir que

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n}.$$

Esta estimación implica que el supremo tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Se satisface entonces la definición de convergencia uniforme. ♣

Ejemplo 2.1.6. La sucesión de funciones

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

converge uniformemente a e^x sobre el intervalo $[0, 1]$ (en realidad lo hace sobre cualquier intervalo acotado de \mathbf{R}). Mostramos el comportamiento de esta sucesión sobre $[0, 1]$ en la figura 2.3. Hemos representado la exponencial e^x

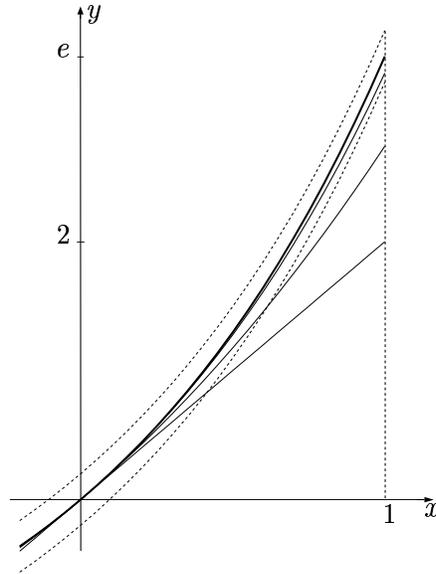


Figura 2.3: convergencia uniforme a la exponencial sobre el intervalo $[0, 1]$

(en trazo grueso), dos curvas $e^x \pm \epsilon$, y las aproximaciones f_n para tres valores de n (la recta corresponde al caso $n = 1$). Puede apreciarse como los gráficos de f_n entran en la banda definida por $e^x \pm \epsilon$ para valores grandes de n . ♣

A continuación presentaremos una teoría general, que podremos aplicar, en particular, a la sucesión de funciones x_m que obtuvimos al aplicar el método iterativo en el capítulo anterior.

2.1.1 Criterios de convergencia uniforme

El problema de determinar si una sucesión de funciones converge o no converge puntualmente consiste en estudiar el comportamiento de un conjunto de sucesiones numéricas: para cada x en el dominio X en el que estén definidas las funciones f_n bajo consideración debemos investigar si la sucesión numérica $f_n(x)$, que se obtiene evaluando las f_n en x , es convergente o divergente. Por lo tanto, el problema de la convergencia puntual se reduce a un problema de calcular límites de familias de sucesiones numéricas que dependen de un parámetro x .

En esta sección nos ocuparemos de dar criterios para saber si una sucesión de funciones f_n converge *uniformemente* a algún límite f .

Ejemplo 2.1.7. Consideremos $f_n(x) = x^n$, definidas en el intervalo $I = [0, 1]$. Si x está en el intervalo $[0, 1)$ entonces x^n converge a 0. En cambio si $x = 1$ tenemos $f_n(1) = 1^n = 1$, y en ese punto la sucesión converge al valor 1. En definitiva, la sucesión f_n converge puntualmente, en el intervalo I , a la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Pero, ¿convergerá uniformemente a algo la sucesión f_n ? ♣

El primer paso para responder la pregunta que quedó planteada consiste en retomar la observación de que la convergencia uniforme es una noción *más fuerte* que la convergencia puntual. En efecto, si las f_n están definidas sobre un conjunto X , la convergencia puntual de una sucesión f_n es equivalente a afirmar que cada una de las sucesiones numéricas $f_n(x)$, que se obtienen evaluando las funciones f_n en cada $x \in X$, converge a un límite $f(x)$. La convergencia uniforme presupone aún más, pues requiere que podamos estimar las diferencias $f_n(x) - f(x)$ por una cantidad que no depende de x y que tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Vale la pena recoger esta discusión en la siguiente proposición:

Proposición 2.1. *Si una sucesión de funciones f_n converge uniformemente sobre un conjunto X a una función f , entonces converge puntualmente a f en X .*

PRUEBA. Tenemos que mostrar que para cada $x \in X$ la sucesión $f_n(x)$ converge a $f(x)$. Como para cualquier x en X se satisface la desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|,$$

y la sucesión de los supremos tiende a 0 por nuestra hipótesis de convergencia uniforme resulta entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \quad x \in X.$$

Esto es equivalente a la convergencia puntual a la función f . ◇

Este resultado nos da alguna información útil para contestar la pregunta que quedó planteada al final del ejemplo 2.1.7, porque de él se desprende que si la sucesión x^n converge uniformemente a algo en $[0, 1]$ su límite uniforme no puede ser otra cosa que su límite puntual, la función f definida por las fórmulas 2.7. Por lo tanto, para saber si hay convergencia uniforme estudiemos la sucesión numérica

$$s_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Es claro que

$$(f_n - f)(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0, 1), \\ 0 & \text{si } x = 1, \end{cases} \quad (2.8)$$

por lo que $s_n = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$ y la convergencia no es uniforme. También puede apreciarse este hecho al graficar las funciones f_n y f , tal como hacemos en la figura 2.4.

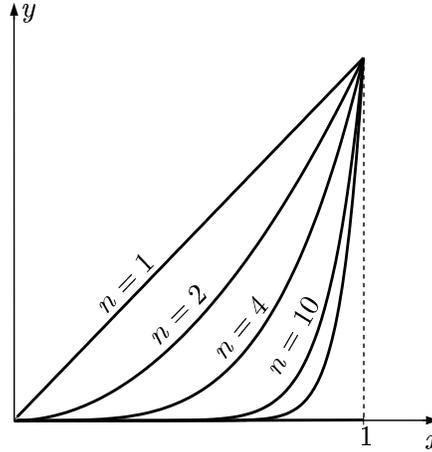


Figura 2.4: las sucesión de funciones x^n en el intervalo $[0, 1]$

En particular, obsérvese que para cualquier número $\epsilon \in (0, 1)$, hay puntos del gráfico de x^n que se “escapan” de la banda $(-\epsilon, \epsilon)$ independientemente de que tan pequeño sea ϵ y que tan grande sea n .

Observación 2.1.8. El ejemplo que acabamos de completar muestra que la convergencia uniforme es una noción realmente más fuerte que la convergencia puntual, ya que puede haber convergencia puntual de las f_n a un límite f , aunque la convergencia no sea uniforme. En consecuencia, el recíproco de la proposición 2.1 es falso. ♠

Veamos un ejemplo un poco más sutil que el anterior.

Ejemplo 2.1.9. Tomemos $I = [0, 1]$ y $f_n(x) = n(1-x)x^n$. Si $x < 1$ entonces nx^n tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, así que $f_n(x) \rightarrow 0$ en $0 \leq x < 1$. Además

$f_n(1) = 0$ para cualquier valor de n . Por lo tanto, la sucesión f_n converge puntualmente a la función constante 0 en todo el intervalo $[0, 1]$. Para estudiar

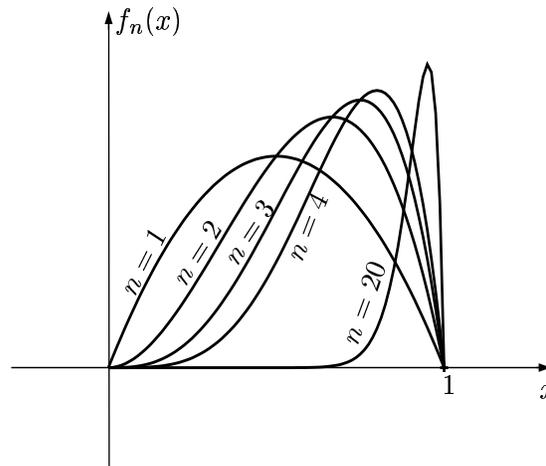


Figura 2.5: los gráficos de f_n para algunos valores de n

si la convergencia es uniforme calcularemos el supremo de

$$|f_n(x) - 0| = nx^n(1-x) \quad (2.9)$$

en el intervalo $[0, 1]$. Este es un sencillo cálculo que podemos abordar con las técnicas del cálculo diferencial de una variable. La función $nx^n(1-x)$ se anula en los extremos de I . Si la derivamos obtenemos

$$n(nx^{n-1} - (n+1)x^n),$$

que se anula en $x = 0$ y $x = n/(n+1)$. La función (2.9) alcanza su máximo en este último punto, entonces

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - 0| = f_n(n/(n+1)) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

que tiende a $1/e$ cuando n tiende a infinito.

En la figura 2.5 representamos los gráficos de las funciones $f_n(x)$ sobre el intervalo $[0, 1]$. Nuevamente, podemos apreciar en el dibujo que la convergencia no es uniforme, lo que está de acuerdo con nuestros cálculos. ♣

Ejercicio 2.2. * Calcular el límite puntual e investigar si hay convergencia uniforme de las siguientes sucesiones f_n , definidas sobre los conjuntos X que se indican a continuación:

1. $f_n(x) = (nx)^{-1}$, $X = [1, +\infty)$.
2. $f_n(x) = n^{1/2}x(1 + nx)^{-1}$, $X = [0, 1]$.
3. Para $X = \mathbf{R}$ considerar

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq n, \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

4. $f_n(x) = xe^{-nx}$, $X = [0, +\infty)$.

Ejercicio 2.3. * Consideremos dos sucesiones de funciones f_n y g_n definidas sobre un conjunto X , que convergen uniformemente a f y g respectivamente.

1. Mostrar que $f_n + g_n$ converge uniformemente a $f + g$.
2. Si existe una constante M tal que $|f_n(x)| \leq M$ y $|g_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y para todo n , entonces $f_n g_n$ converge uniformemente a fg . Sugerencia: tener en cuenta que

$$f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f).$$

3. Mostrar que las sucesiones $f_n(x) = x/(1 + nx)$ y $g_n(x) = 1/x$ convergen uniformemente en el intervalo $(0, +\infty)$. ¿Qué ocurre con el producto $f_n g_n$?

Ejercicio 2.4. * UNICIDAD DE LOS LÍMITES PUNTUAL Y UNIFORME

Mostrar que si una sucesión de funciones converge puntualmente a f sobre un conjunto X , y también converge puntualmente a g en X , entonces $f \equiv g$. Enunciar y probar un resultado análogo para la convergencia uniforme.

Ejercicio 2.5. ** Supongamos que f_n converge uniformemente a f sobre un conjunto X , y que f está acotada, en el sentido de que existe un número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. Probar que existen números \bar{M} y N tales $|f_n(x)| \leq \bar{M}$ para todo $x \in X$ y para todo $n \geq N$. Investigar si el mismo resultado vale cuando f_n converge a f sólo puntualmente.

Ejemplo 2.1.10. LA CONVERGENCIA PUNTUAL Y UNIFORME DE UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES DEPENDE DEL CONJUNTO SOBRE EL QUE ESTEMOS TRABAJANDO

Retomemos la sucesión de funciones del ejemplo 2.1.9 pero discutamos ahora su comportamiento en el intervalo $I = [-1, 1]$. Mientras $|x| < 1$ tenemos que $nx^n \rightarrow 0$, así que $f_n(x)$ converge a 0 en el intervalo $(-1, 1)$. Es trivial verificar que también $f_n(1)$ converge a 0. Por lo tanto concluimos que f_n converge puntualmente a la función 0 en $(-1, 1]$. Al evaluar en $x = -1$ obtenemos $f_n(-1) = 2n(-1)^n$, que es una sucesión divergente. De modo que nuestra sucesión de funciones no tiene un límite puntual en todo el intervalo $[-1, 1]$.

Podemos hacer una consideración parecida para la convergencia uniforme. Vimos que las f_n no convergen uniformemente a 0 en $[0, 1]$ porque el valor

máximo de la función se aproxima a $1/e$ cuando $n \rightarrow \infty$. Observamos también que el máximo de f_n en $[0, 1]$ está en $x = n/(n+1)$, que se acerca a 1 para valores grandes de n . Veremos ahora que si tenemos cuidado en mantenernos lejos de $x = 1$ entonces podemos obtener conjuntos sobre los cuales hay convergencia uniforme a 0. En efecto, sea $\delta \in (0, 1)$ e $I_\delta = [0, \delta]$. Mostraremos que f_n converge uniformemente a 0 sobre cualquier intervalo I_δ . Si n es suficientemente grande, tanto como para que $\delta < n/(n+1)$ o, equivalentemente, $n > \delta(1-\delta)$, entonces

$$\sup_{x \in I_\delta} |f_n(x) - 0| = f_n(\delta) = n\delta^n(1-\delta). \quad (2.10)$$

Como $n\delta^n(1-\delta) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ hay convergencia uniforme a 0 en I_δ . ♣

Ejercicio 2.6. * Investigar sobre qué conjuntos hay convergencia puntual y uniforme de la sucesión $f_n(x) = x^n$. En particular, mostrar que f_n converge uniformemente a 0 en todos los intervalos de la forma $[0, \delta]$, con $\delta \in (0, 1)$, pero la sucesión f_n no converge uniformemente en $[0, 1)$.

Ejercicio 2.7. ** Consideremos una función $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, no idénticamente nula, continua, tal que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$. A partir de h definimos, para cada natural $n \geq 1$ las funciones $f_n(x) = h(nx)$ y $g_n(x) = h(x/n)$. Investigar la convergencia puntual y uniforme de las funciones f_n , g_n , f_n/n y g_n/n .

Observación 2.1.11. Vamos a cerrar esta sección con un sencillo resultado que a veces ayuda en los cálculos. En los ejemplos 2.1.5 y 2.1.9 tuvimos cuidado de calcular el valor de $\sup |f_n - f|$. En general, para mostrar que hay convergencia uniforme basta estimar esta cantidad en vez de calcularla. Esta observación es bastante útil porque simplifica, o directamente hace posibles, los cálculos en muchas situaciones. Resumimos esta observación en la siguiente proposición.

Proposición 2.2. *La sucesión f_n converge uniforme a f en X si y sólo si existe una sucesión de números positivos b_n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ y para cada n la desigualdad $|f_n(x) - f(x)| \leq b_n$ se satisface para todo x en el conjunto X .*

PRUEBA. Introduzcamos la notación

$$s_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

Recordemos que, por definición, la sucesión f_n converge uniformemente a f si y sólo si la sucesión s_n formada por los supremos tiende a 0. Por lo tanto, si hay convergencia uniforme de las f_n a f basta escoger $b_n = s_n$ para mostrar la existencia de una sucesión con las propiedades deseadas.

Para probar el recíproco notemos que si se satisface

$$|f_n(x) - f(x)| \leq b_n, \quad x \in X$$

entonces $s_n \leq b_n$. Por otra parte es obvio que $0 \leq s_n$ así que $0 \leq s_n \leq b_n$. Como $b_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces también $s_n \rightarrow 0$. \diamond

Ejercicio 2.8. * Hallar el límite de $f_n(x) = e^{\cos^2 x - nx}$ en $[1, \infty)$, y mostrar que la convergencia a ese límite es uniforme. ♣ ♠

2.1.2 Condición de Cauchy para la convergencia uniforme

En esta sección vamos a generalizar algunos de los argumentos que desarrollamos al aplicar el método iterativo para construir la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Recordemos que obtuvimos la solución $x(t)$ como límite uniforme de una sucesión $x_m(t)$, que fabricamos aplicando el operador integral T . Los argumentos que usamos para asegurar la existencia del límite $x(t)$ y la convergencia uniforme a ese límite pueden extenderse a situaciones mucho más generales y proveen criterios útiles de convergencia. Si revisamos críticamente la prueba de los lemas 1.7 y 1.8 notaremos que la clave de todo lo que allí se hace es la estimación 1.281, en la que se prueba que la diferencia

$$|x_{m+l}(t) - x_m(t)|$$

puede estimarse, uniformemente en t , por una cantidad que es muy pequeña, independientemente de l , si m es muy grande. Es un hecho general que una propiedad de este tipo asegura la convergencia uniforme de una sucesión de funciones, al punto de que vale la pena introducir una definición que recoja esta noción.

Definición 2.1. SUCESIÓN DE FUNCIONES UNIFORMEMENTE DE CAUCHY
Diremos que una sucesión de funciones f_n , definidas sobre un conjunto X , es *uniformemente de Cauchy en X* si dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$\sup_{x \in X} |f_{n+l}(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad (2.11)$$

se satisface para todo $n \geq n_0$ y $l \geq 0$.

Ejemplo 2.1.12. La sucesión x_m que construimos en el final del capítulo anterior es uniformemente de Cauchy en el intervalo $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Esto es una consecuencia inmediata de la estimación (1.284) que utilizamos en la prueba del lema 1.8 y de la definición que acabamos de dar. ♣

En la sección 1.9 dedujimos la convergencia uniforme de la sucesión x_m de la condición de Cauchy. Esto es completamente general, y, tal como ocurría para la sucesión x_m , el hecho de que una sucesión de funciones sea uniformemente de Cauchy es suficiente para asegurar su convergencia uniforme. En realidad ambas cosas son equivalentes, tal como mostraremos a continuación. La prueba de que la condición uniforme de Cauchy implica la convergencia uniforme no es más que una generalización inmediata de lo que hicimos para demostrar los lemas 1.7 y 1.8.

Teorema 2.1. *Una sucesión de funciones f_n definidas sobre un conjunto X es uniformemente de Cauchy si y sólo existe una función f tal que $f_n \Rightarrow f$ en X .*

PRUEBA. Supongamos que f_n es uniformemente de Cauchy. En primer lugar notemos que cada sucesión numérica

$$f_n(x) \quad x \in X,$$

es una sucesión de Cauchy, como consecuencia de la estimación obvia

$$|f_{n+l}(x) - f_n(x)| \leq \sup_X |f_{n+l} - f_n|, \quad x \in X.$$

Por lo tanto, para cada $x \in X$, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Definamos una función $f(x)$ por medio de la fórmula

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in X.$$

Es evidente que f_n converge puntualmente a f . Mostraremos ahora que $f_n \Rightarrow f$. Para ello usaremos que la condición de Cauchy se satisface uniformemente en X . Fijemos un $\epsilon > 0$. Entonces existe un n_0 tal que

$$\sup_{x \in X} |f_{n+l}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon, \quad (2.12)$$

si $n \geq n_0$ y $l \geq 0$. Por lo tanto

$$|f_{n+l}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon, \quad (2.13)$$

para todo $x \in X$, $n \geq n_0$ y $l \geq 0$. Hagamos $l \rightarrow \infty$ en esta desigualdad, con x fijo. Como $f_n(x)$ tiende a $f(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_{n+l}(x) = f(x),$$

así que pasando al límite en (2.13) obtenemos

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon. \quad (2.14)$$

Esta desigualdad se satisface para todo $x \in X$ y para todo $n \geq n_0$, por lo que

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon, \quad (2.15)$$

si $n \geq n_0$. Esto implica que $\sup_X |f(x) - f_n(x)|$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito, es decir, la convergencia uniforme de f_n a f en X .

Para probar el resultado en la otra dirección no hay más que hacer un argumento parecido al que permite probar que si una sucesión de números

reales converge es de Cauchy. Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$. Dado $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que

$$\sup_X |f_n - f| < \epsilon \text{ si } n > n_0.$$

Si $n > n_0$ y queremos estimar la diferencia de f_n y f_{n+l} , con $l \geq 0$ hacemos

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_{n+l}(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_{n+l}(x) - f(x)| \leq \\ \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in X} |f_{n+l}(x) - f(x)| &< 2\epsilon. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como hemos logrado estimar $|f_n(x) - f_{n+l}(x)|$ por 2ϵ , que no depende de x , tomamos supremo en x para concluir

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f_{n+l}(x)| \leq 2\epsilon < 3\epsilon \text{ si } n \geq n_0, \quad l \geq 0. \quad (2.17)$$

Esto es justamente lo que se requiere para que se satisfaga la condición de Cauchy de convergencia uniforme, porque 3ϵ es un número positivo que podemos escoger a nuestro antojo. \diamond

Hay un corolario útil de todo esto, que fue esencialmente el que usamos en la última sección:

Corolario 2.3. *Si el valor absoluto de la diferencia entre dos términos sucesivos de la sucesión f_n puede acotarse por el término general de una serie convergente, entonces f_n converge uniformemente.*

PRUEBA. La prueba de este corolario es sencilla. Supongamos que existe una serie convergente, con término b_n , tal que $|f_{n+1} - f_n| \leq b_n$. Entonces

$$|f_{n+l} - f_n| = \left| \sum_{i=n}^{n+l-1} (f_{i+1} - f_i) \right| \leq \sum_{i=n}^{n+l-1} |f_{i+1} - f_i| \leq \sum_{i=n}^{n+l-1} b_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} b_i. \quad (2.18)$$

Como el último término en esta cadena de estimaciones es la cola de una serie convergente tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, de lo que se desprende la condición de Cauchy para las f_n y de ahí la convergencia uniforme. \diamond

2.1.3 Series de funciones

El último resultado que probamos se adapta especialmente bien al estudio de la convergencia de series de funciones. En efecto, si la sucesión f_n que estamos considerando está formada por las reducidas n -ésimas de una serie de término general

$$a_n(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

entonces tendremos

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x). \quad (2.19)$$

y la diferencia

$$f_{n+1} - f_n = a_n$$

es el término general de la serie. Como es bien conocido para las series numéricas, estudiar el comportamiento de una serie no es otra cosa que considerar sucesiones de funciones que se obtienen sumando otras sucesiones. Está claro entonces que a la sucesión f_n de las reducidas le podremos aplicar todo lo que sepamos de la teoría general para sucesiones de funciones, en particular nuestro último corolario. Sin embargo, la representación en serie de diversas funciones es una herramienta muy útil para su análisis, por lo que prestaremos especial atención a reformular todos los resultados para sucesiones de funciones en una forma adecuada a trabajar con series.

El corolario 2.3 puede traducirse al muy útil teorema que pasamos a enunciar. Es usual referirse a la condición suficiente de convergencia uniforme que contiene como al *criterio de la mayorante de Weierstrass*.

Teorema 2.2. *Consideremos una sucesión de funciones a_n definidas sobre X . Si existe una sucesión de números reales b_n tales que*

$$|a_n(x)| \leq b_n, \quad \forall x \in X, \quad (2.20)$$

y la serie $\sum_n b_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_n a_n$ converge uniformemente en X .

Ejercicio 2.9. * Probar el teorema anterior. Hacerlo de dos maneras:

1. A partir del último corolario.
2. Usando la definición de convergencia uniforme y la condición de Cauchy para sucesiones numéricas. Al hacer el ejercicio de esta segunda manera habrá que repasar toda la teoría que hemos presentado hasta ahora.

Ejemplo 2.1.13. El criterio de la mayorante da alguna información nueva sobre la suma de la trillada serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Suponemos conocido el hecho de que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

y diverge cuando $|x| \geq 1$. En nuestro lenguaje de convergencia de sucesiones y series de funciones diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge puntualmente a $1/(1-x)$ en el intervalo $(-1, 1)$. El criterio de la mayorante asegura que si $\delta \in (0, 1)$ la serie converge uniformemente en $[-\delta, \delta]$. En efecto, si $x \in [-\delta, \delta]$ entonces $|x|^n \leq \delta^n$. Como la serie numérica con término general δ^n es convergente concluimos que la serie de término general x^n converge uniformemente a $1/(1-x)$ en todos los intervalos $[-\delta, \delta]$, para $0 < \delta < 1$.

Ejercicio 2.10. ** Usar el hecho de que

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad (2.21)$$

para concluir directamente, sin usar el criterio de la mayorante, que S_n converge uniformemente a $1/(1-x)$ en los intervalos $[-\delta, \delta]$, con $\delta \in (0, 1)$. Mostrar además que S_n no converge uniformemente en $(-1, 1)$.

Observación 2.1.14. Las consideraciones que estamos haciendo se aplican a la serie geométrica cuando x es un número complejo de módulo menor que 1. Es usual usar la notación z en vez de x cuando se trata de números complejos, así que seguiremos ese uso. Podemos afirmar entonces que la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i \quad (2.22)$$

converge puntualmente a $f(z) = 1/(1-z)$ en el disco $\{|z| < 1\}$ y lo hace uniformemente sobre los discos $\{|z| < r\}$, si $0 < r < 1$. ♠ ♣

A continuación presentamos algunos ejercicios de aplicación del criterio de la mayorante.

Ejercicio 2.11. * Estudiar la convergencia y la convergencia uniforme de las series de funciones $\sum_n a_n$ con término general

1. $a_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$, $n=1, 2, \dots$,
2. $a_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ $n=1, 2, \dots$

Ejercicio 2.12. **

1. Sea $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ una función tal que $\sup_X |f| < 1$. Mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} f(x)^n$ converge uniformemente y calcular su suma.
2. Estudiar la convergencia, convergencia uniforme y calcular la suma cuando corresponda para las series de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$, cuyo término general es:

$$\text{i) } \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n, \quad \text{ii) } \frac{(-1)^n}{2^n} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n, \quad \text{iii) } xe^{-nx}.$$

2.1.4 Convergencia y continuidad

En esta sección comenzaremos a tratar de determinar cuáles son las propiedades de una sucesión de funciones f_n que “pasan al límite”. Varias cuestiones de esta naturaleza quedaron planteadas al final del capítulo 1, entre ellas la siguiente pregunta: ¿es continuo el límite de una sucesión de funciones continuas? En lo que sigue supondremos que el conjunto X sobre el que estamos trabajando es un subconjunto de \mathbf{R} , \mathbf{C} o \mathbf{R}^n , y la distancia entre dos puntos x e y en X será la usual.

Empecemos por razonar informalmente. Tomemos una sucesión de funciones continuas f_n definida en X , que converge puntualmente a un límite f y estudiemos la continuidad de f . Para ello tomemos un punto $x \in X$ y tratemos de ver si el valor $f(y)$ de la función f en un punto $y \in X$ está “cerca” del valor $f(x)$ cuando y está cerca de x . Queremos estimar entonces $|f(x) - f(y)|$ y ver si podemos hacer esta diferencia tan pequeña como queramos (menor que un ϵ prefijado) tomando y muy próximo a x ($|x - y| < \delta$, donde δ debe elegirse de manera conveniente). Vamos a escribir esta diferencia haciendo aparecer las f_n , para usar la convergencia de f_n a f y la continuidad de las f_n . Considero

$$f(x) - f(y) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y). \quad (2.23)$$

Por lo tanto, como una consecuencia de la desigualdad triangular tenemos

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|. \quad (2.24)$$

Fijemos un $\epsilon > 0$ y tratemos de acotar cada uno de los sumandos en el miembro de la derecha de (2.24). Como las f_n convergen puntualmente a f las sucesiones $f_n(x)$ y $f_n(y)$ tienden a $f(x)$ y $f(y)$ respectivamente. La convergencia de $f_n(x)$ implica que existe n_0 tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/3 \quad \text{si } n \geq n_0.$$

Análogamente, existe n_1 tal que

$$|f_n(y) - f(y)| < \epsilon/3 \quad \text{si } n \geq n_1.$$

Fijemos ahora $n \geq \max\{n_0, n_1\}$. Como f_n es continua existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \epsilon/3 \quad \text{si } |y - x| < \delta.$$

Por lo tanto, si se satisface esta última condición podemos asegurar, a partir de la estimación (2.24), que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Con este argumento habríamos probado que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas es continuo. Si aplicamos este resultado al ejemplo 2.1.7 concluimos que la función f definida en el intervalo $[0, 1]$ por la fórmula (2.7) es una función continua en $[0, 1]$. Interesante, ¿no?

Ejercicio 2.13. * ¿Es continua o no es continua la función f definida en $[0, 1]$ por (2.7)?

2.2 Propiedades de la convergencia uniforme

En esta sección nos ocuparemos de las propiedades de las sucesiones de funciones que convergen uniformemente. En particular de las relaciones entre la convergencia uniforme y la continuidad, y entre la convergencia uniforme y las operaciones de integración y derivación. Es interesante subrayar que en esta sección probaremos varios resultados para sucesiones de funciones que convergen uniformemente, que son en general falsos si sólo se usa la hipótesis más débil de convergencia puntual.

2.2.1 Convergencia y continuidad revisitadas

Es imprescindible empezar con una aclaración. Como ya sospecharán quienes hayan leído atentamente el final de la sección anterior los argumentos que allí presentamos **están mal y en general es falso que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas sea continuo**. Un ejemplo que muestra esto es el 2.1.7, donde se estudia la convergencia de las funciones x^n en el intervalo $[0, 1]$. A continuación presentamos otro ejemplo.

Ejemplo 2.2.1. EL LÍMITE PUNTUAL DE UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS PUEDE NO SER CONTINUO.

Consideremos la sucesión de funciones definida en \mathbf{R} por

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}, \quad (2.25)$$

e investiguemos su convergencia cuando $n \rightarrow \infty$. Para estudiar la convergencia recordemos que

$$\begin{aligned} x^{2n} &\rightarrow 0 && \text{si } |x| < 1, \\ x^{2n} &= 1 && \text{si } x = \pm 1, \\ x^{2n} &\rightarrow +\infty && \text{si } |x| > 1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por lo tanto $f_n(x)$ converge puntualmente en \mathbf{R} a la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \pm 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1, \end{cases} \quad (2.27)$$

que es una función discontinua en los puntos $x = -1$ y $x = 1$. ♣

Tal como este nuevo ejemplo confirma, el límite puntual de una sucesión de funciones continuas puede ser discontinuo³.

³vale la pena mencionar el hecho de que Cauchy creía lo contrario e incluso llegó a “probar” que si una sucesión de funciones continuas converge puntualmente a un límite f entonces f es continua. Cauchy hizo esta afirmación, alrededor de 1820, en un momento en que las nociones básicas del análisis matemático en la forma que lo conocemos hoy en día todavía no estaban completamente precisadas

Intentemos ver qué es lo que fracasa en el argumento que hicimos en la sección anterior. Nuestro calculo consistía en estimar

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|. \quad (2.28)$$

Fijábamos x y $\epsilon > 0$. Luego decíamos que, como para cada y la sucesión $f_n(y)$ converge a $f(y)$, existe un n_1 tal que $|f_n(y) - f(y)| < \epsilon$ si $n > n_1$. Esta afirmación es casi correcta, pero un poco ingenua. Notemos que para cada y la sucesión $f_n(y)$ es una sucesión numérica diferente y, si bien es cierto que fijado un y la diferencia

$$f_n(y) - f(y)$$

puede hacerse tan pequeña como se quiera con tal de tomar n grande, en general el valor de n que hay que usar *depende del punto y* . Esta consideración es fundamental, porque lo que sí es cierto es que para cada y existe un número $n = n(\epsilon, y)$, que depende *de ϵ y de y* , tal que

$$|f_n(y) - f(y)| < \epsilon \quad \text{si} \quad n > n(\epsilon, y).$$

Es en este punto donde fracasa la “prueba” que hicimos en la sección 2.1.4.

Ejemplo 2.2.2. Estudiemos esta cuestión de la dependencia de n en ϵ y el punto x del conjunto X para el caso $f_n(x) = x^n$, $X = [0, 1]$. Si $x = 1$ el problema es trivial, porque para todo n se tiene $f_n(1) = 1$, así que nos limitaremos a considerar $x < 1$. Si $x < 1$ el límite $f(x)$ es cero. Tomemos $\epsilon \in (0, 1)$ y busquemos el valor de n a partir del cual se satisface la condición

$$\epsilon > |f_n(x) - f(x)| = x^n. \quad (2.29)$$

El caso $x = 0$ es trivial. Cuando $x \neq 0$ tomamos logaritmos en (2.29) para concluir que esta desigualdad es completamente equivalente a $n > \log \epsilon / \log x$. Por lo tanto en este ejemplo tenemos

$$n(\epsilon, x) = \frac{\log \epsilon}{\log x}, \quad \text{si} \quad x \in [0, 1]. \quad (2.30)$$

Es evidente de esta fórmula que $n(\epsilon, x)$ es grande cuando ϵ es chico, tal como era de esperar, pero también *es grande cuando x está próximo a 1*. En particular, si intentáramos probar la continuidad de la función límite en $x = 1$, nuestro argumento fracasaría porque el valor de n necesario para acotar la diferencia $f_n(y) - f(y)$ por ϵ tiende a infinito cuando y se acerca a 1. ♣

Ejercicio 2.14. ** Calcular $n(\epsilon, x)$ en el ejemplo 2.2.1 e investigar su comportamiento para x cerca de los puntos ± 1 , en los que la función límite es discontinua.

Recordemos que cuando la convergencia de las f_n a su límite f es uniforme sobre un conjunto X , la aproximación $f_n(x)$ a f es *uniforme* y el valor de n

necesario para que $|f_n(x) - f(x)|$ sea menor que un valor ϵ prefijado *deja de depender de x* . Esto es una consecuencia directa de la definición. Si $f_n \rightrightarrows f$ en X entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Si fijamos $\epsilon > 0$ existe un número $n(\epsilon)$ (que sólo depende de ϵ , porque ahora no tenemos entre manos más que *una* sucesión numérica) tal que

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{si} \quad n > n(\epsilon).$$

Por lo tanto

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad x \in X, \quad n > n(\epsilon).$$

Ejemplo 2.2.3. Si consideramos la sucesión x^n en un intervalo $I_\delta = [0, \delta]$, con $\delta < 1$ fijo, y tomamos $\epsilon \in (0, 1)$, entonces podemos escoger

$$n(\epsilon) = \log \epsilon / \log \delta.$$

Recordemos que x^n converge uniformemente a 0 sobre los intervalos I_δ que estamos considerando. ♣

Luego de todas estas consideraciones ya estamos listos para enunciar y demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.3 (Convergencia uniforme y continuidad). *Sea X un subconjunto de \mathbf{R} (\mathbf{R}^n o \mathbf{C}) y f_n una sucesión de funciones continuas en un punto $x \in X$, que convergen uniformemente en X a una función f . Entonces f es continua en x .*

PRUEBA. Tenemos que probar que dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, si y está en X y $|x - y| < \delta$. Consideremos entonces $\epsilon > 0$ y busquemos estimar la diferencia $f(x) - f(y)$ como antes:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|. \quad (2.31)$$

Como para cualquier punto $y \in X$, en particular para x , se satisface

$$|f_n(y) - f(y)| \leq \sup_X |f_n - f|$$

entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \sup_X |f - f_n| + |f_n(x) - f_n(y)|.$$

Esta última desigualdad es válida para cualquier n . Como hay convergencia uniforme en X la sucesión numérica $\sup_X |f - f_n|$ tiende a 0, así que existe un $n(\epsilon)$ tal que

$$\sup_X |f - f_n| \leq \epsilon/4 \quad \text{si} \quad n > n(\epsilon).$$

Fijemos un n_0 cualquiera que satisfaga $n_0 > n(\epsilon)$. En virtud de la estimación anterior tenemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)|. \quad (2.32)$$

La continuidad de la función f_{n_0} en el punto x asegura que existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \epsilon/2 \quad \text{si} \quad |x - y| < \delta. \quad (2.33)$$

Para este δ obtenemos, combinando (2.32) y (2.33), que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |x - y| < \delta.$$

Esto completa la prueba de la continuidad de f en x . \diamond

El teorema que acabamos de probar tiene que ver con la continuidad en un punto x del dominio de definición de las funciones f_n y f , pero tiene como consecuencia inmediata el siguiente corolario:

Corolario 2.4. *Sea X un conjunto de \mathbf{R} (\mathbf{R}^n o \mathbf{C}) y f_n una sucesión de funciones continuas en X , que convergen uniformemente en X a una función f . Entonces f es continua en X .*

La prueba de este resultado es inmediata y consiste en aplicar el teorema anterior en cada punto x del conjunto X . Notemos además que podemos derivar de todo esto un sencillo criterio para saber que algunas sucesiones de funciones no convergen uniformemente.

Corolario 2.5. *Si una sucesión f_n , de funciones continuas definidas sobre un conjunto X , converge puntualmente en X a un límite f que no es continuo, entonces la convergencia no es uniforme en X .*

Ejemplo 2.2.4. Las sucesión x^n no converge uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. La sucesión $1/(1 + x^{2n})$ no converge uniformemente en \mathbf{R} . \clubsuit

También es posible derivar una versión para series de funciones del teorema de convergencia uniforme y continuidad.

Corolario 2.6. *Sea a_n una sucesión de funciones continuas definidas en un conjunto $X \subset \mathbf{R}$ (\mathbf{R}^n o \mathbf{C}). Si la serie $\sum a_n$ converge uniformemente en X entonces su límite es una función continua en X .*

Ejercicio 2.15. * Probar que las series del ejercicio 2.11 definen funciones continuas en \mathbf{R} .

Ejercicio 2.16. * UN ADELANTO DE LAS SERIES DE FOURIER

1. * Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < \infty. \quad (2.34)$$

Sea L un número real positivo cualquiera. Probar que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \right\} \quad (2.35)$$

define una función continua, periódica de período L , sobre \mathbf{R} . ♡

2. ** Sea $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tal que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| < \infty. \quad (2.36)$$

Esta suma debe interpretarse como

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} |a_n|. \quad (2.37)$$

Sea L un número real positivo cualquiera. Probar que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2n\pi i}{L}x} \quad (2.38)$$

define una función continua, periódica de período L , sobre \mathbf{R} .

Observación 2.2.5. El teorema 2.3 puede verse como un resultado sobre el intercambio de dos operaciones del paso al límite. En general, la continuidad de una función f en un punto x puede caracterizarse de la siguiente manera $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$. Si las f_n son continuas y f es el límite de las f_n podemos escribir

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} f_n(y). \quad (2.39)$$

Por otro lado, podemos usar primero la continuidad de f y luego la convergencia de las f_n a f para escribir

$$f(x) = \lim_{y \rightarrow x} f(y) = \lim_{y \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y). \quad (2.40)$$

De esto se desprende que, en las hipótesis del teorema 2.3, vale la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} f_n(y) = \lim_{y \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) \quad (2.41)$$

y es legítimo intercambiar las dos operaciones de paso al límite. ♠

† Equicontinuidad

Para intentar probar la continuidad, en un punto $x \in X$, del límite puntual de una sucesión de funciones recurrimos a la definición de continuidad. Fijamos $\epsilon > 0$ y estimamos la diferencia $f(y) - f(x)$ usando la fórmula (2.31). Luego tratamos de asegurarnos de que podíamos hacer pequeños cada uno de los sumandos que aparecen en el término de la derecha tomando n grande e y cerca de x . Analicemos un poco esto.

1. Para cada $y \in X$, en particular para $y = x$, existe un número $n(\epsilon, y)$ tal que

$$|f_n(y) - f(y)| < \epsilon \text{ si } n > n(\epsilon, y).$$

Cuando la convergencia no es uniforme teníamos el problema de que este $n(\epsilon, y)$ puede hacerse muy grande cuando y se aproxima a x .

2. La diferencia $|f_n(y) - f_n(x)|$ puede hacerse pequeña usando la continuidad de f_n en x . La continuidad asegura que existe un número δ tal que

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \epsilon \text{ si } |y - x| < \delta.$$

Es importante notar ahora que este número δ depende de ϵ , del punto x en que estemos trabajando y también depende del comportamiento de la función f_n cerca de x . Como la función f_n cambia al cambiar n resulta entonces que δ también depende de n y es, en definitiva $\delta = \delta(\epsilon, x, n)$.

Ejemplo 2.2.6. Consideremos la sucesión $f_n(x) = x^n$ en $[0, 1]$ y el punto $x = 1$ de ese intervalo, en el que todas estas funciones toman el valor 1. Fijemos $\epsilon > 0$ y tratemos de determinar para que $x \in [0, 1]$ se satisface

$$|f_n(1) - f_n(x)| = 1 - x^n < \epsilon. \quad (2.42)$$

Es claro que debe ser $x > (1 - \epsilon)^{1/n}$, lo que implica que

$$|1 - x| = 1 - x < 1 - (1 - \epsilon)^{1/n} = \delta(\epsilon, 1, n). \quad (2.43)$$

Vemos entonces que en este punto el δ que nos asegura una buena aproximación del valor $f_n(1)$ por $f_n(x)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. ♣

La dependencia de n en y y de δ en n es lo que hace fracasar el argumento ingenuo de la sección 2.1.4. Sin embargo el argumento camina cuando la convergencia es uniforme y n deja de depender de y . Veremos a continuación que también es posible mostrar la continuidad del límite cuando δ no depende de n . Conviene introducir una definición que recoja esta nueva noción.

Definición 2.2. EQUICONTINUIDAD

Una sucesión de funciones f_n definidas en un conjunto $X \subset \mathbf{R}$ (\mathbf{R}^n o \mathbf{C}) es *equicontinua en* $x \in X$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo n se satisface la desigualdad

$$|f_n(y) - f_n(x)| < \epsilon \quad (2.44)$$

si $y \in X$ y $|y - x| < \delta$.

El contenido de esta definición es que el $\delta = \delta(\epsilon, x)$ *no* depende de n .

Ejercicio 2.17. * Mostrar que la sucesión x^n es equicontinua en todos los puntos del intervalo $[0, 1)$, pero no lo es en $x = 1$.

Ejercicio 2.18. ** Mostrar que si una sucesión f_n definida en un conjunto X (que se supondrá contenido en \mathbf{R} , \mathbf{R}^n o \mathbf{C}) converge puntualmente en X a un límite f y es equicontinua en $x \in X$, entonces f es continua en x . ††

2.2.2 Convergencia e integración

El objetivo de esta sección es estudiar la relación entre las operaciones de integración y paso al límite. Comenzaremos por presentar un ejemplo que ilustra el tipo de problemas que nos ocuparán y, de paso, da alguna información acerca de cuales son las respuestas posibles.

Ejemplo 2.2.7. LA INTEGRAL DEL LÍMITE PUEDE NO SER EL LÍMITE DE LAS INTEGRALES

Este ejemplo es una pequeña extensión del ejemplo 2.1.9. Consideraremos, para $\alpha \in \mathbf{R}$ cualquiera, las sucesiones de funciones

$$f_n(x) = n^\alpha(1-x)x^n, \quad x \in I = [0, 1]. \quad (2.45)$$

Es fácil ver que, para cualquier α estas sucesiones convergen puntualmente a 0 en I . Para ver si la convergencia es uniforme simplemente recordemos que el máximo de f_n se alcanza en $x = n/(n+1)$ (ver el ejemplo 2.1.9) y tenemos entonces

$$\sup_I f_n = f_n(n/(n+1)) = n^{\alpha-1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e}, \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.46)$$

Por lo tanto hay convergencia uniforme a 0 si $\alpha < 1$, y no la hay si $\alpha \geq 1$.

Pasemos ahora a estudiar el comportamiento de las integrales de f_n . Consideremos

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = n^\alpha \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n^\alpha}{(n+1)(n+2)}. \quad (2.47)$$

De este cálculo se desprende que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 2, \\ 1 & \text{si } \alpha = 2, \\ 0 & \text{si } \alpha < 2. \end{cases} \quad (2.48)$$

Como $f_n \rightarrow 0$ (puntualmente) en todos los casos, independientemente del valor de α , está claro que en general es falso que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad (2.49)$$

cuando $\lim_n f_n = f$ vale en el sentido de la convergencia puntual. Observemos que, a pesar de que las f_n convergen a 0 para cualquier α , cuando $\alpha \geq 2$ siempre hay puntos donde la función f_n toma valores muy grandes y eso basta para hacer grandes las integrales. Cuando hay convergencia uniforme a 0, en el rango $\alpha < 1$ este tipo de comportamiento no es posible porque las f_n son uniformemente pequeñas y vemos que, efectivamente, las integrales convergen a 0 si $\alpha < 1$. Notemos que I_n también converge a 0 si $1 \leq \alpha < 2$, aunque no haya convergencia uniforme de las f_n a 0 en este último caso. ♣

En realidad, siempre que hay convergencia uniforme y estamos integrando sobre un conjunto de longitud (en general área o volumen) finita la integral del límite es el límite de las integrales. Ese es el contenido de nuestro próximo teorema.

Teorema 2.4 (Convergencia uniforme e integración). *Sea $I = [a, b]$ un intervalo de \mathbf{R} y f_n una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función f . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.50)$$

PRUEBA. Para estimar la diferencia entre las integrales que aparecen en (2.50) comenzamos por utilizar la desigualdad triangular para integrales, y obtenemos:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx.$$

La desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$$

es cierta para cada $x \in [a, b]$. Al combinarla con la acotación para la integral que habíamos obtenido previamente resulta

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|. \quad (2.51)$$

Este cálculo muestra entonces que la diferencia tiende a cero y es todo lo que necesitamos para completar la prueba del teorema. \diamond

Corolario 2.7. Si $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ es una sucesión de funciones continuas en un intervalo $[a, b]$, tal que la serie $\sum a_n$ converge uniformemente en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx. \quad (2.52)$$

Observación 2.2.8. Notemos que en la estimación de la diferencia de las integrales aparece la longitud $b - a$ del intervalo $[a, b]$, que es un número finito. Esta observación permite generalizar el teorema a un contexto más general. Si $X \subset \mathbf{R}^n$ es un conjunto de volumen V finito (si $n = 1$ el volumen es la longitud y si $n = 2$ el área) y f_n una sucesión de funciones continuas y acotadas que converge uniformemente en X a una función f entonces

$$\left| \int_X f_n(x) dx - \int_X f(x) dx \right| \leq \int_X |f_n(x) - f(x)| \leq V \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|. \quad (2.53)$$

De esta acotación se desprende inmediatamente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X f(x) dx. \quad (2.54)$$

La hipótesis $V < \infty$ es esencial. Si no se satisface el resultado es, en general, falso. Un ejemplo trivial es el siguiente:

Ejemplo 2.2.9. Sea $X = \mathbf{R}$, y para cada $n \in \mathbf{N}$ definamos f_n como la función constante $1/n$. Entonces f_n converge uniformemente a 0 en \mathbf{R} , pero la integral de f_n , que es siempre igual a $+\infty$, no converge al valor de la integral del límite, que es 0. \clubsuit

El siguiente ejercicio muestra un ejemplo con un poco más de gracia.

Ejercicio 2.19. * Consideremos

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R} \quad (2.55)$$

y la sucesión $f_n(x) = f(x/n)/n$. Mostrar que f_n converge uniformemente a 0 en \mathbf{R} , pero la integral de f_n no converge a 0. \spadesuit

Ejercicio 2.20. Calcular los siguientes límites:

1. * $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}} \int_0^1 x^n (1-x) e^{\cos^2(nx)} dx;$
2. * $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{x-n} \cos^2(nx) dx;$
3. ** $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 x^n (1-x) e^{\cos^2(nx)} dx;$

$$4. \quad *** \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Ejercicio 2.21. * Consideremos la sucesión de funciones definida en el intervalo $[0, 1]$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ -4n^2x + 4n & \text{si } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.56)$$

1. Calcular el límite puntual de la sucesión f_n , al que llamaremos f .
2. Investigar si la convergencia a f es uniforme.
3. Calcular $\int_0^1 f$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n$.

De la prueba del teorema de convergencia uniforme e integración podemos obtener más información. Notemos que en la estimación (2.51) para la diferencia de las integrales aparecen sólo el supremo de las diferencias entre f_n y f en el intervalo I , y la longitud de I . Si en vez de integrar hasta b integramos en un intervalo $[a, x]$ con el mismo cálculo podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 2.8. *Con las mismas hipótesis que en el teorema 2.4 consideremos las funciones*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(s) ds, \quad F(x) = \int_a^x f(s) ds. \quad (2.57)$$

Entonces F_n converge a F uniformemente en I .

PRUEBA. La prueba consiste en repetir las estimaciones del teorema anterior poniendo x en vez de b , en efecto

$$|F_n(x) - F(x)| \leq (x - a) \sup_{s \in [a, x]} |f_n(s) - f(s)|.$$

Como $0 \leq x - a \leq b - a$ y

$$\sup_{s \in [a, x]} |f_n(s) - f(s)| \leq \sup_{s \in [a, b]} |f_n(s) - f(s)|$$

resulta

$$|F_n(x) - F(x)| \leq (b - a) \sup_{s \in [a, b]} |f_n(s) - f(s)|.$$

De esta estimación uniforme en $x \in [a, b]$ se desprende el teorema. \diamond

Observación 2.2.10. LAS CLASES DE FUNCIONES PARA LAS QUE SABEMOS CALCULAR LA INTEGRAL

Entre las hipótesis del teorema 2.4 y la proposición 2.8 incluimos la de continuidad de las f_n , cosa que implica la continuidad del límite f una vez que asumimos que hay convergencia uniforme. En las estimaciones que aparecen en la prueba aparentemente no hicimos uso de esta hipótesis. Sin embargo,

esto es sólo aparente y usamos la continuidad de las funciones f y f_n para asegurarnos de que *están en una clase de funciones para las cuales está definida la integral*. Este asunto no es trivial, porque si las integrales de f y f_n no están definidas el teorema ni siquiera puede enunciarse.

La noción de integral que suele introducirse en los primeros cursos de Cálculo habilita a integrar una clase bastante más amplia que la de las funciones continuas. Por ejemplo, es usual extender la integración a las funciones continuas a trozos, o directamente presentar la noción de funciones integrables Riemann. En este contexto podemos obtener un resultado que vincula la convergencia uniforme con las propiedades de la integral, tal como enunciamos a continuación. Omitiremos la prueba de esta proposición.

Proposición 2.9. *Consideremos un intervalo acotado $I = [a, b]$ de \mathbf{R} , y f_n una sucesión de funciones integrables Riemann definidas en I , que convergen uniformemente en I a una función f . Entonces*

1. f es integrable Riemann.
2. Si introducimos las funciones

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(s) ds, \quad F(x) = \int_a^x f(s) ds, \quad (2.58)$$

entonces F_n converge a F uniformemente en I .

La dificultad adicional contenida en este resultado consiste en mostrar que la función límite f cae dentro de la clase de funciones para las que sabemos calcular la integral⁴. ♠

⁴ vale la pena mencionar que la teoría de integración de Riemann, que se desarrolló en el siglo XIX, es insuficiente para resolver muchos de los problemas del análisis matemático. La teoría moderna de integración está basada en un procedimiento de definir la integral que se debe, esencialmente, al matemático francés Henri Lebesgue y fue desarrollada a comienzos de este siglo alrededor de la noción de *función medible*.

La clase de funciones medibles según Lebesgue es más amplia que la que produce la integral de Riemann y tiene la ventaja de que se comporta mejor frente a las operaciones de paso al límite. Por ejemplo, acabamos de mencionar en el teorema anterior que el límite uniforme de funciones integrables Riemann es integrable Riemann. Sin embargo esta afirmación no es cierta para el límite puntual, que puede caer fuera de la clase de funciones para las que es posible calcular la integral en el sentido de Riemann. Sin embargo, la integral de Lebesgue no tiene este problema ya que el límite puntual de funciones medible resulta ser medible.

Para cerrar este comentario señalemos que si una función es integrable Riemann entonces es integrable Lebesgue y el valor de la integral es el mismo para los dos procedimientos de integración, de modo que la integral de Lebesgue constituye una extensión del concepto de integral debido a Riemann. También es cierto el teorema de convergencia uniforme e integración en el marco de la teoría de las funciones integrables Lebesgue

2.2.3 Convergencia y derivación

Nos queda por investigar la relación entre la convergencia uniforme y la otra operación de paso al límite: la derivación. Notemos que era previsible que la convergencia uniforme implicara la convergencia de las integrales si el conjunto de integración está acotado. Esto es una consecuencia de que si el integrando es chico entonces la integral da algo chico. Por lo tanto, si la diferencia entre dos funciones es pequeña la diferencia entre sus integrales también lo será. Todo esto es falso para las derivadas, ya que una función puede tener derivadas muy grandes porque sufre una gran oscilación y mantenerse muy pequeña. Un ejemplo de esta situación es el siguiente.

Ejemplo 2.2.11. Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.59)$$

que converge uniformemente a 0 en todo \mathbf{R} . Si la derivamos obtenemos

$$f'_n(x) = n \cos n^2 x \quad (2.60)$$

que no converge. Por ejemplo, en $x = 0$ diverge a $+\infty$. ♣

Sin embargo, es posible obtener un resultado para calcular derivadas de la función límite a partir de lo que sabemos para el cálculo de integrales. Ese es el contenido del próximo teorema.

Teorema 2.5 (Convergencia uniforme y derivación). *Sea $I = (a, b)$ un intervalo de \mathbf{R} , y f_n una sucesión de funciones de clase C^1 , definidas en I , tales que f_n y f'_n convergen uniformemente en I a funciones f y g respectivamente. Entonces $g = f'$.*

PRUEBA. La prueba consiste esencialmente en traducir todas las afirmaciones relativas a derivadas en integrales. En efecto, si fijamos $x_0 \in I$ para cada $n \in \mathbf{N}$ se tiene

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(s) ds. \quad (2.61)$$

Usando las hipótesis y la proposición 2.8 podemos pasar al límite en (2.61) y obtener

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(s) ds. \quad (2.62)$$

Como la convergencia uniforme de las f'_n permite asegurar que g es continua podemos derivar la igualdad (2.62) para concluir que $f' = g$. ◇

Corolario 2.10. *Sea $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ una sucesión de funciones de clase C^1 en un intervalo (a, b) , tal que las series $\sum a_n$ y $\sum a'_n$ convergen uniformemente en (a, b) . Sea $S(x)$ la suma de la serie, es decir $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$. Entonces*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x). \quad (2.63)$$

Ejercicio 2.22. * Mostrar que en el teorema 2.5 (y en su corolario) la hipótesis de convergencia puede debilitarse y basta con que f_n y f'_n convergan uniformemente en cualquier intervalo $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ contenido en (a, b) .

Ejercicio 2.23. * Mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

es una función de clase C^1 en \mathbf{R} .

El teorema anterior y su corolario son suficientes para la mayoría de las aplicaciones, pero si miramos la prueba con detenimiento resulta fácil verificar que es posible probar, casi con el mismo esfuerzo, un resultado un poco más general.

Proposición 2.11. *Sea $I = (a, b)$ un intervalo de \mathbf{R} y f_n una sucesión de funciones de clase C^1 definidas en I tales que*

1. f'_n converge uniformemente en I a una función g ,
2. existe un punto $x_0 \in I$ tal que $f_n(x_0)$ converge,

entonces existe una función f definida en I , de clase C^1 tal que f_n converge uniformemente a f y f'_n converge uniformemente a f' en I .

Ejercicio 2.24. ** Demostrar la proposición 2.11.

Es muy útil también generalizar estos resultados al caso de funciones de varias variables. Ese es el contenido del próximo ejercicio.

Ejercicio 2.25. * Consideremos una sucesión de funciones f_n , de clase C^1 , definidas en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Indiquemos con $\partial_{x_i} h$ la derivada parcial de una función h respecto a la i -ésima componente de $x = (x_1, \dots, x_n)$. Supongamos que f_n y $\partial_{x_i} f_n$ convergen uniformemente sobre Ω a f y g respectivamente. Probar que $g = \partial_{x_i} f$. \heartsuit

Ejercicio 2.26. ** Consideremos la sucesión

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (2.64)$$

1. Calcular el límite puntual de las sucesiones f_n y f'_n , a los que llamaremos f y g respectivamente.
2. Probar la derivada $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbf{R}$, pero $f'(0) \neq g(0)$.
3. Estudiar sobre qué subconjuntos de $X \subset \mathbf{R}$ hay convergencia uniforme de f_n a f , y sobre qué subconjuntos hay convergencia uniforme de f'_n a g .

2.3 Espacios normados

En la observación 2.1.4 habíamos adelantado la idea de que la convergencia uniforme está relacionada con la convergencia respecto a la norma del supremo. Recordemos que una norma $\|\cdot\|$ definida sobre un espacio vectorial \mathbf{V} real (o complejo) es una función

$$\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R} \ (\mathbf{C})$$

con las siguientes propiedades:

1. para cualquier vector $v \in \mathbf{V}$ se tiene que $\|v\| \geq 0$. Además $\|v\| = 0$ si y sólo si v es el vector nulo del espacio \mathbf{V} ;
2. si λ es un escalar (en \mathbf{R} o \mathbf{C} , dependiendo de que el espacio vectorial sea real o complejo) y $v \in \mathbf{V}$ entonces $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$;
3. se satisface la desigualdad triangular

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad v, w \in \mathbf{V}.$$

Es corriente usar la notación $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ para referirse al espacio vectorial \mathbf{V} normado con la norma $\|\cdot\|$.

Ejemplo 2.3.1. En cualquier espacio vectorial \mathbf{V} formado por funciones acotadas (a valores reales o complejos) definidas sobre un cierto dominio X , podemos introducir una norma, a la que llamaremos $\|\cdot\|_\infty$, de la siguiente manera: si $f \in \mathbf{V}$ definimos

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|. \quad (2.65)$$

La condición de que las funciones estén acotadas asegura que este supremo es finito y es un ejercicio muy fácil verificar que (2.65) es una norma en el espacio \mathbf{V} .

Ejercicio 2.27. * Consideremos un conjunto X , el conjunto

$$\mathbf{V} = \{f : X \rightarrow \mathbf{R} \ (\mathbf{C}); f \text{ acotada}\} \quad (2.66)$$

formado por las funciones reales (complejas) acotadas sobre X , y

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|. \quad (2.67)$$

Mostrar que $(\mathbf{V}, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado sobre $\mathbf{R} \ (\mathbf{C})$.

Notemos además que la definición de convergencia uniforme implica que la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

es completamente equivalente a la convergencia uniforme en X de la sucesión de funciones f_n , a una función límite f . ♣

Observación 2.3.2. UN COMENTARIO SOBRE LA NOTACIÓN

A veces es preferible introducir una notación para la norma (2.65) que haga referencia explícita al espacio vectorial con el que se está trabajando, en particular al conjunto X sobre el que están definidas las funciones. Cuando queremos destacar cual es el conjunto X en el que trabajamos es usual utilizar la notación $\|\cdot\|_{L^\infty(X)}$ en vez de $\|\cdot\|_\infty$. Por ejemplo, si estamos considerando funciones en $C([a, b])$ y queremos escribir la norma del supremo de esta manera resulta

$$\|f\|_{L^\infty([a,b])} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|. \quad (2.68)$$

Sacaremos algún partido de esta notación en el capítulo dedicado a las ecuaciones en derivadas parciales. ♠

Una norma en un espacio vectorial es una medida de la “longitud” de los vectores del espacio. Por lo tanto una norma también provee una forma de medir que tan lejos están entre sí dos vectores v y w calculando $\|v - w\|$, la “longitud” o norma de su diferencia. Este último comentario sugiere que es posible dar una definición general de *convergencia* en el marco de los espacios vectoriales normados, que contenga, entre otras, a la noción de convergencia uniforme.

Definición 2.3. CONVERGENCIA RESPECTO A UNA NORMA

Sea \mathbf{V} un espacio vectorial con una norma $\|\cdot\|$. Diremos que una sucesión x_n de elementos de \mathbf{V} converge a $x \in \mathbf{V}$ en la norma $\|\cdot\|$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0. \quad (2.69)$$

El contenido de esta definición es que la sucesión x_n converge a x cuando la “longitud” de la diferencia $x_n - x$ puede hacerse tan pequeña como se quiera, con tal de tomar n suficientemente grande. La notación que utilizaremos para esta noción de convergencia es la usual $x_n \rightarrow x$ o $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, aunque aclararemos que se trata de convergencia en relación a la norma. También es corriente usar la notación $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, en la que la norma aparece explícitamente, para indicar este tipo de convergencia.

Ejemplo 2.3.3.

1. Consideraremos el espacio \mathbf{V} formado por las funciones continuas, a valores reales, definidas sobre el intervalo $[a, b]$. Indicaremos este espacio con la notación $C([a, b])$. También es usual la notación $\mathbf{V} = C([a, b] : \mathbf{R})$ cuando se quiere hacer referencia explícita a que las funciones de \mathbf{V} toman valores reales. Tal como adelantamos, en $C([a, b])$ la convergencia respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ es la convergencia uniforme.

2. La noción usual de convergencia de sucesiones en \mathbf{R}^n no es otra cosa que la convergencia respecto a la norma euclídea

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

donde hemos usado la notación habitual $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. ♣

Ejercicio 2.28. * LA NORMA ES UNA FUNCIÓN CONTINUA.

Sea \mathbf{V} un espacio vectorial con una norma $\|\cdot\|$. Si x_n converge a x , en el sentido de la convergencia en norma, probar que $\|x_n\|$ converge a $\|x\|$. Concluir que si una sucesión x_n es convergente en el sentido de la norma $\|\cdot\|$ entonces $\|x_n\|$ es una sucesión acotada. Sugerencia: tener en cuenta que la desigualdad triangular para las normas implica que $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$ (la diferencia de longitud entre dos lados de un triángulo es menor que la longitud del tercer lado). ♥

Es interesante observar que sobre un mismo espacio vectorial es posible definir más de una norma, y que cada una de estas normas tiene asociada su propia noción de convergencia. Veremos esto en algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3.4. En \mathbf{R}^n podemos considerar, además de la norma euclídea usual, la norma

$$\sup_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

de $x = (x_1, \dots, x_n)$. También

$$\sum_{i=1}^n |x_i|.$$

define una norma en \mathbf{R}^n .

Ejercicio 2.29. * Mostrar que las expresiones que acabamos de presentar efectivamente definen dos normas sobre \mathbf{R}^n . Para $n = 2$, dibujar, para las dos normas que acabamos de introducir, el conjunto formado por los vectores de norma menor o igual que 1.

Para cerrar este ejemplo mencionemos que la noción de convergencia asociada con cada una de estas normas es la misma que la noción de convergencia usual (ver el ejercicio 2.34). ♣

Ejemplo 2.3.5. Consideremos $\mathbf{V} = C([a, b])$. También

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (2.70)$$

es una norma en $C([a, b])$. Aunque es un hecho que suponemos conocido, dejamos planteado el sencillo ejercicio de verificarlo.

Ejercicio 2.30. * Mostrar que $\|\cdot\|_1$ y define una norma en $C([a, b])$.

Veremos luego que esta normas da lugar a una noción de convergencia en el espacio $C[a, b]$ que es diferente a la convergencia uniforme. ♣

Ejemplo 2.3.6. Consideraremos también la norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.71)$$

en el espacio $C([a, b])$. Esta norma deriva del producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad (2.72)$$

en el sentido de que

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}, \quad (2.73)$$

Hemos recogido en el apéndice A.2 la información sobre espacios con producto interno que necesitaremos a lo largo de este curso, por lo que recomendamos su consulta al lector que no esté familiarizado con estos temas. ♣

Observación 2.3.7. Si pensamos en las aplicaciones de esta teoría, y tenemos en cuenta que una norma es una análogo de la “longitud” o “tamaño” de un vector, debemos considerar que la noción de “tamaño de una función” que nos interese dependerá del problema que estamos considerando. Por ejemplo, si f representa el perfil de tensiones al que está sometida una viga nos preocupará que en ningún punto de la viga se sobrepase un nivel de esfuerzos dado (que dependerá de la resistencia del material), por lo que nos interesará el tamaño de f en el sentido de (2.65). Si f representa la densidad en cada punto entonces el peso (también una medida de “tamaño” de las cosas) es la integral de f , tal como en (2.70). En cambio si $f(x)$ representa la velocidad con la que se esta moviendo el punto x de una cuerda que vibra, la energía cinética de la cuerda es proporcional a $\int f^2$, de modo que en esta aplicación nos interesará la norma (2.71) de f . ♠

En general, para cada $p \in [1, \infty)$ la expresión

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.74)$$

define una norma en \mathbf{V} , aunque la desigualdad triangular es relativamente difícil de probar si p es distinto de 1 y 2.

Ejercicio 2.31. *** Mostrar que si $f \in C([a, b])$ entonces

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

El ejercicio anterior explica por qué es usual indicar la norma (2.65) como $\|\cdot\|_\infty$.

Los siguientes ejercicios tienen como fin investigar las relaciones entre las nociones de convergencia que producen las distintas normas que introdujimos sobre $C([a, b])$.

Ejercicio 2.32. * Consideremos $\mathbf{V} = C([a, b])$.

1. Mostrar que para $f \in \mathbf{V}$ valen las desigualdades

$$\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty, \quad \|f\|_2 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}}\|f\|_\infty.$$

2. Sea f_n una sucesión de funciones en $C([a, b])$. Utilizar la parte anterior para mostrar que si f_n converge respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ a un límite f , entonces converge a f respecto a las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$.
3. Consideremos la sucesión $f_n = \sqrt{n}x^n$, para $0 \leq x \leq 1$. Mostrar que esta sucesión converge a 0, en $C([0, 1])$, respecto a la norma $\|\cdot\|_1$, pero que no lo hace respecto a $\|\cdot\|_\infty$.
4. Dar un ejemplo que pruebe que la convergencia en $\|\cdot\|_2$ no implica convergencia respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Ejercicio 2.33. * Sigamos considerando $\mathbf{V} = C([a, b])$. Mostrar que también vale la desigualdad:

$$\|f\|_1 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2, \quad f \in \mathbf{V}. \quad (2.75)$$

Concluir que si f_n converge a f respecto a la norma $\|\cdot\|_2$ entonces lo hace respecto a la norma $\|\cdot\|_1$. Mostrar con un ejemplo que el recíproco no es cierto y concluir que no existe ninguna constante positiva C tal que $\|f\|_2 \leq C\|f\|_1$ se satisfaga para toda $f \in \mathbf{V}$. Sugerencia: para probar la estimación (2.75) es útil aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz al producto interno entre $|f|$ y la función constante 1.

Ejercicio 2.34. ** EN UN ESPACIO DE DIMENSIÓN FINITA TODAS LAS NORMAS SON EQUIVALENTES.

1. Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ un elemento cualquiera de \mathbf{R}^n e indiquemos con $|x|$ su norma euclídea. Mostrar que existen constantes c_i (que dependen de n) tales que se satisfacen las desigualdades

$$\max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| \leq c_1 \sum_{i=1}^n |x_i| \leq c_2 |x| \leq c_3 \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|. \quad (2.76)$$

Calcular los valores óptimos para las constantes c_1 , c_2 y c_3 .

2. Si $\|\cdot\|$ es una norma cualquiera en \mathbf{R}^n mostrar que existe una constante c tal que

$$\|x\| \leq c \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.77)$$

3. Mostrar que $\|\cdot\| : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ es una función continua y deducir que existe una constante $c > 1$ tal que

$$\frac{1}{c}|x| \leq \|x\| \leq c|x|, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.78)$$

Sugerencia: considerar el mínimo de $\{\|\cdot\|; |x| = 1\}$.

4. Mostrar que si $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son dos normas definidas sobre un espacio vectorial de dimensión finita \mathbf{V} , existe una constante $c > 1$ tal que

$$\frac{1}{c}\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c\|x\|_a, \quad (2.79)$$

se satisface para todo $x \in \mathbf{V}$. Deducir que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las convergencias respecto a normas, en el sentido de la definición 2.3, son equivalentes. ¿Es esto cierto en espacios de dimensión infinita?

5. Sea \mathbf{V} un espacio vectorial normado de dimensión n y \mathcal{B} una base de \mathbf{V} . Para cada $v \in \mathbf{V}$ indicamos con $v_{\mathcal{B}}$ sus coordenadas en la base \mathcal{B} . Consideremos una sucesión v_i de elementos de \mathbf{V} . Mostrar que $v_i \rightarrow v$, en el sentido de la convergencia en norma, si y sólo si $v_{i,\mathcal{B}}$ converge a $v_{\mathcal{B}}$ en \mathbf{R}^n .

Las normas que presentamos hasta este momento no son las únicas útiles en las aplicaciones. A la hora de resolver ecuaciones diferenciales, en particular ecuaciones en derivadas parciales, resulta conveniente, y hasta imprescindible, tener a mano una norma que de cuenta del comportamiento de las derivadas de las funciones con las que se trabaja. Esto lleva a introducir una familia de normas que recojan esta información. Por ejemplo, en el espacio vectorial $C^1([a, b])$ podemos definir, para $1 \leq p \leq \infty$, las normas

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_p + \|f'\|_p.$$

Las hemos etiquetado usando los números 1 y p porque estamos considerando derivadas de la función hasta el orden 1, y usando las normas $\|\cdot\|_p$ de estas derivadas en nuestra definición. Obviamente, todo esto puede extenderse para incorporar derivadas de orden más alto: en el espacio de las funciones de clase C^k definidas sobre $[a, b]$ la expresión

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_p$$

define una norma. En esta última fórmula $f^{(i)}$ representa a la i -ésima derivada de f . En particular, $f^{(0)}$ no es más que una notación para la propia función f .

Ejercicio 2.35. ** Mostrar que si f_n converge a f respecto a la norma $\|\cdot\|_{W^{1,\infty}}$ entonces también lo hace respecto a la norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Mostrar con un ejemplo que el recíproco no es cierto.

Ejercicio 2.36. * LA NORMA DE LAS MATRICES COMO APLICACIONES LINEALES
Este ejercicio tiene como objetivo introducir en el espacio vectorial $M^{n \times n}(\mathbf{R})$, formado por las matrices reales $n \times n$, una norma que tiene que ver con la acción de la aplicación lineal

$$x \mapsto Ax$$

que la matriz define en \mathbf{R}^n . Naturalmente, con Ax estamos indicando el producto de la matriz por $x \in \mathbf{R}^n$. Consideraremos la “dilatación” que la matriz A produce al aplicarla a los vectores $x \in \mathbf{R}^n$ comparando la longitud $|Ax|$ del vector Ax con la longitud, o norma euclídea, del vector $|x|$. La relación entre ambas es el cociente $|Ax|/|x|$, y el supremo de estos cocientes es una medida de la “máxima dilatación” que la matriz A produce en \mathbf{R}^n . Definimos entonces, para $A \in M^{n \times n}(\mathbf{R})$,

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{|Ax|}{|x|}; x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0 \right\}. \quad (2.80)$$

1. Mostrar que

$$\|A\| = \sup \{|Ax|; |x| = 1\}.$$

Concluir que el supremo que aparece en la definición (2.80) de $\|A\|$ no puede tomar el valor $+\infty$ y deducir que $\|A\| \in [0, +\infty)$. Sugerencia: usar que Ax es una función continua de x . Probar que $\|\cdot\|$ es una norma en el espacio de las matrices $n \times n$.

2. Probar que $\|A\|$ es la constante de Lipschitz óptima para la aplicación lineal $x \mapsto Ax$, en el siguiente sentido:

$$\|A\| = \inf \{L; |Ax| \leq L|x| \forall x \in \mathbf{R}^n\}.$$

Mostrar que la desigualdad $|Ax| \leq \|A\||x|$ se satisface para todo $x \in \mathbf{R}^n$.

3. Si A y B son dos matrices $n \times n$ probar que

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

y concluir que

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (2.81)$$

4. Si dos sucesiones A_m y B_m de matrices convergen a A y B en el sentido de la norma y λ es un real cualquiera, probar que

$$\begin{aligned} A_m B_m &\rightarrow AB, \\ A_m + B_m &\rightarrow A + B, \\ \lambda A_m &\rightarrow \lambda A, \end{aligned} \quad (2.82)$$

también en el sentido de la convergencia en norma.

5. Si indicamos con A_{ij} a los elementos de la matriz A , probar

$$|A_{ij}| \leq \|A\| \leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} |A_{ij}| \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (2.83)$$

6. Concluir que una sucesión de matrices A_m converge, en el sentido de la norma, a una matriz A sí y solo sí cada una de las sucesiones $A_{m,ij}$, con $1 \leq i, j \leq n$, converge al elemento A_{ij} de la matriz A .

Ejercicio 2.37. ** Si $A \in M^{n \times n}(\mathbf{R})$ es una matriz simétrica, probar que su norma $\|A\|$ es igual al más grande de los valores absolutos de los valores propios de A .

Ejercicio 2.38. *** UNA NORMA QUE MIDE LA REGULARIDAD LIPSCHITZ DE LAS FUNCIONES

Consideremos un conjunto acotado $X \subset \mathbf{R}^n$ y el espacio vectorial \mathbf{V} formado por las funciones reales definidas sobre X para las que existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in X. \quad (2.84)$$

Tal como mencionamos antes, diremos que una función con esta propiedad es *lipschitziana* y que L es una *constante de Lipschitz* para f . Definamos

$$[f]_{0,1} = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}. \quad (2.85)$$

1. Mostrar que $[f]_{0,1}$ es la menor constante de Lipschitz para f , es decir

$$[f]_{0,1} = \inf \{L \in \mathbf{R}^+ : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \forall x, y \in X\}. \quad (2.86)$$

2. Mostrar que:

- $[f]_{0,1} \geq 0$;
- $[f + g]_{0,1} \leq [f]_{0,1} + [g]_{0,1}$;
- si $\lambda \in \mathbf{R}$ entonces $[\lambda f]_{0,1} = |\lambda|[f]_{0,1}$;
- existen funciones $f \neq 0$ tales que $[f]_{0,1} = 0$. ¿Cuáles son?

3. Mostrar que $\|f\|_{0,1} = \|f\|_\infty + [f]_{0,1}$ define una norma en \mathbf{V} .

4. Si $X = [-1, 1]$ calcular las normas de $f(x) = x^+$, $f(x) = |x|$ y $f(x) = (x+1)/2$.

5. Mostrar que es posible aproximar una función $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continua, que no esté en \mathbf{V} , por una sucesión de funciones $f_n \in \mathbf{V}$ tales $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. ¿Es posible construir una aproximación de f por funciones f_n en \mathbf{V} , tales que $\|f_n - f\|_{0,1}$ tienda a cero?

2.3.1 † Sucesiones de Cauchy y completitud en espacios normados

Además de la noción de convergencia de sucesiones, es posible extender otros conceptos del análisis en \mathbf{R}^n al contexto de los espacios normados. Un ejemplo de esto son las nociones de sucesión de Cauchy y completitud, que, por ser relevantes para la teoría que estamos desarrollando, definiremos a continuación.

Definición 2.4. SUCESIONES DE CAUCHY

Diremos que una sucesión x_n en el espacio vectorial normado $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ es de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\|x_{n+l} - x_n\| < \epsilon \quad (2.87)$$

se satisface para todo $n \geq n_0, l \geq 0$.

Ejemplo 2.3.8. Una sucesión de funciones en $C([a, b])$ es de Cauchy respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ si y sólo si es uniformemente de Cauchy. ♣

Ejercicio 2.39. * Sea x_n una sucesión en un espacio vectorial normado y definamos

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.88)$$

Si $\sum \|x_i\| < \infty$ mostrar que S_n es una sucesión de Cauchy.

Definición 2.5. ESPACIO VECTORIAL NORMADO COMPLETO

Un espacio vectorial normado es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplo 2.3.9. Los espacios \mathbf{R}^n son completos respecto a la norma euclídea. La completitud respecto a esta norma es la noción de completitud habitual. En realidad, \mathbf{R}^n es completo respecto a cualquier norma (ver el enunciado del teorema 2.6, página 203). ♣

Ejercicio 2.40. * Mostrar que el espacio de las matrices reales $n \times n$ es completo respecto a la norma que introdujimos en el ejercicio 2.36.

Ejercicio 2.41. * DESARROLLO EN SERIE DE LA EXPONENCIAL PARA MATRICES Consideremos una matriz $A \in M^{n \times n}(\mathbf{R})$. Mostrar que la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \quad (2.89)$$

converge⁵

En relación con el ejemplo 2.3.9 y el ejercicio 2.40 debemos decir que todos los espacios normados de dimensión finita son completos. Este resultado es suficientemente importante como para enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Todo espacio vectorial normado, sobre \mathbf{R} o \mathbf{C} , de dimensión finita es completo.*

Ejercicio 2.42. *** Probar el teorema. Sugerencia: utilizar la completitud de \mathbf{R}^n y \mathbf{C}^n , y los resultados del ejercicio 2.34.

Ejemplo 2.3.10. El espacio $C([a, b])$ con la norma del supremo es completo. Esto es una consecuencia del teorema 2.1. Sin embargo, si consideramos $C([a, b])$ con la norma $\|\cdot\|_1$ resulta no ser completo. La prueba está contenida en el siguiente ejercicio.

⁵esta suma es la *matriz exponencial* de A , que designamos con e^A . Cuando la calculamos para la matriz At , donde t es un número real cualquiera, se obtiene justamente la exponencial e^{At} que aparece en la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales

Ejercicio 2.43. ** Consideremos en el espacio $(C([0, 2]), \|\cdot\|_1)$ la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases} \quad (2.90)$$

Mostrar que es de Cauchy (respecto a $\|\cdot\|_1$, por cierto) pero no converge, en el sentido de convergencia que $\|\cdot\|_1$ induce, a ninguna función en $C([0, 2])$. Concluir que el espacio $(C([0, 2]), \|\cdot\|_1)$ no es completo. ♣

Ejemplo 2.3.11. El espacio vectorial \mathbf{V} del ejercicio 2.38 es completo respecto a la norma $\|\cdot\|_{0,1}$, pero no lo es respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Ejercicio 2.44. *** Justificar esta afirmación. ♣

Observación 2.3.12. SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

Consideremos una sucesión x_n en un espacio vectorial normado. Diremos que es *absolutamente convergente* si se satisface la condición

$$\sum_n \|x_n\| < \infty. \quad (2.91)$$

En tal caso, si el espacio es completo, una consecuencia directa del ejercicio 2.39 y la definición de completitud es que la serie $\sum_n x_n$ converge en norma a un elemento x del espacio. En otras palabras, en un espacio vectorial normado completo toda serie absolutamente convergente es convergente, tal como ocurre en \mathbf{R} . Esta propiedad en realidad caracteriza a los espacios vectoriales completos. Ese es el contenido del próximo ejercicio.

Ejercicio 2.45. *** UN ESPACIO VECTORIAL NORMADO ES COMPLETO SI Y SÓLO SI TODA SERIE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE ES CONVERGENTE.

Mostrar que un espacio vectorial normado $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ es completo si y sólo si se satisface la siguiente condición: para toda sucesión x_n de elementos de V con la propiedad (2.91) existe $x \in V$ tal que la sucesión de reducidas S_n , definidas por la fórmula (2.88), converge a x respecto a la norma $\|\cdot\|$.

Esta propiedad, que caracteriza a los espacios normados completos, resulta útil en diversas aplicaciones. Sin ir más lejos, al presentar el método iterativo utilizamos esta idea aunque no lo enunciamos explícitamente. Si revisamos nuestros argumentos es fácil constatar que todo lo hecho puede reformularse en términos de que la serie telescópica

$$\sum_m (x_{m+1} - x_m)$$

es absolutamente convergente respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$. ♠ ††

2.3.2 † Una versión abstracta del teorema de Picard.

El objetivo de esta sección es generalizar muchas de las nociones que fueron surgiendo a lo largo de la prueba del teorema de Picard. Esto nos permitirá demostrar el teorema de Picard a partir de un teorema abstracto de existencia de puntos fijos que es útil en una gran variedad de situaciones. Iremos introduciendo las distintas definiciones sin dar mucha motivación, porque son extensiones de cosas que ya hicimos antes.

Definición 2.6. APLICACIONES CONTRACTIVAS.

Sea $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ una función de \mathbf{V} en sí mismo. Diremos que F es *contractiva* si existe una constante $K < 1$ tal que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbf{V}. \quad (2.92)$$

Ejemplo 2.3.13. El operador T que usamos al buscar soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias por el método iterativo, definido por la fórmula (1.250), es contractivo en $(C([t_0 - \delta, t_0 + \delta]), \|\cdot\|_\infty)$ si δ es suficientemente pequeño. ♣

Ejercicio 2.46. * CONTINUIDAD DE LAS APLICACIONES CONTRACTIVAS

Sea F una aplicación contractiva y x_n una sucesión que converge a x , en el sentido de la convergencia en norma. Mostrar que también $F(x_n)$ converge a $F(x)$.

En un espacio normado la noción de continuidad puede introducirse también en términos de una definición por el método ϵ - δ de la siguiente manera:

Definición 2.7. APLICACIONES CONTINUAS EN ESPACIOS NORMADOS

Sean $(\mathbf{V}, \|\cdot\|_{\mathbf{V}})$ y $(\mathbf{W}, \|\cdot\|_{\mathbf{W}})$ dos espacios vectoriales normados, y sea $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una función de \mathbf{V} en \mathbf{W} . Diremos que F es *continua* en un punto $x \in \mathbf{V}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|F(y) - F(x)\|_{\mathbf{W}} < \epsilon, \quad \text{si} \quad \|y - x\|_{\mathbf{V}} < \delta. \quad (2.93)$$

Ejercicio 2.47. ** Mostrar que una función F entre dos espacios normados es continua en x sí y sólo sí la igualdad $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$ se satisface para toda sucesión x_n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Por supuesto, las convergencias deben entenderse en el sentido de las normas en cada espacio.

Ejercicio 2.48. ** CONTINUIDAD DE LAS APLICACIONES LINEALES

1. Mostrar que una aplicación lineal $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ entre dos espacios normados es continua sí y sólo sí existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$\|Tx\|_{\mathbf{W}} \leq L\|x\|_{\mathbf{V}}, \quad \forall x \in \mathbf{V}. \quad (2.94)$$

2. Mostrar que todas las aplicaciones lineales entre espacios normados de dimensión finita son continuas.

3. Consideremos $\mathbf{V} = C([-1, 1])$ con la norma $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f|$ y $\mathbf{W} = \mathbf{R}$ con la norma usual (el valor absoluto). Mostrar que la aplicación $f \mapsto f(0)$ no es continua.
4. Mostrar que la aplicación lineal de la parte 3 es continua si se considera en $C([-1, 1])$ la norma $\|\cdot\|_\infty$ de la convergencia uniforme.
5. Consideremos el espacio $C^\infty([a, b])$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Mostrar que la aplicación $f \mapsto f'$, de este espacio en sí mismo, no es continua.

Hecha esta digresión para poner la noción de continuidad en este contexto más general pasemos al objetivo principal de esta sección: presentar un teorema de existencia y unicidad de un punto fijo para cualquier aplicación contractiva en un espacio normado completo. Este teorema puede considerarse una versión abstracta del teorema de Picard y su prueba puede obtenerse revisando la prueba del teorema de Picard y haciendo las adaptaciones pertinentes para generalizar los argumentos allí presentados.

Teorema 2.7 (Teorema del punto fijo). *Sea \mathbf{V} un espacio vectorial dotado de una norma $\|\cdot\|$, tales que el espacio vectorial normado $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ es completo, y sea F una aplicación contractiva de \mathbf{V} en sí mismo. Entonces existe un único $x \in \mathbf{V}$ que satisface*

$$x = F(x). \quad (2.95)$$

Ejercicio 2.49. ** Demostrar el teorema 2.7.

Ejercicio 2.50. ** Demostrar el teorema de Picard a partir del teorema 2.7.

Observación 2.3.14. ESPACIOS MÉTRICOS

Casi todo el material que presentamos en esta sección puede extenderse a espacios métricos más generales que los espacios vectoriales normados. En general, si X es un conjunto, una *métrica* sobre X es una función

$$d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$$

que satisfaga

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$, para todo par (x, y) de elementos de X .
3. La desigualdad triangular $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Un espacio vectorial normado es un ejemplo más o menos canónico de espacio métrico. La métrica natural es definir, para un par (x, y) cualquiera de elementos del espacio,

$$d(x, y) = \|x - y\|. \quad (2.96)$$

Ejercicio 2.51. * Mostrar que la función d así definida es una métrica.

Las nociones de convergencia, sucesión de Cauchy, espacio completo, continuidad, aplicación contractiva, etc., pueden extenderse de manera directa al contexto más general de los espacios métricos. Ese es el contenido de nuestro próximo ejercicio, con el que nos despedimos de esta sección.

Ejercicio 2.52. *** Definir las nociones de convergencia, sucesión de Cauchy, espacio completo y aplicación contractiva en un espacio métrico cualquiera. Formular y demostrar en el marco de los espacios métricos un teorema análogo al teorema del punto fijo en espacios vectoriales normados (teorema 2.7). ♠ ††

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría básica

Presentaremos en este capítulo una introducción a la teoría básica de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Como primer paso, en la sección 3.1, completaremos la aplicación del método iterativo que habíamos iniciado en la sección 1.9 para resolver localmente el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Para ello aplicaremos los resultados del capítulo 2 que vinculan la convergencia uniforme de una sucesión de funciones con la continuidad y con las operaciones de integración y derivación. Este será el contenido del teorema 3.1.

Presentaremos luego algunos refinamientos del teorema 3.1: un teorema global para ecuaciones cuyo miembro de la derecha de Lipschitz respecto a la variable x ; otro resultado local de existencia y unicidad de soluciones bajo hipótesis un poco más generales que las del teorema 3.1; finalmente enunciaremos el teorema de existencia y unicidad global de soluciones conocido como *Teorema de Picard* (teorema 3.6). Para formularlo será necesario introducir y discutir previamente la noción de *solución maximal*.

La sección 3.2 está dedicada a describir algunos aspectos cualitativos de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias que descansan, al menos parcialmente, sobre los resultados de existencia y unicidad de soluciones que acabamos de esbozar. En esta sección volvemos sobre la noción de *flujo* para una ecuación diferencial autónoma, se enuncian un par de teoremas acerca de la dependencia del flujo respecto a las condiciones iniciales (teoremas 3.9 y 3.10) y se presenta el importante hecho de que *dos soluciones diferentes de una ecuación diferencial no pueden cortarse*. Luego se utiliza esta información para graficar las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias *sin* necesidad de calcularlas.

Las secciones 3.3 y 3.4 están dedicadas a estudiar la estabilidad de los puntos críticos de las ecuaciones diferenciales autónomas. En 3.3 se recurre a las *funciones de Liapunov*, y se amplía y coloca en un marco más general la discusión que iniciamos en la sección 1.4. En 3.4 analizamos la estabilidad de los puntos críticos linealizando la ecuación diferencial alrededor de estos puntos.

3.1 Resultados de existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones diferenciales ordinarias

Con el material de las secciones 2.1 y 2.2 podemos completar la prueba de una primera versión del teorema de existencia y unicidad de soluciones al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Supondremos, tal como hicimos al presentar el método iterativo en la sección 1.9, que la función f que aparece en el miembro de la derecha está definida sobre un conjunto $Q = \mathbf{R}^n \times J$, donde J es un intervalo abierto de \mathbf{R} . También supondremos que f es continua como función de (x, t) y satisface la condición de Lipschitz

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \quad t \in J, \quad (3.2)$$

donde L es una constante positiva.

Recordemos los pasos que dimos hasta ahora.

1. Comenzamos por transformar el problema (3.1) en el de buscar una solución de la ecuación integral

$$x(t) = T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds. \quad (3.3)$$

La segunda igualdad en esta expresión es justamente la definición del operador T .

2. Para tratar la ecuación integral intentamos un método iterativo que consistía en partir de una función cualquiera $x_0(t)$, y calcular la aproximación del paso $m + 1$ a partir de la del paso m usando el operador T que aparece en la forma integral de la ecuación. Es decir

$$x_{m+1}(t) = T(x_m)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_m(s), s) ds. \quad (3.4)$$

3. Por este procedimiento obteníamos una sucesión $x_m(t)$. Pudimos probar además que si δ es un número suficientemente chico como para que se satisfaga la condición $L\delta < 1$, que asegura que la aplicación T tiene la propiedad de contracción que se discutió en la observación 1.9.13, entonces $x_m(t)$ converge uniformemente sobre el intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ a una función $x(t)$.
4. Por último, observamos que si podemos pasar al límite, cuando $m \rightarrow \infty$, en ambos miembros de la igualdad (3.4) y asegurar que $x(t)$ es una función continua, entonces podremos afirmar que $x(t)$ es una solución del problema (3.1).

Ahora estamos en condiciones de completar este último paso, por lo que pasamos a enunciar y probar nuestro primer teorema de existencia y unicidad de soluciones.

Teorema 3.1. *Sea $J \subset \mathbf{R}$ un intervalo abierto. Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$, donde*

$$f : \mathbf{R}^n \times J \rightarrow \mathbf{R}$$

es una función continua de (x, t) , tal que existe una constante $L > 0$ para la cual se satisface la condición de Lipschitz

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \quad t \in J.$$

Entonces, si δ es un número positivo y menor que $1/L$, tal que

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset J,$$

el problema (3.1) admite una única solución en $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

PRUEBA. Comenzaremos por construir una solución del problema en su forma integral (3.3). Como $\delta < 1/L$ la sucesión $x_m(t)$ converge uniformemente en

$$\bar{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

a una función $x(t)$. Recordemos una vez más que la sucesión x_m está definida por

$$x_{m+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x_m(s), s). \quad (3.5)$$

Pasemos al límite en (3.5). El término de la izquierda converge uniformemente a $x(t)$, que resulta ser una función continua en virtud del teorema 2.3 sobre convergencia uniforme y continuidad. Por otra parte, el integrando en el miembro de la derecha de (3.5) converge uniformemente en I a $f(x(s), s)$. Mostrarlo es muy fácil a partir de la condición de Lipschitz (3.2), porque

$$|f(x(s), s) - f(x_m(s), s)| \leq L|x(s) - x_m(s)| \leq L \sup_{s \in I} |x_m(s) - x(s)|, \quad s \in I. \quad (3.6)$$

Por lo tanto

$$\sup_{s \in I} |f(x(s), s) - f(x_m(s), s)| \leq L \sup_{s \in I} |x_m(s) - x(s)|. \quad (3.7)$$

Como el miembro de la derecha en (3.7) tiende a cero cuando $m \rightarrow +\infty$, porque la sucesión $x_m(t)$ converge uniformemente a $x(t)$ sobre el intervalo I , también

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{s \in I} |f(x(s), s) - f(x_m(s), s)| = 0,$$

lo que es equivalente, por definición, a la convergencia uniforme que pretendíamos probar. Podemos aplicar ahora el teorema de convergencia uniforme e integración, teorema 2.8, para concluir que la integral del miembro de la derecha en (3.5) converge uniformemente en el intervalo I , como función de t , a

$$\int_{t_0}^t f(x(s), s) ds.$$

Por lo tanto, pasando al límite en (3.5) cuando $m \rightarrow \infty$ obtenemos la igualdad

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s), \quad t \in I. \quad (3.8)$$

Como $x(s)$ es una función continua el miembro de la derecha de esta última igualdad es derivable respecto a t , y su derivada es $f(x(t), t)$. Esto muestra que también es derivable $x(t)$, el miembro de la izquierda, y su derivada $\dot{x}(t)$ es justamente $f(x(t), t)$. La igualdad $x(t_0) = x_0$ es inmediata a partir de (3.8).

La prueba de la unicidad pasa esencialmente por usar la observación 1.9.13 sobre la contractividad de T . Si tuviéramos dos soluciones $x(t)$ e $y(t)$ del problema (3.1) cada una de ellas satisfaría la ecuación integral (3.8). Si recordamos la definición del operador T podemos escribir esto en forma concisa como

$$\begin{aligned} x &= T(x), \\ y &= T(y), \end{aligned} \quad (3.9)$$

de modo que

$$x(t) - y(t) = T(x)(t) - T(y)(t), \quad t \in I.$$

Esto implica que

$$\sup_{t \in I} |x(t) - y(t)| = \sup_{t \in I} |T(x)(t) - T(y)(t)|. \quad (3.10)$$

Por otra parte, de la contractividad del operador T se desprende que

$$\sup_{t \in I} |T(x)(t) - T(y)(t)| \leq L\delta \sup_{t \in I} |x(t) - y(t)|. \quad (3.11)$$

Combinando (3.10) y (3.11) concluimos que

$$\sup_{t \in I} |x(t) - y(t)| \leq L\delta \sup_{t \in I} |x(t) - y(t)|. \quad (3.12)$$

Como $L\delta < 1$ esta desigualdad sólo puede ser cierta si $\sup_{t \in I} |x(t) - y(t)| = 0$, lo que implica que $x(t) = y(t)$ para todo $t \in I$. \diamond

Observación 3.1.1. Aunque los argumentos que hemos usado para la prueba del teorema 3.1 aseguran la convergencia de la sucesión de iterados en los intervalos cerrados

$$\bar{I} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

hemos considerado la solución $x(t)$ sobre el intervalo abierto

$$I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

porque habíamos convenido que las soluciones de las ecuaciones diferenciales estarían definidas sobre intervalos abiertos. En realidad es muy fácil deducir del teorema 3.1 que hay una única solución de la ecuación diferencial en todo el intervalo

$$(t_0 - 1/L, t_0 + 1/L).$$

No nos detendremos sobre este punto porque veremos a continuación que en las hipótesis del teorema 3.1 existe una única solución definida sobre todo el intervalo J .

Teorema 3.2. *Si se satisfacen las hipótesis del teorema 3.1 el problema de valores iniciales (3.1) tiene una única solución definida sobre todo el intervalo J .*

La clave de la prueba del teorema es que la longitud del intervalo en el que el método iterativo permite construir la solución de cualquier problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

es independiente de t_0 y de x_0 , y sólo depende de la constante de Lipschitz L de la función f . Supongamos entonces que buscamos la solución del problema en cualquier subintervalo

$$[t_0, t_0 + T] \subset J.$$

Para alcanzar $t_0 + T$ podemos dividir el incremento T en un número n de “pasos”, de forma tal que T/n sea menor que $1/L$ (recordemos que el método iterativo funciona para cualquier valor de δ menor que $1/L$). En una primera aplicación del método construimos una solución $x(t)$ que está definida sobre un intervalo que contiene a $t = t_0 + T/n$. Llamemos

$$x_1 = x(t_0 + T/n).$$

Ahora resolvamos el problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0 + T/n) = x_1. \end{cases}$$

La solución que obtengamos en este paso nos permitirá llegar hasta

$$t = t_0 + 2T/n.$$

Iterando este procedimiento podemos alcanzar a construir una solución en todo el intervalo $[t_0, t_0 + T]$. Los detalles están desarrollados a continuación.

PRUEBA DEL TEOREMA 3.2. † Comenzaremos por mostrar el resultado de unicidad. Supongamos que existen dos soluciones distintas, $x(t)$ e $y(t)$, del problema (3.1) definidas sobre el intervalo J . En algún $t \in J$ tendremos que $x(t) \neq y(t)$. No es ninguna pérdida de generalidad suponer que $t > t_0$, porque si esto no fuera cierto entonces habría un $t < t_0$ en el que $x(t) \neq y(t)$ y se puede hacer un razonamiento análogo al que vamos a presentar.

Nos concentraremos en el punto s_0 en el que las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ se separan por primera vez. Definimos entonces

$$s_0 = \inf\{t \in J, t \geq t_0, x(t) \neq y(t)\}.$$

El conjunto cuyo ínfimo estamos considerando es no vacío, de modo que s_0 está definido. Además $s_0 \in J$ y $s_0 \geq t_0$. La definición de s_0 implica

$$x(t) = y(t), \quad t \in [t_0, s_0),$$

por lo tanto podemos inferir que $x(s_0) = y(s_0)$, ya que $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas de t . Llamemos y_0 a este punto. Es decir, sea

$$y_0 = x(s_0) = y(s_0). \quad (3.13)$$

Si tomamos cualquier $\delta < 1/L$, tal que

$$I_\delta = (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \subset J$$

entonces el teorema 3.1 asegura que existe una única solución $\bar{x}(t)$ del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(s_0) = y_0, \end{cases}$$

definida en I_δ . Como $x(t)$ e $y(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial, están definidas sobre todo el intervalo J que contiene a I_δ y satisfacen (3.13), entonces $x(t)$ e $y(t)$ deben coincidir con $\bar{x}(t)$ sobre I_δ . Esto implica, naturalmente, que

$$x(t) = y(t), \quad t \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta). \quad (3.14)$$

Por otra parte, la definición de s_0 implica que en cualquier intervalo $(s_0, s_0 + \delta)$ existe algún punto t tal que $x(t) \neq y(t)$. Esto entra en contradicción con (3.14) y prueba la unicidad de soluciones.

Vamos a demostrar ahora la existencia de una solución del problema (3.1) que está definida sobre todo el intervalo J , utilizando la idea que esbozamos en la discusión que hicimos antes del comienzo de la prueba. Fijemos un número $\delta \in (0, 1/L)$ y apliquemos el teorema 3.1 para obtener la solución $x(t)$ en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Tomemos ahora $t_1 = t_0 + \delta/2$. Como $t_1 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ entonces está definido $x_1 = x(t_1)$. Ahora consideramos el problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_1) = x_1, \end{cases}$$

para el que hemos fijado la condición inicial x_1 en el tiempo $t = t_1$. Una nueva aplicación del teorema 3.1 permite construir su solución $\bar{x}(t)$ en el intervalo

$$(t_1 - \delta, t_1 + \delta) = (t_0 - \delta/2, t_0 + 3\delta/2).$$

El resultado de unicidad que acabamos de probar muestra que $x(t)$ y $\bar{x}(t)$ coinciden en el intervalo

$$(t_0 - \delta/2, t_0 + 3\delta/2) \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta) = (t_0 - \delta/2, t_0 + \delta), \quad (3.15)$$

que contiene a $t_1 = t_0 + \delta/2$. Esto es así porque $x(t)$ y $\bar{x}(t)$ son dos soluciones de

$$\dot{x} = f(x, t)$$

que están definidas sobre ese intervalo y satisfacen $x(t_1) = \bar{x}(t_1)$. Utilizaremos ahora a $\bar{x}(t)$ para extender la solución $x(t)$ a todo el intervalo

$$(t_0 - \delta/2, t_0 + 3\delta/2),$$

definiendo

$$x(t) = \bar{x}(t), \quad t \in (t_0 - \delta/2, t_0 + 3\delta/2).$$

Notemos que sobre el intervalo (3.15) tenemos dos definiciones de $x(t)$, pero ya hemos verificado que ambas coinciden, de modo que hemos extendido $x(t)$ tal como nos proponíamos. Es evidente además que la nueva función $x(t)$, definida ahora sobre $(t_0 - \delta/2, t_0 + 3\delta/2)$ es de clase C^1 y es una solución del problema de valores iniciales (3.1).

Podemos reiterar el proceso anterior, introduciendo $t_2 = t_0 + \delta$, $x_2 = x(t_2)$ y aplicando el teorema 3.1 al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_2) = x_2. \end{cases}$$

Una vez hecho esto, habremos extendido la solución $x(t)$ hasta el intervalo

$$(t_0 - \delta, t_0 + 2\delta).$$

Este procedimiento puede repetirse inductivamente, para extender la solución resolviendo los problemas

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_i) = x_i, \end{cases}$$

para todos los $i \in \mathbf{N}$ tales que $t_i = t_0 + i\delta/2$ esté dentro del intervalo J . Un razonamiento análogo puede hacerse para los puntos $t_i = t_0 - i\delta/2$, con $i = 1, 2, \dots$. De esta manera se construye una solución sobre todo J , que es además la única solución del problema de valores iniciales que está definido sobre todo el intervalo J , en virtud del resultado de unicidad que probamos antes. \diamond ††

Antes de seguir avanzando vamos a dar una condición suficiente para que se satisfaga la condición de Lipschitz que hemos utilizado en los teoremas anteriores. Mostraremos que si las derivadas parciales respecto a la variable espacial x de una función $f(x, t)$ están acotadas, entonces la función es Lipschitz respecto a x .

Proposición 3.1. *Consideremos un intervalo abierto $J \subset \mathbf{R}$ y una función*

$$f : \mathbf{R}^n \times J \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

que a cada $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ le asocia el vector

$$f(x, t) = (f_1(x_1, \dots, x_n, t), f_2(x_1, \dots, x_n, t), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n, t)) \in \mathbf{R}^n.$$

Supongamos que para cada $t \in J$ fijo la función $f(\cdot, t)$ es de clase C^1 respecto a la variable x , y que existe una constante M tal que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, t) \right| \leq M, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^n \times J.$$

Entonces la función f satisface la condición de Lipschitz

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R}^n, \quad t \in J. \quad (3.16)$$

para alguna constante positiva L .

La prueba de esta proposición es una aplicación más o menos directa del teorema del valor medio, que permite estimar las variaciones de una función en términos del tamaño de su derivada. La haremos primero en el caso $n = 1$, porque es técnicamente más simple que el caso general y contiene todas las ideas necesarias para la prueba. En realidad los argumentos necesarios ya fueron presentados en la página 153, cuando en nuestra discusión preliminar del método iterativo obtuvimos la fórmula 1.265. Fue precisamente esa discusión la que nos llevó a introducir la condición de Lipschitz con la que estamos trabajando ahora.

PRUEBA PARA $n = 1$. En este caso f es una función escalar, definida sobre $\mathbf{R} \times J$, de las variables reales x y t . Fijemos x e y en \mathbf{R} y $t \in J$. El incremento que vamos a considerar es

$$f(x, t) - f(y, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, t)(x - y),$$

para algún $\bar{x} \in (x, y)$, en virtud del teorema del valor medio para funciones reales. Notemos que estamos aplicando el teorema a la función $x \mapsto f(x, t)$. Entonces

$$|f(x, t) - f(y, t)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, t) \right| |x - y| \leq M|x - y|,$$

que es justamente (3.16) con $L = M$. \diamond

Observación 3.1.2. Antes de pasar a la prueba en el caso general observemos que es importante que el dominio en que está definida la función f sea convexo respecto a la variable x para poder aplicar el teorema del valor medio usando la derivada parcial respecto a x . Con “convexo respecto a x ” queremos decir que si dos puntos (x_1, t) y (x_2, t) están en el dominio de f entonces el segmento que los une está contenido en el dominio de f . Si esta condición no se cumple el resultado puede ser falso, como se muestra en nuestro próximo ejercicio.

Ejercicio 3.1. Construir una función f de clase C^1 definida en todo el plano (x, t) salvo la semirrecta $\{x = 0, t \geq 0\}$, tal que la derivada parcial respecto a x sea idénticamente nula, pero f no es de clase Lipschitz. ♣ ♠

† PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 3.1. La prueba es una aplicación del teorema de valor medio a cada una de las n funciones escalares f_i . Dejemos $t \in J$ fijo. Para estudiar la diferencia

$$f_i(x, t) - f_i(y, t)$$

introducimos la función auxiliar

$$\varphi_i(s) = f_i(y + s(x - y), t), \quad s \in \mathbf{R},$$

que no hace otra que evaluar f_i a lo largo de la recta que une x con y . La función φ_i es una función real de clase C^1 , a la que podemos aplicar el teorema del valor medio. Tenemos entonces

$$f_i(x, t) - f_i(y, t) = \varphi_i(1) - \varphi_i(0) = \frac{d\varphi_i}{ds}(\bar{s}),$$

donde \bar{s} es algún punto del intervalo $(0, 1)$. Utilizando la definición de φ_i y la regla de la cadena concluimos que

$$f_i(x, t) - f_i(y, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + \bar{s}(x - y), t)(x_j - y_j).$$

Naturalmente, estamos escribiendo $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Por lo tanto

$$|f_i(x, t) - f_i(y, t)| \leq \sum_{j=1}^n M |x_j - y_j|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nos será útil recordar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz permite estimar

$$\sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} |x - y|,$$

porque entonces tenemos que

$$|f_i(x, t) - f_i(y, t)| \leq M \sqrt{n} |x - y|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto

$$|f(x, t) - f(y, t)| = \left(\sum_{i=1}^n |f_i(x, t) - f_i(y, t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Mn|x - y|.$$

Hemos probado entonces que f satisface la desigualdad de Lipschitz (3.16), con constante de Lipschitz $L = Mn$. \diamond $\dagger\dagger$

Un corolario sencillo de la proposición anterior es que todas las transformaciones lineales

$$X \mapsto f(X) = AX,$$

donde A es una matriz real $n \times n$, son funciones Lipschitz. Esto es así porque

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = A_{ij},$$

siendo A_{ij} el elemento de la matriz A que está en la fila i y en la columna j . Vemos entonces que todas las derivadas parciales de esta aplicación lineal son constantes y, en consecuencia, son funciones acotadas.

Observación 3.1.3. Ya habíamos encontrado este resultado en la sección dedicada a los espacios vectoriales normados (ejercicio 2.36), pero aquí reaparece como consecuencia de una proposición general sobre funciones de clase C^1 con derivadas parciales acotadas. En realidad los cálculos contenidos en la prueba de la proposición 3.1 nos permiten asegurar que

$$L = n \max_{i,j=1,\dots,n} |A_{ij}|$$

es una constante de Lipschitz para la aplicación lineal que resulta de multiplicar por la matriz A . \clubsuit

Podemos aplicar ahora el teorema 3.2 a las ecuaciones lineales $\dot{X} = AX$. Vale la pena enunciar esto como nuestro siguiente teorema.

Teorema 3.3. Sean A una matriz real $n \times n$ y X_0 un elemento cualquiera de \mathbf{R}^n . Entonces el problema

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

tiene una solución $X(t)$ que está definida sobre todo \mathbf{R} y esta solución es única.

Observación 3.1.4. EXISTENCIA, UNICIDAD Y PROPIEDADES DE e^{At}
Una consecuencia inmediata del teorema anterior es que la matriz e^{At} siempre está definida y es única. Esto es así porque habíamos caracterizado e^{At} como

la matriz que tenía como i -ésima columna la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = e_i, \end{cases}$$

donde e_i indica al i -ésimo vector de la base canónica de \mathbf{R}^n (ver la observación 1.3.11, página 46). Otra interesante consecuencia de la unicidad de soluciones está contenida en el próximo ejercicio, que es una generalización del ejercicio 1.89 que propusimos al final de la sección 1.7.

Ejercicio 3.2. * Consideremos un número real s . Usar que $X(t) = e^{A(t+s)}X_0$ es una solución de

$$\begin{cases} \dot{X} = AX, \\ X(0) = e^{As}X_0, \end{cases}$$

para mostrar que

$$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Concluir que

$$e^{At}e^{As} = e^{As}e^{At}, \quad t, s \in \mathbf{R},$$

es decir, que las matrices e^{As} y e^{At} conmutan, y que

$$e^{At}e^{-At} = I,$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$. Observar que esta última fórmula es equivalente a

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}, \quad (3.17)$$

que permite calcular con mucha facilidad la inversa de la matriz exponencial. ♠

Podemos obtener también un resultado de existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones lineales no homogéneas que consideramos en la sección 1.8.

Ejercicio 3.3. * Sean A una matriz real $n \times n$, X_0 un elemento cualquiera de \mathbf{R}^n , $J \subset \mathbf{R}$ un intervalo abierto y

$$B : J \rightarrow \mathbf{R}^n$$

una función continua. Mostrar que el problema

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B(t), \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

tiene una única solución $X(t)$ que está definida sobre todo J .

Ejercicio 3.4. * Mostrar que cualquier problema de valores iniciales para las ecuaciones diferenciales $\dot{x} = \sin x + t^2$ y $\dot{x} = 3|x + 1| + \cos t$ tiene una única solución definida sobre todo \mathbf{R}

3.1.1 El teorema de Picard en su versión general

Nos ocuparemos ahora de una versión más general del teorema de existencia y unicidad de soluciones para una ecuación diferencial ordinaria $\dot{x} = f(x, t)$. La novedad respecto al teorema 3.1 es doble:

- en primer lugar supondremos que la función f que aparece en el segundo miembro de la ecuación diferencial está definida sobre un abierto Q cualquiera contenido en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Recordemos que hasta el momento estábamos considerando el caso en que Q es de la forma $\mathbf{R}^n \times J$, donde J indica un intervalo abierto de \mathbf{R} .
- También relajaremos la condición de Lipschitz respecto a la variable x que consistía en la existencia de una constante $L > 0$ tal que la desigualdad

$$|f(x, t) - f(y, t)| \leq L|x - y| \quad (3.18)$$

fuera cierta para *cualquier par* de puntos x e y en \mathbf{R}^n , y para todo t en J . En realidad una condición tan fuerte como que la constante L en (3.18) sea la misma en todas partes no es necesaria y puede sustituirse por una versión más débil, que es la que recogemos en la definición 3.1.

Uno de los efectos que produce el debilitar las hipótesis del teorema 3.1 en el sentido que acabamos de explicar es el de que ya no podremos asegurar la existencia de soluciones para un intervalo de tiempo fijado *a priori*, y el intervalo de definición de cada solución dependerá de las condiciones iniciales que se fijen (recordemos que ya habíamos encontrado este comportamiento en la sección 1.2. Ver, por ejemplo, la observación 1.2.8, página 26). Por esa razón comenzaremos por dar una versión local del teorema, para pasar luego a enunciar el teorema en su versión global. Para ambas cosas es necesario introducir previamente algunas definiciones.

Definición 3.1. Una función f definida en un abierto $Q \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ es *localmente Lipschitz respecto a la variable x* si para cada punto $(x_0, t_0) \in Q$ existen un entorno V tal que $(x_0, t_0) \in V \subset Q$, y una constante positiva L (que dependerá del entorno V en el que estemos trabajando) tales que la desigualdad (3.18) se satisface si (x, t) e (y, t) están en V .

Ejemplo 3.1.5. La función

$$f(x) = 1/(1 + x^2), \quad x \in \mathbf{R}$$

es Lipschitz en todo \mathbf{R} , ¿cuál es la mejor constante de Lipschitz para esta función? La función

$$f(x) = x^{1/3}, \quad x \in \mathbf{R}$$

es localmente Lipschitz en $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, pero no es Lipschitz en sobre $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Esta función es Lipschitz sobre cualquier intervalo de la forma $I_\delta = (\delta, +\infty)$ y la menor constante de Lipschitz en I_δ es $\delta^{-2/3}/3$. Esta constante tiende a infinito cuando δ tiene a cero. ♣

Ejercicio 3.5. Mostrar que si $f : Q \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ es de clase C^1 entonces es localmente Lipschitz.

1. * Hacerlo para el caso $n = 1$.
2. *** Hacerlo para $n > 1$.

Sugerencia: revisar la prueba de la proposición 3.1, página 218.

Una vez introducidas estas definiciones estamos en condiciones de enunciar una versión más fina del teorema local de existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones diferenciales.

Teorema 3.4. Sea $f(x, t)$ una función continua definida en un subconjunto abierto Q de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, y localmente Lipschitz respecto a la variable x en Q . Consideremos un punto $(x_0, t_0) \in Q$. Entonces existe un número $\delta > 0$ tal que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

La demostración de este teorema descansa sobre el mismo método iterativo que nos permitió probar el teorema 3.1. Para aplicarlo en este contexto hace falta ser más cuidadoso con algunos aspectos técnicos. Los detalles quedan como ejercicio.

Ejercicio 3.6. *** Completar la demostración del teorema 3.4¹

La condición de que f sea Lipschitz es necesaria para asegurar la unicidad de soluciones, tal como prueba el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.6. La ecuación $\dot{x} = x^{1/3}$ tiene las soluciones $x_1(t) = 0$, definida en toda la recta \mathbf{R} , y $x_2(t)$ definida de la siguiente manera:

$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

¹En caso de que necesites ayuda podés recurrir a la discusión presentada en el texto [BP], páginas 99–102. Los detalles que no están discutidos allí son justamente los que tienen que ver con la convergencia uniforme de la sucesión que produce el método de Picard y los hemos cubierto en el capítulo 2 de este texto. Una referencia que contiene la teoría básica que presentamos en esta sección es el texto [HS], cuyo capítulo 8 está dedicado a enunciar y demostrar, en el caso de las ecuaciones diferenciales autónomas, los teoremas que presentamos en esta sección.

Es evidente que $x_1(0) = x_2(0) = 0$, por lo que ambas son soluciones del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^{\frac{1}{3}}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Ejercicio 3.7. ** Hallar una tercera solución de (3.19). ♣

En realidad para que haya existencia de soluciones alcanza con pedir sólo que la función f sea continua. A continuación enunciamos este importante resultado

Teorema 3.5 (Cauchy-Peano). *Si la función $f(x, t)$ es continua en Q y (x_0, t_0) es un punto de Q , entonces existe $\delta > 0$ tal que el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

tiene solución en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

El texto [G] contiene una prueba de este teorema (teorema 4.1.3, página 89). Sin embargo, la continuidad de f no es suficiente para asegurar la unicidad de soluciones, como se vio en el ejemplo 3.1.6.

Nuevamente, un ejemplo nos mostrará que la hipótesis de continuidad de la función f en el segundo miembro de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$ no puede eliminarse si queremos asegurar la existencia de soluciones. Ese es el objeto de nuestro próximo ejercicio.

Ejercicio 3.8. ** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Mostrar que no existe ninguna solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ que tenga dato inicial $x(0) = 0$.

Observación 3.1.7. † Vale la pena recordar que para funciones de clase C^1 la ecuación integral

$$x(t) = \int_0^t f(x(s)) ds, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3.20)$$

es equivalente al problema de resolver $\dot{x} = f(x)$ con condición inicial $x(0) = 0$. Podemos considerarla como una nueva formulación de la ecuación diferencial que requiere menos regularidad a sus soluciones, y que coincide con la noción original cuando las soluciones son suficientemente regulares. En particular, cuando el miembro de la derecha de la ecuación es continuo ambas formulaciones coinciden. Sin embargo, esto puede no ocurrir cuando el miembro de la derecha no tiene esa regularidad.

Ejercicio 3.9. ** Mostrar que aunque el problema de valores iniciales planteado en el ejercicio 3.8 no tiene solución, existe una solución $x(t)$ de la ecuación integral (3.20). Comprobar que esta solución $x(t)$ no es derivable en $x = 0$.

La idea de reformular una ecuación diferencial de manera integral reaparecerá cuando introduzcamos la noción de *solución débil* para las ecuaciones en derivadas parciales, y cuando definamos las *derivadas débiles* para algunas funciones reales. ♣ ††

Subrayemos una vez más que los teoremas 3.1 y 3.4 son resultados *locales* de existencia de soluciones. En ambos casos la demostración consiste en construir la solución sobre un intervalo $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ pasando al límite en un proceso iterativo. Bien puede ocurrir, y es así en la mayoría de los casos, que las soluciones puedan extenderse más allá de ese intervalo. Por lo tanto, nos va a interesar especialmente trabajar con las soluciones $x : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ que están definidas en el intervalo *más grande posible*, en el sentido de que no se puede prolongar x a un intervalo que contenga estrictamente a I de modo que se siga teniendo una solución. A estas soluciones las llamaremos *soluciones maximales*, y al intervalo en el que una solución maximal está definida lo llamaremos *intervalo maximal*. A continuación damos una definición precisa de estas nociones, pero las ideas fundamentales que esta definición contiene ya han sido recogidas en los comentarios que acabamos de hacer.

Definición 3.2. Una solución $x : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ de una ecuación diferencial ordinaria es *maximal* si toda solución $y : J \rightarrow \mathbf{R}^n$, definida en un intervalo J que contenga a I y tal que x e y coincidan sobre el intervalo I , tiene que cumplir $J = I$. El intervalo I se llama en este caso *intervalo maximal*.

Ejemplo 3.1.8. Las soluciones definidas en todo \mathbf{R} son maximales. En particular, la función exponencial $x(t) = e^t$, definida sobre todo \mathbf{R} , es una solución maximal de la ecuación diferencial $\dot{x} = x$ que satisface la condición inicial $x(0) = 1$. Pueden obtenerse soluciones que *no* son maximales restringiendo esta solución a subintervalos de \mathbf{R} . Por ejemplo, la función $y : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $y(t) = e^t$ es una solución de la ecuación con el mismo dato inicial que no es maximal, porque puede extenderse a todo \mathbf{R} . Por este procedimiento hemos encontrado “dos soluciones diferentes” del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

En efecto, las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son distintas porque tienen dominios diferentes.

Si estamos trabajando en un dominio prefijado esta aparente no unicidad no tiene lugar, tal como vimos en nuestros teoremas locales de existencia y unicidad. Sin embargo el procedimiento de fijar el dominio de definición de las

soluciones no es muy satisfactorio, porque en general el intervalo en que éstas están definidas depende de los datos iniciales. La introducción de la noción de solución maximal permite resolver este problema y recuperar la unicidad de soluciones (ver el enunciado del Teorema de Picard en la página 227). ♣

Ejemplo 3.1.9. Cuando en la prueba del teorema 3.1 construíamos la solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

en un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, para algún $\delta < 1/L$, donde L es la constante de Lipschitz de la función f , nunca conseguíamos una solución maximal. Esto es así porque vimos luego, en el teorema 3.2, que bajo las hipótesis del teorema 3.1 siempre hay una única solución que está definida para todo \mathbf{R} . Por supuesto, esta es la única solución maximal del problema de valores iniciales. ♣

Ejemplo 3.1.10. Hay situaciones en las que las soluciones maximales no están definidas en toda la recta. De hecho ya nos hemos encontrado con este fenómeno. Por ejemplo, al estudiar la ecuación $\dot{y} = -y^2$, vimos que la solución con dato inicial

$$y(0) = y_0 < 0$$

es

$$y(t) = \frac{y_0}{1 + y_0 t}, \quad \text{para } t \in (-\infty, -1/y_0), \quad (3.21)$$

y no puede prolongarse más allá del tiempo $-1/y_0$, porque

$$\lim_{t \uparrow -1/y_0} y(t) = -\infty.$$

Por lo tanto, la solución se escapa a infinito al aproximarnos a ese valor del tiempo. La fórmula (3.21) también tiene sentido para $t > -1/y_0$, y aunque es una solución de la ecuación diferencial ya no guarda ninguna relación con la solución que satisface $y(0) = y_0$. En resumen, la solución maximal de

$$\begin{cases} \dot{y} = -y^2, \\ y(0) = y_0 < 0, \end{cases}$$

es la que hemos dado en (3.21). ♣

Ejercicio 3.10. * Hallar las soluciones maximales y calcular los intervalos maximales en función de x_0 y t_0 para los problemas

1. $\dot{x} = 1 + x^2$, con condición inicial $x(t_0) = x_0$.
2. $\dot{x} = 1/x$, con condición inicial $x(t_0) = x_0 \neq 0$.

Observación 3.1.11. Tal como pone en evidencia el ejemplo (3.1.10) y queda más claro aún al resolver el ejercicio 3.10, el intervalo maximal en el que está definida la solución maximal de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

depende de t_0 y de x_0 . Veremos en el enunciado de nuestro próximo teorema que los intervalos maximales son intervalos abiertos, por lo tanto utilizaremos la notación

$$I(x_0, t_0) = (a(x_0, t_0), b(x_0, t_0)) \quad (3.22)$$

para indicar el intervalo de definición de la solución maximal con dato $x(t_0) = x_0$. Por supuesto que $t_0 \in I(x_0, t_0)$ y que puede ocurrir que $a(x_0, t_0)$ sea igual a $-\infty$, que $b(x_0, t_0) = +\infty$, o ambas cosas a la vez. En este último caso el intervalo $I(x_0, t_0)$ es toda la recta. ♠

A partir del teorema local de existencia y unicidad de soluciones se puede obtener el siguiente teorema global, que constituye el resultado principal de esta sección:

Teorema 3.6 (Picard). *Si la función $f(x, t)$ está definida en un subconjunto abierto Q de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, es continua, y es localmente Lipschitz respecto a la variable x en Q , entonces para cada $(x_0, t_0) \in Q$ existe una única solución maximal del problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

que está definida en un intervalo abierto $I(x_0, t_0) \subset \mathbf{R}$.

No incluiremos la prueba de este teorema. Vale la pena mencionar que, en general, cuando es posible calcular la solución de un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial ordinaria por medio de una fórmula explícita la solución que se obtiene es la solución maximal. Por esta razón no prestamos mayor atención a este tipo de cuestiones al resolver las ecuaciones diferenciales que aparecieron en el capítulo 1.

Observación 3.1.12. LA TEORÍA BÁSICA PARA ECUACIONES AUTÓNOMAS Estamos enunciando los resultados de esta sección para ecuaciones de la forma $\dot{x} = f(x, t)$, con f definida en un cierto dominio $Q \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Naturalmente, estos enunciados generales contienen también el caso de las ecuaciones autónomas $\dot{x} = f(x)$, con f definida sobre $\Omega \subset \mathbf{R}$, porque podemos considerar la función $f(x)$ como una función definida sobre $Q = \Omega \times \mathbf{R}$ que también depende de t (aunque la dependencia en t es trivial, porque t no aparece explícitamente). La hipótesis de que el miembro de la derecha de la ecuación sea Lipschitz, o localmente Lipschitz, respecto a x se reduce en este caso a que f sea Lipschitz o localmente Lipschitz. ♣

Una pregunta que surge naturalmente al considerar el problema del intervalo maximal de definición es qué tan grande puede ser este intervalo. Hay algunos casos en que es más o menos obvio que la solución maximal no puede estar definida para todo tiempo, porque la solución se escapa al infinito en un instante finito de tiempo. Este es el caso en el ejemplo 3.1.10, y es una situación general, tal como veremos a continuación. En efecto, si estamos trabajando con una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$, que está definida en todo el espacio $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, cuando las soluciones no pueden escaparse al infinito en un tiempo finito existen para todos los tiempos. Este es el contenido de nuestra próxima proposición.

Proposición 3.2. *Consideremos una función $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ que es continua y localmente Lipschitz respecto a la variable x . Sea $x(t)$ la solución maximal del problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

que estará definida sobre el intervalo maximal $(a(x_0, t_0), b(x_0, t_0))$. Entonces, si $b(x_0, t_0) < +\infty$ se tiene que

$$\lim_{t \uparrow b(x_0, t_0)} |x(t)| = +\infty.$$

Análogamente,

$$\lim_{t \downarrow a(x_0, t_0)} |x(t)| = +\infty.$$

si $a(x_0, t_0) > -\infty$.

Todo esto significa, esencialmente, que las soluciones de una ecuación diferencial que está definida en todo el espacio dejan de existir sólo cuando se “escapan” hacia el infinito. Podemos derivar entonces el siguiente corolario.

Corolario 3.3. *Sean f como en el enunciado de la proposición 3.2, y $x(t)$ una solución maximal de $\dot{x} = f(x, t)$ que está definida en el intervalo maximal I . Si existe una constante M tal que la desigualdad*

$$|x(t)| \leq M$$

es cierta para todo $t \geq t_0$ que esté en I , entonces $[t_0, +\infty) \subset I$.

Este corolario significa que si sabemos que una solución tiene que estar acotada para todo tiempo $t \geq t_0$, entonces *necesariamente* estará definida para todos los tiempos posteriores a t_0 .

Ejercicio 3.11. * Enunciar, y demostrar a partir de la proposición 3.2, un corolario análogo al anterior, pero a partir de una acotación de una acotación de $x(t)$ que valga para $t \leq t_0$.

Observación 3.1.13. † En general, las soluciones $x(t)$ de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$, con f definida en un conjunto abierto $Q \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, existen mientras el par $(x(t), t)$ no se acerque a la frontera de Q . Más aún, si esto nunca ocurre las soluciones están definidas para todo tiempo $t \in \mathbf{R}$. Una manera de expresar que $(x(t), t)$ se acerca a la frontera de Q cuando el tiempo t se aproxima a uno de los extremos $a(x_0, t_0)$ o $b(x_0, t_0)$ del intervalo maximal $I(x_0, t_0)$, es decir que termina estando fuera de cualquier conjunto K que este “bien metido” en Q . Por ejemplo, los subconjuntos cerrados y acotados² de Q tienen esta propiedad: están siempre a una distancia positiva del complemento de Q .

Teorema 3.7. *Sea $x(t)$ la solución maximal del problema*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

que supondremos definida en

$$I(x_0, t_0) = (a(x_0, t_0), b(x_0, t_0)).$$

Dado cualquier cerrado y acotado $K \subset Q$, existen números a y b tales que

$$a(x_0, t_0) < a < t_0 < b < b(x_0, t_0),$$

con la propiedad de que para todo

$$t \in (a(x_0, t_0), a) \cup (b, b(x_0, t_0)) = I(x_0, t_0) \setminus (a, b)$$

se cumple que $(x(t), t) \notin K$.

En realidad, la proposición 3.2 no es más que un corolario de este teorema.

Ejercicio 3.12. *** Demostrar el teorema 3.7. Sugerencia: mostrar que existe una sucesión de tiempos

$$t_k \uparrow b = b(x_0, t_0)$$

y un punto $x_* \in \mathbf{R}^n$ tales que $(x_*, b) \in K$ y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(t_k), t_k) = (x_*, b).$$

Utilizar la solución de la ecuación diferencial con dato inicial $x(b) = x_*$ para prolongar la solución $x(t)$ más allá de b . ♠ ††

²los conjuntos cerrados y acotados de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ son los conjuntos compactos. Por esa razón, al teorema 3.7 suele llamársele *teorema de salida de compactos*.

Ejercicio 3.13. *

1. Consideremos una función $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, localmente Lipschitz. Supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que las soluciones $x(t)$ del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.23)$$

satisfacen

$$x(t) \in B(x_0, \epsilon), \quad t \geq t_0.$$

Mostrar que la solución maximal del problema (3.23) está definida sobre toda la semirrecta $[t_0, +\infty)$ \heartsuit

2. Cuando probamos la proposición 1.2 omitimos un detalle de la demostración (tal como se señala en el ejercicio 1.42) porque no tuvimos cuidado en verificar que las órbitas están definidas para todo $t \geq 0$. Completar la prueba de la proposición (de paso aprovechar y repararla).

Observación 3.1.14. El resultado de la primera parte del ejercicio anterior también es cierto si f está definida sobre un subconjunto abierto Ω de \mathbf{R}^n , y la clausura $\overline{B(x, \epsilon)}$ de la bola $B(x, \epsilon)$ está contenida en Ω (ver el enunciado del teorema 3.7). Utilizaremos esta observación en la sección 3.3. \spadesuit

Ejercicio 3.14. * Supongamos que $f(x, t)$ es una función acotada que está definida en todo $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Mostrar que todas las soluciones de $\dot{x} = f(x, t)$ existen para todo tiempo t . Sugerencia: buscar una acotación para $x(t)$ usando la fórmula

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s), s) ds$$

y aplicar la proposición 3.2.

Ejercicio 3.15. * Consideremos la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$ en \mathbf{R} , y un $x_0 \in \mathbf{R}$ tal que $f(x_0) > 0$. Sea $x(t)$ la solución de la ecuación diferencial con dato inicial $x(0) = x_0$.

1. Si $f(x) > 0$ para todo $x \geq x_0$ entonces probar que

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} = +\infty.$$

es la condición necesaria y suficiente para que la solución $x(t)$ esté definida para todo tiempo $t \geq 0$.

2. Calcular, cuando la integral es convergente, el mayor valor de b para el que la solución $x(t)$ está definida en todo el intervalo $[0, b)$. \heartsuit

Ejercicio 3.16. ** Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + t^2, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

1. Mostrar que el teorema de Picard puede aplicarse a este problema.
2. Sean a y b dos números positivos cualesquiera. Mostrar que la solución de (3.24) existe para todo t tal que

$$|t| \leq \min \left\{ a, \frac{b}{a^2 + b^2} \right\}.$$

Sugerencia: buscar una estimación del tiempo que demora el par $(x(t), t)$ en salir del rectángulo $[-b, b] \times [-a, a]$.

3. Calcular

$$\max_{\{(a,b); a>0, b>0\}} \min \left\{ a, \frac{b}{a^2 + b^2} \right\}.$$

4. Concluir que la solución $x(t)$ existe si $|t| \leq 1/2$.
5. Mostrar que la solución sólo puede estar definida en un intervalo acotado de tiempos. Sugerencia: comparar con las soluciones de $\dot{x} = x^2$.

3.2 Algunos aspectos cualitativos de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Ahora que hemos presentado la teoría básica sobre la existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias vamos a tratar de conseguir información sobre el comportamiento de estas soluciones. A continuación presentamos algunos resultados en esta dirección. La mayor parte de ellos puede derivarse de la unicidad de soluciones para el problema de valores iniciales para una ecuación diferencial.

CONVENCIÓN: A lo largo de esta sección supondremos que todas las funciones $f(x, t)$ que aparezcan son continuas como funciones de (x, t) , y localmente Lipschitz respecto a la variable x . Esto asegura que podemos aplicar la teoría de la sección anterior a la ecuación $\dot{x} = f(x, t)$. Cuando consideremos ecuaciones autónomas $\dot{x} = f(x)$ supondremos que f es localmente Lipschitz.

3.2.1 El flujo asociado con una ecuación diferencial

Recordemos que en la observación 1.1.11, página 13, habíamos introducido el flujo Φ asociado a una ecuación diferencial autónoma a partir de las soluciones de la ecuación. Pretendíamos definir el flujo Φ para la ecuación $\dot{x} = f(x)$ diciendo que $\Phi(x_0, t)$ es el valor $x(t)$, en tiempo t , de la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Para que esto pueda hacerse *es necesario asegurarse de que hay una única solución del problema* (3.25). Cuando no hay unicidad de soluciones lo que estamos diciendo carece de sentido porque el valor $x(t)$ no está determinado de manera única. Ahora que disponemos de resultados que aseguran la existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones diferenciales bajo hipótesis bastante generales, estamos en condiciones de dar una definición del flujo.

Definición 3.3. Consideremos la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$, donde f está definida en un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Para $x \in \Omega$ consideremos la solución maximal $x(t)$ del problema (3.25) que está definida en el intervalo maximal $I(x, 0)$. Sea

$$\mathcal{D} = \{(x, t); x \in \Omega, t \in I(x, 0)\} \subset \Omega \times \mathbf{R}. \quad (3.26)$$

El flujo Φ asociado con la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$ es la función

$$\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}^n \quad (3.27)$$

que a $(x_0, t) \in \mathcal{D}$ le asocia $\Phi(x_0, t) = x(t)$, el valor de la solución del problema (3.25) en tiempo t .

Derivaremos a continuación una propiedad interesante de este flujo, que está relacionada con el contenido del ejercicio 1.4. Mostrábamos allí un resultado acerca de las soluciones de la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$ que podemos expresar de la siguiente manera: si $x(t)$ es solución de la ecuación diferencial autónoma y s es un número real cualquiera entonces

$$y(t) = x(t + s)$$

también es solución (con un intervalo de definición distinto si $x(t)$ no está definido en todo \mathbf{R}). Notemos que esta solución toma en el instante $t = 0$ el valor

$$x(0 + s) = x(s),$$

por lo tanto concluimos que $y(t) = x(t + s)$ es *la* solución del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x(s). \end{cases} \quad (3.28)$$

Podemos escribir todo esto en términos del flujo asociado con $\dot{x} = f(x)$. En primer lugar notemos que

$$x(t) = \Phi(x(0), t). \quad (3.29)$$

Además hemos mostrado que

$$\Phi(x(0), t + s) = x(t + s) = \Phi(x(s), t). \quad (3.30)$$

La ecuación (3.29), evaluada en $t = s$, nos dice que $x(s) = \Phi(x(0), s)$. Al sustituir $x(s)$ en (3.30) por esta expresión en términos de Φ , concluimos que el flujo Φ debe satisfacer

$$\Phi(x(0), t + s) = \Phi(\Phi(x(0), s), t),$$

si t , s y $t + s$ están en el intervalo $I(x, 0)$ de definición de la solución $x(t)$. Esta última igualdad debe leerse de la siguiente manera: si partimos de una condición $x(0)$ y avanzamos hasta tiempo $t + s$ siguiendo la solución de la ecuación diferencial obtenemos el mismo resultado que si avanzamos s unidades de tiempo, hasta el punto $\Phi(x(0), s)$, y a partir de ahí avanzamos otras t unidades de tiempo resolviendo otra vez la ecuación con el nuevo dato inicial. Para que todo esto tenga sentido solo hay que tener cuidado en asegurarse de que la solución con dato inicial $x(0)$ está definida en los tiempos s y $t + s$. Las consideraciones que acabamos de hacer constituyen la demostración de nuestro próximo teorema.

Teorema 3.8. *Consideremos una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$, con*

$$f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

y $x \in \Omega$. Sean t y s dos números reales tales que $\Phi(x, t)$ y $\Phi(\Phi(x, t), s)$ están definidos. Entonces también está definido $\Phi(x, t+s)$ y se satisface la igualdad.

$$\Phi(x, t+s) = \Phi(\Phi(x, t), s). \quad (3.31)$$

Observación 3.2.1. Los mismos argumentos que usamos para demostrar el teorema 3.8 son los que empleamos en el ejercicio 3.2, página 221, para probar que la exponencial de una matriz tiene la propiedad

$$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}, \quad s, t \in \mathbf{R}. \quad (3.32)$$

Naturalmente, esta igualdad es equivalente a que se satisfaga

$$e^{A(t+s)}X = e^{At}e^{As}X, \quad s, t \in \mathbf{R}. \quad (3.33)$$

para todo $X \in \mathbf{R}^n$. Si recordamos que el flujo de una ecuación lineal $\dot{X} = AX$ es

$$\Phi(X, t) = e^{At}X,$$

reconocemos entonces que (3.33) no es otra cosa que (3.31) en el caso particular del flujo asociado a una ecuación lineal con matriz A . ♠

El siguiente ejercicio tiene como objetivo verificar directamente la validez de la fórmula (3.31) para algunas ecuaciones no lineales.

Ejercicio 3.17. * Comprobar la fórmula (3.31) en los flujos asociados con las ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = -x^2, \quad \text{y} \quad \dot{x} = x - x^2,$$

que aparecieron en la sección 1.2 (ecuaciones (1.20) y (1.28) respectivamente). Prestar especial atención al problema de que en ambos casos hay soluciones que no están definidas para todos los tiempos.

Para cerrar estos comentarios acerca del flujo enunciaremos dos teoremas acerca de su dependencia respecto a las variables x y t .

Teorema 3.9. Consideremos el flujo Φ asociado con la ecuación $\dot{x} = f(x)$, que está definido en el conjunto \mathcal{D} dado por (3.26). Entonces \mathcal{D} es un subconjunto abierto de \mathbf{R}^{n+1} y Φ es una función continua.

Observación 3.2.2. SISTEMAS DINÁMICOS

Supongamos que el flujo $\Phi(x, t)$ asociado con una ecuación autónoma en un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ está definido para cualquier tiempo t . Tiene entonces las siguientes propiedades:

1. es una función continua de (x, t) ;
2. $\Phi(x, 0) = x$, para todo $x \in \Omega$. Esta propiedad es obvia, por la definición que hemos dado del flujo Φ .

3. la propiedad de grupo $\Phi(x, t+s) = \Phi(\Phi(x, t), s)$, válida para cualquier x en Ω y t, s reales, que asegura que es lo mismo
- (a) avanzar desde x durante $t+s$ unidades de tiempo;
 - (b) avanzar t unidades de tiempo. Usar el punto alcanzado como nueva condición inicial y avanzar a partir de allí s unidades de tiempo.

Diremos que una función Φ que tenga estas tres propiedades es un *sistema dinámico*, porque describe una evolución en el tiempo de los puntos de Ω . Los flujos asociados con ecuaciones diferenciales autónomas definen –cuando existen para todo tiempo³– sistemas dinámicos. Pero existen también sistemas dinámicos que no provienen de resolver ninguna ecuación diferencial. En otras palabras, es la propiedad de grupo de la función Φ la que recoge la idea de *dinámica* o *movimiento*. Esta idea es diferente, incluso anterior, que modelar la evolución de un sistema por medio de una ecuación diferencial. La noción de evolución asociada con la propiedad 3 de flujos y sistemas dinámicos reaparecerá en el contexto de las ecuaciones en derivadas parciales, cuando analicemos las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas y el flujo de calor. ♠

Si el miembro de la derecha de la ecuación es más regular, entonces el resultado de dependencia continua respecto a las condiciones iniciales puede mejorarse para obtener dependencia C^k , tal como enunciamos a continuación.

Teorema 3.10. *Si f es una función de clase C^k en Ω entonces Φ es una función de clase C^k en su dominio \mathcal{D}_Φ .*

Los teoremas 3.9 y 3.10 tienen cierta complejidad porque implican estudiar la dependencia de las soluciones de la ecuación respecto a las condiciones iniciales. Es mucho más sencillo obtener resultados de regularidad respecto al tiempo, dejando las condiciones iniciales fijas. Ese es el contenido de nuestro próximo ejercicio, en el que trabajaremos en general, incluyendo el caso de ecuaciones no autónomas definidas en algún dominio $Q \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Ejercicio 3.18. * Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$ en Q , y supongamos que f es de clase C^1 en Q . Mostrar que si $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial entonces es una función de clase C^2 . Concluir que la derivada segunda $\ddot{x}(t)$ de las soluciones puede calcularse en cada punto (x, t) de Q a partir de la ecuación. Generalizar al caso en que f es de clase C^k . ♡

Sacaremos algún partido de los resultados de este ejercicio en la sección dedicada al análisis cualitativo de las ecuaciones diferenciales.

³esta condición no es esencial. Siempre es posible reparametrizar las soluciones de la ecuación para que todas las soluciones estén definidas para todos los tiempos.

3.2.2 Soluciones distintas de una ecuación diferencial no pueden cortarse

Otra consecuencia de la unicidad es que dos soluciones diferentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$ diferentes de una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$ no pueden satisfacer la igualdad $x(t) = y(t)$ para ningún valor de t . En otras palabras: dos soluciones de una ecuación diferencial son *siempre* distintas, o son idénticas. Esto es muy sencillo de demostrar.

Supongamos que tenemos dos soluciones maximales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación $\dot{x} = f(x, t)$, y un tiempo t_0 en el que se satisface $x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Llamemos x_0 a este valor. Es decir, definamos

$$x_0 = x_1(t_0) = x_2(t_0).$$

Entonces x_1 y x_2 son ambas soluciones del problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

y la unicidad de soluciones asegura que $x_1 \equiv x_2$.

Ejercicio 3.19. ** Supongamos que x_1 y x_2 son dos soluciones de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$ tales que existe un tiempo t_0 para el que se cumple $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ (no estamos suponiendo ahora que x_1 y x_2 sean maximales). Mostrar que se satisface la igualdad $x_1(t) = x_2(t)$ para todo t que esté en el intervalo en que ambas soluciones están definidas.

Ejercicio 3.20. * SOLUCIONES PERIÓDICAS

1. Consideremos la ecuación autónoma $\dot{x} = f(x)$. Sea $x(t)$ una solución tal que existen t_0 y $T > 0$ con la propiedad de que

$$x(t_0 + T) = x(t_0).$$

Concluir que $x(t)$ está definida en todo \mathbf{R} y es periódica de período T .

2. Supongamos que la función $f(x, t)$, es periódica en la variable t . Esto es decir que existe $T > 0$ tal que

$$f(x, t + T) = f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Mostrar que si $x(t)$ es una solución de $\dot{x} = f(x, t)$ tal que existe un t_0 para el que se satisface $x(t_0 + T) = x(t_0)$, entonces es una solución periódica de la ecuación.

Ejercicio 3.21. * Consideremos una función $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ que tiene la siguiente propiedad de simetría respecto a t :

$$f(x, t) = -f(x, -t).$$

Supongamos que $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$. Mostrar que $y(t) = x(-t)$ también es una solución. Concluir todas las soluciones de la ecuación que están definidas en $t = 0$ son pares.

¿Qué puede afirmarse sobre las soluciones de si se satisface $f(x, t) = f(x, -t)$?

Sugerimos volver al ejemplo 1.8.7, página 137 luego de haber hecho el último ejercicio.

Pasemos ahora a considerar una ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$. Una consecuencia importante de los comentarios que acabamos de hacer es que dos órbitas diferentes de la ecuación no pueden tocarse. Nuevamente, probaremos que si dos órbitas \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 tienen un punto en común entonces coinciden. Cada órbita es el recorrido de una solución, de modo que tomemos soluciones maximales x_i , $i = 1, 2$, definidas sobre intervalos I_i tales que

$$\mathcal{O}_i = \{x_i(t); t \in I_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Si las órbitas tienen un punto común x_0 entonces habrá un tiempo t_1 en el intervalo I_1 , y un tiempo t_2 en I_2 , tales que $x_1(t_1) = x_2(t_2) = x_0$. Esto implica, por ejemplo, que $x_2(s+t_2-t_1)$ es una solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(t_1) = x_0, \end{cases}$$

al igual que $x_1(s)$. La unicidad de soluciones nos dice entonces que

$$x_1(s) = x_2(s + t_2 - t_1), \quad s \in I_1,$$

y, en consecuencia, las soluciones x_1 y x_2 recorren el mismo conjunto del plano. Esta última afirmación es equivalente a que $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

En los próximos ejemplos extraeremos algunas consecuencias sencillas del resultado que acabamos de encontrar.

Ejemplo 3.2.3. La primera consecuencia es que una solución no estacionaria de una ecuación diferencial autónoma nunca puede alcanzar un punto crítico. En efecto, si \bar{x} es un punto crítico de $\dot{x} = f(x)$ entonces la función constante $x(t) \equiv \bar{x}$ es una solución de la ecuación. Por lo tanto, ninguna solución de la ecuación que no sea ésta puede tomar el valor \bar{x} . Por supuesto que puede ocurrir que otra solución $x(t)$ se aproxime a \bar{x} , en el sentido de que $\lim x(t) = \bar{x}$ cuando t tiende a $-\infty$ o $+\infty$, tal como hemos visto en muchas ocasiones. En particular, hemos visto este comportamiento cuando \bar{x} es un punto crítico asintóticamente estable. ♣

Ejemplo 3.2.4. Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ en \mathbf{R} . Si x_1 y x_2 son dos puntos críticos para la ecuación y $x_0 \in (x_1, x_2)$ entonces la órbita de x_0 está completamente contenida en (x_1, x_2) . Veamos a continuación la justificación de esto. Llamemos $x(t)$ a la solución de la ecuación que satisface $x(0) = x_0$. Si la órbita de x_0 tuviera algún punto fuera de (x_1, x_2) entonces, por la continuidad de $x(t)$, debería existir un tiempo t en el que la solución $x(t)$ tome el valor x_1 o el valor x_2 , con lo que entraríamos en contradicción con las conclusiones a las que llegamos en el ejemplo anterior. Dado que $x(t)$ no puede salir del intervalo (x_1, x_2) tiene que estar definida para todo $t \in \mathbf{R}$. ♣

Ejercicio 3.22. ** Mostrar que cada uno de los conjuntos

$$\theta = \pm \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}, \text{ con } \varphi \in (-\pi, \pi)$$

está formado por una única órbita de la ecuación (1.92) del péndulo y que las soluciones correspondientes están definidas en $(-\infty, \infty)$. Interpretar físicamente estas soluciones.

Ejercicio 3.23. ** Consideremos la ecuación diferencial en \mathbf{R}^2 cuyas ecuaciones, escritas en coordenadas polares (r, θ) , son

$$\begin{cases} \dot{r} = \begin{cases} r^4 \sin(1/r) & \text{si } r > 0, \\ 0 & \text{si } r = 0, \end{cases} \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

1. Mostrar que esta ecuación está en las hipótesis del teorema de Picard.
2. Mostrar que el origen es un punto crítico estable pero no asintóticamente estable.

3.2.3 Estudio cualitativo de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias

Gran parte de la teoría moderna para las ecuaciones diferenciales tiene como objetivo describir cualitativamente el comportamiento de sus soluciones aunque éstas no puedan calcularse explícitamente. En esta sección veremos algunos ejemplos sencillos en los que se utiliza este tipo de análisis para esbozar el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria.

Ejemplo 3.2.5. El objetivo de este ejemplo es tratar de bosquejar las soluciones de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = e^{x-t} - 1. \quad (3.35)$$

Trabajaremos en el plano (t, x) , ya que trataremos de representar el gráfico de todas las soluciones $x(t)$. En la figura 3.1 aparece el campo de pendientes en el plano (t, x) que está asociado con esta ecuación diferencial. La información acerca del crecimiento de las soluciones en cada punto (t, x) puede extraerse directamente de la ecuación diferencial. La solución que pasa por el punto (t, x) tiene derivada dada por $e^{x-t} - 1$. Entonces, tendremos que \dot{x} es mayor que 0 en el semiplano de los puntos que satisface $x > t$, y menor que 0 en $x < t$. Sobre la recta $x = t$ las soluciones tienen derivada nula. No es difícil concluir que sobre la recta $x = t$, en que las tangentes son horizontales, hay máximos relativos para las soluciones. En efecto, cuando una solución $x(t)$ atraviesa esta recta en el sentido en que t crece, pasa de la región en que $\dot{x} > 0$ a el semiplano $x > t$ en que $\dot{x} < 0$. Se puede llegar a la misma conclusión calculando la derivada segunda. Si derivamos la ecuación diferencial respecto a t obtenemos

$$\ddot{x} = e^{x-t}(\dot{x} - 1) = e^{x-t}(e^{x-t} - 2).$$

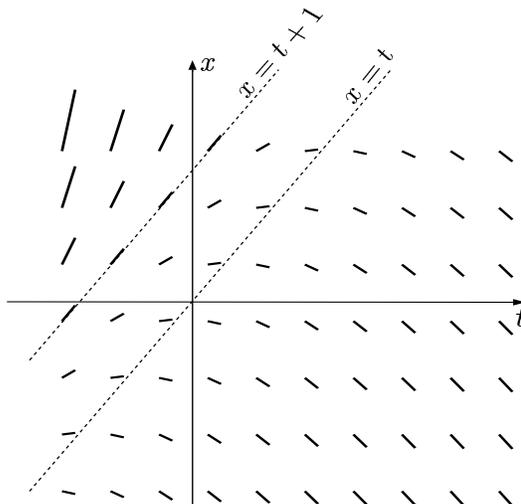


Figura 3.1: campo de pendientes de la ecuación 3.35

Por lo tanto, en la recta $x = t$ tenemos $\ddot{x} = -2 < 0$, lo que muestra que las soluciones tienen máximos locales estrictos. En el diagrama de la figura 3.2 se bosquejan los máximos de las soluciones sobre $x = t$. Encontramos también que la derivada segunda de las soluciones es positiva en la región $x - t > \log 2$, y negativa en $x - t < \log 2$. En realidad la recta $x - t = \log 2$ es el gráfico de la solución $x(t) = \log 2 + t$. Para ver que esta función $x(t)$ es una solución notemos en primer lugar que $\dot{x}(t) = 1$. Por otra parte, al sustituir en el miembro de la derecha de la ecuación se obtiene

$$e^{x(t)-t} - 1 = e^{\log 2} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Vemos entonces que esta función satisface la ecuación diferencial. Llamemos $x_1(t)$ a esta solución particular explícita. Como dos soluciones diferentes de la ecuación diferencial no pueden cortarse podemos concluir entonces que las soluciones que en algún instante t están por encima de $x_1(t)$ deben permanecer por encima para todos los tiempos en que estén definidas. Análogamente, las que estén por debajo para algún t siempre estarán por debajo.

Llegados a este punto es razonable plantearse si puede haber soluciones que estén todo el tiempo entre $x_1(t)$ y la línea $x = t$. Veamos entonces como evoluciona la cantidad

$$\varphi(t) = x(t) - t.$$

Tenemos que

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{x}(t) - 1 = e^{x(t)-t} - 2 = e^{\varphi(t)} - 2. \quad (3.36)$$

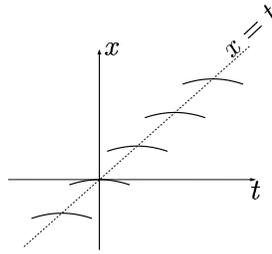


Figura 3.2: máximos sobre la recta $x = t$

Por lo tanto φ es decreciente siempre que estemos por debajo del gráfico de $x_1(t)$. Por otra parte, si una solución $x(t)$ que está por debajo de $x_1(t)$ no cruza $x = t$ y se mantiene por encima de esta recta debe estar definida para todo tiempo, porque no puede escaparse hacia infinito en un tiempo finito. Estas observaciones indican que, bajo estas hipótesis, existe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) \in [0, \log 2).$$

Recurriendo a (3.36) concluimos que también existe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\varphi}(t) \in [-1, 0).$$

Esto último es contradictorio, porque si la derivada de φ tiende a un valor negativo cuando $t \rightarrow +\infty$ la función $\varphi(t)$ debe tender a $-\infty$. Esta contradicción muestra que la solución $x(t)$ que estamos considerando pasa a ser estrictamente menor que t en algún instante.

Para completar el estudio de la ecuación diferencial es conveniente usar que la variable φ satisface la ecuación autónoma

$$\dot{\varphi} = e^\varphi - 2. \quad (3.37)$$

Antes de utilizar este hecho, y a sabiendas de que es redundante, mostraremos con un argumento que no emplea la ecuación diferencial (3.37), que las soluciones que están en el semiplano $x < \log 2 + t$ están definidas para todo t .

Supongamos entonces que tenemos una solución que está definida en un cierto tiempo t_0 , y que satisface $x(t_0) < t_0 + \log 2$. No puede ocurrir que “yendo hacia atrás en el tiempo” se escapen hacia el infinito en tiempo finito porque está obligadas a entrar en la franja $t < x < \log 2 + t$ y a permanecer allí, porque cuando t decrece φ crece, pero no puede llegar al valor $\log 2$ que se alcanza sólo sobre la solución explícita $x(t) = t + \log 2$. Por lo tanto no es posible que exista un número a tal que $\lim_{t \downarrow a} |x(t)| = +\infty$. Este hecho asegura

que las soluciones tienen que estar definidas al menos en una semirrecta de la forma $(-\infty, t_0]$. Por otra parte, la ecuación diferencial permite derivar muy fácilmente una cota inferior para las derivadas de sus soluciones, ya que

$$\dot{x}(t) = e^{x-t} - 1 \geq -1,$$

de la que se desprende que

$$x(t) \geq x(t_0) - (t - t_0).$$

Esta estimación impide que las soluciones “se escapen” hacia $-\infty$ en un tiempo finito. Como sabemos que no puede pasar para arriba de $x = t + \log 2$ tampoco puede hacerlo hacia $+\infty$, de modo que están definidas para todo tiempo.

Tal como anunciamos, saquemos partido ahora a la ecuación diferencial autónoma

$$\dot{\varphi} = e^{\varphi} - 2,$$

que satisface $\varphi(t) = x(t) - t$. Esta ecuación tiene un diagrama de fases muy sencillo, que se muestra en la figura 3.3: hay un punto crítico en $\log 2$, que

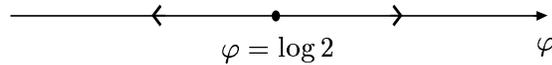


Figura 3.3: el diagrama de fases de la ecuación (3.37)

corresponde a la solución $x_1(t)$, y sus soluciones son creciente en $\varphi > \log 2$ y decrecientes en $\varphi < \log 2$. Por medio de los resultados del ejercicio 3.15 la ecuación autónoma nos permite dilucidar rápidamente la cuestión de los intervalos de definición de las soluciones. Cuando “avanzamos” hacia atrás en el tiempo todas las soluciones se aproximan al punto crítico $\varphi = \log 2$. Esto implica que están definidas sobre un intervalo que se extiende hasta $-\infty$. Miremos que es lo que pasa ahora cuando hacemos crecer t . Si $\varphi_0 < \log 2$ la integral

$$\int_{-\infty}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{e^{\varphi} - 2}$$

es divergente, de modo que las soluciones están definidas para todo tiempo. En cambio, si $\varphi_0 > \log 2$ la integral

$$\int_{\varphi_0}^{+\infty} \frac{d\varphi}{e^{\varphi} - 2}$$

tiene un valor finito que depende de φ_0 , al que llamaremos $T(\varphi_0)$. Por lo tanto, la solución con dato $\varphi(t_0) = \varphi_0$ está definida sólo hasta $t_0 + T(\varphi_0)$. Cuando t se aproxima a este valor encontramos que φ tiende a $+\infty$. Si recordamos la

definición de $\varphi(t)$ en términos de las variables originales t y $x(t)$, encontramos que $x(t) = \varphi(t) + t$, por lo que todas las soluciones que están por encima de la recta de ecuación $x = \log 2 + t$ tienen una asíntota vertical.

Todas las consideraciones que hemos hecho permiten representar con bastante detalle el conjunto de las soluciones de la ecuación diferencial (3.35), tal

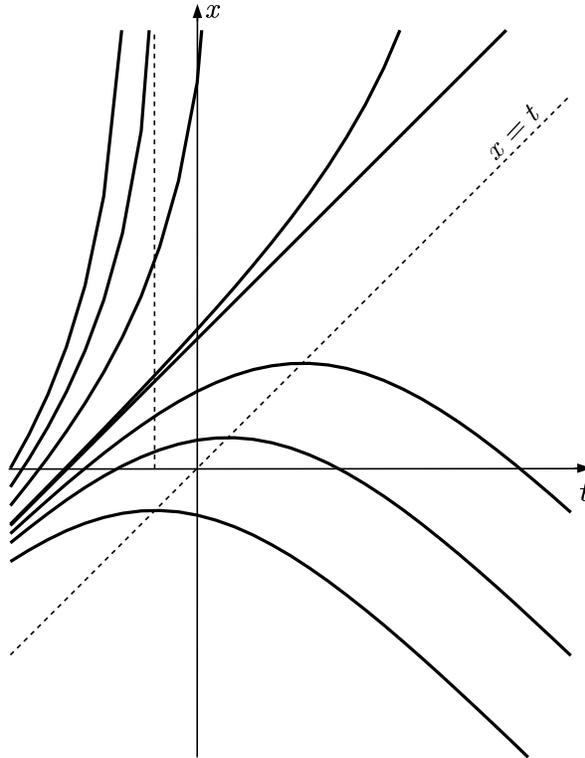


Figura 3.4: el plano (t, x) con las soluciones de la ecuación (3.35)

como se hace en la figura 3.4, sin necesidad de resolverla. Como el objetivo de nuestra discusión era mostrar en un ejemplo una serie de argumentos que pueden emplearse para este tipo de estudios cualitativos en algún momento obtuvimos la misma información por más de un procedimiento. Información adicional sobre las soluciones de la ecuación está contenida en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 3.24. Mostrar que si $x(t)$ es una solución de (3.35) y c es una constante real cualquiera entonces

$$y(t) = x(t + c) - c$$

también lo es. ¿Qué relación hay entre los gráficos de las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ en el plano (t, x) ? ♣

Ejercicio 3.25. *

Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = \sin(x + t)$ en $Q = \mathbf{R}^2$.

1. Mostrar que puede aplicarse el teorema de Picard a esta ecuación.
2. Hallar todas las soluciones de la forma $x(t) = at + b$, donde a y b son dos constante reales.
3. Mostrar que todas sus soluciones $x(t)$ están definidas para todo t .
4. Mostrar que si $x_1(t)$ es una solución de la ecuación entonces $x_2(t) = x_1(t) + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, también es una solución.
5. Hallar el lugar de los puntos críticos de las soluciones. Clasificarlos determinando si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.
6. Bosquejar las soluciones de la ecuación.

Ejercicio 3.26. * Esbozar las soluciones de

$$\dot{x} = t \sin^2 x.$$

Ejercicio 3.27. ** Consideremos la ecuación diferencial no autónoma en \mathbf{R}

$$\dot{x} = 2t \cos(x - t^2). \quad (3.38)$$

1. Mostrar que para cualquier pareja $(t_0, x_0) \in \mathbf{R}^2$ existe una única solución del problema de valores iniciales que consiste en resolver (3.38) con la condición inicial $x(t_0) = x_0$.
2. Hallar todas las soluciones de (3.38) que son de la forma $x(t) = a + t^2$, donde a es una constante a determinar.
3. Mostrar que todas las soluciones de la ecuación están definidas para todos los tiempos.
4. Si $x(t)$ es una solución de (3.38) probar que $y_1(t) = x(-t)$ e $y_2(t) = x(t) + 2\pi$ también son soluciones de la ecuación.
5. Estudiar el signo de $\dot{x}(t)$.
6. Si $x(t)$ es una solución de la ecuación probar que $\varphi(t) = x(t) - t^2$ es decreciente para $t > 0$ y creciente para $t < 0$. Deducir que $\varphi(t)$ alcanza su máximo en $t = 0$ y concluir que el gráfico de la solución $x(t)$ con dato inicial $x(0) = x_0 \in (0, 2\pi)$ está por debajo de la parábola de ecuación $x = x_0 + t^2$.
7. (a) Mostrar que la solución $x(t)$ con dato inicial $x(0) = 3\pi/2$ tiene un máximo local estricto en $t = 0$;
 (b) mostrar que la solución con dato inicial $x(0) = \pi/2$ alcanza su mínimo en $t = 0$ y que este mínimo es estricto (sugerencia: usar las partes 5 y 6).
 (c) Hallar todos los máximos y mínimos de las soluciones.

8. Mostrar que para todas las soluciones con dato inicial $x(0) \in (0, 2\pi)$ se tiene que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$.
9. Calcular $\ddot{x}(t)$ y mostrar que las soluciones $x(t)$ tienen derivada segunda positiva siempre que se satisfaga $t^2 < x(t) < \pi/2 + t^2$.
10. Usar toda la información de las partes anteriores para bosquejar las soluciones de la ecuación diferencial (3.38) en el plano (t, x) .

Ejercicio 3.28. ** Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = t - x^2$.

1. Mostrar que esta ecuación está dentro de las hipótesis del teorema de Picard.
2. Hallar la curva sobre la que se encuentran los puntos críticos de las soluciones y mostrar que corresponden a mínimos.
3. Consideremos la solución $x(t)$ con dato $x(t_0) = x_0$, siendo $x_0 > 0$, $t_0 > 0$.
 - (a) Mostrar que $x(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$ y que $t - x^2(t) > 0$ si t es suficientemente grande. En particular hay que asegurarse de que, en este caso, la solución $x(t)$ está definida para todo $t > t_0$.
 - (b) Deducir que $x(t)$ tiene algún punto de inflexión (utilizar que ninguna solución que tenga la derivada primera \dot{x} acotada inferiormente por una constante $c > 0$ puede permanecer todo el tiempo por debajo de la parábola de ecuación $x^2 = t$).
 - (c) Probar que $x(t)$ no está acotada.

3.3 Estabilidad y funciones de Liapunov

En esta sección y en la que sigue nos ocuparemos de estudiar sistemáticamente las nociones de estabilidad e inestabilidad de puntos críticos para las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas en \mathbf{R}^n , de la forma

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.39)$$

donde f está definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ y es localmente Lipschitz. Esta hipótesis asegura que podemos aplicar a la ecuación 3.39 toda la teoría que hemos desarrollado en las secciones 3.1 y 3.2. Sobre el final de la sección 3.4 definiremos la estabilidad e inestabilidad para soluciones cualesquiera de una ecuación diferencial.

Recordemos las definiciones para el caso de puntos críticos de ecuaciones diferenciales autónomas.

Definición 1.4. PUNTO CRÍTICO ESTABLE E INESTABLE

Diremos que un punto crítico \bar{x} , para una ecuación diferencial autónoma

$$\dot{x} = f(x),$$

es *estable* si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x_0 \in B(\bar{x}, \delta)$ entonces la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial con dato inicial $x(0) = x_0$ satisface

$$x(t) \in B(\bar{x}, \epsilon), \quad t \in [0, +\infty). \quad (1.40)$$

Diremos que \bar{x} es *inestable* si no es estable.

Definición 1.5. PUNTO CRÍTICO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

Diremos que un punto crítico \bar{x} para $\dot{x} = f(x)$ es *asintóticamente estable* si es estable y existe una bola $B(\bar{x}, \delta)$ tal que todas las soluciones $x(t)$ de la ecuación con dato inicial $x(0) = x_0 \in B(\bar{x}, \delta)$ satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}. \quad (1.41)$$

Podemos escribir estas definiciones de estabilidad e inestabilidad utilizando el flujo Φ asociado con la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$. La definición de estabilidad de \bar{x} requiere que, fijado $\epsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que

$$\Phi(x, t) \in B(\bar{x}, \epsilon), \quad x \in B(\bar{x}, \delta), \quad t \geq 0.$$

Para que \bar{x} sea asintóticamente estable además debe satisfacerse

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(x, t) = \bar{x}, \quad x \in B(\bar{x}, \delta).$$

Ejercicio 3.29. ***

1. Sea \bar{x} un punto de equilibrio estable de una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$. Mostrar que existe un entorno abierto U de \bar{x} con la siguiente propiedad: si $x \in U$ entonces $\Phi(x, t)$, el valor en el instante t de la solución de la ecuación diferencial con dato inicial x , pertenece a U para todo $t \geq 0$.
2. Si el punto \bar{x} es asintóticamente estable el entorno U puede elegirse con la propiedad adicional de que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(x, t) = \bar{x}$, para todo $x \in U$.

Comenzaremos por retomar las nociones que introdujimos en la sección 1.4 presentando la importante noción de *función de Liapunov*. Como paso previo vamos a formular la siguiente observación acerca de la posibilidad de derivar una función “sobre las soluciones de una ecuación diferencial”, aunque estas soluciones sean desconocidas. Esencialmente volveremos sobre las mismas ideas que expusimos en la sección 1.4.

Observación 3.3.1. Consideremos la ecuación diferencial autónoma (3.39) en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, y una función V , de clase C^1 , definida sobre un subconjunto abierto U de Ω . Si $x(t)$ es una solución de la ecuación diferencial, siempre que $x(t) \in U$ podemos considerar la función $V(x(t))$ que resulta de evaluar V sobre la solución $x(t)$. Esta función es de clase C^1 , y su derivada es, en virtud de la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t).$$

Como $x(t)$ es una solución de la ecuación se satisface $\dot{x}(t) = f(x(t))$ y entonces

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)).$$

Notemos entonces que la derivada de V sobre la órbita $x(t)$ *sólo depende del punto* $x(t)$. De hecho, podemos definir una función continua $\dot{V} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ por la fórmula

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x), \quad x \in \Omega,$$

y esta función tiene la propiedad de que si $x(t)$ es una solución de (3.39) entonces

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)). \quad (3.42)$$

Ejemplo 3.3.2. Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= -bx + ay, \end{aligned}$$

en el plano, y la función $V(x, y) = x^2 + y^2$. Entonces el campo vectorial f asociado con la ecuación es

$$f(x, y) = (ax + by, -bx + ay),$$

el gradiente de V es

$$\nabla V(x, y) = (2x, 2y)$$

y la función \dot{V} resulta ser entonces

$$\dot{V}(x, y) = 2a(x^2 + y^2). \quad (3.43)$$

Por ejemplo, la curva

$$(x(t), y(t)) = (e^{at} \cos bt, e^{at} \sin bt)$$

es una solución de la ecuación. Al evaluar V sobre esta solución obtenemos

$$V(x(t), y(t)) = e^{2at} (\cos^2 bt, \sin^2 bt) = e^{2at}.$$

Un cálculo directo nos dice que su derivada es

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = 2ae^{2at}.$$

Si queremos calcular la derivada usando la fórmula (3.42) y la expresión (3.43) que tiene \dot{V} en este ejemplo resulta entonces

$$\dot{V}(x(t), y(t)) = 2a (e^{2at} \cos^2 bt + e^{2at} \sin^2 bt) = 2ae^{2at},$$

que, naturalmente, coincide con lo que habíamos encontrado antes.

Notemos que \dot{V} será positiva, negativa o nula, según el valor de a , para todo punto (x, y) que no sea el punto crítico $(0, 0)$. Por lo tanto V será creciente, decreciente o constante sobre las órbitas de la ecuación diferencial. Ya vimos en la sección 1.4 que esta información es muy útil para determinar diversos aspectos dinámicos asociados con las ecuaciones diferenciales, y en esta sección nos dedicaremos a explotar este tipo de ideas en forma más sistemática. ♣ ♠

Definición 3.3. FUNCIONES DE LIAPUNOV

Consideremos la ecuación $\dot{x} = f(x)$, con f definida en un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Sea $U \subset \Omega$ un abierto. Diremos que una función $V : U \rightarrow \mathbf{R}$, de clase C^1 , es una *función de Liapunov* para la ecuación $\dot{x} = f(x)$ si se satisface

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad x \in U. \quad (3.44)$$

Si la desigualdad

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) < 0 \quad (3.45)$$

se satisface siempre que estemos fuera de un punto crítico de la ecuación diferencial, diremos que la función de Liapunov es *estricta*

Como consecuencia de la observación 3.3.1 resulta entonces que si $x(t)$ es una solución de la ecuación (3.39) y V es una función de Liapunov, entonces $V(x(t))$ es una función no creciente del tiempo t . Más aún, si $x(t)$ no es una solución estacionaria y V es una función de Liapunov estricta, entonces $V(x(t))$ es estrictamente decreciente. En general, las cantidades que se conservan o decrecen sobre las órbitas que introdujimos en la sección 1.4 son funciones de Liapunov. Recomendamos repasar esos ejemplos antes de seguir adelante. El objetivo principal de esta sección es establecer un resultado de estabilidad que generaliza la proposición 1.2, en la que considerábamos la estabilidad de la posición de reposo de un péndulo que se encuentra en la parte inferior de su recorrido (ver la página 59 y sucesivas, en la sección 1.4). Este teorema contiene además información acerca de la estabilidad asintótica de los puntos críticos. Pasemos a enunciarlo.

Teorema 3.11 (Liapunov, 1892). *Consideremos un conjunto abierto contenido en \mathbf{R}^n , al que llamaremos Ω , y una función $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ localmente Lipschitz. Sea $\bar{x} \in \Omega$ un punto crítico de $\dot{x} = f(x)$ y V una función de Liapunov para la ecuación diferencial, definida en un abierto $U \subset \Omega$ que contiene a \bar{x} . Supongamos que V tiene un mínimo estricto en \bar{x} , en el siguiente sentido: existe un entorno W de \bar{x} tal que*

$$V(x) > V(\bar{x}), \quad x \in W \setminus \{\bar{x}\}. \quad (3.46)$$

Entonces el punto crítico \bar{x} es estable.

Además, si la función de Liapunov V es estricta y el punto \bar{x} es un punto crítico aislado entonces \bar{x} es asintóticamente estable.

Observación 3.3.3. Es evidente que si una función V satisface $\dot{V} \geq 0$ entonces $-V$ es una función de Liapunov. También que si la desigualdad $\dot{V} > 0$ es cierta fuera de los puntos críticos de la ecuación diferencial entonces $-V$ es una función de Liapunov estricta. En general, todos los resultados que vamos a demostrar en esta sección para funciones que decrecen sobre las órbitas (funciones de Liapunov) tienen, como un corolario inmediato, un teorema “gemelo” para funciones que crecen sobre las órbitas. Dejamos desde ya planteado el ejercicio de buscar estos corolarios para funciones con $\dot{V} \geq 0$. ♠

Observación 3.3.4. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA 3.11 Supongamos que estamos trabajando con una ecuación diferencial autónoma en el plano $n = 2$, y que tenemos una función de Liapunov V . Consideremos los conjuntos del plano sobre los cuales V es constante (a los que es usual llamar *curvas de nivel* de V). En general, estos conjuntos son curvas ortogonales al vector ∇V , por lo que si en cada punto x de la curva de nivel dibujamos la tangente a esta curva encontramos que es ortogonal a $\nabla V(x)$. Más aún, el vector ∇V apunta en la dirección en la que V crece, por lo que, localmente, los puntos que estén del lado de la recta tangente hacia el que apunta ∇V tendrán

valores de V más altos, en tanto que los que estén del otro lado tendrán valores de V más bajos.

Consideremos una curva $x(t)$ en el plano, y su vector tangente o vector velocidad $\dot{x}(t)$ en cada punto de la curva. Si

$$\nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t) < 0$$

eso significa que la curva $x(t)$ está atravesando las rectas tangentes a las curvas de nivel de V en el sentido en que V disminuye, tal como se muestra en la figura 3.5, donde $v_1 < v_2 < v_3$.

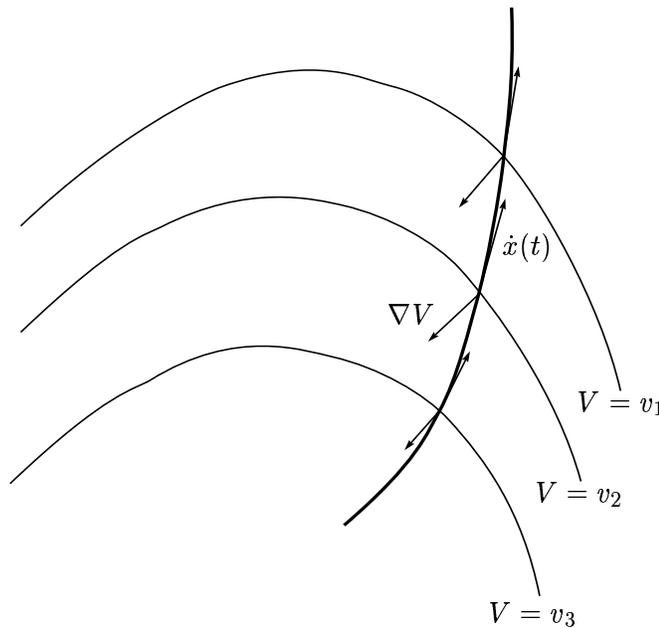


Figura 3.5: una órbita cruzando las líneas de nivel de V

Supongamos ahora que \bar{x} es un punto crítico de una ecuación diferencial, V una función de Liapunov que alcanza un mínimo estricto en \bar{x} y $x(t)$ una solución de la ecuación. En esta situación, como hay un mínimo de V en \bar{x} , las curvas de nivel de V correspondientes a valores ligeramente superiores a $V(\bar{x})$ rodean a \bar{x} , y las que están más alejadas de \bar{x} (más “afuera”) corresponden a mayores valores de V . Vemos entonces que si \dot{V} es negativa una solución $x(t)$ no puede irse demasiado lejos del punto crítico, porque para hacerlo debería atravesar las líneas de nivel de V en una dirección que está prohibida por el signo de \dot{V} . Más aún, la suposición de que $\dot{V} < 0$ fuerza a las órbitas a atravesar las curvas de nivel de V en el sentido en que V decrece. A grandes rasgos, si hay un mínimo de V en \bar{x} , esto “las aproxima” a \bar{x} . En esta situación la solución debe acercarse al punto crítico, y como no puede detenerse

antes termina aproximándose a él, lo que permite demostrar un resultado de estabilidad asintótica.

Cuando $\dot{V} \leq 0$ entonces no es cierto, en general, que la solución deba ir atravesando las curvas de nivel de V de forma tal que $V(x(t))$ siempre esté decreciendo. Pero podemos afirmar que $x(t)$ jamás va a atravesar una curva de nivel en el sentido en que V crece, y esto es suficiente para obtener estabilidad del punto crítico \bar{x} .

Claro está que esta discusión geométrica no es una demostración del teorema de Liapunov, pero es ilustrativa acerca del comportamiento de las soluciones de una ecuación que tiene una función de Liapunov. La restricción al caso $n = 2$ no es esencial. En $n = 3$ los conjuntos de nivel son superficies, y el gradiente ∇V es perpendicular a estas superficies. Para $n > 3$ los conjuntos de nivel son superficies de dimensión $n - 1$, o hipersuperficies. Todas las consideraciones geométricas que hemos hecho en el caso $n = 2$ pueden extenderse a dimensiones más altas. ♠

Tal como mencionamos, la primera parte del teorema de Liapunov es la formulación general de la proposición 1.2, y su demostración es esencialmente la misma que presentamos en la sección 1.4. El único ingrediente que le faltaba a la demostración de esta proposición era verificar que las soluciones de la ecuación diferencial están definidas para todo $t > 0$. Ahora ya sabemos como hacer esto, incorporando los resultados de la parte 1 del ejercicio 3.13, página 230, tal como se hizo en la parte 2 de ese ejercicio para completar la demostración de la proposición 1.2. Ver también la observación 3.1.14 que sigue al ejercicio 3.13.

Observación 3.3.5. No es ninguna pérdida de generalidad suponer que la función de Liapunov V se anula en \bar{x} y es positiva en todos los otros puntos de W . Esto es así porque a partir de V podemos definir la nueva función de Liapunov

$$\bar{V}(x) = V(x) - V(\bar{x}),$$

que satisface $\bar{V}(\bar{x}) = 0$ y $\bar{V} \geq 0$ en W . ♠

PRUEBA DEL TEOREMA 3.11: Supondremos que $V(\bar{x}) = 0$, cosa que no es ninguna pérdida de generalidad tal como ya observamos.

Para demostrar la primera parte veamos que se satisface la definición de estabilidad para el punto crítico \bar{x} . Para ello comencemos con fijar $\epsilon > 0$. Como \bar{x} es un mínimo estricto de la función V existe un entorno $W \subset U$ de \bar{x} tal que se satisface

$$V(x) > 0, \quad x \in W \setminus \{\bar{x}\}.$$

No hay inconveniente en suponer que la bola cerrada

$$\bar{B}(x, \epsilon) = \{y \in \mathbf{R}^n; |y - \bar{x}| \leq \epsilon\}$$

está contenida en W , ya que esto siempre puede conseguirse escogiendo un número ϵ más pequeño que el que había sido fijado de antemano, si es necesario. Consideremos la frontera de $B(x, \epsilon)$, el conjunto

$$S(x, \epsilon) = \{y \in \mathbf{R}^n; |y - x| = \epsilon\}.$$

Este conjunto es cerrado y acotado, por lo tanto la función continua V tiene un mínimo m en $S(x, \epsilon)$. Como este mínimo corresponde al valor de V en

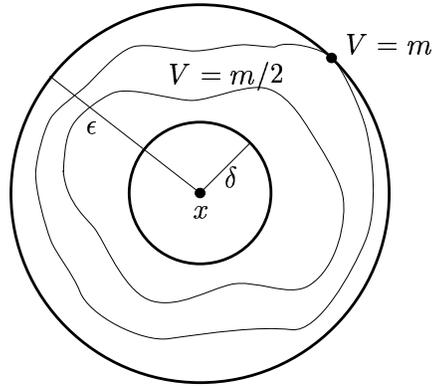


Figura 3.6: esquema de los conjuntos que intervienen en la demostración

algún punto de $S(x, \epsilon)$ es positivo. Tomemos ahora cualquier número positivo y menor que m , por ejemplo $m/2$. Como V es continua existe un número $\delta > 0$ y menor que ϵ tal que

$$V(y) < m/2, \quad y \in B(0, \delta).$$

En la figura 3.6 hemos representado los conjuntos de nivel $V = m$ y $V = m/2$, y destacado el punto⁴ de $V = m$ que está sobre $S(x, \epsilon)$. También hemos incluido en la figura la bola $B(x, \delta)$, que no puede tocar al conjunto de nivel $V = m/2$ por la forma en que hemos escogido δ . Consideremos un $x_0 \in B(0, \delta)$ y la solución maximal de la ecuación diferencial con dato $x(0) = x_0$ (esta solución está definida en un intervalo (a, b) que contiene a 0, donde, en principio, b puede ser $+\infty$ o cualquier número real positivo). Vamos a probar que

$$x(t) \in B(x, \epsilon), \quad t \in [0, b]. \quad (3.47)$$

Este hecho es obvio para $t = 0$, tenemos entonces que

$$|x(0) - \bar{x}| < \delta < \epsilon.$$

⁴naturalmente, este punto no tiene por qué ser único, ni el conjunto de nivel tiene por qué tener el aspecto simple con el que lo hemos dibujado. La figura debe interpretarse como un esquema auxiliar que ayuda a seguir los pasos de la prueba y nada más

Como $|x(t) - \bar{x}|$ es una función continua de t , es menor que ϵ en $t = 0$ y mayor o igual que ϵ en $t = t_1$, entonces en algún punto $t_2 \in (0, t_1]$ debe satisfacerse

$$|x(t_2) - \bar{x}| = \epsilon.$$

En resumen, hemos probado el hecho bastante evidente de que es necesario que en algún momento la órbita $x(t)$ esté en $S(x, \epsilon)$ para que pueda salir de $B(x, \epsilon)$. Esto nos conducirá a una contradicción porque V es más grande en $S(x, \epsilon)$ que en el punto x_0 del que partió nuestra solución $x(t)$. En efecto, consideremos el primer tiempo \bar{t} en el que la órbita llega a $S(x, \epsilon)$, es decir

$$\bar{t} = \inf\{t \in [0, b); x(t) \in S(x, \epsilon')\}$$

La definición de \bar{t} implica que $x(\bar{t}) \in S(x, \epsilon)$ y que $\bar{t} > 0$. En tanto que

$$x(t) \in B(x, \epsilon) \subset U, \quad x \in [0, \bar{t}).$$

Este último hecho asegura que $V(x(t))$ está definida sobre todo el intervalo $[0, \bar{t}]$. Como \dot{V} es menor o igual que 0 la función $V(x(t))$ es no creciente, de modo que

$$V(x(\bar{t})) \leq V(x(0)) < m/2. \quad (3.48)$$

Por otra parte sabemos que $V(x(\bar{t})) \geq m$ porque m es el mínimo de V sobre $S(x, \epsilon)$. Como vemos, suponer que $x(t)$ podía salir de $B(x, \epsilon)$ nos ha llevado a una contradicción, lo que implica (3.47). Como la solución $x(t)$ debe permanecer en el conjunto $B(\bar{x}, \epsilon)$ entonces $b = +\infty$. Hemos probado entonces que

$$x(t) \in B(\bar{x}, \epsilon), \quad t \in [0, +\infty),$$

para toda solución $x(t)$ tal que su condición inicial $x(0)$ está en la bola $B(0, \delta)$. Por lo tanto el punto \bar{x} es estable.

Pasemos ahora a demostrar la estabilidad asintótica de \bar{x} cuando la función de Liapunov es estricta. Vamos a probar que las soluciones $x(t)$, con dato inicial en la bola $B(x, \delta)$ tienden a \bar{x} cuando $t \rightarrow \infty$. Para ello será suficiente mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0. \quad (3.49)$$

Comencemos por justificar esta afirmación. Fijemos $\epsilon' \in (0, \epsilon)$. Tenemos que probar, a partir de (3.49), que existe T tal que

$$x(t) \in B(\bar{x}, \epsilon'), \quad t > T.$$

Notemos que la función V es positiva en el conjunto compacto

$$\bar{B}(\bar{x}, \epsilon) \setminus B(\bar{x}, \epsilon') = \{y \in \mathbf{R}^n; \epsilon' \leq |y - \bar{x}| \leq \epsilon\}, \quad (3.50)$$

por lo tanto alcanza un mínimo positivo m_1 en ese conjunto. Por otra parte, si se satisface (3.49) existe un $T > 0$ tal que

$$V(x(t)) < m_1, \quad t > T.$$

Esta desigualdad implica que $x(t)$ no puede estar en el conjunto (3.50) cuanto t es mayor que T . Como sabemos que $x(t)$ está en la bola $B(\bar{x}, \epsilon)$ para todo $t \geq 0$ concluimos inmediatamente que

$$x(t) \in B(\bar{x}, \epsilon'), \quad t > T.$$

Recordemos además que V decrece sobre la órbita $x(t)$ y que la función V es no negativa en $B(x, \epsilon)$. Por lo tanto existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = \eta \geq 0. \quad (3.51)$$

La discusión que acabamos de presentar implica que todo lo que tenemos que hacer es descartar el caso $\eta > 0$ para tener demostrado nuestro teorema. Notemos que si η es positivo entonces la órbita no puede acercarse al punto \bar{x} . En efecto, como $V(x(t))$ es decreciente se satisface

$$V(x(t)) \geq \eta, \quad t \in [0, \infty). \quad (3.52)$$

Además $V(\bar{x}) = 0$ y V es una función continua. Por lo tanto existe un número $\delta' \in (0, \epsilon)$, tal que

$$V(y) < \eta, \quad y \in B(0, \delta'). \quad (3.53)$$

Si tenemos en cuenta que $x(t)$ siempre está en la bola $B(x, \epsilon)$ se desprende inmediatamente de (3.53) que si se satisface (3.52) entonces

$$x(t) \in \bar{B}(x, \epsilon) \setminus B(x, \delta') = \{y \in \mathbf{R}^n; \delta' \leq |y - x| \leq \epsilon\}, \quad t \in [0, +\infty). \quad (3.54)$$

Vamos a mostrar ahora que (3.54) lleva a una contradicción. Lo haremos usando un argumento que usa la continuidad de la función \dot{V} . Este hecho depende de la hipótesis de regularidad C^1 para la función de Liapunov V . En la observación 3.3.12 presentamos otra demostración que usa hipótesis más débiles sobre V .

Como V es una función de clase C^1 entonces la función

$$\dot{V} = \nabla V \cdot f$$

es continua. Además, como estamos asumiendo que V es una función de Liapunov estricta, la función \dot{V} es negativa en todos los puntos de U , salvo en los puntos críticos de la ecuación diferencial.

Como el punto crítico \bar{x} es aislado, existe $\epsilon > 0$ tal que no hay otros puntos críticos en $B(\bar{x}, \epsilon)$. No hay ningún inconveniente en suponer que el ϵ

con el que estamos trabajando tiene esta propiedad, ya que, si \bar{x} es aislado siempre podemos escoger ϵ suficientemente pequeño como para que \bar{x} sea el único punto crítico en $B(\bar{x}, \epsilon)$, y además $\bar{B}(\bar{x}, \epsilon) \subset W$. Para esta valor de ϵ podemos repetir todos los argumentos que hicimos hasta ahora.

Nuestra elección de ϵ implica que no hay ningún otro punto crítico en el conjunto compacto

$$\bar{B}(x, \epsilon) \setminus B(x, \delta') \quad (3.55)$$

que aparece en (3.54). Por lo tanto \dot{V} es negativa en todos los puntos de (3.55) y tiene un máximo negativo en ese conjunto, al que llamaremos $-m_2$. Como la órbita $x(t)$ satisface (3.54) y la derivada de V sobre la órbita se obtiene evaluando \dot{V} tenemos

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \leq -m_2, \quad t \in (0, +\infty).$$

Naturalmente, podemos integrar esta desigualdad entre 0 y cualquier $t > 0$. El resultado de este cálculo es

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) - m_2t,$$

que tiene como una consecuencia inmediata

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = -\infty.$$

Naturalmente, esta última igualdad entra en contradicción con (3.51) y, por lo tanto, el límite η en (3.51) es necesariamente 0. Esto completa la demostración del teorema. \diamond

Ejemplo 3.3.6. La proposición 1.2, en la que probamos que el punto de equilibrio del péndulo que corresponde al reposo de la partícula en la parte inferior de la guía, es un caso particular de la primera parte del teorema de Liapunov que acabamos de demostrar. También el ejercicio 1.43, página 60, puede resolverse usando la energía e y aplicando este teorema. \clubsuit

Ejemplo 3.3.7. La hipótesis de que el punto crítico \bar{x} sea aislado es esencial para que la existencia de una función de Liapunov estricta con un mínimo en \bar{x} implique la estabilidad asintótica. Veamos un ejemplo que muestra este hecho. Consideremos en \mathbf{R}^2 la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

Todo el eje $y = 0$ está formado por puntos críticos de la ecuación diferencial, cada uno de los cuales es estable pero no asintóticamente estable, tal como puede apreciarse en la figura 3.7. La función $V(x, y) = x^2 + y^2$ es una función

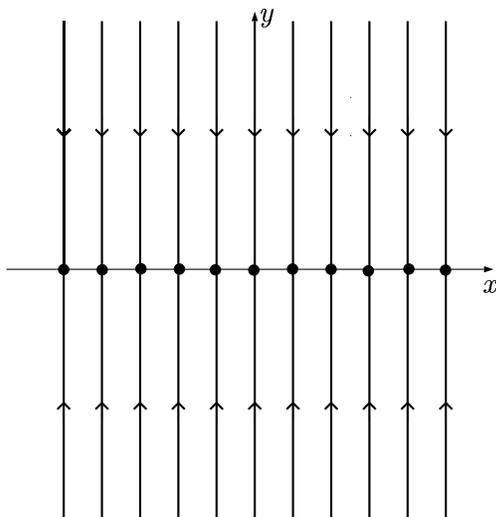


Figura 3.7: el plano de fases de $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = -y$

de Liapunov estricta para esta ecuación, porque

$$\dot{V}(x, y) = -y^2$$

es negativa en cualquier punto de \mathbf{R}^2 que no sea un punto crítico de la ecuación diferencial.

Ejercicio 3.30. ** Mostrar que si \bar{x} es un punto crítico no aislado de una ecuación diferencial autónoma entonces no puede ser asintóticamente estable. ♣

Veremos a continuación una serie de ejercicios de aplicación del Teorema de Liapunov.

Ejercicio 3.31. * Determinar los valores de los coeficientes a y b que hacen que

$$V(x, y) = ax^2 + by^2 \tag{3.56}$$

sea una función de Liapunov para cada uno de los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = 3xy, & \dot{x} = -x^3 + xy^2, & \dot{x} = -\frac{x^3}{2} + 2xy^2, \\ \dot{y} = -x^2 - y^3, & \dot{y} = -2x^2y - y^3, & \dot{y} = -y^3. \end{array}$$

¿Qué puede decirse de la estabilidad de $(0, 0)$ en cada caso?

Observación 3.3.8. FUNCIONES DE LIAPUNOV LOCALES

Las propiedades de estabilidad e inestabilidad de los puntos críticos son propiedades locales. Por esta razón, pueden estudiarse buscando funciones de Liapunov en algún entorno del punto crítico \bar{x} que estamos analizando. Para asegurarse de que tenemos una función de Liapunov hay que estudiar el

signo de las funciones V y \dot{V} en algún entorno de \bar{x} , cosa que puede hacerse localmente con bastante facilidad utilizando las técnicas usuales del cálculo: análisis de las derivadas primeras, estudio del Hessiano para determinar el comportamiento de los términos de segundo orden, etc. ♠

Los ejercicios que siguen contienen un par de ejemplos en los que se ve la utilidad de la observación anterior.

Ejercicio 3.32. * Mostrar que $V(x, y) = x^2 + y^2$ es una función de Liapunov estricta para

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{2} - \frac{y}{2} - x^2 - xy, \\ \dot{y} = -\frac{x}{4} - \frac{y}{2} - \frac{xy}{2} - y^2, \end{cases} \quad (3.57)$$

en algún entorno de $(0, 0)$, y concluir que este punto es un punto crítico asintóticamente estable. Sugerencia: determinar la función $\dot{V}(x, y)$ y mostrar que tiene un máximo estricto en $(0, 0)$.

Ejercicio 3.33. ** Hallar el punto crítico (\bar{x}, \bar{y}) de

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x - y), \\ \dot{y} = y(3/4 - y - x/2), \end{cases}$$

que satisface $\bar{x} > 0$, $\bar{y} > 0$, y mostrar que existe un entorno U de (\bar{x}, \bar{y}) en el que

$$V(x, y) = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$$

es una función de Liapunov estricta para la ecuación diferencial. Determinar el tipo de estabilidad de (\bar{x}, \bar{y}) .

A continuación expondremos un método bastante práctico para construir funciones de Liapunov locales, que explota sistemáticamente esta idea de que sólo nos interesa estudiar el signo de V y \dot{V} en un entorno de los puntos críticos.

Observación 3.3.9. FORMAS CUADRÁTICAS COMO FUNCIONES DE LIAPUNOV

Para fijar ideas trabajaremos en \mathbf{R}^2 y supondremos que el punto crítico \bar{x} es $(0, 0)$. Una función de Liapunov local para $(0, 0)$ es una función V que satisface $\dot{V} \leq 0$ en un entorno de $(0, 0)$. Es inmediato, a partir de la definición de \dot{V} , que \dot{V} siempre se anula en los puntos críticos. Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que V sea una función de Liapunov local es que \dot{V} tenga un máximo local en $(0, 0)$. La función será estricta en un entorno de $(0, 0)$ si y sólo si el máximo es estricto.

Una manera de determinar si \dot{V} tiene estas propiedades es utilizar las técnicas usuales del cálculo para buscar extremos de funciones de varias variables. Calcularemos entonces las derivadas parciales de \dot{V} en el punto crítico, y si estas se anulan recurriremos al análisis de las derivadas parciales segundas, para decidir si estamos en un máximo, un mínimo o un punto de silla.

También nos interesará saber cuál es el signo de V en un entorno del punto crítico (recordemos que necesitamos que el punto crítico sea un mínimo de V

para poder probar su estabilidad aplicando el teorema de Liapunov; veremos luego que si no se trata de un mínimo y V es una función de Liapunov estricta entonces puede deducirse la inestabilidad).

En general habrá que estudiar los términos de segundo orden del desarrollo de Taylor de V y \dot{V} alrededor de $(0, 0)$ para completar el estudio de sus signos. Naturalmente, esperamos que los términos de primer orden no aparezcan porque queremos estar en un mínimo para V y un máximo para \dot{V} . Esto sugiere considerar una función

$$V(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad (3.58)$$

en la que *sólo* aparecen los términos de segundo orden, y tratar de determinar a , b y c de manera conveniente. Recordemos además que es sencillo determinar el signo de $V(x, y)$ a partir del valor de a , b y c . Esto no es más que la clasificación de la forma cuadrática (3.58), cosa que suponemos conocida para el lector, y cuyo resultado aparece en la tabla 3.1. Vamos a ver a continuación

Condiciones sobre a, b y c		V es	$(0, 0)$ es
$ac - b^2 > 0$	$a + c > 0$	definida positiva	mínimo estricto
	$a + c < 0$	definida negativa	máximo estricto
$ac - b^2 = 0$	$a + c > 0$	semidefinida positiva	mínimo no estricto
	$a + c < 0$	semidefinida negativa	máximo no estricto
$ac - b^2 < 0$		no definida	punto de silla

Tabla 3.1: clasificación de la forma cuadrática (3.58)

un ejemplo de esta técnica.

Ejemplo 3.3.10. Buscaremos en este ejemplo una función de Liapunov estricta para el sistema del péndulo amortiguado. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega\theta, \\ \dot{\theta} = -\omega \sin \varphi - \beta\theta, \end{cases} \quad (3.59)$$

donde ω y β son dos constantes positivas. El término $-\beta\theta$ representa la existencia de un amortiguamiento que frena el movimiento. Esto sugiere que cualquier solución del sistema tiende al reposo en la posición de equilibrio estable y que el punto crítico $(0, 0)$ es, en definitiva, asintóticamente estable. Si utilizamos la función de Liapunov “natural” para el sistema, la energía

$$e(\varphi, \theta) = \theta^2/2 - \cos \varphi,$$

encontramos que

$$\dot{e}(\varphi, \theta) = -\beta\theta^2$$

es una función de Liapunov pero no es estricta, porque $\dot{e} = 0$ sobre todos los puntos en los que $\theta = 0$. Esta función permite mostrar la estabilidad de $(0, 0)$, pero no su estabilidad asintótica. Al menos no es posible hacerlo con la teoría que hemos desarrollado hasta ahora (ver la proposición 3.4 en la observación 3.3.12, y los ejercicios que la siguen). Tratemos de construir una función de Liapunov de la forma

$$V(\varphi, \theta) = a\varphi^2 + 2b\varphi\theta + c\theta^2.$$

Para simplificar los cálculos tomaremos $\omega = \beta = 1$. La primera condición es que V tenga un mínimo estricto en $(0, 0)$. Para esto deben satisfacerse

$$ac - b^2 > 0, \quad a + c > 0.$$

Busquemos ahora las condiciones sobre a , b y c que resultan del estudio del signo de \dot{V} . Un cálculo inmediato nos dice que

$$\dot{V}(\varphi, \theta) = -b\varphi \sin \varphi + (a - b)\varphi\theta - c\theta \sin \varphi + (b - c)\theta^2.$$

Las derivadas parciales primeras son

$$\begin{aligned} \dot{V}_\varphi(\varphi, \theta) &= -b \sin \varphi - b\varphi \cos \varphi + (a - b)\theta - c\theta \cos \varphi, \\ \dot{V}_\theta(\varphi, \theta) &= (a - b)\varphi - c \sin \varphi + 2(b - c)\theta. \end{aligned}$$

Notemos que ambas derivadas se anulan en $(0, 0)$. El signo de \dot{V} en un entorno de $(0, 0)$ dependerá entonces de su matriz Hessiana, o, lo que es equivalente, del comportamiento de la forma cuadrática

$$\dot{V}_{\varphi\varphi}(0, 0)\varphi^2 + 2\dot{V}_{\varphi\theta}(0, 0)\varphi\theta + \dot{V}_{\theta\theta}(0, 0)\theta^2. \quad (3.60)$$

Recordemos además que podemos asegurar que $V(\varphi, \theta)$ tiene el mismo signo que la forma cuadrática (3.60) sólo cuando se satisface la condición

$$\dot{V}_{\varphi\varphi}(0, 0)\dot{V}_{\theta\theta}(0, 0) - \dot{V}_{\varphi\theta}^2(0, 0) \neq 0,$$

que asegura la no degeneración de la forma cuadrática. Pasemos a calcular las derivadas segundas y evaluarlas en $(0, 0)$. El resultado es

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\varphi\varphi}(0, 0) &= -2b, \\ \dot{V}_{\varphi\theta}(0, 0) &= a - b - c, \\ \dot{V}_{\theta\theta}(0, 0) &= 2(b - c). \end{aligned}$$

Para asegurar que \dot{V} es negativa en un entorno del origen se requiere entonces que

$$-4b(b - c) - (a - b - c)^2 > 0, \quad -2c < 0.$$

Como no nos interesa determinar todos los valores de a , b y c para los que V es una función de Liapunov estricta para la ecuación del péndulo, sino encontrar tan sólo una de estas funciones, fijamos $a = c > 0$ para simplificar los cálculos. La condición adicional que debe satisfacerse ahora es

$$b(4a - 5b) > 0.$$

Por lo tanto, resulta evidente que $a = c = 2$, $b = 1$, es una elección que hace que $V(\varphi, \theta)$ sea una función de Liapunov estricta en un entorno de $(0, 0)$. Esta función permite probar la estabilidad asintótica de este punto crítico. ♣

Como aplicación de esta técnica, proponemos el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.34. ** Estudiar la estabilidad de $(0, 0)$ para

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -4x + 10 \sin y, \\ \dot{y} &= e^{(2y-x)(1-y)} - 1.\end{aligned}$$

Notemos que este método pasa esencialmente por estudiar los términos de segundo orden de \dot{V} , donde V es la forma cuadrática (3.58). En los términos de segundo orden de \dot{V} intervienen los términos de primer orden del segundo miembro de la ecuación diferencial. En la próxima sección presentaremos algunos teoremas que permiten determinar el tipo de estabilidad de un punto crítico \bar{x} de una ecuación diferencial ordinaria estudiando el comportamiento de los términos de primer orden (la linealización) del miembro de la derecha de la ecuación en un entorno de \bar{x} . Desde el punto de vista del cálculo, todo lo que puede hacerse buscando una función de Liapunov de la forma (3.58), y tratando de determinar el signo de \dot{V} estudiando sólo los términos de segundo orden, puede resolverse aplicando los resultados acerca de la linealización de las ecuaciones diferenciales que presentaremos en el teorema 3.14 de nuestra próxima sección. Sin embargo, debemos mencionar que el método de buscar funciones de Liapunov que sean una forma cuadrática permite demostrar ese teorema⁵. Además, hay situaciones en las que el signo de \dot{V} para una función V de la forma (3.58) sólo puede determinarse estudiando los términos de orden más alto, y, en consecuencia, la técnica de construir funciones de Liapunov usando formas cuadráticas permite tratar algunos casos en los que los métodos de linealización no dan información (ver, por ejemplo, el ejercicio 3.51 en la próxima sección). ♠

A pesar de que la observación anterior da un método bastante general para buscar funciones de Liapunov no siempre es posible encontrarlas de esa manera. A continuación presentamos un ejemplo.

Ejercicio 3.35. * Hallar una función de Liapunov de la forma $ax^4 + by^2$ para la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + xy, \\ \dot{y} &= -y^5 - x^4,\end{aligned}$$

⁵ver, por ejemplo, el capítulo 9 de [HS]

y determinar la estabilidad del origen.

La propiedad esencial de las funciones de Liapunov es que son decrecientes sobre las soluciones de las ecuaciones diferenciales. La condición $\dot{V} \leq 0$, o $\dot{V} < 0$ para funciones estrictas, permite asegurar que V tiene esa monotonía, pero no es imprescindible para obtener los resultados de estabilidad contenidos en el teorema de Liapunov. Esta observación nos permitirá hacer la siguiente generalización, que resulta de utilidad en algunos ejemplos.

Proposición 3.4. *Consideremos Ω , U y f y \bar{x} como en el enunciado del teorema 3.11. Sea V una función continua, a valores reales, definida sobre U que es no creciente sobre las órbitas de la ecuación diferencial y que tiene un mínimo estricto en \bar{x} .*

1. *Entonces \bar{x} es un punto crítico estable.*
2. *Además, si la función V es estrictamente decreciente sobre todas las órbitas no estacionarias de la ecuación diferencial y \bar{x} es un punto crítico aislado, entonces \bar{x} es asintóticamente estable.*

Ejercicio 3.36. * Demostrar la primera parte de la proposición anterior.

Presentamos a continuación algunos ejemplos en los que puede aplicarse la segunda parte de la proposición 3.4.

Ejemplo 3.3.11. Sabemos que el punto de reposo de un oscilador amortiguado, con ecuación $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ es estable porque la energía $e = kx^2 + m\dot{x}^2$ satisface $\dot{e} \leq 0$. Esta función no es una función de Liapunov estricta porque $\dot{e} = 0$ cuando $\dot{x} = 0$. Sin embargo, no es difícil probar que e es estrictamente decreciente sobre las soluciones no estacionarias de la ecuación y podemos utilizar la segunda parte de la proposición 3.4 para concluir que la posición de reposo es asintóticamente estable cuando $b > 0$. ♣

Ejercicio 3.37. **

1. Mostrar que aunque la función de energía $e(\varphi, \theta) = \theta^2/2 - \cos \varphi$ no es una función de Liapunov estricta para el sistema

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega\theta, \\ \dot{\theta} = -\omega \sin \varphi - \beta\theta, \end{cases} \quad (3.61)$$

es estrictamente decreciente sobre todas sus órbitas no estacionarias, si $\beta > 0$.

2. Utilizar la función e y la proposición 3.4 para mostrar que el punto crítico $(0, 0)$ del sistema 3.61 es asintóticamente estable si $\beta > 0$.

Ejercicio 3.38. ** Consideremos una partícula de masa 1 que se mueve en la recta \mathbf{R} bajo la acción de una fuerza $f(x)$ que depende sólo de la posición de la partícula. Supongamos que $f(0) = 0$ y que $xf(x) < 0$ si $x \neq 0$ (esta condición asegura que la fuerza está siempre dirigida hacia $x = 0$).

1. Mostrar que la ecuación del movimiento de la partícula es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= f(x).\end{aligned}\tag{3.62}$$

2. Mostrar que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable de (3.62). Sugerencia: considerar la energía total de la partícula, que se obtiene sumando la energía cinética con la energía potencial asociada a la fuerza f .
3. Supongamos además que sobre la partícula actúa una fuerza de rozamiento de la forma $-g(x)\dot{x}$, con $g > 0$, que se opone al movimiento. Probar que en estas condiciones el $(0, 0)$ es asintóticamente estable.

Observación 3.3.12. † La segunda parte de la proposición 3.4 no puede demostrarse adaptando la prueba que dimos del teorema de Liapunov. Vamos a presentar ahora una nueva demostración de la segunda parte del teorema de Liapunov, que no hace uso de la condición $\dot{V} < 0$.

Para lo que sigue nos hará falta recordar el siguiente hecho básico de la topología de \mathbf{R}^n : toda sucesión de puntos x_n que está contenida en un conjunto acotado de \mathbf{R}^n tiene una subsucesión x_{n_k} que converge.

Ejemplo 3.3.13. La sucesión de números reales $(-1)^n$ está acotada. Tiene las subsucesiones convergentes $(-1)^{2k}$ y $(-1)^{2k+1}$. ♣

Retomemos la demostración a partir de la fórmula (3.54). Por motivos que quedarán claros en el curso de esta prueba vamos a introducir el flujo Φ asociado con la ecuación diferencial, y a expresar la solución $x(t)$ como $\Phi(x_0, t)$. La fórmula (3.54) toma entonces el aspecto

$$\Phi(x, t) \in \bar{B}(x, \epsilon) \setminus B(x, \delta') = \{y \in \mathbf{R}^n; \delta' \leq |y-x| \leq \epsilon\}, \quad t \in [0, +\infty).\tag{3.63}$$

Existe entonces una sucesión t_k , tal que $t_k \rightarrow \infty$ y $\Phi(x_0, t_k)$ converge a un punto límite x^* . Notemos en primer lugar que

$$x^* \in \bar{B}(x, \epsilon) \setminus B(x, \delta'),$$

por lo que este punto x^* no puede ser \bar{x} . En particular, no es un punto crítico para la ecuación diferencial. Subrayemos también que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(x_0, t_k)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(\Phi(x_0, t)) = \eta,$$

porque $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$. Como V es continua y $\Phi(x_0, t_k)$ converge a x^* tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(x_0, t_k)) = V(x^*).$$

En resumen

$$V(x^*) = \eta.$$

Por otra parte, como x^* no es un punto crítico la función V es estrictamente decreciente sobre la órbita de x^* . Esto implica que para cualquier número positivo s tal que $\Phi(x^*, s)$ esté definido se tiene

$$V(\Phi(x^*, s)) < \eta$$

(en realidad, no es difícil probar que la solución maximal con dato inicial x^* no puede salir de $B(\bar{x}, \epsilon)$ y, en consecuencia, está definida para todo $t > 0$, pero este hecho no nos aportará ninguna información interesante). Fijemos entonces un $s > 0$ con esa propiedad y llamemos

$$\eta_1 = V(\Phi(x^*, s)) < \eta.$$

En virtud de la continuidad del flujo y de la convergencia de $\Phi(x_0, t_k)$ a x^* tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(\Phi(x_0, t_k), s) = \Phi(x^*, s).$$

Por otra parte, la propiedad de semigrupo del flujo asegura que

$$\Phi(\Phi(x_0, t_k), s) = \Phi(x_0, t_k + s),$$

de modo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_0, t_k + s) = \Phi(x^*, s).$$

Al evaluar la función continua V sobre los puntos $\Phi(x_0, t_k + s)$ resulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(x_0, t_k + s)) = V(\Phi(x^*, s)) = \eta_1 < \eta.$$

Sin embargo, el mismo razonamiento que usamos para probar que $V(\Phi(x_0, t_k))$ tiende a η cuando $k \rightarrow \infty$ permite demostrar también que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(\Phi(x_0, t_k + s)) = \eta.$$

La contradicción que acabamos de obtener completa esta nueva prueba de la segunda parte del teorema de Liapunov.

Tal como anunciamos, los argumentos que acabamos de presentar tienen la ventaja de que no usan la diferenciabilidad de V , y, en caso de que V sea diferenciable no requieren que \dot{V} sea estrictamente negativa fuera de los puntos. Basta con saber que V es estrictamente decreciente sobre las órbitas no estacionarias.

Ejercicio 3.39. ** Demostrar la proposición 3.4. ♠ ††

Observación 3.3.14. UN CRITERIO DE INESTABILIDAD

La existencia de funciones de Liapunov también permite mostrar, en algunos casos, la inestabilidad de puntos críticos.

Teorema 3.12. *Sea \bar{x} un punto crítico aislado de la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$ y sea V una función de Liapunov estricta para $\dot{x} = f(x)$ que está definida en un entorno U de \bar{x} . Supongamos que existe una sucesión x_n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ y $V(x_n) < V(\bar{x})$. Entonces \bar{x} es un punto crítico inestable.*

Este teorema puede probarse estudiando cuidadosamente la prueba de la parte relativa a la estabilidad asintótica del teorema de Liapunov, y adaptándola en lo que sea necesario. Por esa razón la dejamos como un ejercicio de repaso del teorema de Liapunov.

Ejercicio 3.40. * Probar el teorema 3.12.

Ejercicio 3.41. * Mostrar que el origen es un punto crítico inestable de

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^3 - y^3, \\ \dot{y} &= 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3,\end{aligned}$$

usando una función de Liapunov de la forma $ax^2 + by^2$.

Ejercicio 3.42. * Hallar una función de Liapunov de la forma $ax^4 + by^2$ para la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^3, \\ \dot{y} &= x^3 + y^5,\end{aligned}$$

y determinar el tipo de estabilidad de $(0, 0)$.

Ejercicio 3.43. ** Sea λ un número real. Determinar los valores de a y b que hacen que $ax^2 + by^2$ sea una función de Lyapunov para

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x, \\ \dot{y} &= x + \lambda y.\end{aligned}$$

Discutir según λ , incluyendo la estabilidad del origen en la discusión. ♠

El teorema de Liapunov da condiciones suficientes para la estabilidad y la estabilidad asintótica de los puntos críticos. Vimos además que en muchos casos prácticos resulta muy útil, porque permite verificar que ciertos puntos críticos son estables o asintóticamente estables construyendo una función de Liapunov adecuada. Aunque está claro que tal función, aunque exista, puede ser difícil de hallar. El teorema que vamos a enunciar a continuación afirma que la existencia de una función de Liapunov estricta, con un mínimo estricto en un punto crítico \bar{x} , está asegurada si \bar{x} es asintóticamente estable.

Teorema 3.13 (Massera, 1949). *Si un punto crítico \bar{x} es asintóticamente estable entonces existe una función de Liapunov estricta V , definida en un entorno U de \bar{x} , que tiene un mínimo estricto en \bar{x} .*

No hay un resultado análogo para la estabilidad, tal como muestra el ejemplo contenido en nuestro próximo ejercicio.

Ejercicio 3.44. *** Mostrar que el punto $x = 0$ es un punto crítico estable de la ecuación

$$\dot{x} = x^4 \sin^2(1/x^2), \quad (3.64)$$

pero no existe ninguna función de Liapunov para la ecuación en un entorno de 0.

3.4 Estabilidad y linealización alrededor de los puntos críticos

El objetivo principal de esta sección es presentar algunos resultados que vinculan la estabilidad de un punto crítico \bar{x} de una ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.65)$$

con la estabilidad del origen para la ecuación diferencial lineal que se obtiene al linealizar (3.65) alrededor del punto \bar{x} . Esta última es una ecuación de la forma⁶ $\dot{X} = AX$, donde

$$A = D_{\bar{x}}f$$

es el diferencial de f en \bar{x} . En la sección 1.3 habíamos comentado que, en algunos casos, la linealización de una ecuación diferencial alrededor de los puntos críticos contenía buena parte de la información acerca del comportamiento de las soluciones. Éste era el contenido de la observación 1.3.14, página 52, y de algunos de los ejemplos y ejercicios que presentamos en la sección que la contiene. Ver también los comentarios finales de la sección 1.7. A continuación presentamos un teorema de estabilidad/inestabilidad de puntos críticos que pertenece a este círculo de ideas.

Teorema 3.14. *Supongamos que f es una función de clase C^1 en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Sea \bar{x} un punto crítico de la ecuación $\dot{x} = f(x)$. Consideremos $D_{\bar{x}}f$, el diferencial de f en \bar{x} . Si todos los valores propios de $D_{\bar{x}}f$ tienen parte real negativa entonces \bar{x} es un punto crítico asintóticamente estable. Si algún valor propio tiene parte real positiva entonces \bar{x} es inestable.*

Ejemplo 3.4.1. Tal como vimos en la sección 1.3 el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el comportamiento de un péndulo es

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega\theta, \\ \dot{\theta} &= -\omega \sin \varphi. \end{aligned}$$

Su campo vectorial es

$$f(\varphi, \theta) = (\omega\theta, -\omega \sin \varphi),$$

cuyo diferencial en un punto (φ, θ) es

$$D_{(\varphi, \theta)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \cos \varphi \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

⁶en esta discusión la variable x es, en general, vectorial y pertenecerá a algún espacio \mathbf{R}^n , al igual que la variable X que aparece en la ecuación diferencial lineal $\dot{X} = AX$. Hemos usado X en la ecuación lineal para mantener la notación de las secciones 1.5, 1.6 y 1.7

Esta ecuación tiene un punto crítico $(\pi, 0)$ que corresponde al estado de reposo en el punto más alto de la trayectoria del péndulo. Al calcular el diferencial del campo en $(\pi, 0)$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene valores propios ω y $-\omega$. Por lo tanto, una aplicación directa del teorema que acabamos de enunciar permite concluir rápidamente que la posición de reposo del péndulo en el punto más alto es inestable (ver también el ejercicio 1.37, página 54). ♣

Vale la pena subrayar que, en general, los resultados que aseguran que el sistema linealizado tiene un comportamiento similar al del sistema original dependen fuertemente de que no haya valores propios con parte real nula. Veremos a continuación unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 3.4.2. SI LA LINEALIZACIÓN TIENE VALORES PROPIOS CON PARTE REAL NULA PUEDE COMPORTARSE MUY DISTINTO QUE EL SISTEMA ORIGINAL.

1. El punto $x = 0$ es un punto crítico asintóticamente estable de

$$\dot{x} = -x^3,$$

es inestable para

$$\dot{x} = x^2$$

y es estable pero no es asintóticamente estable para

$$\dot{x} = x^4 \sin(1/x).$$

En estos tres ejemplos obtenemos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = 0$$

al linealizar alrededor de $x = 0$. Notemos que todas las soluciones de esta última ecuación son constantes, y que el 0 es un punto crítico estable pero no asintóticamente estable.

2. Si todos los valores propios λ son tales que $\Re \lambda \leq 0$ y algún valor propio tiene parte real nula no puede asegurarse nada sobre la estabilidad del punto crítico a partir de la linealización de la ecuación.

Ejercicio 3.45. * Dibujar el diagrama de fases y estudiar la estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ para los sistemas

$$\text{i) } \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases}, \quad \text{ii) } \begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}, \quad \text{iii) } \begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

En los tres casos hallar la linealización del sistema alrededor de $(0, 0)$ y comparar el comportamiento de sus soluciones con las de la ecuación original.

3. A continuación presentamos un ejemplo con valores propios complejos, que muestra que cuando los valores propios tienen parte real nula el sistema puede exhibir gran variedad de comportamientos.

Ejercicio 3.46. *

Calcular la linealización alrededor de $(0, 0)$ de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & \dot{x} &= \pm(x^2 + y^2)x + y, \\ \dot{y} &= -\sin x, & \dot{y} &= \pm(x^2 + y^2)y - x, \end{aligned} \quad (3.66)$$

Hallar el diagrama de fases de cada una de ellas y compararlas con el sistema linealizado. Para estudiarlas conviene observar que la primera es un caso particular de la ecuación del péndulo. Para estudiar los dos casos que aparecen en la segunda es útil pasar a coordenadas polares (ver también el ejemplo 1.5.16).

4. La razón que explica estos comportamientos es que la linealización encierra la información sobre la ecuación cuando es efectivamente el término de menor orden. Cuando hay valores propios con parte real nula no puede despreciarse el efecto de los términos de orden más alto. El resultado de inestabilidad que contiene el teorema 3.14 es cierto aunque haya valores propios con parte real nula porque para asegurarse de que hay inestabilidad *basta con mostrar una órbita que se escape del punto crítico*. En la dirección (o direcciones) que le correspondan al valor propio con parte real positiva la linealización es el término dominante de la ecuación y las órbitas se alejan del origen. Este hecho es suficiente para asegurar la inestabilidad, independientemente de lo que ocurra en otras direcciones. ♣

Ejemplo 3.4.3. En este ejemplo vamos a analizar, utilizando la linealización, los puntos críticos del sistema

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \theta, \\ \dot{\theta} &= (\lambda^2 \cos \varphi - 1) \sin \varphi - \beta \theta. \end{aligned}$$

que modela el comportamiento de un péndulo que sufre una cierta amortiguación, en una guía que gira manteniéndose siempre en un plano vertical. El parámetro λ es proporcional a la velocidad con que se produce este giro de la guía (los detalles pueden encontrarse en el ejercicio 1.64, página 92). El término $-\beta\theta$ es el responsable de la amortiguación presente en el sistema. Supondremos en lo que sigue que λ y β son constantes no negativas.

Este sistema tiene, para cualquier valor de λ el punto crítico $(0, 0)$ que representa una situación de reposo en el punto más bajo de la guía. Cuando el parámetro λ es mayor que 1 aparecen nuevos puntos críticos, para los que se satisface $\cos \varphi = 1/\lambda^2$, $\theta = 0$. La matriz asociada con el diferencial del campo en un punto (φ, θ) es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 \sin^2 \varphi + (\lambda^2 \cos \varphi - 1) \cos \varphi & -\beta \end{pmatrix}.$$

Al evaluar el diferencial en el punto crítico $(0, 0)$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda^2 - 1 & -\beta \end{pmatrix},$$

que tiene como polinomio característico a

$$P(z) = z^2 + \beta z + 1 - \lambda^2.$$

Llamemos z_1 y z_2 a las raíces de este polinomio, y recordemos que, con el fin de determinar la estabilidad del $(0, 0)$, nos interesa el signo de la parte real de estas raíces.

Cuando $\beta = 0$ y $\lambda < 1$ las raíces son imaginarias, con parte real nula y no podemos determinar la estabilidad por medio de la linealización. Si $\beta = 0$ y $\lambda = 1$ entonces tenemos el cero como raíz doble del polinomio $P(z)$, y tampoco podemos determinar la estabilidad por este método. Cuando $\beta = 0$ y $\lambda > 1$ las raíces son $\pm\sqrt{\lambda^2 - 1}$ y el $(0, 0)$ es inestable.

Los casos en que $\beta > 0$ dan algo más de trabajo. Comencemos por observar que las raíces son de la forma

$$z = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4(\lambda^2 - 1)}}{2}.$$

Si el término que está afectado por la raíz cuadrada en esta última expresión es negativo, entonces tendremos raíces complejas con parte real $-\beta/2$. Por lo tanto estamos frente a un punto crítico asintóticamente estable. Notemos que esto sólo puede ocurrir para valores de λ menores que 1, y hace falta además que β no sea muy grande. Para saber que es lo que ocurre cuando las raíces son reales conviene tener en cuenta, para ahorrarse algunos cálculos, que la suma y el producto de las dos raíces z_1 y z_2 son

$$z_1 + z_2 = -\beta, \quad z_1 z_2 = 1 - \lambda^2.$$

Entonces las dos raíces tendrán el mismo signo mientras $\lambda < 1$, y tienen que ser negativas porque su suma es $-\beta < 0$. Por lo tanto, siempre que se satisfaga $\beta > 0$, $\lambda < 1$, tenemos un punto crítico asintóticamente estable. Si $\beta > 0$ y $\lambda = 1$ entonces el 0 es un valor propio, y no podemos clasificar por medio de la linealización. Si $\lambda > 1$ entonces $P(z)$ tiene una raíz positiva y una negativa, y $(0, 0)$ es un punto crítico inestable. La información acerca de la estabilidad de $(0, 0)$ que puede obtenerse aplicando el teorema 3.14 está resumida en el siguiente cuadro:

β	λ	TIPO DE ESTABILIDAD DE $(0, 0)$
0	≤ 1	no puede determinarse por este método
	> 1	inestable
> 0	< 1	asintóticamente estable
	$= 1$	no puede determinarse por este método
	> 1	inestable

Pasemos a considerar los puntos críticos que aparecen para $\lambda > 1$, en los que $\theta = 0$, $\cos \varphi = 1/\lambda^2$. Al evaluar en uno de estos puntos la matriz del diferencial del campo encontramos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\lambda^4-1}{\lambda^2} & -\beta \end{pmatrix}.$$

como resultado. Su polinomio característico es

$$P(z) = z^2 + \beta z + \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^2}.$$

Cuando $\beta = 0$ las raíces son dos complejos con parte real nula, de modo que no podemos clasificar este punto crítico por medio de la linealización. Para tratar el caso $\beta > 0$ no hace falta calcular las raíces z_1 y z_2 del polinomio característico con el fin de determinar la estabilidad. Sabemos que su suma tiene que ser igual a la traza de la matriz, y su producto igual al determinante. Por lo tanto

$$z_1 + z_2 = -\beta, \quad z_1 z_2 = \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda^2} > 0.$$

Si las raíces son complejas entonces su parte real es $-\beta/2$. Si son reales tienen que tener el mismo signo, y como su suma es $-\beta$ ambas serán negativas. Por lo tanto, en ambos casos, las partes reales de las raíces son negativas y el punto crítico es asintóticamente estable. ♣

A continuación presentamos una serie de ejercicios en los que se pide investigar la estabilidad de algunos puntos críticos y en los que puede apreciarse tanto la utilidad del teorema 3.14 como algunas de sus limitaciones.

Ejercicio 3.47. * Estudiar la estabilidad de los puntos críticos de la ecuación

$$\dot{x} = x - x^2$$

linealizando la ecuación alrededor de cada uno de ellos.

Ejercicio 3.48. * Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando la linealización alrededor de cada uno de ellos.

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \quad \begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 1, \\ \dot{y} = 2xy, \end{cases} & \text{ii)} \quad \begin{cases} \dot{x} = \tan(x + y), \\ \dot{y} = x + x^3, \end{cases} & \text{iii)} \quad \begin{cases} \dot{x} = \log(1 + x + y^2), \\ \dot{y} = -y + x^3, \end{cases} \end{array} \quad (3.67)$$

Ejercicio 3.49. * Estudiar la estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ para los sistemas de los ejercicios 3.31 y 3.42.

Ejercicio 3.50. ** Estudiar la estabilidad de los puntos críticos que se analizaron en los ejercicios 3.32 y 3.33 utilizando la linealización. En cada caso observar que los términos que intervienen en la linealización son los que se tuvieron en cuenta para determinar el signo de la derivada \dot{V} de la función de Liapunov V en un entorno del punto crítico.

Ejercicio 3.51. ** Hallar los puntos críticos del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y(z-1), \\ \dot{y} &= -x(z-1), \\ \dot{z} &= -z^3. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Mostrar que la linealización alrededor del origen no permite decidir acerca de su estabilidad. Buscar una función de Liapunov de la forma $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ para estudiar la estabilidad de $(0, 0, 0)$. Estudiar los restantes puntos críticos por medio de la linealización.

En el curso de esta sección hemos visto que cuando la linealización de una ecuación diferencial autónoma alrededor de un punto crítico \bar{x} tiene una matriz tal que la parte real de todos sus valores propios es distinta de cero, entonces es posible deducir el tipo de estabilidad de \bar{x} a partir del estudio de la ecuación linealizada. En cambio, esto no puede hacerse si algún valor propio tiene parte real nula.

En realidad es posible dar un resultado más fino, que asegura que en ausencia de valores propios con parte real nula la linealización contiene, localmente, toda la información relativa al flujo asociado con la ecuación diferencial. Ese es el contenido de nuestro próximo teorema.

Teorema 3.15 (Grobman-Hartman). *Sea f una función de clase C^1 y \bar{x} un punto crítico de la ecuación $\dot{x} = f(x)$. Consideremos $D_{\bar{x}}f$, el diferencial de f en \bar{x} . Si todos los valores propios de $D_{\bar{x}}f$ tienen parte real distinta de cero entonces la ecuación $\dot{x} = f(x)$ es localmente equivalente a la ecuación linealizada.*

Observación 3.4.4. En realidad el enunciado del teorema anterior está incompleto si no decimos en que sentido son equivalentes ambas ecuaciones. El sentido de equivalencia en el que el teorema anterior es cierto es una versión local del que introducimos en el ejemplo 1.5.17 de la sección 1.5, y consiste en que existen entornos U y V de \bar{x} y 0 respectivamente, y una función continua $h : U \rightarrow V$, con inversa continua, tal que $0 = h(\bar{x})$, que transforma el flujo de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ en el de la ecuación linealizada. Indiquemos con Φ el flujo de la ecuación $\dot{x} = f(x)$, y llamemos A a la matriz asociada con el diferencial $D_{\bar{x}}f$ de f en el punto \bar{x} . El flujo asociado con la ecuación linealizada es

$$\Psi(x, t) = e^{At}x.$$

Entonces podemos calcular el flujo Φ por la fórmula

$$\Phi(x, t) = h^{-1}(e^{At}h(x)) \tag{3.69}$$

para $x \in U$ y t tal que $e^{At}h(x) \in V$. Cerremos esta observación diciendo que en este contexto la función h debe interpretarse como un cambio de coordenadas continuo, aunque en general no diferenciable, que transforma el conjunto abierto $U \subset \mathbf{R}^n$ en $V \subset \mathbf{R}^n$. ♠

3.4.1 Estabilidad de órbitas

La noción de estabilidad puede extenderse a órbitas que no son estacionarias de la siguiente manera.

Definición 3.4. Consideremos la solución $x(t)$, que supondremos definida para todo $t \geq t_0$, del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.70)$$

Diremos que la solución $x(t)$ es *estable* si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $y_0 \in B(x_0, \delta)$ la solución $y(t)$ de la ecuación con dato inicial $y(t_0) = y_0$ satisface

$$|y(t) - x(t)| < \epsilon, \quad t \geq t_0. \quad (3.71)$$

Si la órbita no es estable diremos que es *inestable*. Si la órbita es estable y el número δ puede elegirse con la propiedad adicional de que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - x(t)| = 0 \quad (3.72)$$

se satisface para todo $y_0 \in B(x_0, \delta)$, entonces diremos que la órbita es *asintóticamente estable*.

Observación 3.4.5. Cuando x_0 es un punto crítico de una ecuación autónoma las nociones de estabilidad/inestabilidad que acabamos de introducir se reducen a las que hemos venido manejando hasta ahora. ♠

Ejemplo 3.4.6. Las órbitas de los sistemas lineales a coeficientes constantes tienen el mismo tipo de estabilidad que el punto crítico $(0, 0)$. Esto es una consecuencia de que la diferencia de dos soluciones $Y(t)$ y $X(t)$ de una ecuación diferencial lineal $\dot{X} = AX$ también es una solución de la ecuación.

Ejercicio 3.52. * Completar los detalles de este ejemplo. ♣

Ejemplo 3.4.7. Las órbitas de la ecuación diferencial $\dot{x} = V$, donde V es un vector fijo de \mathbf{R}^n , son estables, pero no asintóticamente estables. Esto es así porque el flujo asociado con esta ecuación es

$$\Phi(x, t) = x + Vt.$$

Cuando calculamos la diferencia entre dos soluciones encontramos

$$\Phi(x, t) - \Phi(y, t) = x - y,$$

por lo tanto las soluciones están, en cada instante t , a la misma distancia que estaban sus condiciones iniciales. ♣

Ejercicio 3.53. * Mostrar que las órbitas de $\dot{x} = x^2$ con dato inicial negativo son asintóticamente estables. ♣

Ejercicio 3.54. ** Mostrar que la órbita periódica de

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\epsilon - (x^2 + y^2)) - y, \\ \dot{y} &= y(\epsilon - (x^2 + y^2)) + x,\end{aligned}\tag{3.73}$$

con $\epsilon > 0$ es estable. Modificar este ejemplo para obtener un sistema con una órbita periódica inestable.

Ejercicio 3.55. ** Estudiar la estabilidad de las soluciones periódicas de la ecuación diferencial $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$ del ejercicio 1.98, cuando $f(t)$ tiene la forma sinusoidal $f(t) = A \sin \omega t$ que se introdujo en la parte 2 de ese ejercicio. Supondremos ahora que m y k son positivos. Discutir según el valor del parámetro $b \in \mathbf{R}$.

Ejercicio 3.56. ** Mostrar que una solución periódica de una ecuación diferencial autónoma nunca es asintóticamente estable.

Capítulo 4

Ecuaciones en derivadas parciales

El objetivo de este capítulo es presentar una introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. Esencialmente lo haremos a través del estudio de las ecuaciones lineales de primer orden

$$a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = c(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2,$$

de la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2,$$

y de la ecuación del calor

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in (a, b) \times \mathbf{R}.$$

Esta presentación, basada en algunos ejemplos bien acotados contrasta con el tratamiento que se dio a las ecuaciones diferenciales ordinarias, para las que pudimos desarrollar una teoría más o menos general. Es necesario proceder de este modo para analizar las ecuaciones en derivadas parciales porque es muy difícil, o directamente imposible, resolver con un mismo método problemas que presentan características y fenómenos muy diferentes. A título de ejemplo, mencionemos que no es posible formular para las ecuaciones en derivadas parciales una noción universal de “problema de valores iniciales” tal como se hizo para las ecuaciones diferenciales ordinarias. Tampoco existe un teorema general de existencia y unicidad de soluciones comparable al teorema de Picard.

Mencionemos además que, tal como ocurre con las ecuaciones diferenciales ordinarias, gran parte del interés por las ecuaciones en derivadas parciales proviene de sus aplicaciones, sea a otras disciplinas o dentro de la matemática, y este es otro criterio que guía la selección de problemas a investigar: dirigirse a algunas clases de problemas que tienen significado físico, geométrico, etc. Sin embargo, esta última frase no debe entenderse de manera muy restrictiva ya que en muchos casos la “aplicación” del estudio de una ecuación es lisa y llanamente ayudar a la comprensión de fenómenos básicos que están presentes en situaciones más complicadas. Un ejemplo muy simplificado de esto son las ecuaciones en los ejercicios 4.14 y 4.15 de la sección 4.1. Ambas permiten ver efectos interesantes debidos a la combinación de la convección y la absorción, aunque no tienen casi interés en sí mismas como modelos para algún fenómeno porque no contienen ningún término que represente la presencia de difusión. En la misma sección consideraremos la ecuación de Burgers sin viscosidad, que puede utilizarse como una aproximación al problema con viscosidad ν , cuando ν es muy próximo a 0 (ver el ejercicio 4.35, parte 3, en la sección 4.3).

La primera sección de este capítulo está dedicada al estudio de las ecuaciones de primer orden. Discutiremos allí cuál es la noción apropiada de “problema de valores iniciales” para estas ecuaciones y presentaremos un método para

resolverlo. Este método está basado en la existencia de *curvas características* y permite reducir la resolución de las ecuaciones de primer orden a un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Veremos también que la existencia de curvas características tiene importantes efectos sobre los aspectos cualitativos de las soluciones de las ecuaciones de primer orden.

En la sección 4.2 presentaremos una teoría local para las ecuaciones de segundo orden en el plano, en la que trataremos de extender a ese contexto la noción de curva característica. Veremos luego, a lo largo del resto de las secciones de este capítulo, que la existencia o inexistencia de características esta fuertemente relacionada con las propiedades de las soluciones.

Las secciones 4.3 y 4.4 están dedicadas a estudiar la ecuación de ondas. Esta ecuación tiene dos familias de curvas características que, en el caso de dos variables x y t con el que trabajaremos, permiten dar una fórmula explícita para las soluciones. La existencia de una fórmula de este tipo es excepcional, por lo que introduciremos las integrales de energía, una herramienta mucho más flexible, en la sección 4.4.

Finalmente, en las secciones 4.5 y 4.6 trataremos el modelo más simple para procesos de difusión: la ecuación del calor. Veremos que sus soluciones tienen importantes diferencias cualitativas con las de la ecuación de ondas. En particular, satisfacen el importante *principio del máximo* que expondremos en la sección 4.6. Para analizar la ecuación del calor en un intervalo consideraremos funciones que pueden escribirse como una serie de senos. Esta cuestión nos llevará a estudiar las series de Fourier, o series trigonométricas, en el capítulo 5.

4.1 Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

El objetivo de esta sección es dar un primer paso en una introducción a la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales a través del estudio de las ecuaciones de primer orden. Con esta denominación abarcamos aquellas ecuaciones en las que sólo aparecen la función incógnita u , sus derivadas de primer orden y las variables independientes. Si estamos considerando funciones u de dos variables reales x e y la forma general de estas ecuaciones es

$$f(u, u_x, u_y, x, y) = 0, \quad (4.1)$$

donde f es una función $f : U \subset \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}$ prefijada y U es un conjunto abierto. Sin embargo, no vamos a abordar el estudio general de (4.1), cuya complejidad excede el alcance de este texto, y, por el contrario, nos concentraremos en algunos casos particulares. Comenzaremos analizando las ecuaciones lineales de la forma

$$a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = c(x, y), \quad (4.2)$$

donde a , b y c son funciones dadas, de clase C^1 , definidas en algún subconjunto abierto de \mathbf{R}^2 y u es la “función incógnita”. Supondremos además que $a(x, y)$ y $b(x, y)$ no se anulan simultáneamente en ningún punto (x, y) .

Observación 4.1.1. Recordemos que cuando estudiábamos las ecuaciones diferenciales ordinarias debíamos prescribir un dato inicial para resolverlas. También para resolver (4.2) es preciso buscar la noción adecuada de “datos iniciales”, a los que nos referiremos como *datos de contorno*, que conduce a formular un *problema de contorno* (o de Cauchy) para la ecuación en derivadas parciales (4.2). ♠

La organización del material de esta sección es la siguiente: comenzaremos por presentar un método para calcular las soluciones de (4.2) y al hacerlo elucidaremos la cuestión planteada en la observación anterior acerca de los datos de contorno¹. Obtendremos también información sobre la existencia y unicidad de la solución y su dependencia de los datos iniciales. Luego presentaremos una serie de ejercicios orientados a mostrar que el método desarrollado admite una generalización que permite tratar ecuaciones de la forma

$$a(x, y, u)u_x(x, y) + b(x, y, u)u_y(x, y) = c(x, y, u), \quad (4.3)$$

llamadas ecuaciones cuasilineales, porque son lineales en las derivadas de u .

¹estos métodos de cálculo para resolver ecuaciones lineales fueron desarrollados por Lagrange (1736–1813) y Laplace (1749–1827) alrededor de 1770. Posteriormente Monge (1746–1818) concibió métodos generales para resolver ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, lineales o no, e investigó su significado geométrico

Ejemplo 4.1.2. LA ECUACIÓN DE BURGERS SIN VISCOSIDAD
La ecuación de Burgers sin viscosidad es la ecuación cuasilineal

$$u_t + uu_x = 0,$$

y tiene aplicaciones a la dinámica de gases. Esta ecuación es el caso particular que corresponde a tomar $\nu = 0$ en

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx},$$

conocida como ecuación de Burgers. En esta última ecuación el parámetro $\nu \geq 0$ representa la viscosidad del medio cuyo comportamiento se está modelando². En el ejercicios 4.16 aplicaremos al cálculo de soluciones de esta ecuación las técnicas para ecuaciones cuasilineales. En la sección 4.1.4 extenderemos nuestra noción de “solución de una ecuación en derivadas parciales” y veremos, en el ejercicio 4.19, que la ecuación de Burgers sin viscosidad tiene soluciones discontinuas que pueden interpretarse como una “onda de choque” que se propaga con velocidad finita. ♣

Ejemplo 4.1.3. La ecuación

$$u_t = |u_x|^2$$

es un ejemplo de ecuación de primer orden en que la derivada u_x aparece en un término no lineal. Éste es un caso particular de ecuación de la forma $u_t = H(u_x, x)$, conocidas como ecuaciones de Hamilton-Jacobi y que surgen en problemas de óptica, mecánica, procesamiento de imágenes, etc. ♣

Para terminar con estos comentarios preliminares vamos a repasar a continuación algunos términos y notaciones que usaremos más adelante, como las nociones de flujo y $\|\cdot\|_\infty$ que habíamos introducido en capítulos anteriores, y a introducir también la noción de *transversalidad* para curvas o familias de curvas que se cortan.

- Recordemos que el *flujo* asociado a una ecuación diferencial autónoma es la aplicación

$$(x, t) \mapsto \Phi(x, t),$$

donde $\Phi(x, t)$ es la solución de la ecuación que pasa por x en el instante $t = 0$. Es decir, $\Phi(x, 0) = x$ y la curva $t \mapsto \Phi(x, t)$, que está definida en un intervalo de tiempos $I = I(x)$ que depende del punto x , es una solución de la ecuación. En lo sucesivo escribiremos el flujo como $\Phi(X, t)$, porque usaremos la letra x para designar la primera coordenada de un elemento $X = (x, y)$ de \mathbf{R}^2 .

²la ecuación de Burgers fue propuesta alrededor de 1940 como un modelo simple para estudiar algunos problemas de la mecánica de fluidos. Para los tópicos vinculados con la ecuación de Burgers sin viscosidad, que, aunque apenas tratados, son de los más interesantes que aquí presentamos, recomendamos consultar, además de [I], el capítulo 15 de [Sm]. Esta referencia es de lectura algo más difícil, pero el esfuerzo vale la pena

- Indicaremos con $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ la norma del supremo de una función acotada f definida en un conjunto Ω , es decir

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup\{|f(\omega)|; \omega \in \Omega\}.$$

Ver también la observación 2.3.2, página 196, acerca de esta notación para la norma del supremo.

- Diremos que dos curvas se cortan *transversalmente* o que son *transversales* cuando en los puntos de corte sus vectores tangentes no son colineales, y que una curva γ es *transversal* al flujo Φ asociado con una ecuación diferencial ordinaria si es transversal a todas sus soluciones $t \mapsto \Phi(X, t)$.

Ejemplo 4.1.4. La curva

$$\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t)$$

es una parametrización de la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1. Sus vectores tangente en cada punto son paralelos a

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Cuando t toma el valor π obtenemos $\gamma(0) = (0, 0)$ y $\dot{\gamma}(0) = (0, -1)$. Por lo tanto, el eje O_x , que tiene vector tangente $(1, 0)$, es transversal a γ en $(0, 0)$, pero el eje O_y no lo es. ♣

4.1.1 El problema de contorno para ecuaciones lineales de orden 1

Vamos a comenzar el estudio de la ecuación (4.2) por un par de ejemplos sencillos.

Ejemplo 4.1.5. La ecuación del tipo (4.2) más fácil que se nos puede ocurrir es

$$u_x = 0,$$

que corresponde a tomar $a \equiv 1$, $b \equiv 0$ y $c \equiv 0$. Aunque lo ignoremos todo sobre las ecuaciones en derivadas parciales sabemos que una función la satisface si y sólo si no depende de la variable x , por lo que su solución general es

$$u(x, y) = f(y).$$

La solución es constante a lo largo de las rectas $y = \text{cte.}$, y queda completamente determinada si fijamos el valor de u sobre cualquier curva que corte exactamente una vez todas las líneas horizontales. Por el contrario no podemos prescribir los valores de u sobre una recta horizontal de la forma $y = \text{cte.}$, a menos que nos contentemos con imponer que u sea constante para no violar la ecuación. En este último caso no tendremos ninguna información que nos permita calcular la solución en el resto del espacio. ♣

Ejemplo 4.1.6. Hagamos un audaz salto para pasar a estudiar la ecuación $u_x = 1$. En este caso integramos manteniendo $y = \text{cte.}$ para concluir que

$$u(x, y) = u(x_0, y) + \int_{x_0}^x 1 \, ds = u(x_0, y) + x - x_0. \quad (4.4)$$

Nuevamente podemos resolver la ecuación si damos los datos sobre cualquier curva que corte todas las rectas horizontales, como en el ejemplo anterior. Por ejemplo, si fijamos la condición

$$u(x, x) = x^2, \quad x \in \mathbf{R} \quad (4.5)$$

conocemos el valor de u sobre la recta $x = y$, que corta exactamente una vez a cada recta horizontal. Supongamos entonces que queremos calcular el valor de u sobre un punto cualquiera (x, y) como el que está marcado en la figura 4.1. Escogiendo $x_0 = y$ en (4.4) concluimos que $u(x, y) = x - y + y^2$. Es muy

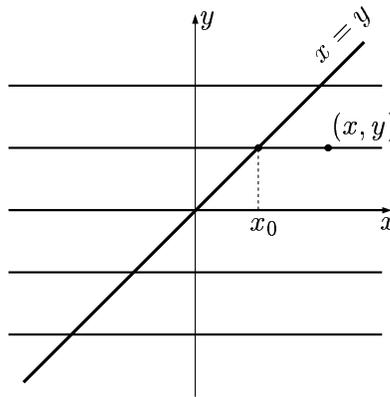


Figura 4.1: resolución de $u_x = 1$ con dato sobre la recta $x = y$

fácil verificar que esta función satisface la ecuación $u_x = 1$ y la condición de contorno (4.5). La geometría de la construcción de la solución del problema está representada en la figura 4.1.

Este segundo ejemplo nos muestra algo nuevo, ya que pone en evidencia que podemos calcular la solución por medio de una simple integración porque la ecuación en derivadas parciales nos dice cuál es la derivada de la solución al desplazarnos sobre las curvas $y = \text{cte.}$ ♣

Ejemplo 4.1.7. Los cálculos del ejemplo anterior pueden extenderse para resolver cualquier ecuación de la forma $u_x = c(x, y)$, con datos de contorno sobre una curva transversal a las líneas $y = \text{cte.}$ En efecto, si $\gamma(y)$ es una

curva $\gamma(y) = (x(y), y)$ definida en $-\infty < y < +\infty$ y prescribimos como dato de contorno $u(x(y), y) = f(y)$ entonces la solución correspondiente es

$$u(x, y) = f(y) + \int_{x(y)}^x c(s, y) ds.$$

Ejercicio 4.1. * Hallar la solución de la ecuación $u_x = xy$ en los siguientes casos:

1. Con dato de contorno $u(1, y) = y^2$ sobre la recta $x = 1$.
2. Con dato de contorno $u(x, x) = 2x$ sobre la recta $y = x$.

Verificar en cada caso que la función u que se encuentre es efectivamente una solución del problema. ♣

El método que presentaremos a continuación está basado sobre las ideas que aparecen en los párrafos anteriores: encontrar curvas sobre las cuales el término de la izquierda de (4.2) sea la derivada de u al desplazarse a lo largo de la curva y luego resolver la ecuación integrando esta derivada. Para la determinación de las constantes que aparecen en la integración utilizaremos el dato de contorno.

Supongamos entonces que u es una solución y notemos que en un punto (x, y) el término de la izquierda en (4.2) es

$$a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = \nabla u(x, y) \cdot (a(x, y), b(x, y)). \quad (4.6)$$

Este producto escalar entre los vectores ∇u y (a, b) no es otra cosa que la derivada direccional de u , en el punto (x, y) , según el vector $(a(x, y), b(x, y))$. Recordemos que esta derivada direccional también puede calcularse evaluando u sobre una curva que pase por (x, y) con vector tangente (a, b) . En efecto, si $(x(t), y(t))$ es una parametrización de una curva diferenciable en \mathbf{R}^2 y u es una función diferenciable la regla de la cadena asegura que

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = u_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + u_y(x(t), y(t))\dot{y}(t). \quad (4.7)$$

Supongamos ahora que escogemos la curva $\mathcal{C}(t) = (x(t), y(t))$ de manera tal que en cada uno de sus puntos se satisfaga

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(x(t), y(t)), \\ \dot{y}(t) &= b(x(t), y(t)). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = u_x(x(t), y(t))a(x(t), y(t)) + u_y(x(t), y(t))b(x(t), y(t)). \quad (4.9)$$

La expresión en el miembro de la derecha de esta última igualdad es justamente el miembro de la izquierda de la ecuación diferencial de primer orden (4.2)

evaluado en $(x(t), y(t))$. Por lo tanto, si u es una solución de (4.2) tenemos que

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = c(x(t), y(t)), \quad (4.10)$$

y podemos calcular la derivada de u al desplazarnos sobre la curva, simplemente evaluando c en $(x(t), y(t))$. Notemos además que la condición (4.8) no es otra cosa que una ecuación diferencial ordinaria en el plano que debe ser satisfecha por $(x(t), y(t))$. En resumen, sabemos como calcular la derivada de $u(x(t), y(t))$ respecto a t si $(x(t), y(t))$ es una solución de la ecuación diferencial ordinaria (4.8). Por lo tanto, si conociéramos el valor de u sobre un punto de una curva $\mathcal{C}(t)$ que sea solución de (4.8) podríamos determinar u a lo largo de *toda* la curva. En efecto, supongamos conocida la función u en el punto $(x(\bar{t}), y(\bar{t}))$, entonces integrando (4.10) obtenemos

$$u(x(t), y(t)) = u(x(\bar{t}), y(\bar{t})) + \int_{\bar{t}}^t c(x(s), y(s)) ds. \quad (4.11)$$

Esta expresión nos da el valor de u a lo largo de \mathcal{C} .

A las curvas \mathcal{C} que son solución de (4.8) las llamaremos *curvas características*. Notemos que la información encerrada en la ecuación diferencial (4.2) se propaga en el plano “siguiendo” estas líneas características. Para completar la resolución de la ecuación hay que utilizar esta idea —que está recogida en la fórmula (4.11)— junto con los “datos iniciales” o “de contorno” que consisten de fijar el valor de u sobre un punto de cada curva característica \mathcal{C} .

Observación 4.1.8. Las características son soluciones de la ecuación diferencial autónoma (4.8) que define un flujo en el dominio Ω de las funciones a y b . En particular, esto implica que dos curvas características distintas no se pueden cortar. ♠

Si revisamos los desarrollos de los párrafos anteriores encontraremos que hemos elaborado un método que permite calcular una solución u de la ecuación (4.2) por medio de la fórmula (4.11) una vez que conozcamos:

1. sus curvas características,
2. el valor de u sobre un punto en cada característica.

Para obtener un método de cálculo útil todavía hay que trabajar un poquito más con la fórmula (4.11). Ésta nos dice cuanto vale la solución sobre cada punto $(x(t), y(t))$ de la característica que pasa por $(x(\bar{t}), y(\bar{t}))$, pero, en general, el problema que uno quiere resolver es ligeramente diferente: fijado un punto (x, y) en el dominio Ω en el que está definida la ecuación (4.2) queremos hallar el valor de u en (x, y) .

Para hacer esto por medio de (4.11) debemos calcular la característica que pasa por (x, y) , cosa que consiste en resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y), \\ \dot{y} = b(x, y), \\ (x(0), y(0)) = (x, y). \end{cases}$$

Una vez hecho esto calculamos el valor \bar{t} en el que la solución $(x(t), y(t))$ alcanza un punto en el que el valor de u es conocido (la existencia de tal \bar{t} no está asegurada, pero obviemos este detalle por el momento) y luego aplicamos la fórmula (4.11), con $t = 0$, para concluir

$$u(x, y) = u(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - \int_0^{\bar{t}} c(x(s), y(s)) ds. \quad (4.12)$$

Observación 4.1.9. La solución $(x(s), y(s))$ depende de (x, y) , en realidad tenemos

$$(x(s), y(s)) = \Phi((x, y), s),$$

donde Φ es flujo asociado con la ecuación diferencial de las curvas características. También el tiempo \bar{t} depende de (x, y) , de modo que el miembro de la derecha en (4.12) es efectivamente una función de x e y . Este hecho quedará más claro al resolver algunos ejemplos. ♠

Una forma razonable de fijar u sobre un punto en cada curva característica \mathcal{C} es prescribir su valor a lo largo de una curva γ transversal al flujo asociado a (4.8). Subrayemos ahora que dar el valor de u sobre una curva $\gamma \subset \mathbf{R}^2$ es el procedimiento que, para las ecuaciones en derivadas parciales de orden 1, sustituye al de dar un dato inicial para una ecuación diferencial ordinaria. Naturalmente, al hacerlo la curva γ puede no ser transversal al flujo de (4.8), pero esta cuestión sólo puede aclararse al calcular las características para resolver la ecuación.

Después de todas estas consideraciones esperamos que quede claro que disponemos de una técnica para estudiar el siguiente problema:

PROBLEMA DE CONTORNO (O DE CAUCHY). Dada una curva γ y una función g definida sobre γ hallar una solución de

$$a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = c(x, y),$$

que satisfaga la condición de contorno

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \gamma.$$

El método también nos dice que el problema tiene a lo sumo una solución sobre la “banda” formada por las curvas características \mathcal{C} tales que $\mathcal{C} \cap \gamma \neq \emptyset$ y que la solución existe si cada característica toca a γ solamente en un punto. En

la figura 4.2 mostramos un esquema en el que aparece la curva γ sobre la que se dan los datos de una ecuación en derivadas parciales de primer orden, las curvas características asociadas con la ecuación diferencial, y la región (zona sombreada) en la que la solución queda determinada. Si alguna característica

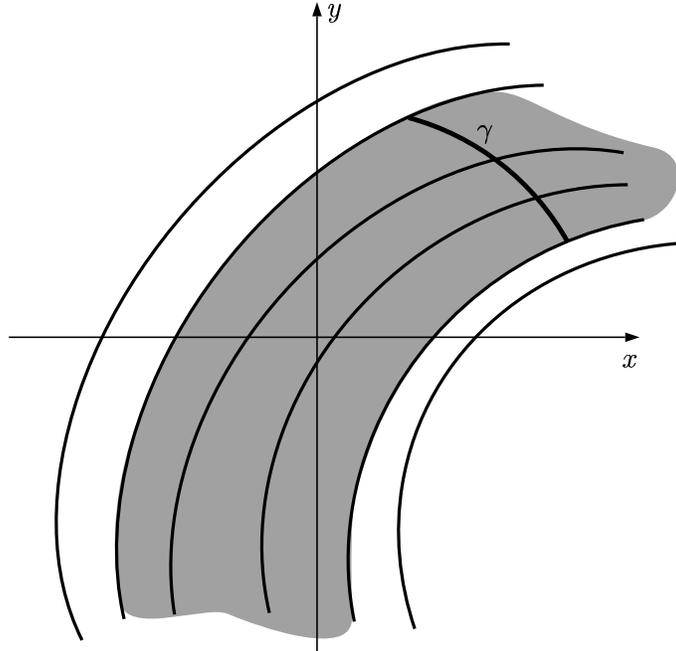


Figura 4.2: curva γ , características y región en que u queda definida

toca la curva sobre la que se prescriben los datos en más de un punto el problema queda sobredeterminado y la solución puede no existir.

Observación 4.1.10. Notemos que la condición de que la curva γ sobre la que fijamos los datos sea transversal a las características asegura, al menos localmente, que cada característica corta una única vez a la curva γ . Podríamos conformarnos con pedir que se satisfaga esta condición en vez de insistir con la transversalidad, pero la transversalidad asegura además la regularidad de las soluciones que el método de las características provee (ver la sección 4.1.2, en particular el ejercicio 4.10). ♠

Observación 4.1.11. La noción de característica puede extenderse a ecuaciones de orden más alto y en las que intervienen más variables. Para ello conviene cambiar levemente el punto de vista que venimos utilizando para tratar con las características. Hasta ahora nos hemos concentrado en el hecho de que, para ecuaciones de orden 1, las características contienen las direcciones en las que *la ecuación en derivadas parciales es capaz de dar información*. Sin embargo, vale la pena observar que también es cierto que *la ecuación es incapaz de dar*

información en direcciones transversales a las características. Por esta razón, si damos datos iniciales sobre una de estas curvas no tenemos información adicional que nos permita “salir de la curva” para calcular la solución en el resto del plano y, por lo tanto, los datos de contorno deben darse sobre superficies transversales a las características para estar en condiciones de resolver el problema de Cauchy correspondiente. En el ejemplo 4.1.14 mostramos una situación en la que el dato está fijado a lo largo de una curva característica. En la sección 4.2 desarrollaremos estas ideas para estudiar ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. En lo que respecta a ecuaciones de primer orden recomendamos ver la parte dedicada a sus características en la página 297. ♠

Vamos a poner en práctica todo esto en un par de ejemplos.

Ejemplo 4.1.12. Resolver

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 1, \\ u(x, y) = xy, \quad \text{si } x + y = 1. \end{cases}$$

En este ejemplo la curva γ es la recta $x + y = 1$, y la función g que da el dato de contorno es $g(x, y) = xy$. Comenzamos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y, \end{cases} \quad (4.13)$$

con condición inicial $x(0) = x, y(0) = y$. La solución es entonces

$$(x(t), y(t)) = (xe^t, ye^t). \quad (4.14)$$

En la figura 4.3 aparecen representadas las características para la ecuación en derivadas parciales (es decir, las órbitas de la ecuación diferencial (4.13)) y la curva sobre la que se fijó el dato inicial. Es evidente a partir de la figura que sólo podremos construir la solución del problema que estamos considerando en el semiplano $x + y > 0$, que es la región sombreada en la figura, formada por la unión de todas las curvas características que cortan la recta $x + y = 1$. Los cálculos que desarrollaremos a continuación confirmarán esta presunción. Para determinar el tiempo en el que la curva (4.14) alcanza la curva γ sobre la que se ha fijado la condición de contorno utilizamos la ecuación que define γ . En consecuencia, debemos buscar el tiempo $\bar{t} = \bar{t}(x, y)$ para el que se satisface

$$xe^{\bar{t}} + ye^{\bar{t}} = 1. \quad (4.15)$$

Obviamente, si $x + y > 0$ tenemos entonces

$$\bar{t} = -\log(x + y). \quad (4.16)$$

En cambio, la ecuación (4.15) no tiene solución si $x + y \leq 0$. Esto implica, tal como preveíamos, que la ecuación y la condición de contorno con la que

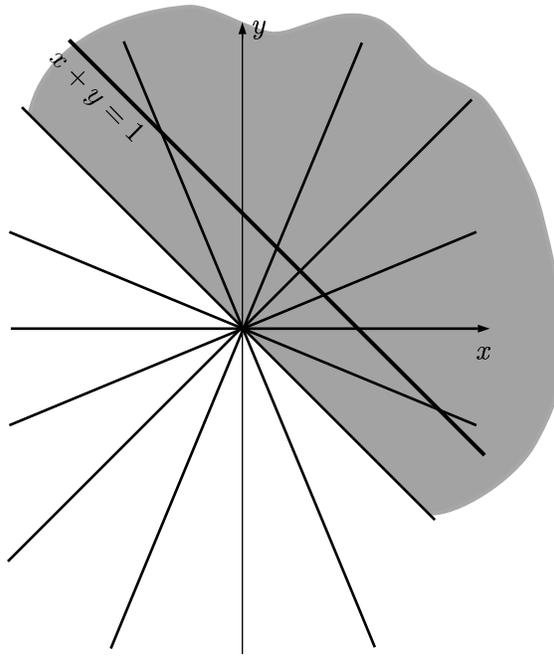


Figura 4.3: características y la curva $x + y = 1$

estamos trabajando sólo determinarán la solución en el semiplano $\{x + y > 0\}$, ya que las características que corresponden a otros puntos del plano no tienen intersección con la curva γ de los datos. Al evaluar el flujo en \bar{t} encontramos que la característica que pasa por (x, y) corta γ en

$$(x(\bar{t}), y(\bar{t})) = \left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y} \right).$$

El valor de u en este punto se obtiene a partir del dato, y es

$$u(x(\bar{t}), y(\bar{t})) = g\left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}\right) = \frac{xy}{(x+y)^2} \quad (4.17)$$

En este momento podríamos aplicar la fórmula (4.12), pero no cuesta mayor esfuerzo reproducir los argumentos que nos llevaron a ella. A partir de la ecuación en derivadas parciales encontramos que sobre las características se satisface

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = 1. \quad (4.18)$$

Conocemos $u(x(\bar{t}), y(\bar{t}))$ en el tiempo $\bar{t} = \bar{t}(x, y)$. Por lo tanto, para calcular

la solución en (x, y) no hay más que integrar (4.18) entre 0 y \bar{t} . Entonces

$$u(x, y) = u(x(0), y(0)) = u(x(\bar{t}), y(\bar{t})) - \int_0^{\bar{t}} 1 ds.$$

Al introducir en esta última expresión los valores de \bar{t} y de $u(x(\bar{t}), y(\bar{t}))$ que hemos calculado antes resulta

$$u(x, y) = \frac{xy}{(x+y)^2} + \log(x+y). \quad (4.19)$$

Ejercicio 4.2. * Verificar que la función u que encontramos es efectivamente una solución del problema planteado.

Observación 4.1.13. Tal como adelantamos, la solución u de este ejemplo está definida en la banda característica $\{x+y > 0\}$ y no puede extenderse más allá de manera continua. ♠ ♣

Ejemplo 4.1.14. El problema $xu_x + yu_y = 1$ con dato $u(x, 0) = 1$ no tiene solución. Si intentamos resolver el problema en $x > 0$ con dato $u(x, 0) = \log x$ entonces tiene infinitas soluciones. Observar que la parte positiva del eje x

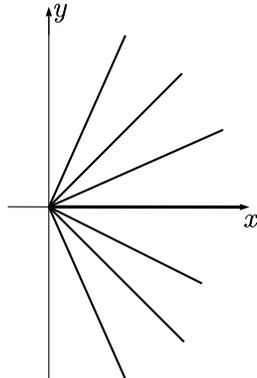


Figura 4.4: características de $xu_x + yu_y = 1$ y la parte positiva del eje x

es una curva característica para este problema, que no corta a ninguna de las otras características. Por esta razón no tenemos información sobre el valor que tiene que tomar la solución u en cualquier punto del semiplano $x > 0$ que no esté en el eje. Esta situación se ilustra en la figura 4.4, donde hemos destacado la semirrecta $\{(x, 0), x > 0\}$.

Ejercicio 4.3. * Justificar las afirmaciones hechas en el ejemplo anterior. Calcular al menos dos soluciones que estén definidas en $\{x > 0\}$ y que satisfagan el dato de contorno $u(x, 0) = \log x$. ♣

Ejemplo 4.1.15. Resolver

$$\begin{cases} u_x + xu_y = x^2 + y, \\ u(0, y) = y, \quad y \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Consideremos un punto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Debemos comenzar por resolver el sistema

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = x,$$

junto con la condición inicial (x, y) para hallar la característica que pasa por ese punto. Integrando la primera ecuación obtenemos $x(t) = x + t$; sustituyendo en la segunda e integrando resulta $y(t) = y + xt + t^2/2$. Es evidente que el tiempo \bar{t} en que la característica corta el eje $\{x = 0\}$ (la curva sobre la que hemos fijado el dato de contorno) es $\bar{t}(x, y) = -x$. Para terminar los cálculos integramos a lo largo de las características y resulta

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(0, y(\bar{t})) - \int_0^{\bar{t}(x, y)} (x(t)^2 + y(t)) dt = \\ &= y - \frac{1}{2}x^2 - \int_0^{-x} \left(\frac{3}{2}t^2 + 3xt + y + x^2 \right) dt = y - \frac{1}{2}x^2 + xy. \end{aligned}$$

No es difícil verificar que la función que acabamos de hallar es una solución del problema que está definida en todo \mathbf{R}^2 . ♣

Ya es tiempo de hacer más ejercicios para verificar que todo el material presentado hasta aquí ha sido comprendido.

Ejercicio 4.4. * Resolver $u_x + u_y = 1$ con dato $u(0, y) = y^2$.

1. Hallar la solución utilizando el método de las curvas características que acabamos de presentar.
2. Es interesante notar que el problema puede resolverse también utilizando el cambio de variables $\eta = y - x$, $\nu = x$ para transformarlo en uno más sencillo. ¿Cuál es la relación entre las características y este nuevo sistema de coordenadas?

Ejercicio 4.5. * Resolver la ecuación del ejemplo 4.1.12 con el dato $u(x, y) = x$ sobre la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. ¿En qué región alcanzamos a construir la solución en este caso?

Ejercicio 4.6. * Calcular el valor en el origen de la solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \cos(xy)u_x(x, y) + y^2(1 + e^{(x+y)^2})u_y(x, y) = 1 + x + y, \\ u(1, y) = e^y. \end{cases}$$

Sugerencia: observar que $b(x, 0) \equiv 0$.

Ejercicio 4.7. * Resolver

$$\begin{cases} xu_x + 2yu_y = x^2, \\ u(x, y) = x, \quad \text{si } xy = 1. \end{cases}$$

Hallar las características y la región de \mathbf{R}^2 donde la solución queda determinada y luego calcular u .

4.1.2 † Propiedades de la solución del problema de contorno.

Hasta ahora hemos abordado cuestiones sobre la existencia y unicidad de soluciones al problema de Cauchy para ecuaciones de orden 1. Introduciremos ahora un breve comentario sobre la regularidad. Para empezar recordemos que en la construcción de las soluciones hemos estado usando todo el tiempo el flujo $\Phi(X, t)$ asociado con la ecuación diferencial (4.8). En efecto, las curvas características no son otra cosa que las curvas

$$\{\Phi(X, t); t \in I = I(X)\}$$

asociadas con ese flujo. Por otra parte, los datos de contorno están dados por una función g que está definida sobre una curva γ . Sin pérdida de generalidad supondremos que γ está parametrizada por $\gamma(s)$, con s variando en un intervalo abierto J . Con esta notación, la solución u en el punto $\Phi(\gamma(s), t)$ es

$$u(\Phi(\gamma(s), t)) = g(\gamma(s)) + \int_0^t c(\Phi(\gamma(s), v)) dv. \quad (4.20)$$

Ejercicio 4.8. * Verificar que la fórmula (4.20) es correcta.

La fórmula 4.20 es una expresión paramétrica de la solución, en términos de los parámetros (s, t) y es obvio que como función de (s, t) es diferenciable si lo son $\gamma(s)$ y el dato de contorno $g(\gamma(s))$, porque la regularidad de Φ está asegurada por los resultados conocidos para ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta observación es útil, pero no nos basta porque en realidad nos interesa expresar u como función de (x, y) y no de (s, t) . Por lo tanto vamos a estudiar que relación hay entre esas dos parejas de variables.

Todo punto (x, y) en la banda Γ formada por las características que tocan la curva γ es de la forma $\Phi(\gamma(s), t)$, para algún par (s, t) , por la forma en que acabamos de definir Γ . Esto produce una aplicación diferenciable

$$(s, t) \mapsto (x, y) = \Phi(\gamma(s), t) \quad (4.21)$$

que es una parametrización de Γ . Para obtener la solución en las variables (x, y) debemos invertir (4.21) y calcular $s = s(x, y)$ y $t = t(x, y)$. El teorema de la función inversa asegura que tal operación produce una función diferenciable si el diferencial de la aplicación (4.21) es inyectivo.

Ejercicio 4.9. *** Demostrar que si la curva γ es transversal a todas las características el diferencial de (4.21) es inyectivo y concluir que la solución $u(x, y)$ es diferenciable en un entorno de γ .

Si la condición de transversalidad no se cumple la solución puede no ser regular. Mostrar este fenómeno es el objetivo del siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.10. * Resolver $u_x = 1$ con el dato $u(x, y) = 1$ sobre $y = x^3$.

También es posible que la solución no sea suave a causa de la falta de diferenciabilidad de los datos. En estos casos las singularidades se propagan a lo largo de las curvas características. El próximo ejercicio contiene un ejemplo de este fenómeno.

Ejercicio 4.11. * Resolver la ecuación del ejemplo 4.1.12 con dato $u(1, y) = |y - 1|$. ¿En qué conjunto no es diferenciable la solución?

Observemos que en el ejercicio 4.9 hemos completado la prueba del teorema que enunciaremos a continuación. También hemos visto en los ejercicios 4.10 y 4.11 que algunas de sus hipótesis no pueden eliminarse.

Teorema 4.1. *Si las funciones a , b y c son de clase C^1 , también lo son la curva γ y la función g y además los vectores $\dot{\gamma}(s)$ y $(a(\gamma(s)), b(\gamma(s)))$ nunca son colineales, entonces existe un entorno de la curva γ en el que el problema de Cauchy para*

$$a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = c(x, y), \quad (4.22)$$

con dato $g(x, y)$ sobre γ tiene una única solución de clase C^1 .

Hay otro aspecto de la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales que aún no hemos tocado, pero que puede investigarse a partir de la fórmula (4.20): ¿cómo depende la solución u de los datos de contorno que demos sobre la curva γ ? Designemos con Ω la banda característica en que la solución del problema de Cauchy existe y es única (observar que para las ecuaciones lineales que estamos manejando esta región no depende del dato inicial, en contraste con lo que ocurre en otros casos como, p.ej., la ecuación de Burgers), entonces al resolver la ecuación diferencial estamos definiendo una aplicación

$$g \mapsto u$$

que a cada dato g sobre γ le asocia la solución u correspondiente definida en Ω . El siguiente ejercicio muestra un resultado de continuidad de esa función respecto a las distancias definidas por las normas del supremo en γ y Ω .

Ejercicio 4.12. ** Sean u_1 y u_2 dos soluciones del problema de Cauchy, que toman datos g_1 y g_2 sobre γ , respectivamente. Mostrar que

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\gamma)}. \quad (4.23)$$

Un problema de contorno para una ecuación en derivadas parciales se dice *bien puesto* si la solución existe, es única y depende continuamente de los datos iniciales. Hemos probado entonces el teorema siguiente.

Teorema 4.2. *En las hipótesis del teorema 4.1, existe un entorno Ω de γ tal que el problema de Cauchy que consiste en hallar una solución de (4.22) en Ω , con dato fijado sobre la curva γ está bien puesto.*

Observación 4.1.16. Al hablar de la dependencia continua de la solución respecto a los datos de contorno hay que precisar cuales son las normas que se están usando en el espacio de los datos y las soluciones. En ese sentido, el enunciado del teorema anterior es algo impreciso porque no hacemos referencia a las normas con las que estamos trabajando. El contexto deja claro que estamos considerando la norma $L^\infty(\Omega)$ para las soluciones y $L^\infty(\gamma)$ para los datos. El problema está bien puesto respecto a estas normas en virtud de la estimación (4.23). ♠ ††

4.1.3 Algunos problemas con ecuaciones cuasilineales.

Vamos a terminar con la introducción a las ecuaciones de orden 1 lineales proponiendo un ejercicio que es una extensión de los métodos que hemos presentado a una situación algo más general. El objetivo de este ejercicio es doble: si las nociones que hemos discutido en la sección 4.1.1 han sido bien comprendidas la primera parte debería ser un ejercicio interesante pero no difícil, porque constituye sólo una ampliación de la teoría que hemos presentado (si al hacerla encontrás grandes dificultades deberías revisar el material que hemos cubierto hasta ahora); por otra parte, abre una puerta hacia el mundo de las ecuaciones no lineales en el que nos encontraremos con unos cuantos fenómenos divertidos. Basta de cháchara y a trabajar:

Ejercicio 4.13.

1. ** Desarrollar un método que permita estudiar el problema de contorno que consiste en hallar una función u que satisfaga:

$$\begin{cases} a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = c(x, y, u), \\ u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \gamma, \end{cases}$$

donde g es una función dada sobre una curva γ prefijada.

2. *** Generalizar un poco más lo hecho en 1 y obtener un método que permita tratar las ecuaciones cuasilineales (4.3). ¿Cuál es la principal diferencia de esta nueva situación con las que discutimos antes a la hora de escribir la solución como $u = u(x, y)$? ¿Qué nuevo problema puede aparecer? (Ver el ejercicio 4.16 sobre la ecuación de Burgers).

Una vez construido un método más o menos general para atacar la ecuación (4.3) podemos lanzarnos a resolver una nueva colección de ejercicios.

Ejercicio 4.14. ** Resolver para $t \geq 0$

$$\begin{cases} u_t = u_x - u, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (4.24)$$

donde la función u_0 se supone diferenciable, no negativa y tiene soporte compacto. El problema (4.24) constituye un modelo para la dinámica de un gas sometido a un proceso de convección-absorción. El dato $u(x, 0)$ debe ser interpretado como la

distribución inicial de densidad del gas por lo que hemos tomado como hipótesis $u_0 \geq 0$, la variable x como una variable espacial y t como el tiempo (de ahí que nos interese la solución para $t > 0$, que representa la evolución posterior del gas). El término u_x es el responsable de la convección y $-u$ es un término de absorción. Una manera sencilla de ver esto es resolver los problemas $u_t = u_x$ y $u_t = -u$, ambos con dato inicial $u_0(x)$ y comparar lo que se obtiene con la solución de (4.24).

Ejercicio 4.15. ** Resolver para $t \geq 0$ y discutir según $\lambda > 0$ el siguiente modelo de convección-absorción (tomaremos u_0 como en el ejercicio anterior y consideraremos soluciones $u \geq 0$, o sea, no negativas):

$$\begin{cases} u_t = u_x - u^\lambda, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (4.25)$$

Mostrar que cuando $\lambda < 1$ aparece un fenómeno de *extinción de la solución*, es decir, que existe un $T > 0$ tal que $u(x, t)$ es idénticamente nula si $t > T$. Esto se debe a que $u^\lambda > u$ si $u < 1$ y entonces el término de absorción es más fuerte que en el caso anterior y termina por aniquilar a la solución. Mostrar que cuando $\lambda \geq 1$ la extinción ocurre cuando $t \rightarrow +\infty$, ¿cuál es la tasa de decaimiento de la solución en estos casos?.

Ejercicio 4.16. *** La ecuación de Burgers sin viscosidad es la ecuación

$$u_t + uu_x = 0. \quad (4.26)$$

Calcular, para $t \in [0, 1)$, la solución de (4.26) que toma el dato inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } 1 \leq x. \end{cases} \quad (4.27)$$

¿Qué ocurre si queremos resolverla en un intervalo $[0, T)$, con $T > 1$?

4.1.4 † Una noción débil de solución

El ejercicio 4.16 parece indicar que no es posible resolver la Ecuación de Burgers más allá de $t = 1$. Eso es cierto si nos limitamos a considerar *soluciones clásicas* de la ecuación, es decir funciones para las que sus dos derivadas de primer orden existen y son tales que se satisface la ecuación en cada punto (x, t) . Sin embargo, en situaciones modeladas por ecuaciones como (4.26) aparecen fenómenos que sólo pueden ser descritos por soluciones que presentan discontinuidades. Por otra parte ya habíamos mencionado que las soluciones podían tener ciertas singularidades, que se propagaban a lo largo de las características, y aún así era perfectamente posible calcularlas sin mayor problema (en realidad, esto es lo que ocurre con la solución $u(x, t)$ del problema planteado en el ejercicio 4.16 para $t \in (0, 1)$, que resulta ser no diferenciable en algunos puntos). Para tener en cuenta estos hechos hace falta extender el concepto de solución para poder admitir soluciones no diferenciables o discontinuas. La forma de hacerlo es ya estándar y está en la raíz de la *teoría de*

*distribuciones*³: consiste en utilizar funciones de prueba y darle al problema de Cauchy para (4.26) una formulación integral.

Comencemos escribiendo (4.26) como

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$$

y supongamos que tenemos una solución clásica de la ecuación tal que

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

Si multiplicamos la ecuación por una función ψ regular, de soporte compacto, e integramos en

$$H = \{(x, t) \in \mathbf{R}^2; t \geq 0\}$$

obtenemos

$$\iint_H \psi u_t dx dt + \frac{1}{2} \iint_H \psi (u^2)_x dx dt = 0.$$

Podemos integrar por partes, previo cambio del orden de integración en la primera integral, y usar la condición inicial para llegar a

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(x, 0) u_0(x) dx + \iint_H \psi_t(x, t) u(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \iint_H \psi_x(x, t) u^2(x, t) dx dt = 0. \quad (4.28)$$

Las soluciones clásicas del problema de Cauchy con dato inicial u_0 en $t = 0$ satisfacen esa igualdad integral para cualquier función ψ de soporte compacto (también es cierto que si una función regular satisface (4.28) para cualquier función de prueba ψ entonces es una solución de problema de Cauchy). Teniendo en cuenta estos hechos introducimos la siguiente definición.

Definición 4.1. SOLUCIONES DÉBILES PARA LA ECUACIÓN DE BURGERS. Dada una función acotada $u_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ diremos que una función acotada $u : H \rightarrow \mathbf{R}$ es una *solución débil* del problema de Cauchy para la ecuación de Burgers con dato inicial u_0 si se satisface la identidad (4.28) para cualquier función de prueba ψ de clase C^1 en H y con soporte compacto en H .

La noción de solución débil fue construida a partir de la noción de solución clásica, pasando a una formulación que requiere menos regularidad. Por lo tanto, toda solución clásica acotada es una solución débil. También es cierto que una solución débil con suficiente regularidad como para que las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial existan es una solución clásica.

³la teoría de distribuciones fue puesta sobre bases sólidas por el matemático francés Laurent Schwartz (1915-) y su libro [Sz1] es la referencia clásica sobre el tema. En su introducción aparece un interesante resumen histórico acerca de la necesidad de extender el concepto de función para manejar objetos irregulares que los físicos e ingenieros utilizaban para sus cálculos. La referencia [Sz2] constituye una exposición de esta teoría más cercana a sus aplicaciones

Ejercicio 4.17. * Mostrar que una solución clásica de la ecuación de Burgers en H con dato inicial u_0 (es decir una función continua en H y de clase C^1 en el interior de H , tal que $u(x, 0) = u_0(x)$ y $u_t + uu_x = 0$ se satisface cuando $t > 0$) es una solución débil con dato inicial u_0 .

Ejercicio 4.18. ** Mostrar que una solución débil de la ecuación de Burgers en H con dato inicial u_0 , que además es una función continua en H y de clase C^1 en el interior de H es una solución clásica con dato inicial u_0 .

Ejercicio 4.19. *** Mostrar que la función u definida en $t > 0$ por

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{en } \{t \leq 1, x \leq t\} \cup \{t > 1, 2x \leq t + 1\}, \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{en } \{t \leq 1, t \leq x \leq 1\}, \\ 0 & \text{en } \{t \leq 1, x \geq 1\} \cup \{t > 1, 2x > t + 1\}, \end{cases}$$

es una solución débil en $t \geq 0$ del problema de Cauchy para la ecuación de Burgers con el dato inicial u_0 definido por la fórmula (4.27).

Observar que la solución que aparece en el ejercicio anterior es continua hasta el tiempo $t = 1$, pero luego se forma una discontinuidad que se propaga sobre una de las curvas características⁴. Este fenómeno debe entenderse como la aparición de una onda de choque a partir de una situación inicialmente regular. Vale la pena mencionar que no existe una solución clásica para la ecuación de Burgers con dato inicial u_0 que esté definida para todo tiempo ≥ 0 . En conclusión, la noción de solución débil es más adecuada que la de solución clásica para este problema, porque abarca soluciones que tienen sentido físico, pero que no son soluciones clásicas. En contrapartida, el problema de la unicidad de las soluciones débiles se vuelve bastante más delicado⁵. ††

⁴el lector interesado en saber por qué la discontinuidad se propaga a lo largo de $x = (t + 1)/2$ y no de otra característica cualquiera puede consultar la referencia [I], páginas 55–59, o [Sm], páginas 246–249

⁵considerar la unicidad de las soluciones débiles escapa al alcance de este texto, y recomendamos consultar la referencia [Sm] a quien esté interesado en este aspecto de la teoría

4.2 Ecuaciones de segundo orden

En esta sección comenzaremos el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. Aunque nuestro principal objetivo es estudiar algunas ecuaciones lineales con coeficientes constantes comenzaremos por esbozar una teoría local para ecuaciones de la forma

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = d(x, y, u, u_x, u_y), \quad (4.29)$$

donde u , la función incógnita, es una función real definida en algún conjunto abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Encontraremos que estas ecuaciones tienen un comportamiento muy diferente según cuales sean los valores de los coeficientes $a(x, y)$, $b(x, y)$ y $c(x, y)$, cosa que se verá reflejada en las propiedades de sus soluciones y en las técnicas que permiten estudiarlas.

Antes de seguir avanzando vamos a presentar algunos ejemplos de ecuaciones como (4.29) que pueden ser tratados sin necesidad de desarrollar mucha teoría, simplemente con un poco ingenio y herramientas básicas de cálculo.

Ejercicio 4.20. * El objetivo de este ejercicio es resolver algunas ecuaciones de segundo orden que pueden ser integradas con argumentos *ad-hoc*. Las soluciones que encontraremos quedarán expresadas en términos de funciones más o menos arbitrarias, que sólo pueden ser determinadas imponiendo algunas condiciones de contorno. Consideraremos funciones $u(x, y)$ de clase C^2 .

1. Hallar la forma general de las soluciones de la ecuación $u_{xy} = 0$. ♡
2. Resolver la ecuación $u_{xx} + u = 0$.
3. Resolver $u_{xy} + u_x + x + y + 1 = 0$.

Ejercicio 4.21. * En este ejercicio consideraremos problemas de contorno para algunas de las ecuaciones del ejercicio anterior. En cada caso decidir si los problemas que se proponen tienen solución, y calcularlas cuando corresponda.

1. Resolver $u_{xy} = 0$ con los datos:
 - (a) $u(x, x) = 1, u_x(x, x) = 1$.
 - (b) $u(0, y) = 0, u_x(0, y) = 1$.
2. Resolver $u_{xx} + u = 0$ con los datos:
 - (a) $u(0, y) = y, u_x(0, y) = 1$.
 - (b) $u(x, 0) = x, u_y(x, 0) = 1$.

4.2.1 Teoría local para las ecuaciones lineales de segundo orden

Vamos a intentar ahora elaborar una teoría local para estudiar (4.29). Análogamente a lo que ocurre para las ecuaciones de orden 1 deberemos dar un dato de contorno para resolverlas. En una primera aproximación podemos pensar

que ahora hay que dar un dato sobre el valor de u y sobre las derivadas primeras, dado que se trata de ecuaciones de segundo orden. Esto es esencialmente cierto desde un punto de vista local, pero es falso en general. En muchos casos las condiciones de contorno naturales para problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden son de otra naturaleza. Ver, por ejemplo, la sección 4.5, dedicada a la ecuación del calor, o la observación 4.6.1, página 341.

Como en este momento nos interesa hacer una versión local de la teoría trataremos de fijar los datos de contorno prescribiendo los valores de u , u_x y u_y sobre una curva γ del plano. En primer lugar observemos que debe haber una cierta relación de compatibilidad entre los datos para u , u_x y u_y . En efecto, si la curva sobre la cual los damos admite una parametrización $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ los datos pueden escribirse

$$\begin{aligned} u(x(s), y(s)) &= f(s), \\ u_x(x(s), y(s)) &= g(s), \\ u_y(x(s), y(s)) &= h(s). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Si derivamos la primera ecuación respecto a s obtenemos

$$u_x(x(s), y(s))\dot{x}(s) + u_y(x(s), y(s))\dot{y}(s) = \dot{f}(s),$$

de lo que se desprende la siguiente relación entre los datos:

$$g(s)\dot{x}(s) + h(s)\dot{y}(s) = \dot{f}(s). \tag{4.31}$$

Ejemplo 4.2.1. En el ejercicio 4.21, parte 1b, podemos calcular $u_y(0, y)$ directamente, a partir de la condición de contorno $u(0, y) = 0$, ya que al derivar esta ecuación respecto a y resulta $u_y(0, y) = 0$, para $y \in \mathbf{R}$. En la parte 1a de ese mismo ejercicio también es posible calcular $u_y(x, x)$, ya que al derivar respecto a x la condición de contorno $u(x, x) = 1$ se obtiene

$$u_x(x, x) + u_y(x, x) = 0.$$

Utilizando el dato sobre u_x concluimos que $u_y(x, x) = -1$.

Ejercicio 4.22. * Consideremos una función de clase C^1 que sobre la parábola γ de ecuación $y = x^2$ satisface $u(x, y) = x^2 + 1$, $u_y(x, y) = 2y$. Calcular u_x sobre γ .

Ejercicio 4.23. ** Mostrar que si γ es una curva regular y $n(s)$ es un vector normal a γ en el punto $\gamma(s)$, tal que $\|n(s)\| \equiv 1$ y $s \mapsto n(s)$ es diferenciable, entonces podemos dar los datos del problema de contorno prescribiendo dos funciones f y g sobre la curva de modo que

$$f(s) = u(x(s), y(s)), \quad g(s) = \partial_{n(s)}u(x(s), y(s)).$$

Recordemos que

$$\partial_{n(s)}u(x(s), y(s)) = \nabla u(x(s), y(s)) \cdot n(s)$$

es la derivada direccional de u según el vector n .

El primer paso en el estudio de las ecuaciones lineales de segundo orden será generalizar la noción de curvas características a esta nueva situación.

Las características de ecuaciones de primer orden revisitadas

Comenzaremos por retomar la noción de curva característica para ecuaciones de primer orden. Veremos que aparecen naturalmente si intentamos resolver la ecuación por el procedimiento de calcular todas las derivadas de su solución. En efecto, para resolver el problema de contorno

$$\begin{cases} a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = c(x, y), \\ u(x, y) = g(x, y) \quad \text{si } (x, y) \in \gamma, \end{cases} \quad (4.32)$$

con dato g prefijado sobre una curva γ dada, podemos intentar determinar todas las derivadas parciales de u , en particular u_x y u_y , a partir del dato y la ecuación. Si $(x(s), y(s))$ es una parametrización de γ escribamos el dato en forma paramétrica como $g(s) = g(x(s), y(s))$ (donde hemos cometido un abuso de notación obvio). Derivando g respecto al parámetro s y usando la regla de la cadena obtenemos

$$\dot{x}(s)u_x(x(s), y(s)) + \dot{y}(s)u_y(x(s), y(s)) = \dot{g}(s). \quad (4.33)$$

La ecuación en derivadas parciales, en un punto $(x(s), y(s))$ nos dice

$$a(x(s), y(s))u_x(x(s), y(s)) + b(x(s), y(s))u_y(x(s), y(s)) = c(x(s), y(s)), \quad (4.34)$$

y la condición para que el sistema (4.33)-(4.34) tenga una única solución y siempre podamos despejar u_x y u_y de esas ecuaciones es que el determinante

$$\begin{vmatrix} \dot{x}(s) & \dot{y}(s) \\ a(x(s), y(s)) & b(x(s), y(s)) \end{vmatrix} \quad (4.35)$$

no se anule. Si analizamos esta condición desde un punto de vista más geométrico encontramos que el vector $(\dot{x}(s), \dot{y}(s))$, tangente a la curva sobre la que damos los datos, no puede ser paralelo al vector (a, b) . Recordemos que $(a(x, y), b(x, y))$ es justamente el vector tangente a la curva característica por el punto (x, y) (estas curvas se encontraban resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = a(x, y)$, $\dot{y} = b(x, y)$). Por lo tanto, la condición para resolver el sistema es justamente que la curva γ sea transversal a las características.

Ejercicio 4.24. ** Mostrar que si intentamos derivar la ecuación una vez más para despejar las derivadas de segundo orden no aparecen nuevas condiciones y es suficiente con que se verifique la transversalidad entre (a, b) y (\dot{x}, \dot{y}) para poder hacerlo.

Observación 4.2.2. Cuando la curva γ no es característica para el problema (4.32) el procedimiento de derivar para calcular las derivadas de u sobre γ puede iterarse para ir despejando todas las derivadas parciales de u . ♠

Las características para ecuaciones de segundo orden

Volvamos ahora a la ecuación de segundo orden (4.29) e intentemos obtener las derivadas u_{xx} , u_{xy} y u_{yy} sobre la curva $\gamma(s)$, a partir de la ecuación (4.29) y los datos de contorno (4.30). Si derivamos respecto al parámetro s los datos para u_x y u_y obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x}(s)u_{xx}(x(s), y(s)) + \dot{y}(s)u_{xy}(x(s), y(s)) &= \dot{g}(s), \\ \dot{x}(s)u_{xy}(x(s), y(s)) + \dot{y}(s)u_{yy}(x(s), y(s)) &= \dot{h}(s).\end{aligned}\tag{4.36}$$

Al combinar (4.36) con la ecuación diferencial obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales para las derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{aligned}\dot{x}u_{xx} + \dot{y}u_{xy} &= \dot{g}, \\ \dot{x}u_{xy} + \dot{y}u_{yy} &= \dot{h}, \\ au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} &= d.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Es conveniente notar que en (4.37) hemos omitido escribir donde están evaluadas las funciones \dot{x} , \dot{y} , a , b , c , d y las derivadas parciales u_{xx} , u_{xy} y u_{yy} , para no tener una notación tan pesada como la de la fórmula (4.36). El sistema (4.37) determina de manera única las derivadas parciales de segundo orden, salvo cuando

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \\ a & 2b & c \end{vmatrix} = c\dot{x}^2 + a\dot{y}^2 - 2b\dot{x}\dot{y} = 0.\tag{4.38}$$

Esta condición sobre \dot{x} y \dot{y} es la que nos permitira introducir la noción de *característica* apropiada para el estudio de las ecuaciones lineales de segundo orden en el plano.

Definición 4.2. Diremos que la curva γ es *característica en un punto* si (4.38) se satisface en ese punto, y que γ es *característica* si es característica en todos sus puntos. Si γ no es característica en ningún punto diremos que la curva es *no característica*.

Notemos que a lo largo de una curva no característica los datos determinan las derivadas parciales segundas de manera única.

Observación 4.2.3. Si definiéramos las curvas características para las ecuaciones de orden 1 a través de la condición de que el determinante (4.35) se anule obtendríamos exactamente las mismas curvas que encontramos en la sección anterior, en que las introdujimos como las soluciones de la ecuación diferencial (4.8). ♠

Dejemos de lado de momento la curva γ que hemos estado utilizando hasta ahora y fijemos nuestra atención sobre la idea de que en cada punto (x, y) podemos considerar (\dot{x}, \dot{y}) como un vector que define una dirección. Busquemos

entonces para cada punto (x, y) las direcciones (\dot{x}, \dot{y}) que satisfacen (4.38), a las que llamaremos *direcciones características*. Es evidente que (4.38) admite la solución trivial, pero como estamos buscando direcciones en el plano esa solución no nos sirve para nada, así que la desecharemos desde un principio. También es evidente que (\dot{x}, \dot{y}) es solución si y sólo si $(\lambda\dot{x}, \lambda\dot{y})$ lo es para todo $\lambda \neq 0$.

Si $a \neq 0$ entonces $\dot{x} = 0$ no es solución y podemos fijar $\dot{x} = 1$ para obtener

$$a\dot{y}^2 - 2b\dot{y} + c = 0, \quad (4.39)$$

que, dependiendo del signo de $\Delta = b^2 - ac$ tendrá dos, una o ninguna solución. En realidad esta última conclusión no depende del valor de a y siempre es cierto que hay dos direcciones características si $\Delta > 0$, hay sólo una si $\Delta = 0$ y no hay ninguna si $\Delta < 0$.

Ejercicio 4.25. * Completar la discusión precedente para incluir el caso en que el coeficiente $a = a(x, y)$ puede anularse.

La existencia o no de curvas características tiene un efecto muy importante en el comportamiento de las soluciones, por lo que es usual clasificar las ecuaciones según el valor del discriminante Δ , que es en realidad una función $\Delta(x, y)$, tal como se recoge en la definición que sigue.

Definición 4.3. • Si $\Delta(x, y) > 0$ diremos que la ecuación es *hiperbólica* en el punto (x, y) . En este caso habrá dos direcciones características en ese punto.

- Cuando $\Delta(x, y) = 0$ diremos que la ecuación es *parabólica* en el punto (x, y) y existirá una única dirección característica.
- En el caso $\Delta(x, y) < 0$ diremos que la ecuación es *elíptica* en el punto y no existirán direcciones características.

Cuando una ecuación es hiperbólica (parabólica o elíptica) en todos los puntos diremos que la ecuación es hiperbólica (respectivamente, parabólica o elíptica)

Observación 4.2.4. Vale la pena subrayar que la clasificación de las ecuaciones del tipo (4.29) que se hace en la definición 4.3 es completamente satisfactoria sólo en el caso de las ecuaciones lineales en el plano. En dimensiones más altas ya no lo es, y, en general, no es posible clasificar todas las ecuaciones en derivadas parciales en un pequeño número de categorías. Una vez hecho este comentario digamos que efectivamente los tres tipos de ecuaciones que aparecen en la definición 4.3 presentan aspecto cualitativos que las diferencian y que también están presentes en otros contextos, por lo que la clasificación que allí aparece es relevante. ♠

Ejemplo 4.2.5. Si los coeficientes de una ecuación lineal de segundo orden dependen de x e y entonces el carácter hiperbólico, parabólico o elíptico de una ecuación puede cambiar de un punto a otro. Esto ocurre, por ejemplo, para la ecuación

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0,$$

conocida como ecuación de Tricomi. En este caso se tiene $\Delta(x, y) = -y$, por lo que la ecuación es hiperbólica en el semiplano $y < 0$, parabólica sobre el eje $y = 0$ y elíptica en $y > 0$. Las direcciones características en el semiplano inferior están dadas por los vectores $(\pm\sqrt{-y}, 1)$, en tanto que la única dirección característica sobre $y = 0$ es la vertical paralela a $(0, 1)$. Vemos en este ejemplo que no sólo el carácter de la ecuación cambia de una región a otra del plano, también las direcciones características en cada punto (x, y) varían y dependen del punto que estemos considerando. ♣

Observación 4.2.6. EL CASO HIPERBÓLICO

Si una ecuación es hiperbólica en todos los puntos (x, y) entonces para cada punto tendremos *dos* direcciones características. Esto permite construir dos campos de direcciones características, que dan lugar a dos familias de curvas características. Estas curvas resultan ser de gran ayuda en el estudio de la ecuación. Veremos esto en un ejemplo.

Ejemplo 4.2.7. En este ejemplo consideraremos la ecuación

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad (4.40)$$

donde c es una constante positiva, conocida como *ecuación de ondas*. Es usual llamar t a la segunda variable en vez de y , porque debe interpretarse como el tiempo. Es obvio que para esta ecuación tenemos

$$\Delta(x, t) = c^2 > 0, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2,$$

por lo tanto es hiperbólica en todos los puntos del plano (x, t) . Busquemos ahora las direcciones características para esta ecuación. Si indicamos con (\dot{x}, \dot{t}) el vector tangente a la característica en un punto (x, t) la ecuación (4.38) implica

$$c^2 \dot{t}^2 - \dot{x}^2 = 0. \quad (4.41)$$

Esta claro entonces que las características deben satisfacer una de las ecuaciones

$$\dot{x} + c\dot{t} = 0, \quad \text{o} \quad \dot{x} - c\dot{t} = 0,$$

de lo que se desprende que hay dos familias de características, de ecuaciones

$$x \pm ct = \text{cte.},$$

que se muestran en la figura 4.5. Con cte. indicamos una constante de in-

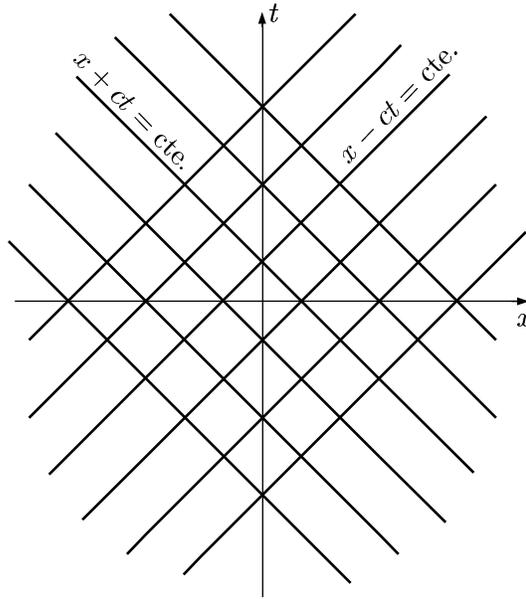


Figura 4.5: curvas características para la ecuación de ondas

tegración arbitraria. Notemos que, como los coeficientes de la ecuación son constantes, las direcciones características no dependen de x e y , y las curvas características son líneas rectas, a diferencia de lo que ocurría en el ejemplo 4.2.5. Si introducimos nuevas coordenadas

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

que tienen la propiedad de que sus líneas coordenadas son justamente las características de la ecuación, la ecuación se simplifica bastante (comparar con el ejercicio 4.4, parte 2). En efecto, tenemos

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta, \quad (4.42)$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = cu_\xi - cu_\eta. \quad (4.43)$$

Podemos calcular u_x aplicando iterativamente (4.42) para obtener

$$u_{xx} = (u_x)_x = (u_\xi + u_\eta)_x = u_{\xi x} + u_{\eta x} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Para calcular u_{tt} procedemos de una manera análoga:

$$u_{tt} = (cu_\xi - cu_\eta)_t = cu_{\xi t} + cu_{\eta t} = c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}).$$

Al sustituir en la ecuación de ondas llegamos a

$$u_{\xi\eta} = 0, \quad (4.44)$$

que no es otra cosa que la ecuación que aparece en la parte 1 del ejercicio 4.20. No es difícil resolver esta ecuación y sacaremos partido de este hecho en nuestra próxima sección, que estará dedicada a la ecuación de las ondas. ♣

Tal como vimos, cuando los coeficientes de la ecuación dependen de x e y los campos de direcciones características asociados a una ecuación hiperbólica también dependen de x e y . En esta situación, para hallar curvas que sean características en todos sus puntos habrá que resolver ecuaciones diferenciales más complicadas que las sencillas $\dot{x} \pm c\dot{t} = 0$.

Mencionemos también que la posibilidad de encontrar un sistema de coordenadas formado por líneas características es una peculiaridad de las ecuaciones hiperbólicas en el plano que no puede extenderse a otros contextos. Por esta razón la teoría para la ecuación de ondas (4.40) en \mathbf{R} es bastante más simple que en dimensiones más altas⁶. ♠

Nuestro próximo ejercicio es otro ejemplo de que las ecuaciones hiperbólicas se simplifican al pasar a un sistema de coordenadas sugerido por las características.

Ejercicio 4.26. * Consideremos la ecuación $u_{xy} - u_{yy} = 0$. Transformarla utilizando el cambio de coordenadas $\xi = x$, $\eta = x + y$ y resolverla, en el sentido de hallar la forma general de sus soluciones. Mostrar que las características son las líneas definidas por las ecuaciones $\xi = \text{cte.}$ y $\eta = \text{cte.}$

En los próximos ejercicios consideraremos ecuaciones hiperbólicas y parabólicas, buscaremos campos de direcciones características y los integraremos para hallar curvas características. También, introduciremos sistemas de coordenadas que tienen a las curvas características como líneas coordenadas para reducir las ecuaciones a formas canónicas más fáciles de tratar. Comenzaremos con un ejercicio que consiste en retomar el ejemplo de la ecuación de ondas desde un punto de vista ligeramente distinto al que usamos en el ejemplo 4.2.7 para calcular sus características. El objetivo de este ejercicio es mostrar que cada campo de direcciones características puede utilizarse para definir una ecuación diferencial ordinaria, cuyas órbitas son las curvas características para la ecuación en derivadas parciales. Este procedimiento puede generalizarse para hallar las características en situaciones más complejas que la ecuación de ondas.

Ejercicio 4.27. *

1. Mostrar que los campos vectoriales constantes $(c, 1)$ y $(-c, 1)$, que se obtienen resolviendo (4.41) son campos de direcciones características para la ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

⁶ver, por ejemplo, el capítulo 5 del texto [J]

2. Mostrar que las curvas características para la ecuación de ondas pueden hallarse resolviendo las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c, & \dot{x} &= -c, \\ \dot{t} &= 1, & \dot{t} &= 1, \end{aligned} \quad (4.45)$$

cuyos segundos miembros son los campos vectoriales que dan las direcciones características para la ecuación.

Ejercicio 4.28.

1. * Hallar las curvas características para $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0$, y resolverla introduciendo un sistema de coordenadas adecuado.
2. ** Resolver la ecuación $xu_{xy} - yu_{yy} = u_y$.
3. ** Determinar las características de $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$. Resolverla con la ayuda del cambio $\xi = x$, $\eta = x - y$. Mostrar que cualquier cambio de coordenadas de la forma $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = x - y$ la transforma en una ecuación de la forma

$$u_{\xi\xi} = F(u, u_\eta, u_\xi, \eta, \xi).$$

Para esta última parte hay que tener en cuenta que si (ξ, η) efectivamente definen un nuevo sistema de coordenadas el jacobiano del cambio de variables nunca se anula.

4.3 La ecuación de ondas en la recta

En esta sección nos dedicaremos a estudiar la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2. \quad (4.46)$$

Esta ecuación es, entre otras aplicaciones, un modelo para describir las vibraciones de una cuerda flexible que vibra en el plano (x, y) . En este contexto la variable x debe interpretarse como la posición sobre la cuerda, t es el tiempo, y $u(x, t)$ el desplazamiento en la dirección del eje y . En la sección B.1 del apéndice, página xix, se presenta un modelo que conduce a la aparición de la ecuación de ondas. Notemos que al considerar la ecuación de ondas en \mathbf{R}^2 la variable x puede tomar cualquier valor real, por lo que debemos imaginar que estamos estudiando las vibraciones en una “cuerda infinita”.

Comenzaremos ahora la búsqueda de soluciones para la ecuación de ondas (4.46). Como en la ecuación aparecen dos derivadas buscaremos funciones u de clase C^2 . La ecuación es hiperbólica en todos los puntos $(x, t) \in \mathbf{R}^2$ y tiene dos familias de características formadas por las rectas

$$x \pm ct = \text{cte.}$$

Tal como vimos en la sección anterior, al transformar la ecuación al sistema de coordenadas (ξ, η) , con

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct,$$

obtenemos la sencilla ecuación

$$u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2,$$

que resulta bastante más fácil de resolver. En realidad ya la estudiamos en el ejercicio 4.20, parte 1. Como $u_{\xi\eta} = 0$ resulta que u_ξ no depende de η , por lo tanto, existe una función f , de una variable, tal que

$$u_\xi(\xi, \eta) = f(\xi). \quad (4.47)$$

Si integramos esta última ecuación concluimos que

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad (4.48)$$

donde F es una primitiva de f y G es una función arbitraria de η , que aparece como una constante de integración al integrar respecto a ξ . Dado que estamos buscando una función u de clase C^2 entonces debemos imponer que las funciones F y G sean de clase C^2 . Esto asegurará que u_{xx} y u_{tt} existen y son funciones continuas. Deshaciendo el cambio de variables $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$ obtenemos la siguiente fórmula para la *solución general de la ecuación de ondas*:

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct). \quad (4.49)$$

Recíprocamente, si $u(x, t)$ es de la forma (4.49), donde F y G son funciones reales de clase C^2 , entonces u satisface la ecuación de ondas. Esto es consecuencia del cálculo directo

$$\begin{aligned}u_{xx}(x, t) &= F''(x + ct) + G''(x - ct), \\u_{tt}(x, t) &= c^2 F''(x + ct) + c^2 G''(x - ct).\end{aligned}$$

En resumen, hemos mostrado el siguiente resultado:

Proposición 4.1. *Una función $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, de clase C^2 , es una solución de la ecuación de ondas*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

si y sólo si existen dos funciones $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ y $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, de clase C^2 , tales que

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Observación 4.3.1. † En realidad es posible introducir una noción más débil de solución para la ecuación de ondas, que no requiere que sus soluciones sean funciones de clase C^2 . El procedimiento para hacer esto es similar al que usamos al introducir las soluciones débiles de la ecuación de Burgers y consiste en dar una formulación integral de la ecuación de ondas. Aunque obviaremos los detalles, comentemos que una onda triangular de la forma

$$u(x, t) = f(x - ct), \tag{4.50}$$

donde f es la función definida por

$$f(s) = \begin{cases} 1 - |s|, & s \in [-1, 1], \\ 0, & s \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \end{cases}$$

es una solución de la ecuación de ondas en este nuevo contexto. Claro está que (4.50) no es una función de clase C^2 , y que hay puntos sobre los que no existen u_{xx} o u_{tt} , por lo tanto u no puede ser una solución de la ecuación en el sentido usual de calcular las derivadas y verificar que se satisface la igualdad (4.46). †† ♠

Observación 4.3.2. Es interesante considerar los casos en que $F \equiv 0$ o $G \equiv 0$ en la fórmula (4.49). Supongamos que estamos en este segundo caso, entonces

$$u(x, t) = F(x + ct).$$

Si consideramos la solución u como función de x , para distintos valores de t , encontramos que su aspecto es siempre el mismo, aunque su gráfica se va desplazando hacia la izquierda por el efecto del término ct en el argumento de F , comp puede apreciarse en la figura 4.6, en la que hemos representado la solución $u(x, t)$, como función de x , para tres valores de tiempo $t_1 < t_2 < t_3$.

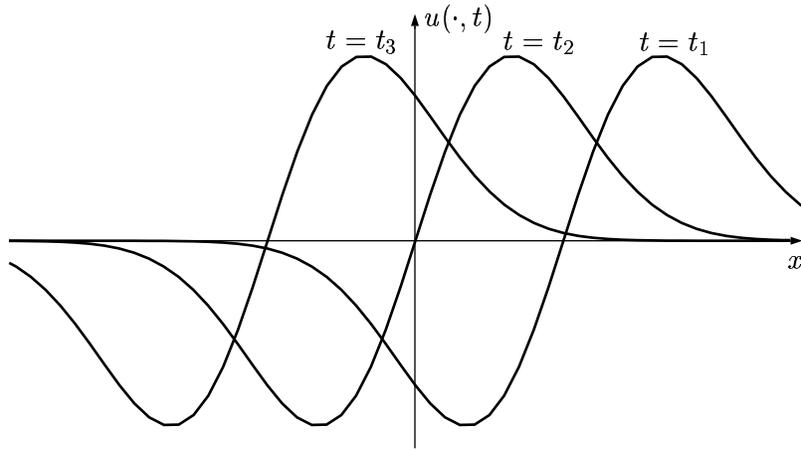


Figura 4.6: una onda viajera que se desplaza hacia $-\infty$

Ejercicio 4.29. * Consideremos la función $F(\xi) = (1 + \xi^2)^{-1}$.

1. Graficar $F(x + 3t)$ como función de x , para $t = -1$, $t = 0$ y $t = 2$. Concluir que $F(x + 3t)$ representa una onda que viaja hacia las $x < 0$, con velocidad 3.
2. Hacer lo mismo con $F(x - 3t)$. ¿Hacia dónde viaja ahora la onda que esta función representa?
3. Mostrar que, en general, una función $u(x, t)$ de la forma $G(x - ct)$ representa una onda que se desplaza con velocidad c en el sentido creciente del eje Ox .
4. Estudiar tan detalladamente como sea posible la solución de la ecuación de ondas definida por

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(F(x + ct) + F(x - ct)). \quad (4.51)$$

En resumen, una solución de la forma $F(x + ct)$ representa una onda que viaja en el sentido decreciente del eje Ox , en tanto que una solución de la forma $G(x - ct)$ es una onda que se desplaza en el sentido contrario, hacia $+\infty$. En general, tal como sugiere la parte 4 del ejercicio anterior, al escribir una solución de la ecuación de ondas en la forma (4.49) la estamos expresando como la superposición de dos ondas con velocidad c , una que viaja hacia la izquierda y la otra hacia la derecha. ♠

Observación 4.3.3. SUPERPOSICIÓN DE SOLUCIONES PARA ECUACIONES LINEALES EN DERIVADAS PARCIALES

El comentario que incluimos al final de la observación anterior, acerca de interpretar la fórmula (4.49) como el resultado de superponer dos ondas, forma parte de un resultado más general de superposición de soluciones que es propio de las ecuaciones lineales homogéneas.

Proposición 4.2. Sean u_1 y u_2 dos soluciones de la ecuación lineal

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0,$$

y a_1, a_2 , dos números reales cualesquiera. Los coeficientes a, b, c, d, e y f pueden ser constantes o funciones de x e y . Entonces $a_1u_1 + a_2u_2$ también es una solución de la ecuación.

Notemos que este resultado es completamente análogo a los principios de superposición para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. ♠

La proposición 4.1 nos dice que las soluciones de la ecuación de ondas (4.46) pueden interpretarse siempre como la superposición de dos ondas viajeras. La forma de estas ondas queda determinada por las funciones F y G que aparecen en la fórmula (4.49). Claro está que no es posible determinar F y G a partir de la ecuación de ondas, porque una función como la que aparece en (4.49) es solución de la ecuación de ondas para cualquier elección de F y G de clase C^2 . Para determinar F y G tenemos que recurrir a las *condiciones iniciales* que aporten información sobre el estado del sistema en algún tiempo dado. La teoría local que hemos desarrollado en la sección anterior sugiere que deberíamos fijar una curva γ no característica y dar como datos el valor de u y una derivada de u sobre γ . Además, la interpretación física de la ecuación como un modelo para la propagación de ondas en una cuerda sugiere hacer esto de una manera muy particular. En efecto, es un hecho conocido que para poder determinar la posición de un móvil que se desplaza bajo la acción de un conjunto conocido de fuerzas basta saber su posición y velocidad en un cierto tiempo inicial t_0 . Algo análogo vale para la ecuación de la cuerda. La posición y la velocidad de la cuerda en un tiempo t son $u(x, t)$ y $u_t(x, t)$ respectivamente. No hay inconveniente en suponer que el tiempo inicial es $t_0 = 0$, así que haremos esta elección para simplificar algo los cálculos. Por lo tanto, daremos como datos para el problema las condiciones iniciales

$$u_0(x) = u(x, 0), \quad v_0(x) = u_t(x, 0), \quad (4.52)$$

a partir de los que determinaremos la evolución posterior de la cuerda, es decir, la solución $u(x, t)$ para $t \geq 0$. Notemos además que la recta $\{(x, 0), x \in \mathbf{R}\}$ no es característica para la ecuación de ondas.

Al calcular u y u_t en tiempo 0 e imponer las condiciones iniciales resultan las siguientes ecuaciones para F y G :

$$u_0(x) = F(x) + G(x), \quad (4.53)$$

$$v_0(x) = cF'(x) - cG'(x). \quad (4.54)$$

Para obtener una ecuación para F y G a partir de (4.54) podemos integrarla y obtener

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c} \int_0^x v_0(y) dy + K, \quad (4.55)$$

donde $K = F(0) - G(0)$. Si combinamos la ecuación anterior con (4.53) llegamos a un sencillo sistema del que podemos despejar $F(x)$ y $G(x)$ para obtener

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy + \frac{K}{2}, \\ G(x) &= \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(y) dy - \frac{K}{2}. \end{aligned}$$

Si recordamos que $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ entonces

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} v_0(y) dy - \int_0^{x-ct} v_0(y) dy \right). \quad (4.56)$$

Las propiedades básicas de la integración aseguran que

$$\int_0^{x+ct} v_0(y) dy - \int_0^{x-ct} v_0(y) dy = \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy, \quad (4.57)$$

por lo tanto

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy. \quad (4.58)$$

Notemos que hasta este momento hemos obtenido condiciones necesarias sobre la forma de u a partir de la ecuación y los datos. No es difícil verificar que la fórmula (4.58) es una solución del problema de valores iniciales que nos habíamos propuesto atacar.

Ejercicio 4.30. * Mostrar que si u_0 es una función de clase C^2 y v_0 es de clase C_1 entonces la función $u(x, t)$ dada por (4.58) es una función de clase C^2 en \mathbf{R}^2 que satisface la ecuación $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Además $u(x, 0) = u_0(x)$ y $u_t(x, 0) = v_0(x)$ para todo $x \in \mathbf{R}$

Más aún, los argumentos que acabamos de presentar muestran que la solución del problema de valores iniciales es única, porque la hemos determinado a partir de las condiciones iniciales como la solución $u(x, t)$ dada por la fórmula (4.58).

Llegados a este punto podemos resumir el contenido de nuestra discusión en el siguiente teorema.

Teorema 4.3. Sean $u_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^2 y $v_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una función de clase C^1 . Entonces existe una única solución $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, de clase C^2 , del problema de valores iniciales para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), & (x, t) \in \mathbf{R}^2, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (4.59)$$

Además, la solución u puede calcularse, para todo $t \in \mathbf{R}$, a partir de los datos iniciales por medio de la fórmula (4.58).

Observación 4.3.4. REVERSIBILIDAD DE LA ECUACIÓN DE LA CUERDA

Es interesante observar que la fórmula (4.58) define la solución para todo $t \in \mathbf{R}$, no sólo para $t \geq 0$ y el conocimiento de la configuración de la cuerda en tiempo $t = 0$ determina también su configuración en tiempos anteriores. Una consecuencia bien interesante de esto es que el estado de la cuerda en tiempo $t = 0$ puede obtenerse dejando evolucionar la cuerda desde condiciones iniciales adecuadas. Por ejemplo, si fijamos como condiciones iniciales $u(x, -1)$ y $u_t(x, -1)$ y dejamos evolucionar la cuerda a partir de esa situación, encontraremos que una unidad de tiempo más tarde la cuerda alcanza el estado $u(x, 0)$, con velocidad $u_t(x, 0)$.

Para cerrar este comentario digamos además que la ecuación de ondas es invariante bajo el cambio $t \mapsto -t$, que invierte el sentido del tiempo y cambia el “pasado” por el “futuro”. Veremos más adelante que en este aspecto la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ tiene un comportamiento bien distinto al que exhibe la ecuación de ondas. ♠

Ejercicio 4.31. *

1. Hallar la solución de la ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ que toma los datos iniciales $u(x, 0) = \sin kx$, $u_t(x, 0) = 0$. Mostrar que $u(\pi/k, t) = 0$ para todo t .
2. Hallar la solución con datos $u(x, 0) = e^{-x^2}$, $u_t(x, 0) = xe^{-x^2}$. Graficar la solución en los instantes $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

La fórmula (4.58) no sólo permite calcular la solución de manera más o menos explícita. Además pone en evidencia unas cuantas propiedades interesantes de la ecuación. El primer efecto importante que uno puede apreciar es la *propiedad de propagación finita* asociada a la ecuación de ondas. Por ejemplo, si consideramos un punto x_0 en un instante $t_0 > 0$ encontramos que solamente el valor de los datos iniciales u_0 y v_0 en el intervalo

$$I = [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$$

afecta al valor $u(x_0, t_0)$. Recomendamos inspeccionar la figura 4.7 junto con la fórmula (4.58) para confirmar esta afirmación. La influencia de la parte del dato que cae fuera de I todavía no tuvo tiempo de alcanzar el punto x_0 . Recíprocamente, la influencia del valor de los datos en un punto x_0 sólo afecta a la región

$$\{(x, s); x_0 - cs \leq x \leq x_0 + cs, s \geq 0\}$$

del semiplano $s \geq 0$. Si nos concentramos en un punto fijo x sobre la cuerda, debemos esperar hasta un tiempo $t = |x - x_0|/c$ para notar en x el efecto de lo que estaba ocurriendo en x_0 en el instante $t = 0$.

Nos interesa resumir algunas de las consideraciones anteriores bajo la forma de las siguientes observaciones relativas a las regiones de influencia de los datos.

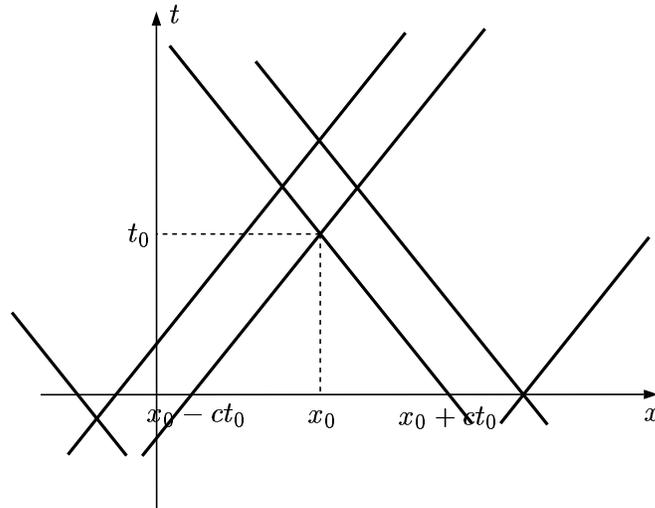


Figura 4.7: la influencia del dato inicial sobre (x_0, t_0)

Observación 4.3.5. REGIONES DE INFLUENCIA PARA LA ECUACIÓN DE ONDAS

1. En general, el valor de los datos iniciales en un intervalo $I = [a, b]$ afecta sólo a los puntos

$$\{(x, s); a - cs \leq x \leq b + cs, s \geq 0\}$$

del semiplano $s \geq 0$.

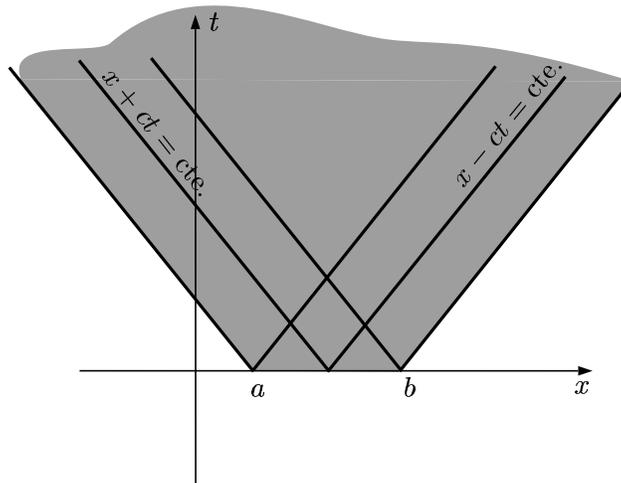


Figura 4.8: zona afectada por el valor de los datos iniciales en $[a, b]$

2. Si nos concentramos en la región de influencia del complemento de I notaremos que en la región

$$\{(x, s); a + cs \leq x \leq b - cs, 0 \leq s \leq (b - a)/2c\}$$

la solución u queda completamente determinada por el valor de los datos iniciales en I , ya que esta parte del semiplano $s \geq 0$ no recibe la influencia de la parte de los datos iniciales que está fuera de I .

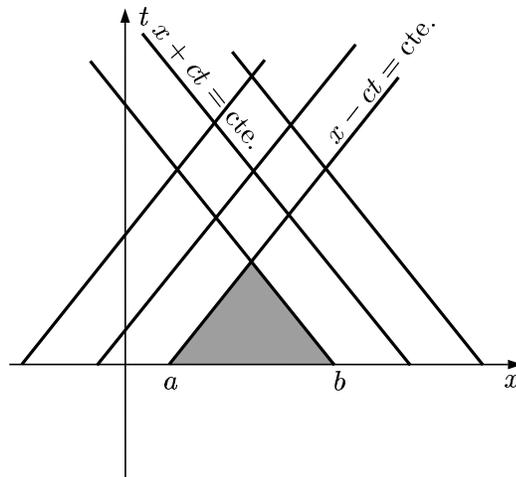


Figura 4.9: zona exclusivamente afectada por los datos en $[a, b]$

Para convencerse de que estas afirmaciones son correctas no hace falta más que analizar la fórmula (4.58) junto con las figuras 4.8 y 4.9. Una forma de interpretarlas es que la información viaja por la cuerda con velocidad c , o, lo que es equivalente, se mueve en el plano (x, t) a lo largo de las curvas características $x \pm ct = \text{cte.}$ Destaquemos además que c es la velocidad de las ondas de la forma $F(x \pm ct)$. ♠

Observación 4.3.6. PROPIEDAD DE SEMIGRUPO PARA LA ECUACIÓN DE ONDAS

Otra cosa que podemos verificar a partir de la expresión que obtuvimos para la solución es la propiedad de semigrupo de la ecuación. A grandes rasgos ésta dice que da lo mismo resolver la ecuación desde tiempo 0 hasta un tiempo $t + s$, que resolverla hasta t , y luego resolverla hasta s tomando como dato inicial el valor de la solución en t . En realidad esto es una consecuencia de la unicidad de la solución y de la invariancia de la ecuación bajo traslaciones en el tiempo, pero puede obtenerse de la fórmula para u .

Ejercicio 4.32. ** Sea $u(x, t)$ la solución de la ecuación de ondas con datos

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x).$$

Mostrar que $\bar{u}(x, s) = u(x, t + s)$ es la solución con datos

$$\bar{u}(x, 0) = u(x, t), \quad \bar{u}_t(x, 0) = u_t(x, t).$$

Hacerlo de dos maneras:

1. utilizando la unicidad de las soluciones;
2. a partir de la fórmula (4.58). ♠

Otra aplicación de la fórmula de d'Alambert es la resolución de la ecuación de ondas en una semirecta y en un intervalo. Éste es el contenido de nuestro próximo ejercicio.

Ejercicio 4.33. **

1. Mostrar que al resolver la ecuación de ondas para una cuerda infinita con datos iniciales u_0 y v_0 impares la solución satisface $u(0, t) = 0$, para todo $t \geq 0$.
2. Usar el resultado previo para resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \geq 0, \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Supondremos que los datos f y g satisfacen las condiciones de compatibilidad

$$u_0(0) = v_0(0) = 0.$$

¿Cómo puede interpretarse este resultado en términos de las características?
¿y en términos de una onda reflejada?

3. Supongamos ahora que, para algún $L > 0$, los datos u_0 y v_0 son funciones impares y periódicas de período $2L$ que satisfacen las condiciones

$$u_0(0) = u_0(L) = 0, \quad v_0(0) = v_0(L) = 0.$$

Mostrar que la solución u de la ecuación de ondas con estos datos satisface

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Comparar con el ejercicio 4.31, parte 1.

4. Utilizar la parte anterior para resolver el problema de la cuerda de longitud L con extremos fijos. Es decir, construir una solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, & x \in (0, L), t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (4.60)$$

Supondremos que los datos iniciales u_0 y v_0 son tales que se satisfacen las condiciones de compatibilidad

$$u_0(0) = u_0(L) = 0, \quad v_0(0) = v_0(L) = 0$$

con los datos de borde.

Ejercicio 4.34. ** Es importante notar que la simplificación básica que nos permitió resolver la ecuación de ondas provino de cambiar a un sistema de coordenadas, sugerido por las curvas características, en el que la ecuación se simplificaba. Los dos problemas que aparecen a continuación pueden resolverse utilizando este tipo de ideas.

1. Hallar la forma general de las soluciones de $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = -9(x + y)$.
2. Hallar la solución de la ecuación de ondas forzada

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t)$$

con datos $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$. Utilizar este resultado para hallar la solución de la ecuación con datos iniciales u_0 y v_0 cualesquiera.

Para cerrar esta sección presentamos un ejercicio que tiene como objetivo mostrar que la existencia de ondas no es un fenómeno exclusivo de sistemas modelados por la ecuación de ondas y que en otros contextos aparecen soluciones en forma de ondas viajeras, es decir soluciones del tipo

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

donde c es una constante real que debe ser interpretada como la velocidad de la onda.

Ejercicio 4.35.

1. * Hallar la forma general de las soluciones de $u_t + cu_x = 0$.
2. * Hallar soluciones no triviales, en forma de ondas viajeras para $u_t = u_x - u$. ¿Para qué valor de la velocidad c no existen tales soluciones? Comparar los resultados obtenidos con los del ejercicio 4.14 de la sección sobre ecuaciones de orden 1.
3. ** Hallar soluciones en forma de ondas viajeras, $u(x, t) = f(x - ct)$, para la ecuación de Burgers con viscosidad ν ,

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}. \tag{4.61}$$

Mostrar que existen tales soluciones con $f(-\infty) = 1$, $f(+\infty) = 0$ y estudiar su comportamiento al variar el parámetro ν . Calcular su límite cuando $\nu \rightarrow 0^7$.

⁷el capítulo 5 del texto [Lo] contiene el ejemplo que aparece en la parte 3 de este ejercicio (páginas 242–244) y más material interesante sobre propagación de ondas en medios continuos

Quienes hayan leído la sección 4 del capítulo de ecuaciones de orden 1 podrán verificar que la ecuación de Burgers sin viscosidad tiene una solución (débil), definida en $t \geq 0$ por las fórmulas

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{en } \{x \leq t/2\}, \\ 0 & \text{en } \{x > t/2\}. \end{cases}$$

Podemos escribir u como una onda viajera de la forma

$$u(x, t) = H(x - t/2), \quad H(s) = \begin{cases} 1, & s \leq 0, \\ 0, & s > 0. \end{cases}$$

Mostrar que u puede obtenerse como límite, cuando $\nu \rightarrow 0$, de soluciones de (4.61).
¿En qué sentido es cierta la convergencia?

4.4 Integrales de energía

En esta sección daremos otra prueba de que el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u_t(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad (4.62)$$

propuesto en (4.59), tiene una única solución. A diferencia de los argumentos que presentamos en la sección anterior, que dependían de una fórmula explícita para las soluciones de la ecuación de ondas, utilizaremos un conjunto de estimaciones que pueden deducirse directamente de la ecuación. Para obtener estas estimaciones no hace falta ningún conocimiento acerca de la forma de las soluciones. Ni siquiera es necesario tener información sobre su existencia. Por esa razón, constituyen una herramienta que puede generalizarse a un contexto mucho más amplio que los argumentos de la sección anterior. Este tipo de estimaciones son conocidas como *estimaciones a priori* y suelen ser herramientas muy útiles para la investigación de las ecuaciones en derivadas parciales.

4.4.1 Integrales de energía. Unicidad de soluciones

Consideremos un intervalo $[a, b]$ de la cuerda. Vamos a considerar la integral

$$E = \int_a^b (c^2 u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)) dx, \quad (4.63)$$

que es proporcional a la energía almacenada en el instante t en el intervalo $[a, b]$ de la cuerda (ver la justificación de esto en el apéndice, página xix).

Los argumentos que presentaremos a continuación están basados en la existencia de principios de conservación de la energía, que nos permitirán comparar la energía presente en un instante $t > 0$ con la energía que teníamos en el instante inicial $t = 0$. Comenzaremos por considerar un intervalo $[a, b]$ fijo. En la parte 2 de la observación 4.3.5 habíamos mostrado que la región

$$\{(x, t); a + ct \leq x \leq b - ct, 0 \leq t \leq (b - a)/2c\}$$

del plano (x, t) sólo está influida por el valor de los datos en el intervalo $[a, b]$. En particular, la energía contenida en el instante t en el intervalo $[a + ct, b - ct]$, que no es otra cosa que la integral

$$E(t) = \int_{a+ct}^{b-ct} (c^2 u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)) dx, \quad 0 < t < \frac{b-a}{2c}, \quad (4.64)$$

no puede superar a la energía $E(0)$. La razón es que la energía que calculamos en $E(t)$ sólo puede provenir de la que tenemos en el instante inicial en el

intervalo $[a, b]$, ya que la que estaba almacenada fuera no tiene tiempo de alcanzar el intervalo $[a+ct, b-ct]$ en el instante t . A continuación mostraremos que $E(t)$ es una función decreciente del tiempo en $(0, (b-a)/2c)$, lo que implica

$$E(t) \leq E(0), \quad t \in (0, (b-a)/2c).$$

Para probar la monotonía de $E(t)$ derivaremos la fórmula (4.64) respecto al tiempo y mostraremos que la derivada dE/dt es menor o igual que cero. Al calcular esta derivada aparece un término que resulta de derivar el integrando, y dos términos que provienen de la dependencia respecto a t de los extremos de integración. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= 2 \int_{a+ct}^{b-ct} (c^2 u_x(x, t) u_{xt}(x, t) + u_t(x, t) u_{tt}(x, t)) dx - \\ &\quad c(c^2 u_x^2(b-ct, t) + u_t^2(b-ct, t)) - c(c^2 u_x^2(a+ct, t) + u_t^2(a+ct, t)). \end{aligned}$$

Para manejar la integral en la expresión anterior recurrimos a la ecuación y concluimos que su integrando es

$$c^2 u_x u_{xt} + u_t u_{tt} = c^2 (u_x u_{xt} + u_t u_{xx}) = c^2 (u_t u_x)_x.$$

Como estamos integrando respecto a la variable x , una aplicación inmediata de la regla de Barrow nos dice que

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= 2c^2 (u_t(a+ct, t) u_x(a+ct, t)) + 2c^2 (u_t(b-ct, t) u_x(b-ct, t)) - \\ &\quad c(c^2 u_x^2(b-ct, t) + u_t^2(b-ct, t)) - c(c^2 u_x^2(a+ct, t) + u_t^2(a+ct, t)) \end{aligned}$$

Agrupando en forma conveniente los términos del miembro de la derecha de esta última igualdad vemos que éste puede escribirse como

$$(-c) \left[(c u_x(b-ct, t) - u_t(b-ct, t))^2 + (c u_x(a+ct, t) - u_t(a+ct, t))^2 \right],$$

que es la suma de dos cuadrados multiplicada por un coeficiente negativo. Esta observación completa la prueba de que $dE/dt \leq 0$.

Vamos a resumir la discusión que acabamos de hacer en nuestra siguiente proposición.

Proposición 4.3. *Consideremos una solución de clase C^2 de la ecuación de ondas y fijemos dos números reales a y b , con $a < b$. Entonces la desigualdad*

$$\int_{a+ct}^{b-ct} (c^2 u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)) dx \leq \int_a^b (c^2 u_x^2(x, 0) + u_t^2(x, 0)) dx \quad (4.65)$$

se satisface para $0 < t < (b-a)/(2c)$.

Ejercicio 4.36. * Mostrar que para todo $t > 0$ se satisface la desigualdad

$$\int_{a-ct}^{b+ct} (c^2 u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)) dx \geq \int_a^b (c^2 u_x^2(x, 0) + u_t^2(x, 0)) dx, \quad (4.66)$$

Estos dos resultados tienen como corolario inmediato que la energía *total* de la cuerda permanece constante a lo largo de la evolución.

Corolario 4.4. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Supongamos que u es una solución de la ecuación de ondas y para cada instante t introduzcamos la energía total almacenada en la cuerda

$$\mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (c^2 u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)) dx. \quad (4.67)$$

Entonces $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$ para todo $t > 0$.

PRUEBA: Notemos que $\mathcal{E}(t)$ puede ser finita o infinita, pero está correctamente definida porque el integrando en (4.67) es no negativo. Recordemos además que si f es una función no negativa se satisface

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \downarrow -\infty, b \uparrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Si usamos la desigualdad (4.66) en un intervalo $[a, b]$ y hacemos $a \uparrow -\infty$, $b \uparrow +\infty$ obtenemos

$$\mathcal{E}(t) \geq \mathcal{E}(0), \quad t > 0. \quad (4.68)$$

Esto es suficiente para mostrar que $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$ si $E(0) = +\infty$. Para el caso $E(0) < \infty$ usamos la estimación (4.65) y hacemos el mismo argumento. Notar que (4.65) tiene validez para t en el intervalo $(0, (b-a)/(2c))$. Al hacer $a \downarrow -\infty$ y $b \uparrow +\infty$ el extremo de la derecha de este intervalo tiende a infinito. Por lo tanto tenemos

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0), \quad t > 0. \quad (4.69)$$

Esta última desigualdad completa la prueba del corolario. \diamond

Este resultado tiene como consecuencia inmediata la unicidad de soluciones para la ecuación de la cuerda con dato inicial nulo.

Corolario 4.5. *Sea H el semiplano $\{(x, t); t \geq 0\}$ del plano (x, t) . Entonces la única solución de la ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en H , con datos iniciales*

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

es la solución nula $u(x, t) \equiv 0$.

PRUEBA: Si los datos iniciales son nulos entonces $\mathcal{E}(0) = 0$. El corolario 4.4 asegura que $\mathcal{E}(t)$ es idénticamente nula en $t > 0$. La definición de $\mathcal{E}(t)$ implica que u_x y u_t son nulas en todo H , por lo tanto u es constante en H . Como u se anula cuando $t = 0$ el valor constante que toma esta función es 0. \diamond

Ahora estamos en condiciones de dar una prueba de la unicidad de soluciones a partir de nuestro último corolario. El argumento es muy sencillo. Si tenemos dos soluciones u_1 y u_2 tales que

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0), \quad u_{1,t}(x, 0) = u_{2,t}(x, 0), \quad x \in \mathbf{R},$$

entonces la diferencia $u = u_1 - u_2$ tiene datos iniciales

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Por lo tanto $u \equiv 0$ en H y $u_1 \equiv u_2$ en H . En resumen, hemos demostrado el siguiente corolario de los resultados acerca de la conservación de la energía en un sistema gobernado por la ecuación de ondas:

Corolario 4.6. *La solución de la ecuación de ondas con datos iniciales*

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

es única.

Observación 4.4.1. El procedimiento de reducir el problema de unicidad a la unicidad de la solución cuando el dato es nulo es un procedimiento general que puede usarse para cualquier ecuación lineal, ya que sólo depende del principio de superposición de soluciones. También utilizaremos esta idea en el próximo capítulo. \spadesuit

Ejercicio 4.37. * Sea u una solución del problema presentado en la parte 4 del ejercicio 4.33. Mostrar que la integral

$$I(t) = \int_0^L (c^2 u_x^2(x, t) + u_t^2(x, t)) dx,$$

que representa la energía de la cuerda vibrante, no depende de t . Deducir de este hecho un resultado de unicidad.

Ejercicio 4.38. ** Extender los resultados de los corolarios 4.4 y 4.5 para $t < 0$.

4.5 La ecuación del calor en un intervalo

En esta sección nos ocuparemos de estudiar las soluciones de la ecuación

$$u_t = u_{xx},$$

conocida como *ecuación del calor*. Esta ecuación es un modelo para la evolución de la temperatura debida al fenómeno de conducción del calor. La variable x representa la posición en el espacio, t el tiempo y $u(x, t)$ la temperatura del medio en el punto x y el instante t . Cuando la distribución de temperaturas es esencialmente unidimensional (por ejemplo, cuando puede despreciarse la variación de temperatura en todas las direcciones menos en una, o en una barra delgada en la que algunas dimensiones del problema pueden no tomarse en cuenta) la variable x es un número real. En lo que sigue nos limitaremos a considerar este caso. Los detalles acerca de una derivación de la ecuación del calor pueden verse en el apéndice, sección B.2, página xxiii. Para investigar el comportamiento de las soluciones de esta ecuación utilizaremos el método de *separación de variables*. Este método nos llevará a introducir las series trigonométricas, o *series de Fourier*, que serán el tema central del capítulo 5.

4.5.1 Problemas de valores iniciales y de contorno para la ecuación del calor en un intervalo

Nos ocuparemos ahora de la resolución del siguiente problema de valores iniciales y de contorno, al que llamaremos *problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor*: hallar una función continua

$$u : [0, L] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R},$$

que sea de clase C^2 en el interior $(0, L) \times (0, +\infty)$ de su dominio, y que satisfaga

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \in [0, \infty). \end{cases} \quad (4.70)$$

Supondremos que u_0 es continua y que se satisface la condición de compatibilidad

$$u_0(0) = u_0(L) = 0$$

entre los datos iniciales y de contorno. Más adelante incluiremos alguna generalización para incluir datos de contorno no triviales.

Para tener una notación un poco más cómoda llamaremos Ω al conjunto abierto

$$(0, L) \times (0, +\infty).$$

Su clausura es

$$\bar{\Omega} = [0, L] \times [0, +\infty)$$

y su frontera es

$$\partial\Omega = \{(0, t); t \geq 0\} \cup \{(L, t); t \geq 0\} \cup \{(x, 0); 0 \leq x \leq L\}.$$

Observación 4.5.1. REGULARIDAD, CONDICIONES INICIALES

Especificar la regularidad que debe tener la función u forma parte del planteamiento del problema.

En el caso de la ecuación del calor es necesario que existan las derivadas parciales u_t y u_{xx} en Ω para que la igualdad $u_t = u_{xx}$ tenga sentido. Algo análogo ocurre para la ecuación de ondas, que contiene las derivadas u_{tt} y u_{xx} en su formulación. Pero también se puede dar a estas igualdades un sentido débil que no requiere tanta regularidad. Sobre esta segunda posibilidad ver la sección dedicada a las soluciones débiles de la ecuación de Burgers, sección 4.1.4, página 292, o la noción de derivada débil que se introduce en la definición 5.1, página 375.

La exigencia de continuidad de u hasta el tiempo $t = 0$ es una manera de vincular la condición inicial con el comportamiento posterior de la solución. Si nos limitáramos a pedir $u(x, 0) = u_0(x)$, sin imponer la continuidad de u , entonces u podría tomar en $t > 0$ valores que no tienen nada que ver con el dato inicial. Sin embargo, también es posible considerar soluciones menos regulares e imponer de una manera diferente que se satisfaga la condición inicial. Esto da lugar a un problema diferente que también tiene sentido considerar. Ver, al respecto, el ejercicio 5.23, página 387.

Por último, digamos que aunque hace falta exigir cierta regularidad para poder dar una noción de solución que tenga sentido, lo más deseable es colocar los menores requisitos de regularidad posibles al formular el problema, pero demostrar luego que las soluciones son aún más regulares. Por ejemplo, veremos que las soluciones de la ecuación del calor son en realidad de clase C^∞ en Ω . Pero para otras ecuaciones, entre ellas la de ondas, existen límites para la regularidad que pueden alcanzar las soluciones y puede ocurrir que no haya más regularidad que la que impone la noción de solución que se esté manejando. O incluso que haya que formular el problema de alguna forma que exija menos regularidad para poder asegurar la existencia de soluciones. ♣

En el apéndice B.2, página xxiii, se muestra como surge el problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor al considerar la evolución de la temperatura de una barra delgada de longitud L , aislada del exterior salvo en los extremos que se mantienen a temperatura constante e igual a 0. Observemos que la frontera del conjunto Ω tiene una parte lateral, que corresponde a los extremos de la barra en $x = 0$ y $x = L$, sobre los que hemos fijado la condición $u \equiv 0$, y la parte contenida en $\{t = 0\}$, en la que prescribimos la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ que representa el perfil inicial de temperaturas en la barra. La elección de la frontera de Ω para fijar los datos de contorno, y del tipo de datos escogidos, surge entonces de considerar la situación física

que pretendemos modelar. Veamos ahora que es lo que nos dice lo que hemos aprendido sobre las ecuaciones de segundo orden. En primer lugar, no es difícil verificar que las curvas características nos son de muy poca ayuda en esta situación. En realidad, el problema que hemos planteado es característico, porque hemos fijado el dato inicial u_0 sobre un intervalo contenido en $\{t = 0\}$, y las curvas $t = \text{cte.}$ son características para la ecuación del calor. En segundo lugar, a pesar de que se trata de una ecuación de orden 2, sólo hemos dado datos para u sobre el contorno, sin hacer mención a los valores de u_x . Sin embargo, la interpretación física de lo que estamos haciendo sugiere que el problema planteado tiene sentido. Veremos además que este problema tiene existencia y unicidad de soluciones, por lo que quedaría sobredeterminado si pretendiéramos fijar los valores de u_x en los extremos de la barra, además de los de u . Por lo tanto, tendremos que buscar otros métodos para estudiarlo, que serán necesariamente diferentes de los que usamos para resolver la ecuación de ondas.

4.5.2 El método de separación de variables para la ecuación del calor en una barra

Comenzaremos por buscar soluciones particulares que podamos calcular más o menos directamente. Veremos que al hacerlo el problema se reduce a resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. A pesar de que buscar algunas soluciones particulares parece algo muy modesto cuando queremos resolver un problema general veremos que este enfoque es particularmente fructífero en este caso. Vale la pena mencionar además que en general es útil disponer de soluciones particulares por varias razones:

1. siempre es conveniente disponer de ejemplos para ilustrar una teoría.
2. En muchos casos es posible conjeturar propiedades generales de las soluciones a partir de algunos ejemplos bien escogidos.
3. En muchos procesos de difusión las soluciones explícitas (o casi explícitas) describen el comportamiento de clases muy grandes de soluciones, en particular comportamientos asintóticos, comportamiento cerca de singularidades, etc.
4. Las ecuaciones parabólicas y elípticas tienen propiedades de comparación que pueden explotarse recurriendo a soluciones explícitas conocidas (un ejemplo de estos principios de comparación aparecerá en la sección 4.6, dedicada al principio del máximo para la ecuación del calor).
5. Si estamos interesados en la resolución numérica de las ecuaciones, los ejemplos explícitos pueden utilizarse para estudiar la eficacia de los algoritmos.

Dado que la mayor dificultad viene de que aparecen las dos variables x y t en la ecuación comenzaremos por intentar eludir la *separando las variables*, es decir, buscando soluciones de la forma

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, \infty). \quad (4.71)$$

Al calcular las derivadas que aparecen en la ecuación del calor obtenemos

$$u_t(x, t) = X(x)T'(t), \quad u_{xx}(x, t) = X''(x)T(t), \quad (4.72)$$

donde las funciones X y T están derivadas respecto a x y t respectivamente. Al sustituir en la ecuación concluimos que debe verificarse

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty). \quad (4.73)$$

Dividiendo entre $u = XT$ obtenemos

$$T'(t)/T(t) = X''(x)/X(x), \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, \infty). \quad (4.74)$$

Como el término de la derecha en (4.74) sólo depende de x y el de la izquierda de t , y ambas variables son independientes, entonces ambos lados de la igualdad tienen que ser iguales a una constante λ . En resumen, para obtener soluciones no triviales de la forma (4.71) buscaremos funciones $X(x)$ y $T(t)$ que satisfagan

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0, L), \quad (4.75)$$

$$T'(t) = \lambda T(t), \quad t \in (0, +\infty). \quad (4.76)$$

Al resolver (4.75) obtenemos

$$X(x) = \begin{cases} ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, & \text{si } \lambda > 0, \\ a + bx, & \text{si } \lambda = 0, \\ a \cos \sqrt{-\lambda}x + b \sin \sqrt{-\lambda}x, & \text{si } \lambda < 0, \end{cases} \quad (4.77)$$

donde a y b son dos constantes arbitrarias que habrá que determinar a partir de condiciones adicionales sobre X . Los cálculos para T son un poquito más fáciles todavía y conducen a

$$T(t) = ae^{\lambda t}, \quad (4.78)$$

con a una constante arbitraria. Pasemos ahora a imponer las condiciones de contorno sobre u . La condición

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

implica

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Es evidente que si permitimos que $X(0) \neq 0$ o $X(L) \neq 0$ entonces la función T deberá anularse idénticamente, lo que conduce a la solución trivial $u \equiv 0$. Obviamente, ésta es una solución del problema de Cauchy con dato nulo, pero no nos da ninguna información interesante. Así que ya tenemos

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (4.79)$$

como condiciones de borde para X . Al intentar imponerlas en (4.78) encontramos que la única manera de obtener soluciones distintas de la trivial es tomar soluciones sinusoidales y

$$\lambda = -(k\pi/L)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.80)$$

porque todas las demás posibilidades conducen necesariamente a $a = b = 0$ y, por consiguiente, a la solución trivial $u \equiv 0$. Al usar estos valores de λ en (4.78) y escribir $u(x, t) = X(x)T(t)$ obtenemos las soluciones

$$u(x, t) = b e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad (4.81)$$

donde b es una constante arbitraria y k un número natural cualquiera. Por este procedimiento hemos construido una familia de soluciones explícitas (notemos que para cada $k \in \mathbf{N}$ hay soluciones de este tipo) pero está claro que no tenemos casi libertad para elegir el dato inicial u_0 , ya que la fórmula (4.81) implica

$$u_0(x) = u(x, 0) = b \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \quad (4.82)$$

Ejercicio 4.39. * Verificar que la función (4.81) es una solución del problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor con dato inicial (4.82) y dato de contorno nulo.

En la figura 4.10 representamos la solución especial (4.81) de la ecuación del calor que se obtiene escogiendo $L = \pi$, $k = 1$ y $b = 1$.

Ejercicio 4.40. * Mostrar que al buscar soluciones con variables separadas para el problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (4.83)$$

se obtiene la siguiente familia:

$$u(x, t) = a e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad (4.84)$$

donde $k = 0, 1, \dots$ y a es una constante cualquiera. Mostrar que éstas toman como dato inicial

$$u_0(x) = u(x, 0) = a \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \quad (4.85)$$

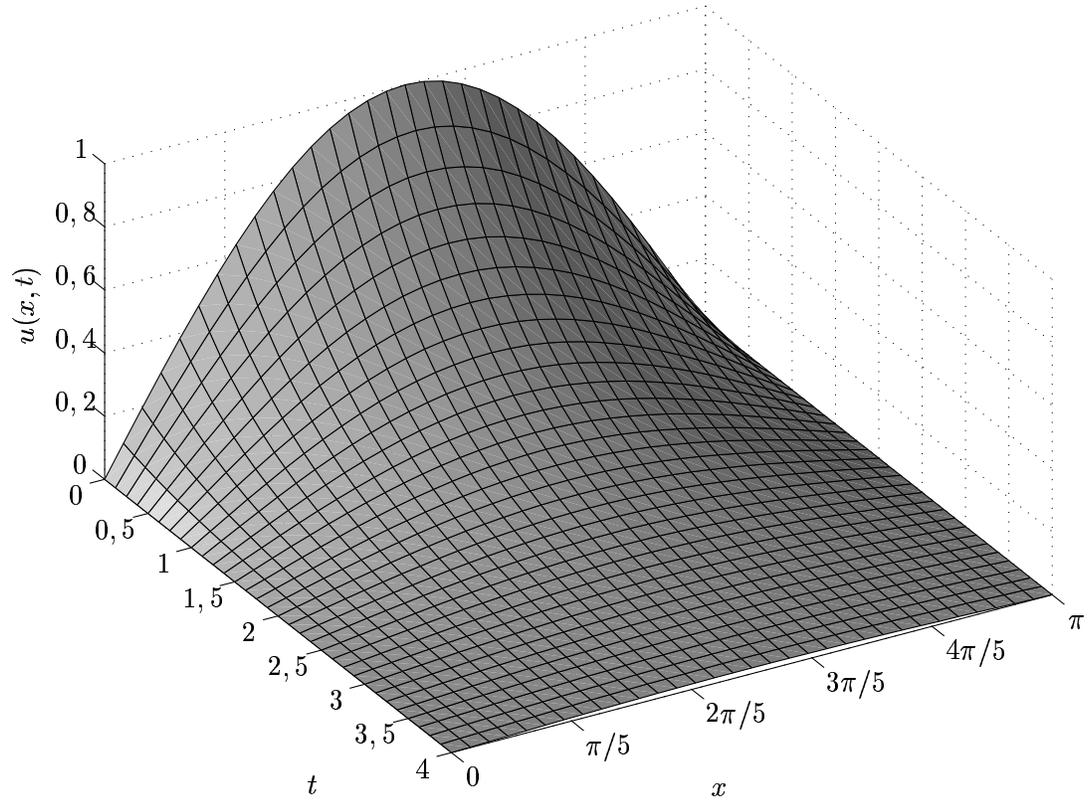


Figura 4.10: la solución con dato inicial $u(x, 0) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$

El problema de contorno para la ecuación del calor que aparece en el ejercicio anterior, en el que se fija el valor de u_x en vez del de u sobre la frontera lateral, es conocido como *Problema de Cauchy-Neumann* (ver la página xxv en la sección B.2 del apéndice).

Observación 4.5.2. Las soluciones (4.81) decaen exponencialmente con el tiempo. Esta es una información interesante sobre el comportamiento de las soluciones.

Ejercicio 4.41. * ¿Cómo decaen las soluciones (4.84)? Discutir según los valores de los parámetros k y L . ♠

Hasta ahora sólo hemos sido capaces de resolver el problema de Cauchy-Dirichlet para los datos iniciales (4.82) que tienen una forma muy particular. Sin embargo, como el problema es lineal podemos recurrir al principio de superposición que enunciamos en la observación 4.3.3 para incluir como datos las combinaciones lineales de funciones de la forma (4.82). En la proposición que aparece a continuación presentamos una nueva aplicación de este principio,

esta vez tomando en cuenta los datos iniciales y de contorno (comparar con la proposición 4.2).

Proposición 4.7. Sean u y \bar{u} dos soluciones del problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor en Ω , con datos iniciales u_0 y \bar{u}_0 respectivamente, y datos de contorno Θ_i y $\bar{\Theta}_i$, $i = 1, 2$. Entonces $w = u + \bar{u}$ es una solución de la ecuación del calor en Ω , con dato inicial

$$w(x, 0) = u_0(x) + \bar{u}_0(x), \quad x \in [0, L],$$

y datos de contorno

$$\begin{aligned} w(0, t) &= \Theta_1(t) + \bar{\Theta}_1(t), \quad t \geq 0, \\ w(L, t) &= \Theta_2(t) + \bar{\Theta}_2(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

PRUEBA. Una aplicación directa de la proposición 4.2 muestra que w satisface la ecuación del calor $w_t = w_{xx}$ en Ω . Para las condiciones inicial y de contorno tenemos

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= u(x, 0) + \bar{u}(x, 0) = u_0(x) + \bar{u}_0(x), \quad x \in [0, L], \\ w(0, t) &= u(0, t) + \bar{u}(0, t) = \Theta_1(t) + \bar{\Theta}_1(t), \quad t \geq 0, \\ w(L, t) &= u(L, t) + \bar{u}(L, t) = \Theta_2(t) + \bar{\Theta}_2(t), \quad t \geq 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

Ejercicio 4.42. * Enunciar y probar un principio de superposición de soluciones para el problema de Cauchy-Neumann.

Es claro que podemos extender el cálculo de las soluciones del problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor para datos iniciales que sean una combinación lineal de funciones sinusoidales, y dato de contorno nulo, utilizando el principio de superposición que acabamos de probar. En efecto, si

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (4.86)$$

entonces el principio de superposición asegura que

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n b_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (4.87)$$

es una solución del problema con dato inicial (4.86).

Observación 4.5.3. En realidad la fórmula (4.87) es *la solución* del problema, pero para poder hacer esta afirmación necesitamos probar un resultado de unicidad, que enunciaremos y demostraremos recién en la sección 4.6. ♠

Ejercicio 4.43. * Hallar una solución del problema de Cauchy-Neumann con dato inicial

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (4.88)$$

y dato de contorno nulo.

Todavía nos falta bastante para tener una solución completa de nuestro problema. Hasta ahora sólo podemos resolverlo para datos de la forma (4.86), que constituye una clase bastante pobre. Por ejemplo, la función

$$u_0(x) = x(L - x), \quad x \in [0, L],$$

no puede expresarse de esta manera.

Ejercicio 4.44. ** Mostrar que $u_0(x) = x(L - x)$ no puede escribirse como una combinación lineal finita de senos en el intervalo $[0, L]$ (en el capítulo 5 presentaremos un conjunto de resultados que permitirán resolver este ejercicio con poco esfuerzo, pero puede ser útil intentar hacerlo antes de seguir avanzando).

Para usar este método en situaciones más generales vamos a utilizar *series de senos o de cosenos* como datos iniciales para la ecuación del calor, en vez de las sumas finitas (4.86) o (4.88). Pasemos ahora a considerar datos iniciales en forma de series trigonométricas para la ecuación del calor. Vamos a comenzar por tratar el problema formalmente, sin detenernos a considerar las cuestiones de convergencia de las series que aparecen en las fórmulas para los datos iniciales $u_0(x)$ y para las soluciones $u(x, t)$. Si el dato inicial para el problema de Cauchy-Dirichlet es

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L], \quad (4.89)$$

la solución del problema debería ser

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0. \quad (4.90)$$

De la misma manera, al usar este procedimiento para tratar el problema de Cauchy-Neumann con dato lateral nulo obtenemos, formalmente, la solución

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-\frac{k\pi^2}{L}t} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0. \quad (4.91)$$

para datos iniciales de la forma

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L] \quad (4.92)$$

Ejercicio 4.45. * Derivar formalmente las series (4.90) y (4.91) para verificar que satisfacen la ecuación del calor en Ω . Mostrar también, razonando formalmente, que satisfacen las condiciones de contorno de los problemas de Cauchy-Dirichlet y Neumann-Dirichlet, con datos iniciales (4.89) y (4.92) respectivamente.

Aunque hemos encontrado las fórmulas (4.90) y (4.91) para las soluciones de los problemas de Cauchy-Dirichlet y Neumann-Dirichlet notemos que este intento de resolver la ecuación del calor utilizando separación de variables y el “principio de superposición para sumas infinitas” abre la puerta a un nuevo e interesante conjunto de problemas, algunos de los cuales se recogen en la próxima observación.

Observación 4.5.4. Notemos que hemos conseguido, a cambio de nuestra pregunta original referente a una ecuación en derivadas parciales, un montón de preguntas nuevas (aparentemente tan complicadas, o aún más, como las que ya teníamos):

1. ¿Qué significan las series en (4.90) y (4.91)? Recordemos que una sucesión de funciones, en este caso una serie, puede converger a algo o no hacerlo. Más aún, puede converger en algún sentido (convergencia puntual) y no en otro (convergencia uniforme). Ya nos ocuparemos además de utilizar algún otro sentido de convergencia (como la convergencia respecto a la norma $\|\cdot\|_2$) para poder enriquecer nuestra visión del mundo.
2. Nuestra intención era resolver la ecuación del calor con un dato inicial u_0 , pero ¿cuáles son las funciones u_0 que pueden escribirse como serie de senos?, ¿cómo se obtienen los coeficientes a_k de la serie a partir de u_0 ?
3. Si los a_k , o los b_k , son conocidos, ¿podemos calcular u_0 o determinar algunas de sus propiedades usando (4.89) o (4.92)?
4. ¿Qué propiedades de la función $u(x, t)$ pueden deducirse a partir de la serie (4.90) o (4.91)? ♠

Vale la pena dedicar un esfuerzo sistemático a contestar todas estas preguntas, porque las series de senos y cosenos, también conocidas como *series trigonométricas* o *series de Fourier* tienen gran variedad de aplicaciones y constituyen una parte del amplio mundo del análisis armónico. Por esta razón dedicaremos el capítulo 5 a este tema. De momento haremos algo más limitado. Nos contentaremos con resolver la ecuación del calor para una clase de datos (4.89) y (4.92) para los que podremos contestar las preguntas que acabamos de plantear en los numerales 1 y 4 de la observación 4.5.4. Pospondremos la consideración de datos más generales hasta desarrollar la teoría de las series trigonométricas en el capítulo 5.

4.5.3 Datos iniciales con coeficientes sumables

En esta sección consideraremos datos iniciales en forma de una serie de senos como (4.89) para el problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor, suponiendo que la serie formada por los coeficientes b_k es absolutamente

convergente. Es decir, introduciremos la hipótesis de sumabilidad

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty. \quad (4.93)$$

Esta hipótesis es bastante natural, porque el criterio de la mayorante de Weierstrass (teorema 2.2, página 179) permite asegurar que cuando se satisface (4.93) la serie (4.89) converge uniformemente y u_0 es una función continua de x . Además, u_0 es impar y periódica con período $2L$ (ver el ejercicio 2.16, página 186).

Vale la pena mencionar que la novedad en (4.90) respecto a (4.89) son las exponenciales que multiplican a los coeficientes b_k y que dependen de t . Estos factores son todos menores que 1, decaen muy rápido a medida que t crece y para cualquier valor de t positivo y fijo decrecen más que exponencialmente cuando $k \rightarrow \infty$. Todas estas propiedades indican que las exponenciales “ayudan” a la convergencia de la serie. Veremos que, cuando la hipótesis de sumabilidad (4.93) se satisface, este hecho implica que la fórmula (4.90) define una solución de la ecuación del calor con dato inicial u_0 dado por (4.89). Ese es el contenido de nuestra próxima proposición.

Proposición 4.8. *Consideremos una sucesión de números reales*

$$b_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

que satisface la condición (4.93), y consideremos la función u_0 definida sobre el intervalo $[0, L]$ por la fórmula

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L].$$

Entonces

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (4.94)$$

es una solución del problema de de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor en $\Omega = (0, L) \times (0, \infty)$ con dato inicial u_0 .

PRUEBA: La prueba consiste esencialmente en utilizar repetidas veces el criterio de la mayorante de Weierstrass, y los resultados sobre convergencia uniforme y continuidad y convergencia uniforme y derivación que vimos en el capítulo 2.

En primer lugar, observemos que el término general de la serie (4.94) puede mayorarse haciendo

$$\left| b_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right| \leq |b_k|, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}. \quad (4.95)$$

Como cada término de la serie es una función continua de x y t y la serie $\sum_k |b_k|$ converge, el criterio de la mayorante de Weierstrass y el teorema de convergencia uniforme y continuidad (2.3) implican que $u(x, t)$ es una función continua en todo Ω . En particular, como la convergencia uniforme de la serie implica su convergencia puntual, podemos evaluar $u(x, t)$ en $t = 0$ y obtenemos precisamente la serie (4.89) que define al dato inicial u_0 . También podemos usar la convergencia puntual de la serie para evaluar $u(x, t)$ en los puntos (x, t) con $x = 0$ y $x = L$. Resulta evidente entonces que se satisface

$$u(L, t) = u(0, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Para completar la prueba de la proposición tenemos que mostrar que se satisface la ecuación del calor en Ω . Para ello calcularemos las derivadas parciales u_t y u_{xx} de u . Si nos limitamos a calcular formalmente, sin prestar atención a las cuestiones de convergencia, las fórmulas que obtenemos indican que la ecuación del calor se satisface (éste es el contenido del ejercicio 4.45). Vamos a mostrar ahora que u_t y u_{xx} pueden calcularse derivando la serie (4.94) término a término.

La derivada parcial respecto a t del término general de la serie (4.94) es

$$-b_k \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right). \quad (4.96)$$

Nuestro objetivo es mostrar que la serie de término general (4.96) converge uniformemente para poder aplicar los resultados sobre convergencia uniforme y derivación que encontramos en la sección 2.2. En particular, utilizaremos los resultados del ejercicio 2.25. Si buscamos una estimación de (4.96) que valga en todo Ω debemos contentarnos con acotar por

$$\left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 |b_k|.$$

Esta estimación no es muy útil para nuestro propósito, porque de la sumabilidad de la serie de los $|b_k|$ no podemos inferir $\sum k^2 |b_k| < \infty$. Para subsanar este problema notemos que el cálculo de las derivadas u_t y u_{xx} es un problema local. Por lo tanto, una vez fijado un punto $(x_0, t_0) \in \Omega$, como $t_0 > 0$, podemos trabajar en un entorno de (x_0, t_0) que esté lejos de $\{t = 0\}$. Por ejemplo, si elegimos un número δ positivo pero menor que t_0 , podemos intentar hacer el cálculo de las derivadas de u en el abierto $t > \delta$. En este subconjunto de Ω estimamos (4.96) haciendo

$$\left| b_k \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right| \leq |b_k| \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \delta}, \quad (4.97)$$

que es válida siempre que $t \geq \delta$. Como la serie $\sum |b_k|$ es convergente la sucesión b_k tiende a 0. Esto implica que está acotada y existe entonces un número positivo B , tal que

$$|b_k| \leq B, \quad k = 1, 2, \dots$$

En resumen, podemos estimar (4.96) en $(0, L) \times (\delta, \infty)$ por la sucesión numérica

$$B \left(\frac{\pi k}{L} \right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \delta}. \quad (4.98)$$

El rápido decaimiento de las exponenciales asegura que la serie de término general (4.98) es convergente, por lo tanto la serie de funciones cuyo término general es (4.96) converge uniformemente en $[0, L] \times [\delta, +\infty)$. El teorema de convergencia uniforme y derivación, en la versión para funciones de varias variables que aparece en el ejercicio 2.25 de la sección 2.2, asegura entonces que

$$u_t(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right), \quad (x, t) \in (0, L) \times (\delta, \infty). \quad (4.99)$$

Como δ es un número positivo arbitrario —en particular podemos escogerlo tan próximo a 0 como queramos— la igualdad (4.99) es cierta en todo Ω .

Con los mismos argumentos es posible mostrar que

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi}{L} e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right), & (x, t) \in \Omega, \\ u_{xx}(x, t) &= - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right), & (x, t) \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.100)$$

La segunda ecuación en (4.100), junto con la expresión (4.99) para u_t , muestran que la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ se satisface en todo Ω , con lo que hemos completado la prueba de la proposición. \diamond

Ejercicio 4.46. * Calcular la solución de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ en la región $(0, L) \times (0, +\infty)$ del plano (x, t) , con condiciones de contorno nulas y datos iniciales:

1. $u_0(x) = \sin(\pi x/L)$.
2. $u_0(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, L/2], \\ L - x, & \text{si } x \in [L/2, L], \end{cases}$ (ver la figura 4.11 en la página 333).

Sugerencia: la función u_0 admite el desarrollo en serie de senos

$$u_0(x) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+1)^2} \sin \left(\frac{(2j+1)\pi}{L} x \right), \quad x \in [0, L].$$

3. Tomar $L = 1$ y considerar

$$u_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-j} \sin(j\pi x), \quad x \in [0, 1].$$

Ejercicio 4.47. * Adaptar todo lo que hemos hecho para tratar el problema de Cauchy-Dirichlet y desarrollar un método para estudiar la ecuación del calor en un intervalo $[0, L]$ con condiciones de borde $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$ (problema de Cauchy-Neumann). Hallar condiciones sobre el dato u_0 que nos permitan resolver el problema con este método.

Observación 4.5.5. REGULARIDAD DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DEL CALOR.

El procedimiento que usamos en la demostración de la proposición 4.8 para calcular las derivadas u_t , u_x y u_{xx} puede iterarse para calcular derivadas de cualquier orden de u en la región Ω del plano (x, t) . En efecto, cada vez que calculamos derivadas respecto a t o a x aparecen factores como k^2 o k en el término general de la serie (4.94) y siempre podemos controlarlos en conjuntos de la forma $t \geq \delta$, utilizando el rápido decaimiento de las exponenciales $e^{-(k\pi/L)^2 t}$ cuando $k \rightarrow \infty$. Esto muestra que las soluciones del problema de Cauchy-Dirichlet (o del problema de Cauchy-Neumann, ver el ejercicio 4.47) para la ecuación del calor que obtuvimos por el método de separación de variables son funciones de clase C^∞ en Ω , incluso si el dato inicial es mucho menos regular. Mostraremos luego que la solución del problema de Cauchy-Dirichlet es única una vez que se ha fijado el dato inicial u_0 , por lo que podemos asegurar que las soluciones de este problema son de clase C^∞ en Ω , al menos para la clase de datos iniciales con la que estamos trabajando (en realidad el resultado es cierto para cualquier dato u_0). Éste es un efecto regularizante notable de la ecuación del calor. Tal cosa no ocurre para la ecuación de ondas. Por ejemplo, una solución en forma de onda viajera $f(x + ct)$ se desplaza por el espacio sin deformarse. En particular, no se va “suavizando” a medida que el tiempo avanza. ♠

Observación 4.5.6. IRREVERSIBILIDAD DEL FLUJO DE CALOR.

El efecto regularizante que tiene la ecuación del calor está asociado con que el problema de resolver la ecuación del calor retrocediendo en el tiempo en general no tiene solución. Por ejemplo, si $u_0(x)$ es una función continua cualquiera en general es falso que pueda obtenerse como una solución de la ecuación del calor, con dato fijado en un tiempo $t_0 < 0$, en el instante $t = 0$. Si u_0 no es de clase C^∞ esto es una consecuencia directa de la observación anterior. Este comportamiento es bien distinto del que tiene la ecuación de ondas, que era invariante bajo la inversión de tiempos $t \mapsto -t$ y para la cual podíamos determinar todo el “pasado” de cualquier configuración. ♠

Notemos que la fórmula (4.94) no sólo nos ha servido para probar un resultado de existencia de soluciones del problema de Cauchy-Dirichlet (4.70), sino que además nos permitió encontrar una interesante propiedad de regularidad de las soluciones. Veremos ahora que puede también deducirse de esa expresión el decaimiento de las soluciones cuando $t \rightarrow \infty$.

Observación 4.5.7. DECAIMIENTO DE LAS SOLUCIONES.

Probaremos que la solución $u(x, t)$ que hemos calculado para la ecuación del calor decae exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$. Para ello todo lo que precisamos son las siguientes estimaciones sencillas y la sumabilidad del valor absoluto de los coeficientes b_k :

$$|u(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} = e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|. \quad (4.101)$$

Ejercicio 4.48. * Estudiar el comportamiento de las soluciones del problema de Cauchy-Neumann con dato lateral $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$, cuando $t \rightarrow \infty$. ♠

Ejercicio 4.49. **

1. Un caso particular de soluciones de la ecuación del calor son las que corresponden a situaciones en las que el perfil de temperaturas no se modifica con el tiempo, lo que equivale a decir que $u(x, t)$ no depende de t y $u_t = 0$, a las que llamaremos *soluciones estacionarias* del problema. Dados dos números reales cualesquiera A y B , hallar una solución estacionaria

$$u(x, t) = u_1(x)$$

de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ en Ω , que satisfaga las condiciones

$$u(0, t) = A, \quad u(L, t) = B.$$

2. Hallar la solución $u(x, t)$ de la ecuación del calor en $(0, 1) \times (0, +\infty)$, con condiciones de borde

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1,$$

y dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ 1, & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Sugerencia: utilizar el principio de superposición de soluciones.

3. Hallar una estimación de $|u(x, t) - u_1(x)|$ y mostrar que $u(x, t) \rightarrow u_1(x)$ cuando el tiempo t tiende a infinito.

En la figura 4.11 representamos la solución del problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor con el dato inicial “triangular” que aparece en la parte 2 del ejercicio 4.46 (hemos tomado $L = \pi$). Se puede apreciar el decaimiento de la solución. También el efecto regularizador que tiene la ecuación del calor, ya que el “pico” que el dato inicial tiene en $x = \pi/2$ desaparece instantáneamente.

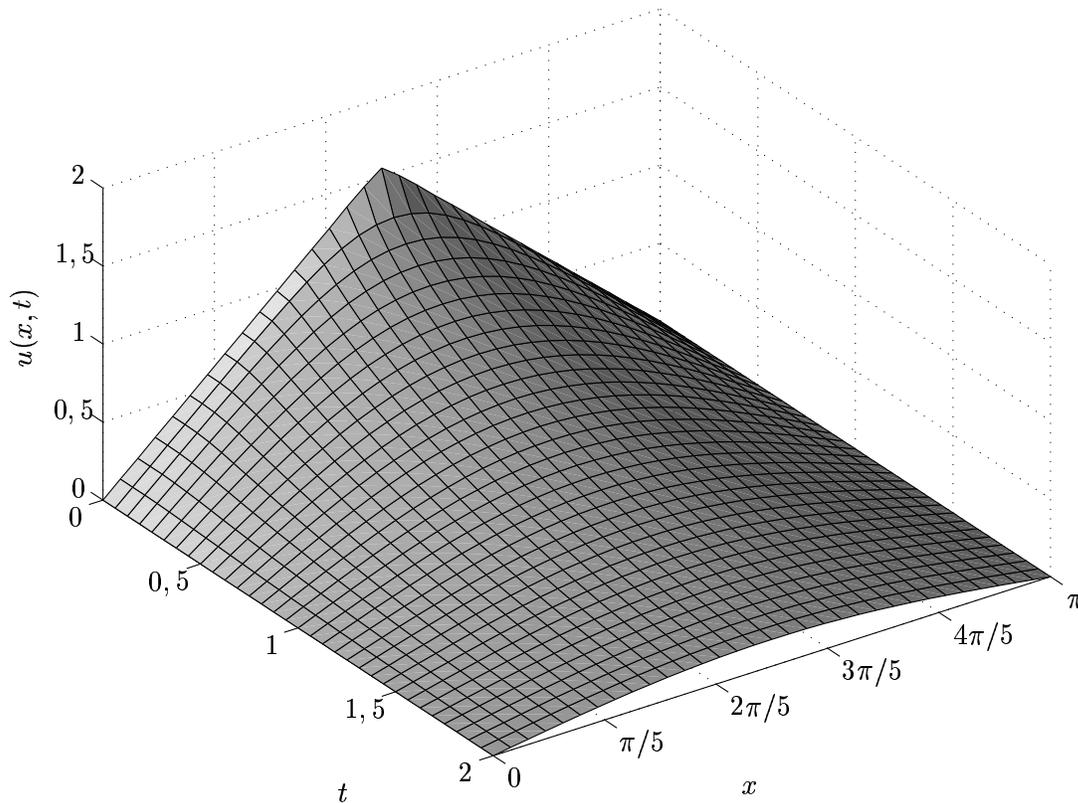


Figura 4.11: la solución con dato inicial “triangular” en $0 \leq x \leq \pi$

4.5.4 Otras aplicaciones del método de separación de variables

El método de separación de variables, que conduce a resolver la ecuación del calor por medio de la representación de sus soluciones como series de senos o cosenos, no se agota con la ecuación del calor y permite construir soluciones de otras ecuaciones lineales. Comenzaremos aplicándolo a la ecuación de ondas. Volveremos sobre este tipo de problemas en el capítulo 5, cuando discutamos algunas aplicaciones de las series de Fourier. La siguiente observación puede resultar útil a la hora de calcular en las aplicaciones de este método.

Observación 4.5.8. Al buscar soluciones $u(x, t)$ por el método de separación de variables, para una ecuación diferencial en derivadas parciales en las que el término que contiene la derivada de segundo orden respecto a x es una constante por u_{xx} (tal como ocurre con las ecuaciones del calor, de ondas, de Laplace, y con las ecuaciones de los ejercicios 4.59 y 4.60) y la condición lateral sobre u en $x = 0$ y $x = L$ es nula, suele ser conveniente escribir desde

el principio $u(x, t)$ en la forma

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad (4.102)$$

de un desarrollo en serie de senos con coeficientes que dependen del tiempo. Al sustituir (4.102) en la ecuación en derivadas parciales se obtienen ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes $b_k(t)$.

Por ejemplo, si trabajamos así con la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$, al calcular las derivadas que aparecen en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \dot{b}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \\ u_{xx}(x, t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 b_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \end{aligned}$$

Para que se satisfaga la ecuación las dos series que aparecen en esta última fórmula tienen que ser iguales, lo que implica que los coeficientes que multiplican a las funciones sinusoidales $\sin(k\pi x/L)$ tienen que ser iguales (justificaremos este hecho en el capítulo 5, pero al menos está claro que la igualdad de los coeficientes es suficiente para asegurar que ambas series son iguales). Concluimos entonces que

$$\dot{b}_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 b_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Resolviendo esta sencillas ecuaciones diferenciales resulta

$$b_k(t) = b_k(0)e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}, \quad k = 1, 2, \dots$$

y de aquí

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0)e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

que es la solución que habíamos hallado antes. Notemos que los $b_k(0)$ son los coeficientes del desarrollo en serie de senos del dato inicial u_0 .

Al trabajar de esta manera se logra una simplificación de los cálculos, ya que no hay que recorrer todo los pasos del método de separación de variables desde el principio. Para cerrar este comentario, digamos que la resolución de ecuaciones en derivadas parciales en que la derivada segunda respecto a x aparece de otra manera, o con otras condiciones de borde (por ejemplo, cuando fijamos el dato de borde sobre u_x en vez de u) conducen a otro tipo de desarrollos en serie⁸. ♠

⁸el capítulo 11 del texto [BP] es una buena referencia para quien quiera profundizar sobre estos temas

Ejercicio 4.50. * Resolver la ecuación de ondas

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty),$$

con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) & x &\in [0, L], \\ u_t(x, 0) &= v_0(x) & x &\in [0, L], \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 & t &\in [0, +\infty), \end{aligned}$$

utilizando el método de separación de variables. Para este problema consideraremos que los datos iniciales u_0 y v_0 son series de senos de la forma

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), & x &\in [0, L], \\ v_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), & x &\in [0, L]. \end{aligned}$$

Determinar condiciones sobre los coeficientes a_k y b_k que aseguren que podemos construir una solución del problema por este procedimiento.

Ejercicio 4.51. ** Se considera la ecuación

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = x \sin t, \quad (x, t) \in D = (0, \pi) \times (-\infty, +\infty).$$

1. Hallar la solución particular $u_0(x, t)$ de la forma $f(x) \sin t + g(x) \cos t$ tal que las funciones f y g satisfacen $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = -1$ y $g'(0) = -1$.
2. Hallar una función u continua en \bar{D} , que sea solución de la ecuación en D y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}, & x &\in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) &= -x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, & x &\in [0, \pi], \\ u(0, t) &= 0, & t &\in \mathbf{R}, \\ u(\pi, t) &= -\pi \sin t, & t &\in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.52. **

1. Hallar la solución general de

$$y^2 Y'' - k^2 Y = 0,$$

buscando soluciones de la forma $Y(y) = y^\alpha$. Hallar las soluciones que son acotadas en un entorno de 0.

2. Hallar una función continua $u = u(x, y)$ en $D = [0, \pi] \times [0, 1]$ que sea solución de

$$u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0$$

en el interior de D y satisfaga las condiciones

$$\begin{aligned} u(x, 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}, & x &\in [0, \pi], \\ u(0, y) &= u(\pi, y) = 0, & y &\in [0, 1], \\ u(x, 0) &= 0, & x &\in [0, \pi]. \end{aligned}$$

4.6 El principio del máximo para la ecuación del calor. Unicidad de soluciones.

En esta sección probaremos la unicidad de soluciones para el problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor, demostrando y luego utilizando un *principio del máximo* para sus soluciones. En general, un principio del máximo para una función u es la propiedad que asegura que el valor máximo de u en un conjunto Ω se alcanza en la frontera $\partial\Omega$ del conjunto Ω prefijado. En el caso de la ecuación del calor probaremos el teorema que enunciamos a continuación.

Teorema 4.4 (Principio del máximo). *Sea u una función continua*

$$u : [0, L] \times [t_0, t_1) \rightarrow \mathbf{R}$$

que satisfice la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ en $(0, L) \times (t_0, t_1)$. Consideremos T en el intervalo (t_0, t_1) y el conjunto

$$\Omega = (0, L) \times (t_0, T).$$

Llamemos $\partial_p\Omega$ al siguiente subconjunto del plano (x, t) :

$$\partial_p\Omega = \{x \in [0, L], t = t_0\} \cup \{x = 0, t \in [t_0, T]\} \cup \{x = L, t \in [t_0, T]\}.$$

Entonces el valor máximo de u en $\bar{\Omega}$ se alcanza sobre $\partial_p\Omega$.

En la figura 4.12 ilustramos los conjuntos Ω y $\partial_p\Omega$ que aparecen en el enunciado del principio del máximo. Antes de pasar a probar el teorema 4.4

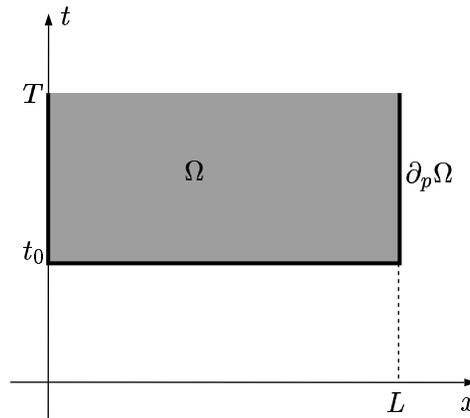


Figura 4.12: el dominio Ω y la porción $\partial_p\Omega$ de su frontera

conviene interpretar este resultado en términos de la imagen física del problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor. Interpretemos u como la

temperatura de una barra de longitud L . El conjunto $\partial_p \Omega$ está formado por el intervalo que representa el estado de la barra en el tiempo t_0 —sobre el cual damos el dato inicial u_0 — y dos intervalos que representan los puntos $x = 0$ y $x = L$ en los instantes comprendidos entre t_0 y T . Notemos entonces que las condiciones que fijamos en la barra hasta el tiempo T a través de los datos iniciales y de contorno están dadas sobre el conjunto $\partial_p \Omega$. El principio del máximo dice que la temperatura en el interior de la barra no puede superar al valor de la temperatura en la parte en que damos las condiciones de contorno. Esto significa que el calor no va a fluir espontáneamente de una zona fría a una caliente para llevar la temperatura por encima de la que se alcanza en $\partial_p \Omega$, cosa que se corresponde con nuestra experiencia, ya que las cosas calientes se enfrían a menos que las pongamos en contacto con algo todavía más caliente.

Notemos también que el teorema 4.4 puede escribirse como una igualdad para los supremos de u sobre los conjuntos $\bar{\Omega}$ y $\partial_p \Omega$ de la siguiente manera:

$$\sup_{\bar{\Omega}} u(x, t) = \sup_{\partial_p \Omega} u(x, t). \quad (4.103)$$

En el enunciado del teorema hemos tomado como origen de tiempos un t_0 arbitrario. En realidad no supone ninguna pérdida de generalidad cambiar el origen de los tiempos para poner $t_0 = 0$.

PRUEBA DEL TEOREMA 4.4: en primer lugar notemos que la función continua u alcanza su máximo en el conjunto cerrado y acotado $\bar{\Omega}$. Para probar el teorema usaremos el hecho conocido de que en un máximo relativo las derivadas primeras se anulan y las derivadas segundas no pueden ser positivas.

Por ejemplo, si tuviéramos un máximo en un punto

$$(x_0, t_0) \in \Omega$$

las derivadas u_x y u_t deberían anularse en (x_0, t_0) y $u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$. Si en la desigualdad anterior pudiéramos excluir la igualdad entonces habríamos llegado a una contradicción, ya que utilizando el hecho de que u es solución de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ tendríamos

$$0 = u_t(x_0, t_0) - u_{xx}(x_0, t_0) > 0.$$

Si el máximo de u en $[0, L] \times [t_0, T]$ estuviera en un punto $u(x_0, T)$, con x_0 en el intervalo abierto $(0, L)$, debería satisfacerse

$$u_t(x_0, T) \geq 0, \quad u_{xx}(x_0, T) \leq 0.$$

Nuevamente, si pudiéramos excluir la igualdad en las desigualdades que acabamos de encontrar, llegaríamos a la contradicción

$$0 = u_t(x_0, T) - u_{xx}(x_0, T) > 0.$$

Lamentablemente existen funciones tozudas que se empeñan en tener máximos en los que sus derivadas se anulan, así que todavía tenemos que trabajar un poco más.

Es fácil notar que las observaciones que hicimos hasta ahora permitirían probar el principio del máximo para una función que satisface

$$u_t < u_{xx} \quad (4.104)$$

en vez de la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$. En ese caso la prueba es sencilla. En efecto, si hay un máximo en un punto $(x_0, t_0) \in \Omega$ entonces tendremos

$$0 = u_t(x_0, t_0) < u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0,$$

lo que constituye una contradicción. Un razonamiento análogo permite excluir la presencia de un máximo en un punto (x_0, T) , con $x_0 \in (0, L)$.

Para probar el principio del máximo para una solución de la ecuación del calor razonaremos por el absurdo. Supondremos entonces que existe una solución u de la ecuación, que no alcanza su máximo sobre $\partial_p \Omega$. Llamemos M al valor máximo de u en $\bar{\Omega}$, y m a su máximo sobre $\partial_p \Omega$. Estamos suponiendo entonces que m es estrictamente menor que M , lo que implica que cualquier punto (x_0, t_0) donde u alcanza el valor M no está en $\partial_p \Omega$. Consideremos entonces un punto $(x_0, t_0) \in \bar{\Omega} \setminus \partial_p \Omega$ que satisface

$$u(x_0, t_0) = M > m = \sup_{\partial_p \Omega} u. \quad (4.105)$$

A partir de u fabricaremos una función u_ϵ que satisfaga la desigualdad (4.104), pero que esté suficientemente cerca de u como para que (4.105) asegure que el máximo de u_ϵ no se alcanza en $\partial_p \Omega$. Hay varias maneras de hacer esto y nosotros utilizaremos las siguientes aproximaciones:

$$u_\epsilon(x, t) = u(x, t) + \epsilon(x - x_0)^2, \quad (4.106)$$

con $\epsilon > 0$. Observemos que

$$u_{\epsilon,t} = u_t,$$

en tanto que

$$u_{\epsilon,xx} = u_{xx} + 2\epsilon.$$

Como u es solución de la ecuación del calor satisface $u_t = u_{xx}$, por lo que

$$u_{\epsilon,t} < u_{\epsilon,xx}. \quad (4.107)$$

Además $u_\epsilon(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M$. Notemos que si ϵ es pequeño las u_ϵ aproximan uniformemente a u sobre conjuntos acotados en la variable x , y

esto permite escoger ϵ para que u_ϵ quede estrictamente por debajo del valor M en todo $\partial_p\Omega$. Para ello observemos que

$$u_\epsilon(x, t) = u(x, t) + \epsilon(x - x_0)^2 \leq m + \epsilon L^2 \quad \text{si } (x, t) \in \partial_p\Omega. \quad (4.108)$$

Si elegimos $\epsilon = (M - m)/2L^2$ entonces

$$\sup_{\partial_p\Omega} u_\epsilon(x, t) \leq m + \epsilon L^2 = \frac{M + m}{2} < M = u_\epsilon(x_0, t_0)$$

y esto entra en contradicción con que el hecho de que u_ϵ satisface (4.107), porque ya habíamos mostrado la validez del principio del máximo cuando vale esa desigualdad. \diamond

Corolario 4.9. *El mínimo de u en Ω se alcanza sobre $\partial_p\Omega$.*

PRUEBA. Si A es un conjunto cualquiera del plano (x, t) entonces

$$\inf_A u(x, t) = -\sup_A (-u(x, t)).$$

Si u es una solución de la ecuación del calor entonces también lo es $-u$ y podemos aplicarle el principio del máximo para concluir

$$-\inf_{\Omega} u(x, t) = \sup_{\Omega} (-u(x, t)) \leq \sup_{\partial_p\Omega} (-u(x, t)) = -\inf_{\partial_p\Omega} u(x, t). \quad \diamond$$

Corolario 4.10. *El máximo de $|u|$ en Ω se alcanza en $\partial_p\Omega$*

PRUEBA. Si A es un conjunto cualquiera entonces

$$\sup_A |u(x, t)| = \max \left\{ \sup_A u(x, t), -\inf_A u(x, t) \right\}$$

y la afirmación que queremos probar se obtiene como consecuencia del principio del máximo para u y el corolario 4.9. \diamond

Ejercicio 4.53. * Hallar el máximo y el mínimo de $u(x, t)$ en $[0, 1] \times [0, 1]$, sabiendo que es una solución del problema

$$\begin{cases} u(x, 0) = x(1-x)^2, & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = t^2 - t/9, & t \in [0, \infty), \\ u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty). \end{cases}$$

Calcular el máximo de $|u|$ en $[0, 1] \times [0, 1]$.

El principio del máximo y sus corolarios permiten obtener un resultado de unicidad de soluciones para la ecuación del calor. Una consecuencia directa del corolario 4.10 es este nuevo corolario:

Corolario 4.11. *La única solución del problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ en $\Omega = (0, L) \times (0, \infty)$, con dato inicial $u_0(x) \equiv 0$ y dato lateral nulo es la solución trivial $u \equiv 0$.*

De este hecho se deduce la unicidad de las soluciones, al igual que hicimos para la ecuación de ondas. En efecto, si u_1 y u_2 son dos soluciones de la ecuación del calor con los mismos datos de contorno su diferencia es una solución con dato de contorno 0, por lo tanto

$$u_1 - u_2 \equiv 0.$$

En consecuencia, u_1 y u_2 son la misma solución.

Los razonamientos que hemos presentado prueban la parte de unicidad del siguiente teorema de existencia, unicidad y regularidad de soluciones del problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor:

Teorema 4.5. *Si u_0 es una función continua en $[0, L]$ tal que $u(0) = u(L) = 0$, entonces existe una única función continua*

$$u : [0, L] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R},$$

de clase C^2 en $(0, L) \times (0, +\infty)$, que satisface

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

Además u es de clase C^∞ en $(0, L) \times (0, +\infty)$.

En la sección anterior mostramos la existencia y regularidad de una solución para datos iniciales u_0 que admitían un desarrollo en serie de senos cuyos coeficientes daban lugar a una serie absolutamente convergente. Tal como se enuncia en el teorema, existe una solución para *cualquier* dato u_0 continuo que se anule en $x = 0$ y $x = L$, pero omitiremos la prueba de este hecho.

Con las mismas técnicas que usamos para la ecuación del calor puede probarse un principio del máximo para la ecuación de Laplace. A continuación formulamos un ejercicio con este resultado. Hacerlo ayudará a repasar los argumentos que presentamos hasta ahora.

Ejercicio 4.54. * PRINCIPIO DEL MÁXIMO PARA LA ECUACIÓN DE LAPLACE
Consideremos un conjunto $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ abierto y acotado.

1. Utilizar las técnicas de la prueba del teorema 4.4 para mostrar que si $u(x, y)$ es una función continua en $\bar{\Omega}$ que satisface la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{4.109}$$

en Ω , entonces $\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u$. Concluir que $\sup_{\bar{\Omega}} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|$.

2. Sea g una función continua definida sobre el borde de Ω . Mostrar que el problema de hallar una función u continua en $\bar{\Omega}$, de clase C^2 en Ω , tal que (4.109) se satisfice en Ω y $u = g$ en $\partial\Omega$ tiene a lo sumo una solución.

Observación 4.6.1. La segunda parte del ejercicio anterior nos dice que no es posible imponer el valor de u y sus derivadas en el borde de Ω si queremos que u satisfaga la ecuación de Laplace en el interior. Esto es así porque el resultado de unicidad que allí aparece implica que u queda determinada una vez que se conoce su valor en el borde, cosa que no deja margen alguno para pretender fijar además sus derivadas. ♠

El principio del máximo permite mostrar algunas propiedades adicionales de las soluciones.

Proposición 4.12 (Comparación de soluciones). *Si u y v son soluciones del problema de Cauchy para la ecuación del calor, con dato lateral nulo y datos iniciales*

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x),$$

que satisfacen $u_0 \leq v_0$, entonces $u \leq v$.

PRUEBA: La diferencia $u - v$ es una solución de la ecuación del calor que tiene dato inicial

$$u_0 - v_0 \leq 0$$

y se anula en los extremos de la barra. Por lo tanto el máximo de $u - v$ en $\partial_p\Omega$ es menor o igual que 0. El principio del máximo asegura entonces que el máximo de $u - v$ en todo Ω también lo es, así que $u - v \leq 0$ en todo el conjunto Ω , lo que implica $u \leq v$. ◇

Ejemplo 4.6.2. Si resolvemos la ecuación del calor en $[0, L]$, con dato lateral nulo y dato inicial u_0 que satisfice

$$0 \leq u_0(x) \leq \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

podemos asegurar que la solución u satisfice

$$0 \leq u(x, t) \leq e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Esto es cierto por el resultado de comparación de soluciones que acabamos de probar, y porque la función que aparece en el miembro de la derecha del último par de desigualdades es la solución de la ecuación del calor con dato inicial $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$. ♣

Observación 4.6.3. DEPENDENCIA DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DEL CALOR RESPECTO AL DATO INICIAL

Es posible cambiar el punto de vista desde el cual miramos la ecuación del calor en el conjunto $\Omega = (0, L) \times (0, \infty)$, y considerar que al fijar dato lateral nulo y resolverla con un dato inicial u_0 estamos produciendo una aplicación

$$u_0 \mapsto u = T(u_0)$$

que a cada función continua u_0 , definida en $[0, L]$ y tal que

$$u_0(0) = u_0(L) = 0,$$

le hace corresponder la solución u del problema de Cauchy-Dirichlet que tiene u_0 como dato inicial. De este modo, la ecuación del calor define una aplicación T del espacio

$$V = \{u_0 \in C([0, L]); u(0) = u(L) = 0\}$$

en el espacio vectorial W formado por las funciones continuas y acotadas definidas sobre el conjunto $\bar{\Omega} = [0, L] \times [0, \infty)$. Si reescribimos el corolario 4.10 en términos de las normas del supremo obtenemos

$$\|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq \|u_0\|_{L^\infty([0, L])}, \quad (4.110)$$

que debe verse como un resultado de continuidad de T . Vamos a cerrar esta observación con un ejercicio.

Ejercicio 4.55. ** Mostrar que el mapa T es lineal. Mostrar que si $u_{0,n}$ es una sucesión de funciones de V que converge uniformemente en $[0, L]$ a una función u_0 entonces u_0 está en V y $T(u_{0,n})$ converge uniformemente en $\bar{\Omega}$ a $T(u_0)$.

En resumen, hemos mostrado que el problema de Cauchy-Dirichlet (4.70) para la ecuación del calor tiene una única solución, y que esta depende de manera continua del dato inicial u_0 respecto a las normas $\|\cdot\|_\infty$ del espacio de las soluciones y del espacio de los datos. Por lo tanto, el problema de Dirichlet para la ecuación del calor está *bien puesto* respecto a estas normas. ♠

Observación 4.6.4. EL FLUJO ASOCIADO CON EL PROBLEMA DE CAUCHY-DIRICHLET PARA LA ECUACIÓN DEL CALOR

Si consideramos que al resolver el problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor en el intervalo $[0, L]$, con dato inicial u_0 , estamos dando para cada $t > 0$ una función $u(\cdot, t)$ que representa el perfil de temperaturas en el instante t , podemos considerar que la solución de este problema nos lleva a definir un *flujo* en el conjunto de las funciones continuas sobre $[0, L]$. En efecto, para cada pareja (u_0, t) , formada por un dato inicial u_0 y un tiempo $t > 0$, obtenemos una nueva función $\Phi(u_0, t)$ definida por la fórmula

$$\Phi(u_0, t)(x) = u(x, t), \quad x \in [0, L],$$

donde $u(x, t)$ es la solución del problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor con dato u_0 . Esta función Φ es el flujo asociado con la ecuación del calor, que, a diferencia de lo que ocurre con los flujos asociados con las ecuaciones diferenciales ordinarias, sólo está definido para $t \geq 0$.

Ejercicio 4.56. *

1. Probar, utilizando la unicidad de soluciones de la ecuación del calor, la propiedad de semigrupo

$$\Phi(u_0, t + s) = \Phi(\Phi(u_0, t), s), \quad t, s > 0.$$

2. Probar, utilizando el principio del máximo para las soluciones de la ecuación del calor, que se satisface

$$\|\Phi(u_0, t) - \Phi(v_0, t)\|_\infty \leq \|u_0 - v_0\|_\infty, \quad t > 0.$$

Vale la pena destacar que la desigualdad que aparece en la segunda parte del ejercicio anterior puede interpretarse como un resultado de dependencia continua respecto al dato inicial u_0 para el flujo Φ . En efecto, si tomamos una sucesión de datos iniciales $u_{0,n}$, que convergen a u_0 en el sentido de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{0,n} - u_0\|_\infty = 0$$

entonces podemos concluir que, para cualquier $t > 0$, la sucesión de funciones $\Phi(u_{0,n}, t)$ converge respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir uniformemente sobre el intervalo $[0, L]$, a $\Phi(u_0, t)$. ♠

El principio del máximo no es la única forma de probar la unicidad de soluciones para el problema del calor. Presentamos a continuación un ejercicio que apunta a dar una prueba alternativa.

Ejercicio 4.57. ** Utilizar la integral de energía

$$I(t) = \int_0^L u^2(x, t) dx$$

para dar una nueva prueba de unicidad de soluciones al problema de resolver la ecuación del calor en $[0, L]$. Hacerlo para los dos tipos de condiciones de contorno con las que hemos trabajado hasta ahora. Trabajar a nivel formal, sin tratar de justificar que se puede derivar respecto al tiempo $I(t)$ derivando dentro del signo de integración. Una prueba completamente rigurosa de este hecho se dará en el ejercicio 5.21, página 386.

Vale la pena subrayar que el principio del máximo nos permitió probar la unicidad de soluciones y obtener la propiedad de comparación de la proposición 4.12 y las propiedades de continuidad de la aplicación que a cada dato u_0 le asigna la solución del problema de Cauchy-Dirichlet. Vimos que también es válido para la ecuación de Laplace y otras ecuaciones elípticas y parabólicas (entre ellas algunas no lineales) satisfacen alguna forma de este principio. Un ejemplo aparece en nuestro próximo ejercicio.

Ejercicio 4.58. ** Consideremos una función $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ positiva y una función continua

$$u : [0, L] \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R},$$

que es de clase C^2 en el interior de su dominio y satisface allí la ecuación diferencial

$$u_t = u_{xx} + \varphi(u).$$

Consideremos además Ω y $\partial_p \Omega$ como en el enunciado del teorema 4.4. Mostrar que u alcanza su valor mínimo en $\partial_p \Omega$.

Para terminar, vamos a estudiar ahora las ecuaciones $u_t = u_{xx} \pm u$. Esto nos dará la oportunidad de poner en práctica las técnicas que hemos aprendido al estudiar la ecuación del calor. El término adicional $\pm u$ debe interpretarse como un término que agrega o absorbe calor, cosa que puede ocurrir, por ejemplo, por el efecto de reacciones químicas en la región en la que ocurre el proceso de difusión. Como la temperatura tiene un cero absoluto tiene sentido concentrarse en soluciones no negativas de la ecuación del calor. En los próximos tres ejercicios trabajaremos en $\Omega = (0, L) \times (0, \infty)$ y supondremos que el dato inicial es

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L],$$

y que se satisface $\sum_k |b_k| < \infty$.

Ejercicio 4.59. * Consideraremos el problema

$$u_t = u_{xx} - u \tag{4.111}$$

en Ω , con dato inicial $u_0 \geq 0$ y dato lateral nulo en $x = 0$ y $x = L$.

1. Hallar una solución del problema usando el método de separación de variables, o suponiendo que puede escribirse como una serie de senos con coeficientes que dependen del tiempo. Mostrar que las fórmulas que se obtienen por este procedimiento efectivamente definen una solución del problema.
2. Mostrar que las soluciones de (4.111) no pueden tener un mínimo negativo en Ω . Concluir que la solución $u(x, t)$ es no negativa.
3. Estudiar el comportamiento asintótico de la solución cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejercicio 4.60. * Consideraremos el problema

$$u_t = u_{xx} + u \tag{4.112}$$

en Ω , con dato inicial $u_0 \geq 0$ y dato lateral 0.

1. Hallar una solución del problema, y demostrar que efectivamente es solución.
2. Estudiar el comportamiento asintótico de la solución $u(x, t)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Discutir según L asumiendo que el coeficiente b_1 del desarrollo del dato inicial en serie de senos es mayor que cero (en el capítulo 5 veremos que esta condición se satisface si $u_0 \geq 0$ y no es idénticamente nulo).

3. Probar que $u \geq 0$. No es posible mostrar que las soluciones de (4.112) no tienen mínimos negativos como hicimos en el ejercicio anterior. Se sugiere observar que si u es solución de (4.112) entonces $e^{-t}u$ es una solución de la ecuación del calor.

Ejercicio 4.61. ** Usar el truco indicado en la última parte del ejercicio anterior para mostrar un resultado de unicidad de soluciones para las ecuaciones $u_t = u_{xx} \pm u$.

Capítulo 5

Series de Fourier

En este capítulo presentaremos una introducción a la teoría de las *series trigonométricas* o *series de Fourier*, y estudiaremos el problema de representar una función periódica definida sobre \mathbf{R} en forma de una serie de senos y cosenos. Como un caso particular de esta teoría, discutiremos la cuestión de expresar una función continua definida sobre un intervalo $[0, L]$ de \mathbf{R} como una serie de senos o de cosenos.

Nuestro enfoque de las series de Fourier estará basado en una imagen geométrica muy útil y elegante, que puede obtenerse introduciendo el producto interno

$$(f, g) = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx$$

en el espacio de las funciones continuas y periódicas de período $2L$. En la sección 5.1 discutiremos las ideas geométricas asociadas con la representación en serie de Fourier de una función periódica. El producto interno con el que trabajaremos, y la interpretación geométrica correspondiente, tienen sentido en el espacio vectorial formado por las funciones para las cuales

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-L}^L f^2(x)dx}$$

es finita. Llamaremos $L^2([-L, L])$, o simplemente L^2 , a este conjunto de funciones, que contiene a todas las funciones continuas y también a otras funciones que no son continuas. Veremos en la sección 5.2 que la serie de Fourier de una función f en L^2 converge, respecto a la norma $\|\cdot\|_2$, a f . Este resultado es conocido como el *Teorema de Parseval*.

Nuestro interés en la representación de funciones continuas, junto con los argumentos que utilizamos en la sección 4.5 para tratar la ecuación del calor, nos llevará a estudiar también la convergencia uniforme de las series de Fourier. Ese será el tema de la sección 5.3. La idea que preside esa sección es que las funciones regulares (con muchas derivadas) tienen una serie de Fourier con coeficientes que tienden a cero muy rápidamente, cosa que se traduce en buenas propiedades de convergencia de la serie. Recíprocamente, cuando la serie de Fourier converge rápido a f pueden obtenerse buenas propiedades de regularidad de la función límite. Un hecho destacable es que para que la serie de Fourier de una función f converja uniformemente es suficiente que tenga derivada primera g en el espacio L^2 de funciones de cuadrado integrable. En realidad es suficiente que esta derivada exista en un sentido *débil*, que no es equivalente a la noción clásica de derivada.

5.1 La geometría de las series trigonométricas

Nos ocuparemos ahora de estudiar la representación de funciones más o menos generales, definidas sobre un intervalo de la recta, como series de senos y de cosenos. Recordemos que, motivados por el interés en resolver la ecuación del calor, en la sección 4.5 nos enfrentemos a la necesidad de expresar funciones continuas, definidas sobre un intervalo $[0, L]$ de \mathbf{R} , como una serie de senos o de cosenos. Además, al buscar una expansión de este tipo surgían naturalmente una serie de problemas de análisis, algunos de los cuales aparecen reseñados en la observación 4.5.4, página 327.

Observación 5.1.1. Supongamos que podemos expresar una función f definida sobre el intervalo $[0, L]$ por una serie de senos, en la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L]. \quad (5.1)$$

La igualdad anterior tiene sentido sobre el intervalo $[0, L]$ en el que está definida la f . Sin embargo, si el miembro de la derecha de (5.1) converge sobre el intervalo $[0, L]$ entonces lo hace sobre todo \mathbf{R} , ya que los senos que aparecen en la serie están definidos en toda la recta y son funciones impares y periódicas de período $2L$. En definitiva, el miembro de la derecha de (5.1) definirá una función impar y periódica de período $2L$ que es una *extensión* de f a toda la recta. Notemos además que f admite a lo sumo una extensión a todo \mathbf{R} que tenga estas dos propiedades.

Un comentario análogo vale cuando podemos expresar f en el intervalo $[0, L]$ como una serie de cosenos, en la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L]. \quad (5.2)$$

En este caso la serie definirá una extensión par y periódica de f . ♠

La observación que acabamos de hacer sugiere que un contexto natural para estudiar las series de Fourier es el de las funciones periódicas. Para ser consistentes con las fórmulas (5.1) y (5.2) trabajaremos con funciones periódicas de período $2L$. Más aún, como no queremos limitarnos a las funciones que son pares o impares mezclaremos los senos y los cosenos para intentar desarrollar una función f definida sobre \mathbf{R} , de período $2L$, como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L]. \quad (5.3)$$

Notemos que el término que corresponde a $k = 0$ en la serie de cosenos lo hemos puesto aparte, porque da lugar a una constante. Es conveniente incluir

el factor $1/2$ por razones de normalización que aparecerán luego, pero es preferible adelantarse e incluirlo desde ahora para no tener que cambiar luego las fórmulas. Naturalmente, el miembro de la derecha en la igualdad (5.3) debe interpretarse como el resultado del paso al límite, en algún sentido apropiado, en las sumas finitas

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^n b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L]. \quad (5.4)$$

Observación 5.1.2. Así como las series de senos sólo pueden ser funciones impares y las de cosenos pares, mostraremos más adelante que las funciones pares tienen series de Fourier en las que sólo aparecen los cosenos mientras que en las series asociadas con funciones impares sólo aparecen los senos, porque si f es par (impar) todos los coeficientes b_k (a_k) se anulan. Esta observación nos habilitará a aplicar nuestra teoría acerca de funciones periódicas definidas sobre todo \mathbf{R} para desarrollar en serie de senos una función f que en principio sólo está definida sobre $[0, L]$: para ello extenderemos f a todo \mathbf{R} como una función impar y periódica de período $2L$. ♠

Observación 5.1.3. En realidad los coeficientes en (5.3) dependen de la función f y podríamos escribirlos como $a_k(f)$ y $b_k(f)$ para poner este hecho en evidencia. Mientras no haya riesgo de confusión omitiremos la referencia explícita a f , pero en algunos casos deberemos hacerla. Lo mismo vale para la sucesión $S_n(x)$, que en realidad depende de f , y para la que usaremos la notación $S_n(f)(x)$ en muchas oportunidades. ♠

Observación 5.1.4. LA FORMA COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER
Existe otra manera de escribir las series de Fourier desarrollando una función en términos de las exponenciales trigonométricas

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (5.5)$$

en vez de hacerlo usando los senos y cosenos. Esta expansión puede obtenerse a partir de los desarrollos en senos y cosenos usando la fórmula (5.5), ya que podemos calcular

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Si sustituimos todos los senos y los cosenos en (5.3) por sus expresiones (5.6) obtenemos un desarrollo para f , en términos de las exponenciales complejas, de la forma

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{\frac{ik\pi}{L}x}, \quad x \in [0, L]. \quad (5.7)$$

Análogamente, sustituyendo en (5.4) obtenemos

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n d_k e^{\frac{ik\pi}{L}x}, \quad x \in [0, L]. \quad (5.8)$$

Notemos que la función e^{ix} es una función 2π -periódica en \mathbf{R} , que toma valores complejos, y que también los coeficientes d_k tomarán valores complejos, por lo que el marco natural para considerar desarrollos de Fourier de la forma (5.7) es el de las funciones complejas, $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, de período $2L$. Hemos recopilado al final de la sección 5.2, en el ejercicio 5.10, los resultados relativos a esta manera de escribir las series de Fourier. ♠

La representación de una función en serie trigonométrica se parece a la noción de representación de un vector como combinación lineal de una base, aunque ahora estamos considerando una “base infinita” y hace falta introducir alguna noción de convergencia para que la “combinación lineal infinita” correspondiente tenga sentido. Trataremos de explotar este punto de vista, propio de la teoría de espacios vectoriales y de naturaleza geométrica, en lo que sigue. Trabajaremos entonces en el espacio vectorial \mathbf{V} formado por las funciones continuas y periódicas de período $2L$, definidas sobre \mathbf{R} y a valores reales. Notemos que podemos escribir \mathbf{V} como

$$\mathbf{V} = \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f \text{ continua, } f(x + 2L) = f(x) \forall x \in \mathbf{R}\}$$

En este espacio consideraremos el producto interno

$$(f, g) = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx, \quad (5.9)$$

que lo dota de una estructura geométrica en la que “longitud” de un elemento f de \mathbf{V} (un “vector”) está dada por la norma

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-L}^L f^2(x)dx} \quad (5.10)$$

que deriva del producto interno (5.9). La noción de *ortogonalidad* o *perpendicularidad* entre dos vectores f y g queda definida por el hecho de que su producto interno sea nulo¹, es decir

$$(f, g) = 0.$$

El producto interno (5.9) es relevante para el problema de expresar una función como una serie trigonométrica porque las funciones seno y coseno

¹en el apéndice A.2 aparece una introducción a la teoría de espacios vectoriales con producto interno. Se recoge allí la información necesaria para este capítulo sobre las Series de Fourier

que aparecen en las series (5.3) forman una familia ortogonal respecto a este producto interno. Para verificar este hecho tenemos que tomar dos funciones cualesquiera de la familia en ella y mostrar que su producto interno es nulo. Esto se reduce a una serie de cálculos, que desarrollaremos a continuación. Con el fin de simplificar la notación escribiremos

$$c_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.11)$$

para los cosenos que aparecen en las series trigonométricas (5.3), en tanto que para los senos introducimos la notación

$$s_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

También consideraremos la función constante 1 en esta discusión, que aparece multiplicada por el coeficiente $a_0/2$ en el primer sumando del miembro de la derecha de la fórmula (5.3) de las series de Fourier.

- La constante 1 es ortogonal a todas las c_k , $k = 1, 2, \dots$. En efecto, tenemos

$$(1, c_k) = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \Big|_{-L}^L = 0. \quad (5.13)$$

Más fácil todavía es ver que 1 es ortogonal a las s_k , porque al calcular el producto interno $(1, s_k)$ tenemos que integrar una función impar en un intervalo centrado respecto al origen y el resultado es, en consecuencia, nulo.

- El mismo argumento de paridad nos dice que las funciones s_k son ortogonales a todas las c_j respecto al producto interno (5.9), ya que el producto

$$(c_k, s_j) = \int_{-L}^L \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad (5.14)$$

se anula para todo par (j, k) de números naturales porque el integrando es una función impar y estamos calculando la integral sobre un intervalo simétrico respecto al origen $x = 0$.

- Nos resta mostrar que cada c_k es ortogonal a c_j y s_k es ortogonal a s_j , si $k \neq j$. Para ello es útil emplear la fórmula trigonométrica

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(b - a) + \cos(a + b)) \quad (5.15)$$

para manejar los productos de los cosenos, y

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(b - a) - \cos(a + b)) \quad (5.16)$$

para los senos. Con esta información calculamos

$$(c_k, c_j) = \frac{1}{2} \int_L^L \cos\left(\frac{(j-k)\pi}{L}x\right) + \frac{1}{2} \int_L^L \cos\left(\frac{(j+k)\pi}{L}x\right). \quad (5.17)$$

Es evidente entonces, usando otra vez el cálculo de la integral que aparece en (5.13), que $(c_k, c_j) = 0$ si $j \neq k$. Por otra parte, si $j = k$ el integrando en el primer sumando del miembro de la derecha es igual a 1 y obtenemos $(c_k, c_k) = L$. El cálculo para el producto de los senos es casi igual. En efecto

$$(s_k, s_j) = \frac{1}{2} \int_L^L \cos\left(\frac{(j-k)\pi}{L}x\right) - \frac{1}{2} \int_L^L \cos\left(\frac{(j+k)\pi}{L}x\right). \quad (5.18)$$

Como j y k son mayores o iguales que 1 el segundo sumando siempre se anula, en tanto que el primero es cero si $j \neq k$ y vale L si $j = k$.

Los cálculos que acabamos de hacer permiten calcular la norma de las funciones c_k y s_k . En efecto, vimos que se satisfacen

$$(c_k, c_k) = L, \quad (s_k, s_k) = L, \quad k \geq 1.$$

De esto se desprende inmediatamente que

$$\|c_k\| = \|s_k\| = \sqrt{L}.$$

En lo sucesivo utilizaremos permanentemente las funciones c_k y s_k , y nos resultará conveniente que tengan norma igual a 1. Podemos normalizarlas dividiendo por su norma para obtener a partir de ellas vectores de norma 1. Haremos algo un poco distinto, en vez de normalizar las funciones dividiendo entre \sqrt{L} normalizaremos el producto interno dividiendo entre L . En concreto, a partir de ahora consideraremos en \mathbf{V} el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x)dx. \quad (5.19)$$

que tiene asociada la norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x)dx}. \quad (5.20)$$

Con la normalización que acabamos de introducir en el producto interno tenemos

$$\|c_k\|_2 = \|s_k\|_2 = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Si calculamos la norma de la función constante 1 obtenemos

$$\|1\|_2^2 = \langle 1, 1 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L 1 dx = 2. \quad (5.21)$$

También procederemos a normalizarla, y llamaremos c_0 a la función que resulta, de modo que tenemos

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (5.22)$$

Evidentemente, además de satisfacer $\|c_0\|_2 = 1$, la función constante normalizada c_0 es ortogonal a todas las c_k y s_k con $k \geq 1$.

Nos será útil resumir la discusión que acabamos de presentar en la siguiente proposición:

Proposición 5.1. *El conjunto*

$$\{c_k, k = 0, 1, \dots\} \cup \{s_k, k = 1, 2, \dots\} \quad (5.23)$$

es una familia ortonormal respecto al producto interno (5.19).

Llegados a este punto es legítimo preguntarse para qué sirve toda esta información sobre la familia formada por las funciones c_k y s_k . Para esto conviene tener presente que el objetivo de toda esta discusión es estudiar la representación de una función f como la serie de Fourier (5.3). Habíamos observado ya que tal representación será posible si podemos mostrar que la sucesión de reducidas

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^n b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L] \quad (5.24)$$

converge en algún sentido a la función f . Notemos que las reducidas no son otra cosa que una combinación lineal de las funciones

$$\{c_0, c_k, s_k; k = 1, 2, \dots, n\} \quad (5.25)$$

En efecto, es casi inmediato verificar que la fórmula (5.24) para las reducidas es equivalente a

$$S_n(f) = \frac{a_0}{\sqrt{2}}c_0 + \sum_{k=1}^n a_k c_k + \sum_{k=1}^n b_k s_k. \quad (5.26)$$

Por lo tanto, las reducidas $S_n(f)$ no son otra cosa que un elemento del subespacio W_n de \mathbf{V} generado por (5.25). Notemos además que (5.25) no sólo genera W_n sino que es además una *base ortonormal* de este subespacio de dimensión finita.

Por otro lado, queremos que las reducidas S_n de la serie de Fourier converjan a f . Ya que cada S_n está en el subespacio W_n intentaremos ver si es posible elegir los coeficientes de forma tal que $S_n(f)$ sea *la mejor aproximación de f por un elemento de W_n* . Esto sugiere que debemos proyectar f sobre W_n para calcular S_n (ver el apéndice A.2, página xiii). Para calcular la proyección

$P_n(f)$, de la función f sobre W_n , recurriremos a la base ortonormal (5.25) del espacio W_n . Resulta entonces que

$$P_n(f) = \langle f, c_0 \rangle c_0 + \sum_{k=1}^n \{ \langle f, c_k \rangle c_k + \langle f, s_k \rangle s_k \}. \quad (5.27)$$

Recordemos que la interpretación geométrica de las series de Fourier sugiere escoger los coeficientes a_k y b_k en (5.3) y (5.4) de modo que las reducidas $S_n = S_n(f)$ sean justamente las proyecciones $P_n(f)$. Entonces los escogeremos de forma tal que se satisfaga

$$S_n(f) = P_n(f). \quad (5.28)$$

Finalmente, combinamos la expresión (5.26) de las reducidas S_n , con (5.27) y (5.28) para concluir, igualando los coeficientes en c_k , $k \geq 1$, que

$$a_k = \langle f, c_k \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.29)$$

Análogamente

$$b_k = \langle f, s_k \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.30)$$

Por último, para calcular el coeficiente a_0 debemos hacer

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} = \langle f, c_0 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx. \quad (5.31)$$

Esto implica que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad (5.32)$$

Notemos que estos cálculos explican el factor $1/2$ que introdujimos en el término de a_0 en (5.3). Proviene de que la normalización de la función constante en $[-L, L]$ es $1/\sqrt{2L}$, en tanto que los senos y cosenos se normalizan con un factor $1/\sqrt{L}$.

A los coeficientes a_k y b_k que acabamos de introducir los llamaremos *coeficientes de Fourier de f* . Notemos que efectivamente dependen de la función f , tal como adelantamos en la observación 5.1.3.

Observación 5.1.5. LINEALIDAD DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

El hecho de que los coeficientes de Fourier de una función f se calculen a través de integrales de f implica que estos coeficientes dependen de manera lineal de la función f . En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} a_k(\alpha f + \beta g) &= \alpha a_k(f) + \beta a_k(g), & k = 0, 1, 2, \dots, \\ b_k(\alpha f + \beta g) &= \alpha b_k(f) + \beta b_k(g), & k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

para funciones f y g en \mathbf{V} , y números reales α y β , cualesquiera. ♠

Ejemplo 5.1.6. Calcularemos ahora la serie de Fourier de la función $2L$ -periódica definida por

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-L, L].$$

Esta función es continua, porque sus valores en $-L$ y L coinciden, y, por lo tanto, está en el espacio \mathbf{V} en el que estamos trabajando. El primer coeficiente es

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |x| dx = \frac{2}{L} \int_0^L x dx = \frac{2}{L} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = L.$$

Para los coeficientes a_k , con $k > 0$, tenemos

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |x| \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Integrando por partes obtenemos

$$a_k = \frac{2}{k\pi} x \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \Big|_0^L - \frac{2}{k\pi} \int_0^L \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \frac{2L}{(k\pi)^2} \left((-1)^k - 1\right).$$

Los coeficientes b_k son nulos, porque resultan de integrar la función impar

$$|x| \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

en el intervalo $[-L, L]$. Por lo tanto, la serie de Fourier asociada con la función f con la que estamos trabajando en este ejemplo es

$$\frac{L}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L}{(k\pi)^2} \left((-1)^k - 1\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \quad (5.33)$$

Es posible escribir esta serie en una forma algo más concisa, como

$$\frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{L}x\right).$$

Para llegar a esta última expresión tuvimos en cuenta que los coeficientes de la serie (5.33) con k par son nulos, y escribimos los k impares como $k = 2j + 1$, con j natural. ♣

Ejemplo 5.1.7. La serie de Fourier asociada con la función

$$f(x) = L/2 - |x|, \quad x \in [-L, L],$$

es

$$\frac{4L}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{L}x\right).$$

Esto es una consecuencia directa del ejemplo anterior y la observación 5.1.5. Mostraremos luego que esta serie de Fourier converge uniformemente a f sobre el intervalo $[-L, L]$. La parte difícil será mostrar que el límite es justamente f , ya que la convergencia uniforme se obtiene simplemente observando que la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$$

es convergente y utilizando el criterio de la mayorante de Weierstrass. ♣

Ejemplo 5.1.8. Calculemos ahora la serie de Fourier asociada con la extensión impar y $2L$ -periódica de

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, L/2], \\ L-x, & x \in [L/2, L]. \end{cases}$$

Como vamos a considerar una función impar todos los coeficientes a_k serán nulos. En tanto que para los b_k tendremos

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Por lo tanto,

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L (L-x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Estas integrales pueden manejarse haciendo integración por partes. Los detalles son fáciles de completar, y conducen a

$$b_k = \frac{4L}{(k\pi)^2} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

La serie de Fourier que estamos buscando es entonces

$$\frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

que puede escribirse también como

$$\frac{4L}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+1)^2} \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{L}x\right).$$

Mostraremos luego que la serie de senos que acabamos de encontrar converge uniformemente a f sobre el intervalo $[0, L]$. ♣

Observación 5.1.9. Tal como anunciamos en la observación 5.1.2 y vimos en los dos ejemplos que acabamos de considerar, la serie de Fourier asociada con una función impar sólo contiene términos en las funciones seno. Esto es así porque las integrales que hay que calcular para determinar los coeficientes b_k se anulan, porque sus integrandos son impares. Análogamente, si buscamos la serie de Fourier de una función $2L$ -periódica y par obtendremos una serie en la que sólo aparecen los cosenos. Utilizaremos esta observación más adelante, para representar en series de senos o de cosenos funciones definidas en el intervalo $[0, L]$, extendiéndolas en forma impar o par a $[-L, L]$ y luego de manera periódica al resto de la recta real \mathbf{R} . ♠

Ejercicio 5.1. * Hallar la serie de Fourier asociada con cada una de las funciones que aparecen a continuación.

1. Tomar $L = \pi$ y $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$.
2. Para $L > 0$ cualquiera, la función par y $2L$ -periódica definida por

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad x \in [0, L].$$

En la próxima sección discutiremos la convergencia de las series de Fourier. Vale la pena recordar una vez más que para sucesiones de funciones hay varias nociones de convergencia que no son equivalentes entre sí. En particular, como las series de Fourier son series de funciones, puede ocurrir que las series converjan en algún sentido y no lo hagan en otros. En lo sucesivo trabajaremos fundamentalmente con la norma $\|\cdot\|_2$ en \mathbf{V} . También con la norma $\|\cdot\|_\infty$, definida para una función f en \mathbf{V} por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-L, L]} |f(x)|.$$

Como las funciones de \mathbf{V} son $2L$ -periódicas da lo mismo tomar el supremo en el intervalo $[-L, L]$ que sobre toda la recta. Recordemos además que la convergencia respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ es equivalente a la convergencia uniforme.

Para cerrar esta sección, y a modo de preparación para la siguiente, presentamos una serie de ejercicios sobre la convergencia respecto a las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.

Ejercicio 5.2. * CONTINUIDAD DEL PRODUCTO INTERNO

Consideremos dos sucesiones f_n y g_n que convergen en $\|\cdot\|_2$ a f y g respectivamente. Mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle = \langle f, g \rangle. \quad (5.34)$$

Para hacer este ejercicio es conveniente escribir

$$\langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle = \langle f_n - f, g_n \rangle - \langle f, g - g_n \rangle,$$

utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y el resultado del ejercicio 2.28. ♡ ♠

Ejercicio 5.3. *

1. Mostrar que si una sucesión f_n de funciones de \mathbf{V} converge a $f \in \mathbf{V}$ respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces también converge a f respecto a la norma $\|\cdot\|_2$ (la noción de convergencia asociada a la norma $\|\cdot\|_\infty$ es más fuerte que la que corresponde a $\|\cdot\|_2$). ♡
2. Mostrar con un ejemplo que la convergencia respecto a la norma $\|\cdot\|_2$ no implica convergencia respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Ejercicio 5.4. * Mostrar que si f_n converge a f respecto a $\|\cdot\|_2$ entonces todos los coeficientes de Fourier $a_k(f_n)$ y $b_k(f_n)$ convergen a los respectivos coeficientes de Fourier de f (sugerencia: usar la definición de los coeficientes de Fourier y el ejercicio 5.2). Concluir que este resultado también es cierto cuando f_n converge a f respecto a $\|\cdot\|_\infty$. ♡

A continuación proponemos una aplicación de los ejercicios anteriores que nos será de utilidad más adelante.

Ejercicio 5.5. * Consideremos dos sucesiones de números reales α_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, y β_k , $k = 1, 2, \dots$, tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| + |\beta_k| < \infty.$$

1. Mostrar que la serie

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (5.35)$$

converge uniformemente en \mathbf{R} a una función $g(x)$, continua y periódica con período $2L$ (comparar con el ejercicio 2.16 de la sección 2.2). ♡

2. Mostrar que los coeficientes de Fourier de g son

$$a_k(g) = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \text{y} \quad b_k(g) = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

y que la serie (5.35) es justamente la serie de Fourier asociada a g . Concluir que la serie de Fourier de g converge uniformemente y respecto a $\|\cdot\|_2$ a g . ♡

3. Supongamos que los coeficientes α_k y β_k satisfacen la condición más fuerte

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^l |\alpha_k| + k^l |\beta_k| < \infty,$$

donde $l \geq 1$ es un número natural. Mostrar que el límite g de la serie (5.35) es una función de clase C^l en \mathbf{R} (esto es decir que existen todas sus derivadas hasta el orden l y son continuas). ♡

5.2 La convergencia de las series de Fourier en $\|\cdot\|_2$

Consideremos una función f en el espacio \mathbf{V} de las funciones continuas y $2L$ periódicas. Motivados por el enfoque geométrico que guió nuestra búsqueda de los coeficientes $a_k(f)$ y $b_k(f)$ vamos a estudiar la convergencia de la serie de Fourier a f respecto a la norma $\|\cdot\|_2$. Para ver si hay convergencia respecto a la norma $\|\cdot\|_2$ de la serie de Fourier asociada con f a la función f , tenemos que calcular la norma de la diferencia entre f y las reducidas n -ésimas $S_n(f)$ de su serie de Fourier, y ver si esta cantidad tiende a cero cuando n tiende a infinito. En resumen, queremos saber si se satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0. \quad (5.36)$$

Calcularemos $\|f - S_n(f)\|_2$ usando la idea de que $S_n(f)$ es la proyección ortogonal de f sobre el espacio vectorial W_n generado por las funciones c_k y s_k con $k \leq n$ (ver la página 355 de la sección anterior). Este hecho implica²

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2. \quad (5.37)$$

De esta igualdad deducimos inmediatamente que

$$\|S_n(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2. \quad (5.38)$$

Recordemos además que la expresión de $S_n(f)$ es

$$S_n(f) = \frac{a_0}{\sqrt{2}}c_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k c_k + b_k s_k\}, \quad (5.39)$$

donde los a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de f . Como la familia de funciones c_k y s_k es ortonormal la norma de $S_n(f)$ puede calcularse a partir de los coeficientes de Fourier, por medio de la fórmula

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^n \{|a_k|^2 + |b_k|^2\}. \quad (5.40)$$

Con esta información podemos escribir la desigualdad (5.38) en términos de los coeficientes de Fourier de f de la siguiente manera:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^n \{|a_k|^2 + |b_k|^2\} \leq \|f\|_2^2. \quad (5.41)$$

Notemos que el miembro de la derecha en (5.41) no depende de n . Como en las sumas del miembro de la izquierda sólo hay términos positivos podemos pasar al límite cuando n tiende a infinito para obtener la siguiente proposición.

²nuevamente remitimos al lector al apéndice A.2 por los detalles

Proposición 5.2 (Desigualdad de Bessel). *Los coeficientes de Fourier*

$$a_k = a_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, \quad b_k = b_k(f), \quad k = 1, 2, \dots,$$

de una función f en \mathbf{V} satisfacen la desigualdad

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k|^2 + |b_k|^2\} \leq \|f\|_2^2, \quad (5.42)$$

conocida como desigualdad de Bessel.

La desigualdad de Bessel asegura que la serie de los cuadrados de los coeficientes de Fourier de una función de L_2 es convergente, y como el término general de una serie numérica convergente tiende a cero obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 5.3 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Los coeficientes de Fourier a_k y b_k de una función de \mathbf{V} tienden a cero cuando k tiende a infinito. En particular están acotados, en el sentido de que existe una constante M (que no depende de k , pero sí de f) tal que $|a_k| \leq M$ y $|b_k| \leq M$ para todo valor de k .*

Ejercicio 5.6. * Mostrar que ninguna función de \mathbf{V} tiene asociada la serie de Fourier

$$\sum_{k=10}^n \frac{1}{\log k} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

La segunda importante consecuencia de (5.37) es que podemos calcular la norma de la diferencia entre f y $S_n(f)$ como

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2 \quad (5.43)$$

y combinando esta observación con la fórmula (5.40), que nos permite escribir la norma de las reducidas S_n en términos de los coeficientes de Fourier, obtenemos

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \frac{|a_0|^2}{2} - \sum_{k=1}^n |a_k|^2 - \sum_{k=1}^n |b_k|^2. \quad (5.44)$$

Recordemos que el término de la derecha en (5.44) tiene límite cuando $n \rightarrow \infty$, ya que en las sumas todos los sumandos son positivos. Por lo tanto existe el límite del término de la izquierda y tenemos la igualdad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \frac{|a_0|^2}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2. \quad (5.45)$$

Como la convergencia en norma de las $S_n(f)$ a f es equivalente a que el límite en (5.45) sea 0, una consecuencia inmediata de esta fórmula es que ambas cosas son equivalentes a que se satisfaga la igualdad

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2, \quad (5.46)$$

conocida como *igualdad de Parseval*. El teorema más relevante de esta sección es el siguiente:

Teorema 5.1 (Parseval). *Si f es una función de \mathbf{V} entonces la sucesión $S_n(f)$ converge en la norma $\|\cdot\|_2$ a f y sus coeficientes de Fourier a_k y b_k satisfacen la igualdad de Parseval (5.46).*

Un primer corolario del teorema de Parseval es que los coeficientes de Fourier de una función *determinan* la función. En efecto, supongamos que tenemos dos funciones f y g en \mathbf{V} . Los coeficientes de Fourier de la diferencia $f - g$ son

$$\begin{aligned} a_k(f - g) &= a_k(f) - a_k(g), & k = 0, 1, \dots, \\ b_k(f - g) &= b_k(f) - b_k(g), & k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.47)$$

Por lo tanto, si las funciones f y g tienen los mismos coeficientes su diferencia tiene coeficientes de Fourier nulos, y la igualdad de Parseval asegura entonces que

$$0 = \|f - g\|_2^2. \quad (5.48)$$

Por lo tanto la función $f - g$ es la función nula del espacio \mathbf{V} , que no es otra cosa que la función idénticamente nula. Por lo tanto $f \equiv g$.

Un corolario inmediato del teorema de Parseval es la siguiente proposición.

Proposición 5.4. *Si f es una función de \mathbf{V} tal que sus coeficientes de Fourier satisfacen la condición de sumabilidad*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k(f)| + |b_k(f)|\} < \infty \quad (5.49)$$

entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f .

PRUEBA: Habíamos visto al resolver el ejercicio 5.5 que la suma

$$g(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k(f) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (5.50)$$

define una función g continua, de período $2L$, que es el límite uniforme de la serie en el miembro de la derecha y cuyos coeficientes de Fourier son exactamente $a_k(f)$ y $b_k(f)$. Por lo tanto la función g no es otra cosa que la función original f y la serie de Fourier de f converge uniformemente a f . \diamond

Más adelante daremos condiciones suficientes para que se satisfaga (5.49).

Ejemplo 5.2.1. Los argumentos que acabamos de presentar muestran que la serie de Fourier de la función $2L$ -periódica definida por

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-L, L].$$

converge uniformemente a f . En particular, esto implica que se satisface la igualdad

$$|x| = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{L}x\right), \quad x \in [-L, L].$$

Además la convergencia es uniforme en el intervalo $[-L, L]$. Si evaluamos en $x = 0$ obtenemos

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2},$$

que nos permite calcular la suma de la serie del miembro de la derecha. ♣

5.2.1 El marco natural para la teoría

No es necesario limitar la teoría de las series de Fourier a las funciones que están en el espacio vectorial \mathbf{V} . En realidad, un marco completamente adecuado para esta teoría es el de las funciones $2L$ -periódicas para las que tiene sentido el producto interno con el que estamos trabajando. Esto nos permitirá eliminar la hipótesis de continuidad que estamos usando ahora, y extender nuestro análisis a una clase de funciones más amplia y que aparece bastante naturalmente en las aplicaciones del análisis de Fourier. Como vamos a trabajar en un espacio en el que el producto interno (5.19), que da lugar a la norma $\|\cdot\|_2$, está definido todos los argumentos geométricos presentados hasta ahora seguirán siendo válidos. El espacio en el que podemos hacer este tipo de argumentos es el espacio vectorial

$$L^2([-L, L]) = \left\{ f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ } 2L\text{-periódicas, } \int_{-L}^L |f(x)|^2 dx < \infty \right\}, \quad (5.51)$$

que está formado por las funciones reales definidas sobre \mathbf{R} , periódicas con período- $2L$, que tienen la propiedad de que la integral³ de su cuadrado sobre

³hay una cierta indefinición, completamente intencional, en esta caracterización de L^2 . Para dar una definición completa deberíamos decir cuál es la noción de integral que estamos manejando. Pero no lo haremos, porque cualquier noción de integral que conozca el lector da lugar a un espacio vectorial con producto interno, sobre el que es posible seguir trabajando a los efectos que se pretenden en este texto. Esperamos que el abandono del rigor que supone esta opción que hemos hecho permita esquivar algunas dificultades técnicas y ayude al lector a avanzar hacia las ideas geométricas más importantes, que pretendemos exponer en esta sección en un contexto suficientemente amplio como para que sea útil en las aplicaciones.

un intervalo de longitud $2L$ es finita⁴. Cuando no haya riesgo de confusión escribiremos simplemente L^2 , en vez de usar $L^2([-L, L])$.

Observación 5.2.2. La teoría puede extenderse sin mayor dificultad a las funciones complejas y periódicas definidas sobre \mathbf{R} . Ver el ejercicio 5.10.

Ejemplo 5.2.3. La función periódica, de período $2L$, que queda definida sobre todo \mathbf{R} por la fórmula

$$f(x) = |x|^\alpha, \quad x \in [-L, L],$$

está en L^2 si y sólo si $\alpha > -1/2$. ♣

Podemos extender a este espacio el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x)dx. \quad (5.52)$$

con el que trabajábamos en el espacio \mathbf{V} de las funciones continuas. Esto es así porque si dos funciones f y g están en L^2 la desigualdad

$$|fg| \leq \frac{1}{2} (|f|^2 + |g|^2)$$

asegura que el producto fg es absolutamente integrable en $[-L, L]$. Por lo tanto existe la integral que define el producto interno (5.52). También en este contexto se satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\langle f, g \rangle \leq \|f\|_2 \|g\|_2, \quad (5.53)$$

que es propia de cualquier espacio vectorial con producto interno⁵

Las consideraciones geométricas que hicimos antes siguen siendo válidas en L^2 , ya que sólo dependen de las propiedades del producto interno. Entonces, para cualquier función de L^2 podemos definir sus coeficientes de Fourier por las fórmulas (5.29) y (5.30) de modo que $S_n(f)$ sea la proyección de f sobre el subespacio W_n .

Para cerrar este comentario digamos que la notación L^2 suele reservarse en la literatura para el espacio que queda definido cuando la integral que aparece en (5.51) se interpreta en el sentido que corresponde a la teoría de integración de Lebesgue (ver la nota 4, página 192). Si se tiene en mente otra integral (por ejemplo, la de Cauchy, o la de Riemann) el espacio resultante es más pequeño que lo que suele entenderse por L^2 en cualquier texto de análisis. Sugerimos al lector interesado la consulta de, por ejemplo, [DM].

⁴el nombre $L^2([-L, L])$ tiene un aspecto bastante complicado pero significa lo siguiente: la L es un homenaje a H. Lebesgue, el padre de la moderna teoría de integración; el 2 hace referencia al cuadrado que aparece en la integral; el $[-L, L]$ aparece para indicar que estamos trabajando con funciones de período $2L$, que es esencialmente lo mismo que trabajar con funciones definidas en $[-L, L]$ y luego extenderlas de manera periódica a todo \mathbf{R}

⁵en realidad la fórmula (5.52) no define un producto interno en L^2 . Esta observación es de naturaleza esencialmente técnica, y no alterará el desarrollo de nuestra teoría ni su contenido geométrico. El lector interesado puede encontrar más información sobre este punto en la sección 5.3.3, página 382

Ejemplo 5.2.4. Vamos a calcular los coeficientes de Fourier de la función $2L$ -periódica que está definida en $[-L, L)$ por la fórmula $f(x) = x$. Esta función no es continua, porque tiene un salto en todos los puntos de la forma $(2k+1)L$, con $k \in \mathbf{Z}$, pero está en el espacio L^2 que estamos considerando. Los coeficientes se calculan rápidamente evaluando las integrales correspondientes. Es fácil ver que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x dx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

porque el integrando es impar. Las integrales

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

dan algo más de trabajo, pero no mucho. Como el integrando es par tenemos

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Para evaluar esta última expresión integramos por partes y obtenemos

$$b_k = \frac{2L}{k\pi} (-1)^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, la serie de Fourier asociada con la función f es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2L}{k\pi} (-1)^{k+1} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right). \quad (5.54)$$

Ejercicio 5.7. * Graficar las primeras reducidas S_n de la serie (5.54). Puede ser útil hacer este ejercicio con una computadora, y observar el comportamiento de las reducidas S_n a medida que n crece. ♣

Ejemplo 5.2.5. Vamos a calcular ahora la serie de Fourier asociada con la función $2L$ -periódica que queda definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-L, 0), \\ 1, & x \in [0, L]. \end{cases} \quad (5.55)$$

Naturalmente, como esta función es impar todos los coeficientes a_k son nulos. El cálculo de los b_k se reduce a

$$b_k(f) = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \frac{2}{k\pi} \left(1 + (-1)^{k+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.56)$$

Por lo tanto, la serie de Fourier que corresponde a esta función es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} (1 + (-1)^{k+1}) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{L}x\right)$$

En la figura 5.1 se ilustran la función f y algunas reducidas de su serie de Fourier. Notemos que la función de este ejemplo, igual que en el ejemplo

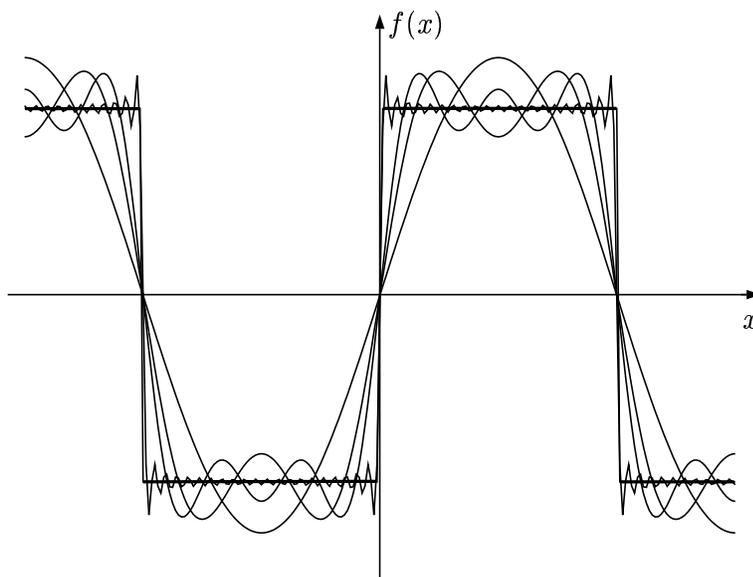


Figura 5.1: la función del ejemplo 5.2.5

anterior, no es un elemento del espacio \mathbf{V} . Sin embargo, está en $L^2([-L, L])$ y es un cálculo sencillo verificar que su norma es $\|f\|_2 = \sqrt{2}$. \heartsuit

Ejercicio 5.8. * Calcular los coeficientes de las series de Fourier de las funciones de período $2L$ que definimos a continuación dando su valor en el intervalo $[-L, L]$.

1. $f(x) = L/2 - x$, para $x \in (0, L]$, y definida en el resto de \mathbf{R} de forma tal que quede una función L -periódica. Sugerencia: llamemos f_0 a la función del ejemplo 5.2.5 y f_1 a la del ejemplo 5.2.4. Observar que $f = (L/2)f_0 - f_1$.
2. $f(x) = L - x$, para $x \in (0, L]$, y definida en $[L, 0)$ de forma tal que sea una función impar. Sugerencia: escribirla como una combinación lineal adecuada de funciones cuyos coeficientes de Fourier sean conocidos para evitar calcular las integrales.

3. La función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-L, -L/2), \\ 0, & x \in [-L/2, L/2), \\ -1, & x \in [L/2, L). \end{cases}$$

La desigualdad de Bessel, el Lema de Riemann-Lebesgue y el teorema de Parseval también son ciertos para funciones de L^2 . Sólo hay que sustituir \mathbf{V} por L^2 en los enunciados correspondientes para obtener las versiones válidas para el espacio L^2 . Lo haremos a continuación.

Proposición 5.5 (Desigualdad de Bessel en L^2). *Los coeficientes*

$$a_k = a_k(f), \quad k = 0, 1, \dots, \quad b_k = b_k(f), \quad k = 1, 2, \dots,$$

del desarrollo en serie de Fourier de una función f en $L^2([-L, L])$ satisfacen la desigualdad de Bessel (5.42)

Corolario 5.6 (Lema de Riemann-Lebesgue en L^2). *Sea f una función de $L^2([-L, L])$. Entonces sus coeficientes de Fourier a_k y b_k tienden a cero cuando k tiende a infinito. En particular, están acotados por una constante independiente de k .*

Teorema 5.2 (Parseval en L^2). *Si f es una función de $L^2([-L, L])$ entonces la sucesión $S_n(f)$ converge en la norma $\|\cdot\|_2$ a f , y sus coeficientes de Fourier a_k y b_k satisfacen la igualdad de Parseval (5.46).*

Una aplicación de la igualdad de Parseval es el cálculo de la norma de una función de L^2 sumando el cuadrado de sus coeficientes de Fourier, o, al revés, evaluar la suma del cuadrado de los coeficientes calculando la norma. A continuación mostramos un ejemplo de esto.

Ejemplo 5.2.6. Consideremos la función $2L$ -periódica f que queda definida sobre todo \mathbf{R} si para $x \in [-L, L)$ fijamos $f(x) = x$. Sus coeficientes de Fourier a_k son todos nulos, y los b_k son

$$b_k = \frac{2L}{k\pi}(-1)^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Fijemos $L = \pi$ para simplificar un poco los cálculos. La igualdad de Parseval permite asegurar entonces que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = \|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

En conclusión, podemos evaluar la suma $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$. ♣

Ejercicio 5.9. * Calcular $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k+1)^2$ usando la identidad de Parseval.

En realidad no sólo podemos calcular la norma de las funciones de L^2 usando la identidad de Parseval. En general, es posible calcular el producto interno entre dos funciones f y g cualesquiera de L^2 usando los coeficientes de Fourier a_k y b_k . Esto no debería sorprendernos porque este tipo de resultados es conocido para espacios de dimensión finita. Para obtener el resultado en un espacio de dimensión infinita es necesario hacer además un paso al límite que, en este caso, está justificado por el teorema de Parseval y por el resultado del ejercicio 5.2.

Proposición 5.7. *Si f y g son dos funciones de $L^2([-L, L])$ entonces*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x)dx = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)a_k(g) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)b_k(g).$$

PRUEBA: Si calculamos el producto interno entre las reducidas $S_n(f)$ y $S_n(g)$ obtenemos

$$\langle S_n(f), S_n(g) \rangle = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f)a_k(g) + \sum_{k=1}^n b_k(f)b_k(g). \quad (5.57)$$

Como las reducidas S_n son sumas finitas, esta igualdad es una consecuencia de las propiedades de linealidad del producto interno y de la ortonormalidad de la familia formada por las funciones c_k y s_k . Para completar la prueba de la proposición trataremos de pasar al límite en (5.57) cuando $n \rightarrow \infty$. El teorema de Parseval y la propiedad de continuidad para el producto interno aseguran que

$$\langle f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n(f), S_n(g) \rangle.$$

Esto muestra que el miembro de la izquierda en (5.57) tiene límite $\langle f, g \rangle$, por lo tanto también las sumas en el miembro de la derecha de (5.57) convergen a $\langle f, g \rangle$. \diamond

Vamos a cerrar esta sección desarrollando el contenido de la observación 5.1.4 acerca de la expresión de las Series de Fourier en términos de las exponenciales trigonométricas. Ese es el contenido de nuestro próximo ejercicio.

Ejercicio 5.10. ** LA FORMA COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER

1. Mostrar que la formula

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)\bar{g}(x)dx \quad (5.58)$$

define un producto interno en el espacio vectorial complejo formado por las funciones a valores complejos, definidas sobre la recta real \mathbf{R} , continuas y $2L$ -periódicas (con \bar{g} indicamos la función que se obtiene conjugando g). Recordemos que en el caso de espacios vectoriales complejos un producto interno debe satisfacer

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle},$$

en vez de la propiedad de simetría $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.

2. Mostrar que la familia

$$e_k(x) = e^{i\frac{k\pi}{L}x} \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (5.59)$$

es un conjunto ortonormal respecto al producto interno (5.58). Notar que la elección del factor de normalización $2L$ para el producto interno (5.58) está hecha para que las exponenciales trigonométricas (5.59) tengan norma igual a 1.

3. Utilizar los mismos argumentos geométrico que en el caso real para concluir que los coeficientes de Fourier respecto a la familia ortonormal (5.59) deben escogerse de la forma

$$d_k = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{k\pi}{L}x} dx \quad (5.60)$$

(el signo de menos en la exponente de la función que aparece dentro de la integral está justificado porque para calcular el producto interno (5.58) hay que conjugar la segunda función).

4. Para $L = \pi$, hallar la serie de Fourier compleja asociada con la función

$$f_1(x) = \sin^2 x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

5. La desigualdad de Bessel y el teorema de Parseval también son ciertos para funciones complejas, periódicas, de cuadrado integrable. Hallar la forma de estas proposiciones para el caso complejo. Demostrar la desigualdad de Bessel. Hallar la forma compleja de la serie de Fourier de la función 2π -periódica que satisface

$$f_2(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

5.3 El decaimiento de los coeficientes de Fourier

En esta sección estudiaremos la relación entre la regularidad de una función f en L^2 y el decaimiento de sus coeficientes de Fourier. Veremos que cuando la función f es muy regular los coeficientes de Fourier tienden a 0 muy rápido, y que, recíprocamente, cuando los coeficientes de Fourier decaen muy rápido la función es regular.

Ya hemos mostrado algunos resultados en esta dirección. Por ejemplo, la pertenencia de una función f al espacio L^2 implica que la serie de los cuadrados de sus coeficientes de Fourier es convergente. También es cierto⁶ que si tenemos dos sucesiones numéricas $a_k, k = 0, 1, \dots$, y $b_k, k = 0, 1, \dots$, tales que

$$\sum_k |a_k|^2 + |b_k|^2 < \infty$$

entonces los a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de una función de L^2 . Por otra parte, si la sucesión de coeficientes de Fourier a_k y b_k de una función continua f satisface la condición más fuerte

$$\sum_k |a_k| + |b_k| < \infty$$

entonces su serie de Fourier converge uniformemente a f . Este es el contenido de la proposición 5.4. Recordemos además que en el ejercicio 5.5, parte 3, vimos que un mayor decaimiento de los coeficientes implica mayor regularidad de la función suma.

Es interesante mencionar que la continuidad de la función f no implica la convergencia uniforme de su serie de Fourier. En realidad ni siquiera implica su convergencia puntual. De hecho, dado cualquier subconjunto finito F del intervalo $[-L, L]$ es posible construir una función continua f tal que su serie de Fourier no converge en los puntos de F .

Sin embargo, el principio general de que a mayor regularidad de la función le corresponde un decaimiento más rápido de los coeficientes de Fourier, y viceversa, es esencialmente correcto. Por ejemplo, mostraremos en esta misma sección que a funciones de clase C^m , con $m \geq 1$ y natural, les corresponden coeficientes de Fourier a_k y b_k que decaen más rápidamente que k^{-m} . También probaremos que es suficiente que f sea derivable para la convergencia uniforme de la serie de Fourier asociada con f . En primer lugar mostraremos este resultado para funciones de clase C^1 , pero veremos luego que una extensión de la noción de derivada permitirá ampliarlo a funciones que no son de clase C^1 pero tienen una *derivada débil* en L^2 . En esta sección introduciremos este

⁶aunque es mucho más difícil de demostrar, y exige que empleemos la integral de Lebesgue en la definición del espacio L^2 . Al respecto ver las nota 3 y 4, al pie de las páginas 364 y 192 respectivamente. Una buena referencia para estudiar la integral de Lebesgue y las series de Fourier es el texto [DM]

nuevo concepto de derivada débil y demostraremos la afirmación que acabamos de hacer.

5.3.1 Funciones con una derivada débil en L^2

En primer lugar, mostraremos que cuando una función es regular, en el sentido de que tiene una derivada continua, sus coeficientes de Fourier decaen más rápidamente que lo que puede obtenerse usando sólo la desigualdad de Bessel (o la igualdad de Parseval) que es cierta para una clase de funciones mucho más amplia y que incluye muchas funciones que no son derivables. Este resultado se deduce de una sencilla aplicación de la fórmula de integración por partes, que permite relacionar los coeficientes de Fourier de una función f con los de su derivada f' .

Consideremos entonces una función f , 2π -periódica y de clase C^1 y, para empezar, calculemos los coeficientes

$$a_k(f) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x dx,$$

para $k \geq 1$. Al integrar por partes, utilizando el hecho de que f es derivable, resulta

$$a_k(f) = \frac{1}{k\pi} f(x) \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \Big|_{-L}^L - \frac{1}{k\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx.$$

Como las funciones que intervienen en el primer sumando del miembro de la derecha tienen período $2L$, al evaluar su incremento entre $-L$ y L obtenemos 0. Por lo tanto

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x dx = -\frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \frac{L}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{L} x dx. \quad (5.61)$$

En resumen, se satisface

$$a_k(f) = -\frac{L}{k\pi} b_k(f'). \quad (5.62)$$

Ejercicio 5.11. * Mostrar que si f es de clase C^1 y $2L$ -periódica entonces los coeficientes b_k satisfacen

$$b_k(f) = \frac{L}{k\pi} a_k(f'), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.63)$$

Ejercicio 5.12. * Mostrar que si f es de clase C^2 entonces

$$\begin{aligned} a_k(f) &= -\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 a_k(f''), & k = 1, 2, \dots, \\ b_k(f) &= -\left(\frac{L}{k\pi}\right)^2 b_k(f''), & k = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Observación 5.3.1. Cuando una función tiene m derivadas sus coeficientes de Fourier son esencialmente los de la derivada m -ésima divididos por un factor k^m . Por lo tanto, cuanto más grande sea el número m más rápido es el decaimiento de sus coeficientes de Fourier a medida que $k \rightarrow \infty$. Como los coeficientes de Fourier de $f^{(m)}$ tienden a cero cuando $k \rightarrow \infty$ concluimos además que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^m a_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^m b_k(f) = 0,$$

tal como habíamos anunciado en la introducción de esta sección. ♠

Observación 5.3.2. La fórmula que vincula los coeficientes de Fourier de una función y los de su derivada puede obtenerse derivando formalmente la serie de Fourier de f . En efecto, si escribimos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

y luego derivamos resulta

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{k\pi}{L}a_k\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L}b_k\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Al identificar los coeficientes de Fourier de f' en esta última fórmula obtenemos exactamente (5.62) y (5.63)

Ejemplo 5.3.3. Consideremos la función f impar y $2L$ -periódica que satisface

$$f(x) = \frac{Lx - x^2}{2}, \quad x \in [0, L].$$

Es posible calcular rápidamente sus coeficientes de Fourier, porque su derivada es la función continua, de período $2L$, que está definida por

$$g(x) = \frac{L}{2} - |x|, \quad x \in [-L, L].$$

Los coeficientes de g los hemos calculado antes, en el ejemplo 5.1.7, y valen

$$a_k(g) = \frac{2L}{(k\pi)^2}(1 - (-1)^k), \quad b_k(g) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Con esta información, los coeficientes de f resultan ser

$$a_k(f) = 0, \quad b_k(f) = \frac{2L^2}{(k\pi)^3}(1 - (-1)^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Naturalmente, no podemos calcular $a_0(f)$ a partir del conocimiento de $a_0(g)$, porque cualquier función \bar{f} que difiera de f en una constante también tendrá a g como su derivada, pero $a_0(\bar{f})$ será distinto de $a_0(f)$. Esto no es un problema grave porque el cálculo de a_0 se reduce a evaluar una integral. En este caso $a_0(f) = 0$ porque f es impar.

Ejercicio 5.13. * Consideremos la función $2L$ -periódica que queda definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right)^2, & x \in [0, L], \\ \frac{L^2}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} + x \right)^2, & x \in [-L, 0]. \end{cases}$$

Calcular sus coeficientes de Fourier. ♣

Ejemplo 5.3.4. Llamemos f a la función $2L$ periódica que en el intervalo $[-L, L]$ está definida por $f(x) = |x|$. Como es bien sabido, esta función no es de clase C^1 en \mathbf{R} , aunque puede obtenerse calculando una integral. En efecto, tenemos que

$$f(x) = \int_0^x g(s) ds,$$

donde g es la función impar y de período $2L$ que en el intervalo $(0, L]$ es igual a 1. Esto es lo mismo que decir que g es la extensión $2L$ -periódica a toda la recta de

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, 1]. \end{cases} \quad (5.65)$$

Observemos entonces que, en algún sentido, la derivada de f es g . El análisis de Fourier está de acuerdo con esta afirmación, porque los coeficientes de Fourier de f son

$$a_k(f) = \frac{2L}{(k\pi)^2}((-1)^k - 1), \quad b_k(f) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

los de g son

$$a_k(g) = 0, \quad b_k(g) = \frac{2}{k\pi}((-1)^{k+1} + 1) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

y, si consideramos $f' = g$, satisfacen las relaciones (5.62) y (5.63) que vinculaban los coeficientes de Fourier de una función con los de su derivada. Para ver por qué ocurre esto concentremos nuestra atención en las fórmulas para los $a_k(f)$ (todo es igual para los b_k). Si revisamos atentamente los cálculos que nos permitieron deducir (5.62) notaremos que sólo dependen de que sea cierta la fórmula de integración por partes (5.61). En el caso particular de las funciones f y g con las que estamos trabajando no es difícil verificar, calculando directamente, que valen las igualdades

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{k\pi}{L} x dx &= -\frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \frac{L}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{L} x dx, \\ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{L} x dx. \end{aligned}$$

No comprobaremos ahora que esto es así, porque haremos un cálculo más general dentro de poco (ver la definición 5.66 y la proposición 5.8). ♣

La idea de que la fórmula de integración por partes es adecuada para caracterizar a las derivadas nos permitirá extender el cálculo de derivadas a funciones que no son diferenciables en el sentido clásico, tal como le pasa a la función f de nuestro último ejemplo. Vamos a introducir una definición que recoge esta idea y nos permite extender el cálculo de derivadas al espacio L^2 , de una manera que es compatible con las fórmulas (5.62) y (5.63)⁷.

Definición 5.1. Diremos que una función $g \in L^2([-L, L])$ es una *derivada débil* de una función $f \in L^2([-L, L])$ si para toda función h de clase C^1 , $2L$ -periódica, se satisface la igualdad

$$\int_{-L}^L f(x)h'(x)dx = - \int_{-L}^L g(x)h(x)dx. \quad (5.66)$$

Es evidente, a partir de las fórmulas de los coeficientes de Fourier, que esta definición implica que si g es la derivada débil de f entonces tendremos

$$\begin{aligned} a_k(f) &= -\frac{L}{k\pi}b_k(g), \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_k(f) &= \frac{L}{k\pi}a_k(g) \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ejercicio 5.14. * Mostrar que si g es una derivada débil de una función de L^2 entonces $a_0(g) = 0$. En particular, la integral de g en el intervalo $[-L, L]$ es nula.

Mostraremos ahora que la definición de derivada débil es consistente con la idea de que si una función f se obtiene integrando otra función g entonces g es la derivada de f . Sabemos que esto no es estrictamente cierto en el sentido “clásico” de derivada si g no es continua. La noción de derivada débil es más flexible y permite considerar funciones g , no continuas, dentro de la integral.

Proposición 5.8. Sean f y g dos funciones de $L^2([-L, L])$. Supongamos que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(s)ds, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Entonces g es una derivada débil de f .

Observación 5.3.5. Notemos que la integral sobre $[-L, L]$ de la función g que aparecen en el enunciado de la proposición tiene que ser nula, porque estamos suponiendo que f es periódica de período $2L$. Naturalmente, el resultado contenido en el ejercicio (5.14) indica que las cosas no pueden ser de otra manera. ♠

⁷recordemos que habíamos utilizado este tipo de ideas al introducir las soluciones débiles de la ecuación de Burgers. Sugerimos ver los comentarios del comienzo de la sección 4.1.4, página 292

Observación 5.3.6. Si \tilde{g} es una función que coincide con g salvo en un conjunto finito de puntos obtenemos el mismo resultado al integrar \tilde{g} que al integrar g . Por lo tanto \tilde{g} también es una derivada débil para g . Ver la sección 5.3.3 por más información sobre este punto. ♠

Para demostrar la proposición nos hará falta un pequeño lema.

Lema 5.9. Si $g \in L^2([-L, L])$ entonces

$$\int_{-L}^L |g(x)| dx < +\infty.$$

PRUEBA: Como la función g está en L^2 entonces también su módulo $|g|$ lo está. Por lo tanto podemos escribir $|g| = 1|g|$ y aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\int_{-L}^L |g(x)| dx \leq \sqrt{\int_{-L}^L |g(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{-L}^L 1 dx} = \sqrt{2L} \|g\|_2 < +\infty. \quad \diamond$$

PRUEBA DE LA PROPOSICIÓN 5.8: Debemos mostrar que se satisface la igualdad (5.66) que aparece en la definición de derivada débil. Para una función h , de clase C^1 y $2L$ -periódica calculemos

$$I = \int_{-L}^L f(x) h'(x) dx.$$

Nos simplificará un poco las cuentas notar que da lo mismo calcular la integral en $[-L, L]$ que en $[0, 2L]$, ya que el integrando es periódico, así que aprovecharemos esta circunstancia. Tenemos entonces

$$I = \int_0^{2L} \left(\int_0^x g(s) ds \right) h'(x) dx.$$

El término que proviene de $f(0)$ desaparece porque al integrar $h'(x)$ en un intervalo de longitud $2L$ el resultado es nulo. Como la integral de $|g|$ es finita podemos cambiar el orden de integración para obtener

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2L} \left(\int_s^{2L} h'(x) dx \right) g(s) ds = \int_0^{2L} (h(2L) - h(s)) g(s) ds = \\ &= \int_0^{2L} h(s) g(s) ds + h(2L) \int_0^{2L} g(s) ds. \end{aligned}$$

Como la integral de g sobre cualquier intervalo de longitud $2L$ es nula obtenemos

$$I = - \int_0^{2L} h(s) g(s) ds = - \int_{-L}^L h(s) g(s) ds. \quad \diamond$$

La proposición 5.8 implica que la función g del ejemplo 5.3.4 es efectivamente la derivada débil de f , dado que f se obtiene integrando g . En realidad esta proposición permite elaborar un método bastante útil para hallar una derivada débil de una función f :

1. en primer lugar derivemos f en los puntos en que sea derivable, despreocupándonos de lo que ocurre donde no es derivable. En estos puntos definamos $g = f'$, en el resto pongamos $g = 0$.
2. calculemos luego la función

$$f(0) + \int_0^x g(s) ds.$$

Si recuperamos la función original entonces g es una derivada débil de f .

Ejercicio 5.15. *

1. Consideremos las funciones $2L$ -periódicas f y g definidas por

$$f(x) = x^2/2, \quad g(x) = x, \quad x \in [-L, L].$$

Probar que g es la derivada débil de f y calcular todos los coeficientes de Fourier de f .

2. Calcular los coeficientes de Fourier de la función $2L$ periódica que queda definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + L, & x \in [-L, -L/2], \\ L/2, & x \in [-L/2, L/2], \\ L - x, & x \in [L/2, L]. \end{cases}$$

Sugerencia: tener en cuenta la parte 3 del ejercicio 5.8

Ejercicio 5.16. ** Sea f una función continua y $2L$ -periódica. Llamemos X al conjunto donde f es de clase C^1 y supongamos que sólo hay una cantidad finita de puntos del complemento de X en $[-L, L]$. Supongamos además que la función

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \notin X, \\ f'(x), & x \in X, \end{cases}$$

está en L^2 . Entonces g es una derivada débil de f .

Ejercicio 5.17. **

1. Sean f y g dos funciones de L^2 que tienen derivadas débiles f' y g' en L^2 . Probar que se satisface la “fórmula de integración por partes”

$$\int_{-L}^L f(x)g'(x)dx = - \int_{-L}^L f'(x)g(x)dx.$$

2. Sean f y g dos funciones de L^2 tales que se satisfacen las relaciones

$$a_k(f) = -\frac{L}{k\pi}b_k(g), \quad b_k(f) = \frac{L}{k\pi}a_k(g), \quad k = 1, 2, \dots,$$

y $a_0(g) = 0$. Probar que g es una derivada débil de f .

Para este ejercicio puede ser útil tener presente la proposición 5.7.

Ejercicio 5.18. *** Consideremos una función $f \in L^2$, que además es continua y tiene una derivada débil⁸ g en L^2 .

1. Mostrar que

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(s) ds. \quad (5.67)$$

Sugerencia: considerar la función auxiliar

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & s \notin [0, 2], \\ s, & s \in [0, 1], \\ 2 - s, & s \in [1, 2]. \end{cases}$$

Luego, para $x \in (0, L]$ definir

$$\psi_n(s) = n\varphi(ns) - n\varphi(n(x-s)),$$

(a pesar la fórmula espantosa que las define la ψ_n son en realidad sencillas, sugerimos dibujar las gráficas de φ y las ψ_n para verlo) y utilizar como función h en la definición de derivada débil las funciones

$$h_n(s) = \int_0^s \psi_n(t) dt.$$

2. Mostrar que f es Hölder continua con exponente $1/2$.

NOTA: Una función f , definida sobre un subconjunto Ω de \mathbf{R} (o de \mathbf{R}^n), es Hölder continua con exponente $\alpha \in (0, 1)$ si existe una constante C tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad x, y \in \Omega.$$

Observación 5.3.7. El ejercicio anterior y la proposición 5.8 muestran que la función g es una derivada débil de f si y sólo si se satisface la fórmula (5.67). Esto podría hacernos pensar que es más natural tomar esta fórmula como definición de derivada débil, en vez de dar la definición 5.1. Cuando trabajamos con funciones definidas sobre \mathbf{R} esto es esencialmente cierto. Sin embargo, la definición de derivada débil basada en la fórmula de integración por partes puede extenderse sin dificultad a dimensiones más altas, en tanto que no es posible hacer lo mismo con (5.67). ♠

Habíamos visto antes que cuando los coeficientes de Fourier de una función continua f decrecen suficientemente rápido la serie de Fourier de f converge a f uniformemente. Éste era el contenido de la proposición 5.4, y la hipótesis que requeríamos sobre los coeficientes de Fourier era que la serie

$$\sum_k \{|a_k(f)| + |b_k(f)|\}$$

⁸veremos luego que las funciones de L^2 que tienen una derivada débil “son continuas”, pero de momento agreguemos la hipótesis de continuidad como un requisito independiente. Ver los comentarios de la sección 5.3.3

fuera convergente. Probaremos a continuación una proposición que asegura que esta condición se satisface si la función f tiene una derivada débil en L^2 .

Proposición 5.10. *Sea f una función de L^2 que tiene una derivada débil en L^2 . Entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k(f)| + |b_k(f)|\} < \infty.$$

PRUEBA: Vamos a dar una cota independiente de n para las sumas

$$\sum_{k=1}^n \{|a_k(f)| + |b_k(f)|\}.$$

Esto es suficiente para probar la proposición. Llamemos g a la derivada débil de f . Naturalmente, trataremos de usar el hecho de que los coeficientes de Fourier de f se obtienen multiplicando los de g por un factor $1/k$, que juega a nuestro favor. Al usar las fórmulas (5.63) y (5.62) obtenemos

$$\sum_{k=1}^n \{|a_k(f)| + |b_k(f)|\} = \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|a_k(g)|}{k} + \frac{L}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{|b_k(g)|}{k} \quad (5.68)$$

Para estimar cada una de las sumas del miembro de la derecha intentaremos sacar partido de que tanto la serie de los cuadrados de los coeficientes de Fourier de g , como la serie de término general $1/k^2$ son convergentes. Esto sugiere usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para sumas finitas y acotar

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k(g)|}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k(g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.69)$$

Naturalmente, el sumando de los b_k admite la estimación

$$\sum_{k=1}^n \frac{|b_k(g)|}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^n |b_k(g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.70)$$

No es difícil estimar cada una de las sumas que aparecen en los miembros de la derecha de (5.69) y (5.70). Comencemos por las sumas de $1/k^2$. Tenemos

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < \left(\frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Para acotar las sumas de los cuadrados de $a_k(g)$ y $b_k(g)$ podemos recurrir a la desigualdad de Bessel o a la igualdad de Parseval. Es inmediato concluir a partir de ellas que

$$\sum_{k=1}^n |a_k(g)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(g)|^2 \leq \|g\|_2^2,$$

y que

$$\sum_{k=1}^n |b_k(g)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k(g)|^2 \leq \|g\|_2^2.$$

Reuniendo todo lo que hicimos hasta ahora concluimos que para todo $n \geq 1$ podemos acotar las sumas (5.68) como

$$\sum_{k=1}^n \{|a_k(f)| + |b_k(f)|\} \leq L\|g\|_2, \quad (5.71)$$

y esta estimación, independiente de n , completa la prueba. \diamond

Corolario 5.11. *Si f es una función continua que tiene una derivada débil en L^2 entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente a f .*

Ejemplo 5.3.8. Volvemos ahora sobre la función f , periódica de período $2L$,

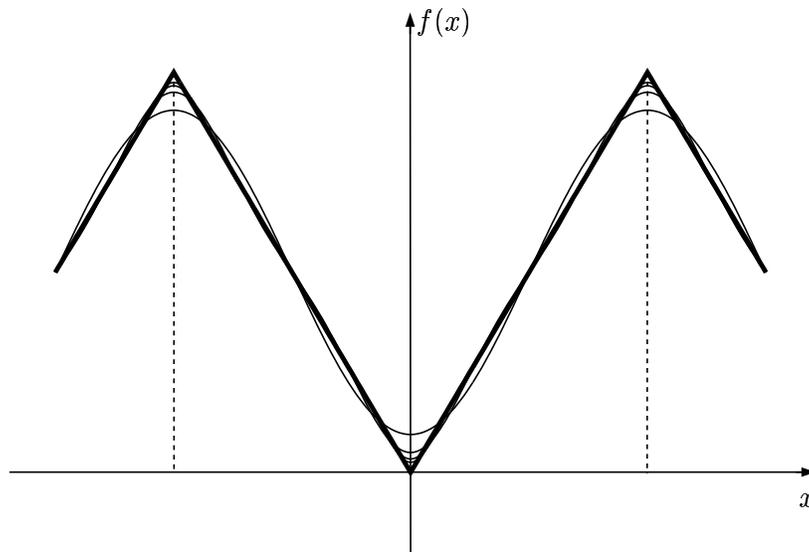


Figura 5.2: la función de los ejemplos 5.3.4 y 5.3.8

definida por la fórmula $f(x) = |x|$ para $x \in [-L, L]$, con la que ya trabajamos en el ejemplo 5.3.4. Como es bien sabido, esta función no es de clase C^1 en \mathbf{R} , aunque puede obtenerse integrando la función discontinua del ejemplo 5.2.5, que resulta ser su derivada débil. Su serie de Fourier converge uniformemente a f . Este hecho se ilustra en la figura 5.2, donde hemos representado a f y alguna de las primeras reducidas de su serie de Fourier. Puede observarse que el gráfico de las reducidas rápidamente se aproxima al de f . \clubsuit

Ejercicio 5.19. ** Consideremos la función f de período $2L$ que satisface

$$f(x) = |x|^\alpha, \quad x \in [-L, L].$$

Mostrar que si $\alpha > 1/2$ la serie de Fourier de f converge uniformemente a f .

5.3.2 † Otros resultados sobre la convergencia de las series de Fourier

Los últimos resultados de la sección anterior aseguran la convergencia uniforme de las series de Fourier cuando los coeficientes a_k y b_k satisfacen la condición de sumabilidad (5.49). Notemos que las funciones para las que calculamos los coeficientes de Fourier en los ejemplos 5.2.4 y 5.2.5 tienen coeficientes de Fourier cuya serie no es absolutamente convergente. Recordemos que estos ejemplos eran la función $2L$ -periódica definida por $f(x) = x$, si $x \in [-L, L)$, cuyos coeficientes de Fourier son

$$a_k(f) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad b_k(f) = \frac{2L}{k\pi} (-1)^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

y la función g impar, $2L$ -periódica, que vale 1 en el intervalo $(0, L]$. Sus coeficientes de Fourier son

$$a_k(g) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad b_k(g) = \frac{2L}{k\pi} \left(1 + (-1)^{k+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

A continuación presentamos un resultado que permite asegurar que las series de Fourier de f y g convergen a f y a g fuera de los puntos en que estas funciones presentan discontinuidades.

Teorema 5.3 (Dini). *Sea f una función en $L^2([-L, L])$. Si en un punto $x \in \mathbf{R}$ existen los límites laterales*

$$\begin{aligned} f(x^+) &= \lim_{h \downarrow 0} f(x+h), \\ f(x^-) &= \lim_{h \uparrow 0} f(x+h), \end{aligned} \tag{5.72}$$

y las derivadas laterales

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}, \\ D^- f(x) &= \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x^-)}{h}, \end{aligned} \tag{5.73}$$

entonces la serie de Fourier de f converge en ese punto al promedio entre $f(x^+)$ y $f(x^-)$, es decir, para ese valor de x se satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)). \tag{5.74}$$

La prueba de este teorema puede encontrarse, por ejemplo, en el texto [CJ1]. Notemos que aunque el teorema de Dini está enunciado en una forma bastante general en la que sólo intervienen los límites y derivadas laterales tiene el siguiente corolario:

Corolario 5.12. *Si f es una función de L^2 derivable en x entonces la serie de Fourier de f evaluada en x converge a $f(x)$.*

PRUEBA: Si f es derivable en un punto x entonces es continua en x y por lo tanto

$$f(x) = f(x^+) = f(x^-).$$

La derivabilidad asegura que existen las derivadas laterales y son iguales a $f'(x)$. Entonces podemos aplicar el Teorema de Dini para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = (f(x^+) + f(x^-))/2 = f(x). \quad \diamond$$

Observación 5.3.9. El teorema de Dini permite dar una prueba alternativa de que la serie de Fourier de una función de clase C^1 converge uniformemente a f . En efecto, como la función es derivable en todos los puntos el teorema de Dini asegura que su serie de Fourier converge puntualmente a f . Por otra parte, como la función tiene una derivada sus coeficientes de Fourier satisfacen la condición de sumabilidad (5.49) y la serie de Fourier converge uniformemente. Dado que el límite uniforme de la serie de Fourier sólo puede ser su límite puntual, concluimos que ésta converge uniformemente a f . ♠

Ejercicio 5.20. ** Consideremos la función f de período 2π , que en el intervalo $[-\pi, \pi)$ queda definida por $f(x) = e^x$. Calcular sus coeficientes de Fourier y la suma de su serie de Fourier para cada $x \in [-\pi, \pi]$. ††

5.3.3 Las sutilezas de la teoría de las series de Fourier en L^2

Habíamos anunciado en la observación 5.2.1 que el marco más natural para la teoría de las series de Fourier es el espacio L^2 , formado por las funciones de cuadrado integrable, en el que podemos definir el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x)dx. \quad (5.75)$$

Esto es esencialmente cierto, salvo por un pequeño detalle: la fórmula (5.75), que define un producto interno en el espacio \mathbf{V} de las funciones continuas y $2L$ -periódicas, *no* define un producto interno en L^2 . Las propiedades de linealidad y simetría siguen siendo ciertas, pero puede ocurrir que una función f que no se anule idénticamente satisfaga

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x)dx = 0. \quad (5.76)$$

Un ejemplo de esto es la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 2kL, \ k \in \mathbf{Z}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.77)$$

Es claro que f está en L^2 y no es la función nula, pero satisface la igualdad (5.76). Observemos que aunque f no sea idénticamente nula el conjunto en el que es distinta de cero es muy chico. Es tan chico que la integral en (5.76) no lo detecta. Esto no puede ocurrir para una función continua, tal como mostramos en el lema A.1, ver la página xi del apéndice. En general, puede ocurrir que dos funciones f y g distintas satisfagan

$$\|f - g\|_2^2 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(x) - g(x)|^2 dx = 0, \quad (5.78)$$

cosa que también es incompatible con que $\|\cdot\|_2$ defina una norma en L^2 . Por ejemplo, tal cosa ocurre cuando f es la que introducimos en (5.77) y $g \equiv 0$. Este hecho no constituye un problema grave y puede resolverse *identificando* dos funciones f y g para las que se satisfaga (5.78) tratándolas como si fueran *la misma* función. En realidad, si la integral (5.78) se anula el conjunto en que las dos funciones difieren tiene que ser pequeño (ver la observación 5.3.10, sobre los conjuntos de longitud o medida nula) y f y g son esencialmente iguales. Al menos son iguales en todo lo que respecta al cálculo de integrales, porque el conjunto en que difieren es demasiado chico como para que la operación de integrar pueda detectarlo⁹.

Observación 5.3.10. Diremos que un conjunto E incluido en $[-L, L]$ es un *conjunto de medida nula*, o *conjunto de longitud nula* si tiene la siguiente propiedad: si dos funciones f y g difieren sólo sobre E (o, equivalentemente, son iguales en todos los puntos de $[-L, L]$ que no están en E), entonces la igualdad

$$\int_{-L}^L |f - g|^2 = 0 \quad (5.79)$$

se satisface. Por ejemplo, un conjunto formado por una cantidad finita de puntos es de longitud nula. En efecto, si dos funciones son iguales salvo en un conjunto de medida nula, entonces sus integrales sobre cualquier intervalo son iguales. ♠

Recordemos ahora que la serie de Fourier de una función f depende de f sólo a través de los coeficientes de Fourier, que se calculan integrando la f

⁹desde un punto de vista algo más formal podemos expresar todo lo anterior definiendo una relación de equivalencia que consiste en declarar $f \sim g$ si se satisface (5.78), para trabajar luego con las clases de equivalencia en vez de las funciones. En realidad L^2 es el espacio formado por estas clases de equivalencia. Sin embargo, preferiremos mantener esta discusión en un tono algo más informal y evitaremos entrar en más detalles sobre este asunto

contra las funciones trigonométricas c_k y s_k . Este hecho implica que si modificamos la función f en un conjunto de medida nula la serie de Fourier no cambia, ya que este cambio no afectará a las integrales. Por lo tanto, nuestro propósito de identificar dos funciones que sólo difieren en conjuntos de medida nula es perfectamente compatible con la teoría de las series de Fourier. De hecho, esta teoría produce la identificación automáticamente, porque funciones que sólo difieren en conjuntos de medida nula dan lugar a las mismas series de Fourier.

Este hecho impone una cierta limitación a los resultados de convergencia puntual que podemos obtener para las series de Fourier. En efecto, supongamos que la serie de Fourier de una función f converge en todo punto y tomemos una función g que coincida con f salvo en un conjunto de medida nula. La serie de Fourier de g será la misma que la de f y no convergerá a g en el conjunto en que g es distinta de f , así que el mejor resultado de convergencia puntual posible, en el marco de funciones de L^2 , es un resultado que valga *salvo en conjuntos de medida nula*. Este es el contenido del teorema que enunciamos a continuación¹⁰.

Teorema 5.4 (Carleson, 1966). *Si f es una función de $L^2([-L, L])$ entonces su serie de Fourier converge puntualmente a f salvo en un conjunto de medida nula.*

Vamos a poner ahora en el contexto de la teoría en L^2 nuestros resultados sobre funciones f cuyos coeficientes de Fourier satisfacen la condición de sumabilidad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k(f)| + |b_k(f)|\} < \infty \quad (5.80)$$

Consideremos entonces que f está en L^2 y se satisface (5.80). Entonces la serie de Fourier de f converge uniformemente y, en consecuencia, su límite es una función continua. Naturalmente, el límite de la serie de Fourier es f , pero sólo en el sentido de L^2 . Por lo tanto, puede ocurrir que f y la suma de la serie difieran sobre algún conjunto de medida nula. Esto implica que si una función f de L^2 tiene una serie de Fourier uniformemente convergente entonces existe una función continua \tilde{f} que es igual a f salvo en un conjunto de medida nula. Dado que estamos identificando funciones que sólo difieren en conjuntos de medida nula no hay problema en pensar que f “es” \tilde{f} y concluir,

¹⁰Es muy interesante subrayar que el teorema de Carleson data de 1966 (de hecho es el único teorema que mencionaremos en este curso que es menos viejo que el autor del texto) y trata sobre problemas que fueron formulados a comienzos del siglo XIX, cuando la teoría de las series de Fourier fue creada. Advertir sobre el largo tiempo transcurrido entre la aparición de las series de Fourier y la resolución del problema de la convergencia puntual es una invitación a mencionar que las cuestiones relacionados con las series de Fourier y, más en general, con todo el análisis armónico, han impulsado el desarrollo del análisis matemático durante los dos últimos siglos

en este sentido un poco más laxo que permite la teoría en L^2 , que f es una función continua.

En particular, si f tiene una derivada débil en L^2 la función f es continua (a riesgo de aburrir recordemos que en este contexto esta afirmación sólo significa que existe una función continua \tilde{f} que es igual a f salvo en un conjunto de medida nula) ya que sabemos que la existencia de una derivada débil implica (5.80).

Pare cerrar estos comentarios vale la pena recordar que la definición de derivada débil está dada en término de integrales en las que aparecen f y su derivada débil g . Por lo tanto, esta definición no se ve afectada si modificamos f o g en un conjunto de medida nula. En otras palabras, tal como adelantamos, si g es una derivada débil de g cualquier función \tilde{g} que difiera de g únicamente en un conjunto de medida nula es también una derivada débil de f . En el marco de la teoría del espacio L^2 las funciones g y \tilde{g} deben ser identificadas y vistas como lo que esencialmente son: la misma función. En realidad dos derivadas débiles g y \tilde{g} de una misma función f sólo pueden diferir en un conjunto de medida nula. Recurriendo al procedimiento de identificar funciones que sólo difieren sobre conjuntos de medida nula, podemos afirmar que la derivada débil es única, y hablar entonces de *la* derivada débil, en vez de referirnos a *una* derivada débil como hemos hecho hasta ahora.

5.3.4 Aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales

Como primera aplicación de la teoría que acabamos de desarrollar a las ecuaciones en derivadas parciales completaremos la discusión acerca de la resolución del problema de Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u(0, t) = 0, & t \in [0, \infty), \\ u(L, t) = 0, & t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (5.81)$$

para la ecuación del calor. En la sección 4.5 aprendimos a resolver este problema para datos iniciales de la forma

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L], \quad (5.82)$$

para los que se satisface la condición

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty.$$

Para poder expresar la función u_0 como serie de senos debemos considerar su extensión impar y periódica, con período $2L$, a toda la recta. Llamemos \tilde{u}_0

a esta función. Los coeficientes b_k que aparecen en (5.82) no son otra cosa que los coeficientes de Fourier $b_k(\tilde{u}_0)$. Por lo tanto, la convergencia de la serie formada por los valores absolutos de estos coeficientes es suficiente para asegurar que

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L], \quad (5.83)$$

es la única solución del problema de contorno y valores iniciales para la ecuación del calor que estamos considerando. Naturalmente, una condición suficiente para obtener este resultado es que la función \tilde{u}_0 tenga una derivada débil en L^2 .

Observación 5.3.11. En realidad la fórmula (5.83) para la solución de la ecuación del calor vale en $t > 0$ para cualquier dato u_0 continuo. Notemos que puede no valer en $t = 0$, porque la continuidad de u_0 no asegura la convergencia de la serie de Fourier asociada con el dato. Sin embargo en $t = 0$ sabemos que $u(x, 0) = u_0(x)$, de modo que ya tenemos una expresión para la solución. Vale la pena enunciar este resultado en la forma de una proposición.

Proposición 5.13. *Sea u_0 una función continua definida sobre el intervalo $[0, L]$, que satisface $u_0(0) = u_0(L) = 0$. Entonces la solución $u(x, t)$ del problema de Cauchy-Dirichlet 5.81 satisface*

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L], \quad t > 0,$$

donde los coeficientes b_k son los coeficientes de Fourier de la extensión impar y $2L$ -periódica de u_0 a toda la recta real.

A continuación presentamos dos ejercicios que nos permitirán aplicar la fórmula (5.83) para obtener alguna información adicional sobre las soluciones de la ecuación del calor.

Ejercicio 5.21. **

1. Mostrar que la integral de energía

$$I(t) = \int_0^L u^2(x, t) dx$$

es decreciente.

2. Probar que el flujo asociado con el problema de Cauchy-Dirichlet para la ecuación del calor (ver la observación 4.6.4) satisface

$$\|\Phi(u_0, t) - \Phi(v_0, t)\|_{L^2([0, L])} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2([0, L])}.$$

Mostrar que esta fórmula implica la dependencia continua del flujo respecto al dato inicial, para la noción de convergencia asociada con la norma $\|\cdot\|_2$. ♠

Ya habíamos visto que el método de la serie de Fourier permite resolver además otras ecuaciones en derivadas parciales. A continuación presentamos nuevas aplicaciones.

Ejercicio 5.22. * Utilizar el método de las series de Fourier para resolver

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi),$$

con las condiciones de borde:

1. $u(0, y) = u(\pi, y) = \sin y$, $u(x, \pi) = u(x, 0) = 0$.
2. $u(0, y) = u(\pi, y) = 0$, $u(x, \pi) = u(x, 0) = x(x - \pi)$.
3. $u(0, y) = u(\pi, y) = \sin y$, $u(x, \pi) = u(x, 0) = x(x - \pi)$.

Ejercicio 5.23. ** SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DEL CALOR CON DATO EN L^2

Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in \Omega = (0, 1) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in [0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \end{cases} \quad (5.84)$$

donde u_0 es una función de $L^2([0, 1])$.

1. Mostrar que existe una función continua $u : [0, 1] \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ que satisface la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ en Ω (en particular, hay que demostrar que estas derivadas parciales existen), y que tiene la propiedad de que

$$\lim_{t \downarrow 0} u(\cdot, t) = u_0$$

respecto a la norma $\|\cdot\|_2$ del intervalo $[0, 1]$ ¹¹.

2. Mostrar que hay una única función $u(x, t)$ que es solución del problema (5.84) en el sentido descrito en la parte 1.

Ejercicio 5.24. ** En este ejercicio consideraremos el problema de la cuerda vibrante de longitud 1, con sus extremos fijos, cuyas vibraciones están amortiguadas. Sea

$$\Omega = (0, 1) \times (0, +\infty).$$

La descripción de este problema conduce a buscar una función $u = u(x, t)$, definida sobre el conjunto $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, +\infty)$ que satisfaga

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - u_t(x, t), & (x, t) \in \Omega \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, 1], \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & x \in [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in [0, \infty). \end{cases} \quad (5.85)$$

¹¹SOBRE LA NOTACIÓN recordemos que $u(\cdot, t)$ es la función $u(\cdot, t) : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ que a cada $x \in [0, 1]$ le asocia $u(x, t)$

donde u_0 y v_0 son dos funciones prefijadas que contienen la información sobre el estado de la cuerda en el instante inicial, y que satisfacen

$$u_0(0) = u_0(1) = v_0(0) = v_0(1) = 0.$$

El término $-u_t$ en el miembro de la derecha de la ecuación es el responsable del amortiguamiento.

1. Buscar una solución de (5.85) usando el método de las series de Fourier. Calcular la solución formalmente.
2. Buscar hipótesis sobre los datos u_0 y v_0 , que permitan asegurar que la solución hallada en 1 es efectivamente una solución del problema (5.85). Para las partes restantes de este problema asumiremos que se satisfacen estas hipótesis sobre los datos u_0 y v_0 .
3. Mostrar que la integral de energía

$$I(t) = \int_0^1 (u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)) dx.$$

es una función decreciente de t y que tiende a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$.

4. Mostrar que se satisface además

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |u(x, t)| = 0.$$

Vamos a cerrar esta sección con un ejercicio que vincula los dos métodos que utilizamos para resolver la ecuación de ondas en un intervalo $[0, L]$. Recordemos que habíamos tratado este problema en los ejercicios 4.33, parte 4, y 4.50¹².

Ejercicio 5.25. ** Mostrar, utilizando las fórmulas

$$\begin{aligned} \sin a \cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a - b) + \sin(a + b)], \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)], \end{aligned}$$

que la solución obtenida, en la parte 4 del ejercicio 4.33, por el método de propagación coincide con la solución encontrada en el ejercicio 4.50.

¹²esta cuestión suscitó una polémica entre Euler y Daniel Bernoulli (1700–1782) en la segunda mitad del siglo XVIII (D. Bernoulli era hijo de Juan Bernoulli (1667–1748) y sobrino de Jacobo Bernoulli (1654–1705)). En efecto, entre 1747 y 1748 d'Alembert (1717–1783) y Euler (1707–1783) llegaron a la conclusión de que las soluciones de la ecuación de ondas debían ser funciones de la forma $F(x - ct) + G(x + ct)$. En 1753 D. Bernoulli propuso, basándose en consideraciones físicas, que la solución general del problema podía expresarse por medio de una serie trigonométrica. Euler, a pesar de que él mismo había resuelto algunos casos particulares por medio de funciones trigonométricas, se expresó contra esta posibilidad ya que consideraba que era imposible representar una función general por medio de una serie que, inevitablemente, conduce a una función impar y periódica. En aquella época no se aceptaba que una expresión analítica representase una función apenas en un intervalo, lo que explica el punto de vista de Euler, y harían falta todavía los trabajos de Fourier y los avances del análisis del siglo XIX para poder dilucidar estas cuestiones

Apéndice A

Prerrequisitos

El objetivo de este apéndice es presentar algunas cuestiones necesarias para este curso. Se trata de tópicos que corrientemente son cubiertos en una introducción al cálculo y al álgebra lineal. Como son temas básicos para algunos de los desarrollos contenidos en este texto hemos preferido incluirlos en este apéndice, dándoles un tratamiento adecuado al uso que en otras partes de la obra se hace de estos temas.

A.1 Nociones sobre curvas y campos vectoriales

Esta sección tiene como objetivo introducir los elementos de la teoría de *curvas* y *campos vectoriales* que son necesarios para tratar las ecuaciones diferenciales ordinarias. Nos limitaremos a los aspectos más básicos y a fijar el lenguaje que utilizaremos en el resto del curso. Una referencia apropiada para estos temas es el capítulo 4 de [CJ1].

Aunque las nociones de campo vectorial y curva aparecen naturalmente al tratar ecuaciones diferenciales en \mathbf{R}^n con $n \geq 2$, nos mantendremos en esta sección en el marco $n = 2$ en el que es más fácil aplicar la intuición geométrica. Además, a lo largo de este curso desarrollaremos en ese contexto la mayor parte del trabajo con ecuaciones diferenciales .

Curvas

Recordemos que la solución de una ecuación diferencial $\dot{X} = f(X)$, donde X indica un vector de \mathbf{R}^2 y f es una función continua

$$f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2,$$

es una función

$$X : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2 \tag{A.1}$$

de clase C^1 , definida sobre un intervalo abierto I , tal que para todo $t \in I$ se satisface la igualdad $\dot{X}(t) = f(X(t))$. Como $X(t)$ toma valores en \mathbf{R}^2 es posible representarla pasando a coordenadas como $X(t) = (x(t), y(t))$ (o $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, en general cualquier otra notación razonable para cada una de las coordenadas es aceptable). Notemos que si X es una función como en (A.1) entonces x e y son dos funciones reales, de clase C^1 , definidas sobre el intervalo I . El vector \dot{X} no es otra cosa que el vector que se obtiene derivando cada una de las componentes x e y .

Ejemplo A.1.1.

1. Si $X(t) = (t, t^2)$ entonces $\dot{X}(t) = (1, 2t)$.
2. Si $X(t) = (\cos t, \sin t)$ entonces $\dot{X}(t) = (-\sin t, \cos t)$. ♣

Notemos que en la parte 1 de este último ejemplo, los puntos $X(t)$ recorren la parábola de ecuación $y = x^2$ en el plano (x,y), y cada vector $\dot{X}(t)$ es tangente a esta parábola en el punto $X(t)$. En el ejemplo de la parte 2 los puntos $X(t)$ están siempre sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el parámetro t no es otra cosa que el ángulo que forma el vector (x, y) con el eje Ox . También en este caso los vectores $\dot{X}(t)$ son tangentes a la circunferencia.

El hecho de que al tomar una función $X : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ los puntos $X(t)$ recorren una curva en el plano es más o menos intuitivo, al punto de que lo tomaremos

como definición de la noción de curva. A lo largo de este curso diremos que una función $X : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, definida sobre un intervalo abierto $I \subset \mathbf{R}$ y de clase C^1 , es una *curva parametrizada*. Llamaremos *curva* a las imágenes de las curvas parametrizadas. Es decir, si X es una curva parametrizada entonces el conjunto

$$\gamma = \{X(t); t \in I\} \tag{A.2}$$

es una curva. En este caso diremos que γ está *parametrizada* por X , o que X es una *parametrización* de γ . También utilizaremos la palabra *traza* para referirnos a la imagen de una curva parametrizada. Por ejemplo, la curva γ es la traza de la curva parametrizada X .

Ejemplo A.1.2.

1. La curva

$$X_1(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbf{R},$$

es una parametrización de la parábola $y = x^2$ (valga la metonimia). También es posible parametrizar esta parábola de otra manera, por ejemplo con la curva parametrizada

$$X_2(t) = (1 + t, 1 + 2t + t^2), \quad t \in \mathbf{R}.$$

2. Si consideramos

$$X_3(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in (0, \pi),$$

obtenemos una parametrización de una semicircunferencia. También

$$X_4(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}), \quad t \in (-1, 1).$$

es una parametrización de esa curva. ♣

En este curso nos interesarán especialmente dos clases de curvas parametrizadas:

1. las curvas constantes, de la forma $X(t) = X_0$, para $t \in \mathbf{R}$ que tienen la propiedad de que $\dot{X}(t)$ siempre es nulo. Estas curvas aparecen cuando uno encuentra una solución estacionaria de una ecuación diferencial, como es el caso cuando X_0 es un punto crítico de una ecuación diferencial autónoma.
2. Las curvas tales que $\dot{X}(t)$ nunca se anula. A estas curvas las llamaremos *curvas parametrizadas regulares*. El vector $\dot{X}(t)$ es el *vector tangente* a la curva en el punto $X(t)$.

La razón por la que estos dos tipos de curvas concentran nuestra atención es que las soluciones de las ecuaciones diferenciales autónomas son curvas constantes o curvas parametrizadas regulares.

Ejemplo A.1.3. La curva $X(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbf{R}$, es una curva parametrizada regular. En cambio, si tomamos $X(t) = (t^3, t^6)$, $t \in \mathbf{R}$ esta curva no es regular, porque $\dot{X}(0) = 0$. Es interesante observar que la traza de ambas curvas en el plano (x, y) es la parábola de ecuación $y = x^2$. La curva $X(t) = (t^3, t^2)$ no es una curva regular. Observar que su traza es el conjunto con ecuación $x^2 = y^3$, que presenta cierta singularidad en el origen. ♣

En el ejemplo A.1.2 debe llamarnos la atención el hecho de que en las dos parametrizaciones de la parábola esta curva se recorre en el mismo sentido, en tanto que hemos cambiado el sentido en que se recorre el arco de circunferencia al pasar de la parametrización X_3 a X_4 . Esto corresponde al hecho intuitivo de que una curva puede recorrerse en dos sentidos. Diremos que dos parametrizaciones de una misma curva tienen la misma *orientación* si recorren la curva en el mismo sentido. Es más o menos evidente que cualquier curva regular tiene sólo dos orientaciones posibles. El fin de nuestra próxima observación es poner esta idea sobre una base un poco más sólida. Su lectura puede omitirse en una primera aproximación al tema.

Observación A.1.4. Aunque la expresión “mismo sentido” tiene un significado más o menos evidente requiere una definición si queremos introducirla en el marco de una teoría matemática libre de ambigüedades. La manera de hacer esto para curvas regulares es la siguiente: diremos que la curva $Y : J \rightarrow \mathbf{R}^2$ es una *reparametrización* de la curva $X : J \rightarrow \mathbf{R}^2$ si existe una función biyectiva $\alpha : I \rightarrow J$, de clase C^1 , tal que α' nunca se anula y que satisface

$$X(t) = Y(\alpha(t)), \quad t \in I. \tag{A.3}$$

Si la derivada α' es siempre positiva entonces diremos que las curvas X e Y tienen el *mismo sentido* o la *misma orientación*. En cambio, si $\alpha' < 0$ diremos que tienen distinto sentido u orientación. La condición de que α' no se anule impide que su signo pueda cambiar.

Ejemplo A.1.5. Si volvemos a las curvas de nuestro ejemplo A.1.2 encontramos que podemos escribir

$$X_2(t) = X_1(\alpha(t)), \quad \text{con } \alpha(t) = 1 + t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

En este ejemplo es $\alpha' \equiv 1$ y las dos curvas tienen la misma orientación. También tenemos que

$$X_3(t) = X_4(\alpha(t)), \quad \text{con } \alpha(t) = \cos t, \quad t \in (0, \pi).$$

En este segundo caso $\alpha'(t) = -\sin t < 0$, para $t \in (0, \pi)$ y la reparametrización cambia el sentido en que se recorre la curva, tal como nuestra intuición nos indica. ♣

Con esta noción de orientación que acabamos de introducir todas las reparametrizaciones de una curva regular quedan divididas de manera natural en dos clases: las que tiene igual sentido que la curva original y las que no. Cada una de estas dos clases constituye una *orientación* para la curva. Dada una curva parametrizada $X(t)$, definida sobre un intervalo $I = (a, b)$ (aquí admitimos que a pueda ser $-\infty$ y/o b sea $+\infty$) es muy fácil conseguir una reparametrización con orientación contraria a la de $X(t)$. simplemente definimos

$$Y(t) = X(-t), \quad t \in J = (-b, -a).$$

Es evidente que $X(t) = Y(\alpha(t))$, donde $\alpha(t) = -t$ y $\alpha' \equiv -1$ ♠

Habíamos convenido en llamar *curva* a los conjuntos del plano que se obtenían como imágenes de las curvas parametrizadas. Una *curva orientada* es una curva junto con la especificación de una de las dos orientaciones posibles. La manera de fijar la orientación es dar una parametrización de la curva que esté en la clase que corresponde a esa orientación.

Ejemplo A.1.6. Consideremos la parte que está en el semiplano $y > 0$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, orientada en el sentido que las x crecen. Para especificar esta orientación podemos utilizar la parametrización X_4 , pero también es posible hacerlo, por ejemplo, con $X(t) = (\cos t, -\sin t)$, con $t \in (-\pi, 0)$. Ambas parametrizaciones inducen la misma orientación sobre la curva.

Como graficar curvas dadas a través de una parametrización

En la parte de este curso dedicada a las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas pondremos énfasis en ciertos aspectos cualitativos de la teoría que pueden ser apreciados a través de la representación de las los planos de fases asociados con ellas. Para obtener estas representaciones debemos ser capaces de dibujar las soluciones de las ecuaciones diferenciales, que, como ya mencionamos, no son otra cosa que curvas parametrizadas. Veremos varias maneras de abordar esta tarea. Una de ellas es desarrollar la habilidad de graficar en el plano una curva parametrizada. Este procedimiento será útil cuando dispongamos de una fórmula para las soluciones, o al menos para alguna solución particular privilegiada, de las ecuaciones diferenciales. Por fortuna no es el único disponible, observación que cobra especial importancia ante el hecho de que muchas veces es difícil, o directamente imposible, obtener una fórmula para las soluciones de una ecuación diferencial dada.

Sin embargo, en muchos casos de interés dispondremos de fórmulas, así que trataremos de sacarles el mayor jugo posible graficando las curvas que

representan. Pensemos entonces en como graficar una curva

$$X(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in (a, b),$$

donde admitimos la posibilidad de que el intervalo (a, b) sea una semirecta o toda la recta. En general es posible obtener una representación bastante buena realizando alguna de las siguientes operaciones, o todas ellas si es necesario:

- Ubicar en el plano algunos puntos privilegiados. Por ejemplo, los puntos donde $x(t)$ o $y(t)$ cambian de signo (puntos de corte con los ejes Oy y Ox respectivamente) u otros puntos que puedan ser de interés.
- Estudiar el crecimiento de $x(t)$ e $y(t)$, analizando el signo de \dot{x} y \dot{y} . En particular, ubicar en el plano los puntos de \dot{x} y/o \dot{y} cambian de signo.
- Analizar el comportamiento de $X(t)$ cuando $t \downarrow a$ y $t \uparrow b$.
- Intentar expresar y como función de x (o viceversa), al menos para algún rango de valores de t , y utilizar las técnicas conocidas para estudiar funciones reales de variable real.
- Cuando sea conveniente, expresar la curva $(x(t), y(t))$ en otro sistema de coordenadas.

Vamos a ver a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo A.1.7. Consideremos

$$X(t) = (e^t, e^{2t}), \quad t \in \mathbf{R}.$$

En este caso tenemos $x(t) = e^t$ y $y(t) = e^{2t}$. Por lo tanto $x(t)$ e $y(t)$ son siempre positivas y crecientes. Es claro que se satisface $y(t) = x^2(t)$, por lo que la traza de esta curva esta contenida en la parábola $y = x^2$. Además

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty, \end{aligned}$$

por lo que la curva $X(t)$ es una parametrización del arco de parábola $y = x^2$ contenido en el semiplano $x > 0$. ♣

Ejemplo A.1.8. Ahora estudiaremos la curva

$$X(t) = (e^t(1+t), e^t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

En este caso $x(t)$ pasa de ser negativo a positivo en $t = -1$. Como $y(-1) = e^{-1}$ encontramos que el punto $(0, e^{-1})$ está en la traza de esta curva. Por otra parte $y(t)$ es siempre positivo. Un sencillo cálculo nos dice que $\dot{x}(t) = (2+t)e^t$,

$\dot{y}(t) = e^t$. Por lo tanto $y(t)$ siempre es creciente, mientras que $x(t)$ decrece en el intervalo $(-\infty, -2)$, alcanza su valor mínimo $x(-2) = -e^{-2}$ en $t = -2$ y es creciente para valores de $t > -2$. Cuando $t \downarrow -\infty$ se tiene $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)/x(t) = 0$, por lo que la curva se acerca al origen desde el segundo cuadrante, y tangente al eje Ox , cuando $t \downarrow -\infty$. En el otro extremo, tanto $x(t)$ como $y(t)$ van a $+\infty$ cuando $t \uparrow +\infty$, y el cociente $y(t)/x(t)$ también tiende a cero en este caso. La información que hemos encontrado hasta ahora es suficiente para dibujar una buena representación de la curva.

Otra manera de estudiarla es observar que puede despejarse $t = \log y$ de la definición de $y(t)$, para luego sustituir en la expresión de x . Por este procedimiento obtenemos que sobre la traza de la curva que estamos considerando debe satisfacerse

$$x = (1 + \log y)y, \quad y > 0,$$

cosa que nos permite graficar la x como función de y . ♣

Ejemplo A.1.9. En el último ejemplo de esta sección trabajaremos con

$$X(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Esta curva corta el eje Oy siempre que $t = \pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$, y el eje Ox en $t = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Si calculamos las derivadas \dot{x} y \dot{y} obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t, \\ \dot{y} &= -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t. \end{aligned}$$

Es interesante observar que es más fácil analizar el signo de \dot{x} y \dot{y} , y por ende el crecimiento de x e y , escribiendo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= x - y. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Esto indica que x crece mientras $y < -x$ y decrece en el semiplano $y > -x$. Al cruzar la recta $y = -x$ cambia el crecimiento de x . Un análisis similar puede hacerse respecto al crecimiento de y y la recta $x = y$. Vale la pena destacar que esta información sobre el crecimiento/decrecimiento de x e y no depende de la forma precisa de $X(t)$ sino del hecho de que $X(t)$ es una solución de la ecuación diferencial (A.4). En realidad es posible conjeturar muy bien la forma de la curva utilizando pura y exclusivamente esta información. Vale la pena intentarlo, como un ejercicio que nos indica que no siempre es imprescindible resolver una ecuación diferencial para saber algo sobre sus soluciones.

Es fácil ver además que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0).$$

Combinando este hecho con la información que ya teníamos resulta que $X(t)$ se aproxima al origen, enrollándose en sentido antihorario, cuando t va a $+\infty$. Con estos elementos es posible conseguir una buena representación de $X(t)$. Una inspección directa de la fórmula que define $X(t)$ nos muestra que podemos expresar esta curva en coordenadas polares como $r(t) = e^{-t}$, $\theta(t) = t$. Esta representación muestra que r decae rápidamente a 0 cuando $t \rightarrow +\infty$ y que $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = +\infty$, cosa que confirma el hecho de que cuando t es muy grande en módulo y negativo $X(t)$ está muy lejos del origen. Por otra parte, la coordenada angular θ es proporcional a t , de modo que $X(t)$ da infinitas vueltas alrededor del origen cuando t varía entre $-\infty$ y $+\infty$.

Campos vectoriales

La información sobre campos vectoriales que daremos en esta sección es muy escueta y consiste esencialmente en subrayar que es posible interpretar una función

$$f : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

como la operación de asignar a cada $(x, y) \in \Omega$ un vector de \mathbf{R}^2 , dado justamente por $f(x, y)$. Con esta idea en mente, el dibujo que uno debe asociar en su cabeza con la función f es el dominio Ω cubierto de “flechitas” de la siguiente manera: sobre cada punto (x, y) de Ω ponemos el vector $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ que la función f produce. Recomendamos ver la observación 1.3.6, acerca de la utilidad de este punto de vista al tratar las ecuaciones diferenciales.

A.2 Espacios vectoriales con producto interno

En este apéndice vamos a recoger alguna información acerca de los espacios vectoriales con producto interno. Presentaremos aquí lo que nos hace falta para la teoría de las series de Fourier, sin preocuparnos por hacer una exposición de carácter general que puede encontrarse en la literatura específica sobre el tema. Por ejemplo, en el texto [He].

Si \mathbf{V} es un espacio vectorial real, diremos que una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R},$$

que a un par (v, w) de elementos de \mathbf{V} le asocia el número real $\langle v, w \rangle$ es un producto interno si se satisfacen las propiedades:

1. LINEALIDAD RESPECTO A LA PRIMERA VARIABLE

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle, \quad v_1, v_2, w \in \mathbf{V}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R};$$

2. SIMETRÍA

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \quad v, w \in \mathbf{V};$$

3. NO NEGATIVIDAD Y NO DEGENERACIÓN

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad v \in \mathbf{V}.$$

Además, $\langle v, v \rangle = 0$ si y sólo si v es el vector nulo de \mathbf{V} .

Ejemplo A.2.1. Si $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$ el producto interno usual entre dos vectores

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3),$$

en ese espacio vectorial es

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

Dejamos como ejercicio (fácil) para el lector verificar que se satisfacen todas las propiedades que debe tener un producto interno. ♣

Ejemplo A.2.2. Consideremos el espacio vectorial \mathbf{V} formado por las funciones reales, continuas, periódicas de período $2L$, definidas sobre \mathbf{R} . Las operaciones de suma y producto por un escalar son las usuales:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Entonces la fórmula

$$(f, g) = \int_{-L}^L f(x)g(x)dx. \tag{A.5}$$

define un producto interno en \mathbf{V} . Demostremos esta afirmación.

Notemos primero que nada que para cualquier par de funciones f y g en \mathbf{V} la integral está definida y es un número real, por lo tanto (A.5) da lugar a una función de $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ con valores reales.

En el caso de (A.5) la linealidad respecto a la primera variable es una consecuencia inmediata de la linealidad de la integral, en tanto que la simetría se obtiene trivialmente a partir de la conmutatividad del producto de números reales. Como el producto interno (f, f) es la integral de la función no negativa f^2 resulta evidente que tiene que ser mayor o igual que cero.

Sólo nos resta mostrar que cuando ese producto se anula entonces la función f es idénticamente nula. Esto da algo más de trabajo y requiere la hipótesis de continuidad de f para que el resultado sea cierto.

Lema A.1. *Sea f una función definida sobre \mathbf{R} , real, continua, de período $2L$ y tal que*

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx = 0.$$

Entonces f es idénticamente nula.

PRUEBA: como f es periódica de período $2L$ sus valores en todo \mathbf{R} quedan determinados por sus valores en un intervalo cualquiera de longitud $2L$. Por lo tanto, si demostramos que f se anula sobre todo el intervalo $[-L, L]$ debe anularse en todo \mathbf{R} . Notemos que si f toma algún valor distinto de 0 en un punto x_0 del intervalo $[-L, L]$ entonces $f^2(x_0)$ es positiva. Más aún, por la continuidad de f esta función tiene que ser positiva en algún entorno de x_0 , y esto implica que su integral es positiva, cosa que lleva a una contradicción. A continuación vamos a desarrollar este argumento. Supongamos entonces que existe un $x_0 \in [-L, L]$ tal que $f(x_0) \neq 0$. No es ninguna pérdida de generalidad suponer que x_0 está en el intervalo abierto $(-L, L)$. Como $f(x_0) \neq 0$ entonces $f^2(x_0) > 0$. La función f^2 es continua, por lo tanto existe un número $\delta > 0$ tal que

$$f^2(x_0)/2 < f^2(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Por lo tanto

$$\int_L^L f^2(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x) dx \geq \delta f^2(x_0) > 0. \quad \diamond$$

Ejercicio A.1. * Completar la prueba del lema anterior, considerando el caso en que $x_0 = \pm L$. ♣

Observación A.2.3. La definición de producto interno sobre un espacio vectorial complejo es completamente análoga a la del caso real. En un espacio complejo el producto interno tomará valores en \mathbf{C} y hay que sustituir la propiedad de simetría por

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad v, w \in \mathbf{V},$$

que nos dice que al cambiar el orden de los vectores en el producto obtenemos el conjugado del producto original. Por ejemplo, en el espacio vectorial complejo formado por las funciones continuas, $2L$ -periódicas, definidas sobre \mathbf{R} y a valores en \mathbf{C} , podemos introducir un producto interno definiendo $\langle f, g \rangle$ por medio de una ligera modificación de la fórmula (A.5), que consiste en poner \bar{g} , la función conjugada de g , en vez de g en la integral. ♠

Un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido sobre un espacio vectorial tiene asociada una norma¹, que queda definida la expresión

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (\text{A.6})$$

La parte más delicada de la demostración de que (A.6) efectivamente define una norma en \mathbf{V} es probar la desigualdad triangular

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad v, w \in \mathbf{V},$$

que puede obtenerse como consecuencia de la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$\langle v, w \rangle \leq \|v\| \|w\|, \quad v, w \in \mathbf{V}.$$

No demostraremos aquí ninguna de estas dos desigualdades, cuya justificación puede encontrarse por ejemplo, en [He], páginas 360–363.

Ejemplo A.2.4. Cuando se considera el producto interno usual en \mathbf{R}^3 , la norma correspondiente es el módulo o longitud

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 |x_i|^2}.$$

La norma asociada con el producto interno (A.5) es

$$\|f\| = \sqrt{\int_L^L f^2(x) dx}.$$

Obtenemos la estimación

$$\int_L^L f(x)g(x) dx \leq \sqrt{\int_L^L f^2(x) dx} \sqrt{\int_L^L g^2(x) dx}$$

escribiendo la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el caso particular que estamos considerando. ♣

¹la definición de norma aparece en la página 195 de este texto

También hay una noción de *ortogonalidad* o *perpendicularidad* asociada con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diremos que f y g son ortogonales si

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Señalemos una vez más que cuando introducimos un producto interno en un espacio vectorial automáticamente producimos una norma, la norma asociada con ese producto interno, por medio de la fórmula (A.6). Tal como vimos en la sección 2.3, una norma en un espacio vectorial conlleva una noción de convergencia respecto a la cual podemos definir el límite de una sucesión de funciones f_n en \mathbf{V} .

En la teoría de las series de Fourier entran en juego los dos aspectos de los espacios vectoriales con producto interno que mencionábamos en el último párrafo, ya que se trata de construir, a partir de argumentos geométricos basados en la ortogonalidad de cierta familia de vectores, una buena aproximación de cualquier función en el espacio vectorial formado por las funciones continuas y periódicas. En nuestra próxima sección desarrollaremos las nociones necesarias para aproximarse a las series de Fourier desde este punto de vista.

A.2.1 Una noción de aproximación: la proyección

Cuando estamos trabajando en un espacio con producto interno, dados un vector f y un subespacio W de dimensión finita hay un vector de W que es la aproximación óptima de f por elementos de W : la *proyección del vector f sobre el subespacio W* .

Aunque es probable que el lector este familiarizado con la teoría de los espacios con producto interno solamente en el marco de los espacios de dimensión finita, veremos a continuación que muchos aspectos geométricos de la teoría son independientes de la dimensión. En particular, utilizaremos esta visión geométrica para trabajar en el espacio vectorial de las funciones continuas y periódicas, que no es de dimensión finita.

Comencemos por recordar el *Teorema de Pitágoras* en un espacio con producto interno (aunque en una versión que Pitágoras tal vez no reconocería).

Teorema A.1 (Pitágoras). *Si dos vectores f y g de un espacio con producto interno son ortogonales entonces se satisface*

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2. \quad (\text{A.7})$$

Corolario A.2. *Si los vectores f_i , $i = 1, \dots, n$ son ortogonales dos a dos entonces*

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2. \quad (\text{A.8})$$

La prueba de estos resultados se reduce a un sencillo cálculo. Si W es un subespacio de dimensión finita con base ortonormal $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$, y f un vector cualquiera del espacio V , entonces definimos la proyección de f sobre W como

$$Pf = \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i. \quad (\text{A.9})$$

Proposición A.3. *El vector Pf es la mejor aproximación a f por vectores de W , en el sentido de la norma. Es decir*

$$\|f - Pf\| = \min_{w \in W} \|f - w\|. \quad (\text{A.10})$$

Además, la diferencia $f - Pf$ es ortogonal a cualquier vector de W

PRUEBA: Comenzaremos por demostrar esta última afirmación. Como el producto interno es lineal basta mostrar que $f - Pf$ es ortogonal a cualquier vector de una base de W para concluir que es ortogonal a cualquier vector de W . Mostraremos entonces que $f - Pf$ es perpendicular a los vectores e_i de la base ortonormal con la que estamos trabajando. En efecto, consideremos un número natural j , tal que $1 \leq j \leq n$, y calculemos usando la definición de Pf :

$$\langle f - Pf, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle.$$

Como los e_i forman una base ortonormal el único producto $\langle e_i, e_j \rangle$ no nulo es el que tiene $i = j$ y vale 1. De aquí se deduce inmediatamente que

$$\langle f - Pf, e_j \rangle = 0.$$

Para mostrar que Pf es la mejor aproximación tomaremos un vector

$$w = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

de W y mostraremos que $\|f - w\|$ es mayor que $\|f - Pf\|$ si $w \neq Pf$. Como utilizaremos la ortogonalidad y el teorema de Pitágoras haremos los cálculos con los cuadrados de las normas. Comencemos escribiendo

$$f - w = (f - Pf) + (Pf - w).$$

Notemos que

$$Pf - w = \sum_{i=1}^n (\langle f, e_i \rangle - a_i) e_i$$

es también un vector de W , por lo tanto es ortogonal a $f - Pf$ y de esta manera hemos escrito la diferencia $f - w$ como la suma de dos vectores perpendiculares. Esto permite calcular su norma fácilmente como

$$\|f - w\|^2 = \|f - Pf\|^2 + \|Pf - w\|^2. \quad (\text{A.11})$$

También es fácil calcular el cuadrado de la norma de $Pf - w$. Usando el corolario del teorema de Pitágoras y el hecho de que la base $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ es ortonormal tenemos

$$\|Pf - w\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle f, e_i \rangle - a_i|^2.$$

En resumen

$$\|f - w\|^2 = \|f - Pf\|^2 + \sum_{i=1}^n |\langle f, e_i \rangle - a_i|^2 \geq \|f - Pf\|^2.$$

La igualdad en esta última expresión se obtiene sí y sólo sí todos los a_i son iguales a los productos $\langle f, e_i \rangle$, pero esto es equivalente a que el vector w sea exactamente Pf . \diamond

Para cerrar esta observación extraeremos dos consecuencias más del teorema de Pitágoras. En primer lugar notemos que como f y $f - Pf$ son ortogonales y

$$f = (f - Pf) + Pf$$

tenemos que

$$\|f\|^2 = \|f - Pf\|^2 + \|Pf\|^2. \quad (\text{A.12})$$

1. Como los dos sumandos en el miembro de la derecha de (A.12) son no negativos cada uno de ellos es menor o igual que $\|f\|^2$ (es decir, los catetos son más cortos que la hipotenusa). En particular, utilizaremos luego la acotación

$$\|Pf\| \leq \|f\|, \quad (\text{A.13})$$

que simplemente dice que la proyección es más corta que el vector proyectado.

2. El teorema de Pitágoras también permite calcular que tan lejos está f de Pf a partir del conocimiento de las normas de f y Pf . Si despejamos $\|f - Pf\|^2$ de (A.12) obtenemos

$$\|f - Pf\|^2 = \|f\|^2 - \|Pf\|^2. \quad (\text{A.14})$$

Apéndice B

Las ecuaciones de ondas y del calor

En este apéndice presentamos una derivación de las ecuaciones de ondas y del calor a partir de sencillos modelos físicos. Además de mostrar un par de ejemplos en el que estas ecuaciones surgen naturalmente, la imagen física del problema permite ganar cierta intuición acerca del comportamiento de las soluciones e introducir en forma natural algunas magnitudes relevantes y útiles para la consideración de estas ecuaciones.

B.1 La ecuación de ondas

La ecuación de ondas es un modelo para describir fenómenos oscilatorios en diversos medios continuos. Veremos a continuación cómo aparece cuando se intenta analizar las vibraciones de una cuerda flexible en un plano. Utilizaremos un sistema de coordenadas (x, y) en el plano en el que transcurre el movimiento. Supondremos que cuando la cuerda está en reposo todos sus puntos están sobre el eje x , por lo que la variable real x representará la posición medida sobre la cuerda. Con t indicaremos el tiempo. Adoptaremos la siguiente hipótesis de trabajo: los puntos de la cuerda sólo se desplazan en la posición vertical que corresponde al eje y . Entonces, con $u(x, t)$ representaremos el desplazamiento del punto x de la cuerda, en el instante t , respecto a la posición de equilibrio $u = 0$. Notemos que para cada valor fijo de t , la función $u(\cdot, t)$, contiene la información sobre la posición de la cuerda. Su derivada respecto al tiempo $u_t(\cdot, t)$ representa el estado de velocidades de la cuerda, y $u_{tt}(\cdot, t)$ las aceleraciones.

Llamemos ρ a la densidad lineal de la cuerda, es decir a su masa por unidad de longitud, a la que supondremos constante. Además supondremos que la cuerda está sometida a una tensión T en la dirección horizontal, que también permanece constante. En la figura B.1 aparece un esquema en el que hemos representado a C y los esfuerzos que actúan sobre sus extremos. Con

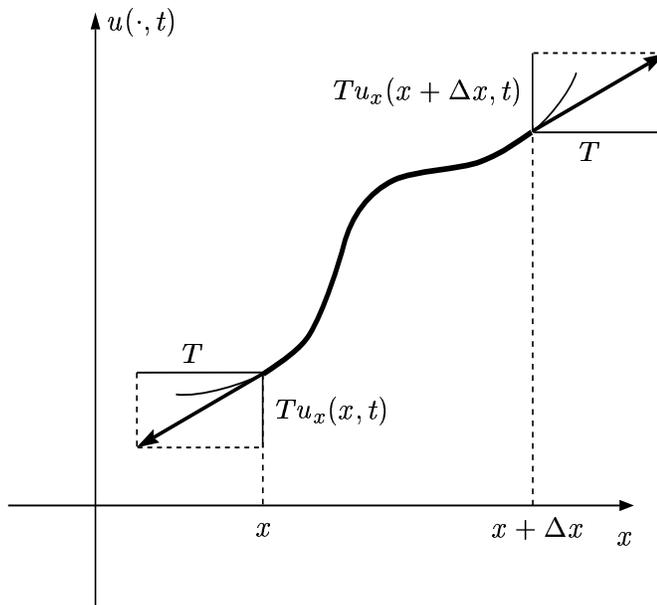


Figura B.1: la porción C de la cuerda y las fuerzas que actúan sobre ella

esta información podemos plantear la ecuación de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) para la porción C de cuerda que está en el intervalo $[x, x + \Delta x]$, y proyectarla en la dirección vertical. Como hemos supuesto la cuerda flexible, los esfuerzos que actúan sobre C a través de cada uno de sus dos extremos deben tener una dirección tangente a la cuerda. Por lo tanto la relación entre sus componentes vertical y horizontal debe ser justamente u_x , porque esta función mide la pendiente de la cuerda. En resumen, como la componente horizontal de la fuerza es la tensión T , la fuerza que actúa sobre C en el instante t , luego de proyectada sobre la dirección vertical,

$$T(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)). \quad (\text{B.1})$$

Esta fuerza debe ser igual al término

$$\rho \int_x^{x+\Delta x} u_{tt}(y, t) dt, \quad (\text{B.2})$$

que es una versión continua de la suma de $m \times \vec{a}$ sobre todas las partículas que forman la porción de cuerda C . Si suponemos que existe u_{xx} y que u_{tt} es continua, luego de igualar (B.1) y (B.2), dividir entre Δx y pasar al límite cuando $\Delta x \downarrow 0$ obtenemos

$$u_{tt}(x, t) = (T/\rho)u_{xx}(x, t).$$

Si llamamos c^2 a la constante positiva T/ρ encontramos que esta ecuación es justamente la ecuación de ondas

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

Observación B.1.1. La función $u_x(\cdot, t)$ nos da información sobre el estado de deformaciones en la cuerda, y está directamente relacionada con la *energía potencial* que la cuerda almacena en el instante t . La función u_t representa las velocidades, por lo que u_t^2 contendrá la información acerca de la *energía cinética*. La integral

$$\int_x^{x+\Delta x} (u_t^2(y, t) + c^2 u_x^2(y, t)) dy$$

es proporcional a la energía total (suma de las energías potencial y cinética) almacenada en la porción C de la cuerda en el instante t . En la sección 4.4 se saca partido de este tipo de integrales para estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación de ondas.

Ya que estamos, mencionemos que la energía de las soluciones es una buena medida de su “tamaño” que sugiere cuáles son las normas, en el sentido de normas en un espacio vectorial, que hay que utilizar para estudiar los problemas relacionados con la ecuación de las ondas. Ver la observación 2.3.7, página 198. ♠

Naturalmente, la ecuación de ondas por sí sólo no es suficiente para determinar las soluciones, y hace falta fijar además condiciones iniciales y/o de contorno. A continuación describimos algunos problemas de contorno para la ecuación de ondas que son considerados en este texto, y sus correspondientes imágenes en términos de una cuerda vibrante.

LA CUERDA INFINITA: EL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LA ECUACIÓN DE ONDAS EN \mathbf{R} . Llamaremos así al problema que consiste en resolver la ecuación de ondas con $x \in \mathbf{R}$, fijando valores iniciales para u y u_t . Se trata entonces de buscar una función $u : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, de clase C^2 , que satisfaga

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbf{R}^2, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

donde u_0 y v_0 son dos funciones conocidas que constituyen un dato del problema. En la sección 4.3 mostramos que u_0 tiene que ser de clase C^2 y v_0 de clase C_1 para que exista una solución u de clase C^2 . Si queremos pensar este problema en términos de la cuerda vibrante (o de otro medio continuo en el que ocurren oscilaciones) debemos imaginar una cuerda infinita (un medio infinito), en el que el desplazamiento inicial está dado por u_0 , y el estado de velocidades inicial por v_0 .

Observación B.1.2. En principio podríamos buscar una solución que esté definida sólo para $t \geq 0$. Sin embargo, al analizar este problema —ver, por ejemplo, la sección 4.3 de este mismo texto— resulta evidente que la solución queda definida para todos los tiempos. Por esta razón escogemos todo \mathbf{R} como dominio temporal desde el principio. La misma consideración vale para los otros problemas de valores iniciales y de contorno para la ecuación de ondas. ♠

LA CUERDA SEMI-INFINITA: EL PROBLEMA DE CAUCHY-DIRICHLET PARA LA ECUACIÓN DE ONDAS EN $[0, +\infty)$. En este caso trabajaremos en el semiplano $x \geq 0$, y hay que fijar una condición lateral en $x = 0$. Se trata entonces de buscar una función continua

$$u : [0, +\infty) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$$

de clase C^2 en $(0, +\infty) \times \mathbf{R}$, que satisfaga

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, +\infty) \times \mathbf{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, +\infty), \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & x \in [0, +\infty), \\ u(0, t) = g(t), & t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

En este caso los datos, que asumiremos conocidos, son u_0 , v_0 y g . Es natural exigir además las condiciones de compatibilidad

$$u_0(0) = g(0), \quad v_0(0) = g'(0),$$

entre los datos iniciales y de contorno.

LA CUERDA ACOTADA: PROBLEMA DE CAUCHY-DIRICHLET PARA LA ECUACIÓN DE ONDAS EN $[0, L]$. Este problema corresponde a estudiar las vibraciones de una cuerda flexible de longitud L . Es en realidad el más cercano a nuestra intuición cotidiana, porque es un buen modelo para estudiar las vibraciones de, por ejemplo, una cuerda de guitarra. Para u_0, v_0, g_1 y g_2 dados, buscaremos una función continua

$$u : [0, L] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$$

de clase C^2 en $(0, L) \times \mathbf{R}$, que satisfaga

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbf{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & x \in [0, L], \\ u(0, t) = g_1(t), & t \in \mathbf{R}, \\ u(L, t) = g_2(t), & t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Hay que pedir algunas condiciones de compatibilidad obvias entre los datos, pero omitiremos escribirlas. Notemos que para modelar las cuerdas de guitarra, en las que los extremos permanecen fijos, habrá que prescribir $g_1 = g_2 \equiv 0$. PROBLEMA DE CAUCHY-DIRICHLET PARA LA ECUACIÓN DE ONDAS EN $[0, L]$. Todavía vamos a formular un problema de contorno más, que corresponde a fijar el valor del esfuerzo al que se somete la cuerda en sus extremos en vez de dar su posición. En este caso tenemos que buscar una función continua u , con derivada u_x continua $[0, L] \times \mathbf{R}$, que sea de clase C^2 en el interior de este conjunto del plano, y que satisfaga

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, L) \times \mathbf{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = v_0(x), & x \in [0, L], \\ u_x(0, t) = h_1(t), & t \in \mathbf{R}, \\ u_x(L, t) = h_2(t), & t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

B.2 La ecuación del calor

En lo que sigue consideraremos la cuestión de determinar como evoluciona la temperatura de una barra de longitud L , a partir de una distribución inicial de temperaturas conocida. Supondremos que las condiciones iniciales están dadas en el instante $t = 0$ y que queremos conocer el estado de la barra en $t > 0$. El primer paso para atacar este problema es construir un modelo matemático que describa esta situación, cosa que haremos a continuación.

Para empezar identificaremos la barra con el intervalo $[0, L]$ y supondremos que la temperatura sólo depende de la coordenada x , medida a lo largo del eje de la barra, y del tiempo t . Esta hipótesis es equivalente a despreciar las variaciones de temperatura en las direcciones transversales de la barra. En definitiva, describiremos la temperatura en la barra por medio de una función $u = u(x, t)$, que estará definida para x en el intervalo $[0, L]$ y $t \geq 0$.

En el problema que vamos a tratar el intercambio de energía entre la barra y el exterior, o entre distintas porciones de la barra, se deberá exclusivamente al flujo de calor. Supondremos además que el intercambio de calor con el exterior sólo ocurre en los extremos $x = 0$ o $x = L$ de la barra.

Para determinar la ley que gobierna la evolución recurriremos a algunas hipótesis simples sobre el intercambio de calor y sobre la energía almacenada en la barra. Si consideramos un intervalo $[x, x + \Delta x] \subset (0, L)$ en el interior de la barra, asumiremos que la energía que está almacenado en este pedazo de material en el instante t es

$$q(t) = \int_x^{x+\Delta x} cu(y, t)dy, \quad (\text{B.7})$$

donde la constante positiva c es el *calor específico por unidad de longitud* del material del que está hecha la barra. Como consecuencia del *principio de conservación de la energía* la variación de q se debe al *flujo de calor* desde el resto de la barra, hacia el intervalo $[x, x + \Delta x]$ a través de los puntos x y $x + \Delta x$. Para describir este flujo recurriremos a la *ley del conducción del calor de Fourier*, que prescribe que el flujo de calor es proporcional a la derivada de la temperatura respecto a la variable espacial. En resumen, si para cada $x \in (0, L)$ indicamos con $\Psi(x, t)$ la cantidad de calor que está pasando desde la porción de la barra que está en $[0, x)$ hacia el intervalo $(x, L]$, por unidad de tiempo, tendremos

$$\Psi(x, t) = -ku_x(x, t), \quad (\text{B.8})$$

donde k es la *conductividad térmica*, una constante que depende del material con el que estemos trabajando. Por lo tanto, el flujo neto de calor hacia el intervalo $(x, x + \Delta x)$ es $-\Psi(x + \Delta x, t) + \Psi(x, t)$, y la ley de conservación dice entonces que

$$\dot{q}(t) = -\Psi(x + \Delta x, t) + \Psi(x, t). \quad (\text{B.9})$$

Al escribir cada término de esta igualdad en función de la función temperatura $u(x, t)$, utilizando las fórmulas (B.7) y (B.8) obtenemos

$$\int_x^{x+\Delta x} cu_t(y, t)dy = ku_x(x+\Delta x, t) - ku_x(x, t) = \int_x^{x+\Delta x} ku_{xx}(y, t)dy. \quad (\text{B.10})$$

Como (B.10) debe satisfacerse para todo x y Δx concluimos que la función de temperatura u tiene que satisfacer la ecuación en derivadas parciales

$$cu_t(x, t) = ku_{xx}(x, t), \quad x \in (0, L), \quad t > 0. \quad (\text{B.11})$$

Para eliminar las constantes c y k podemos realizar un cambio de variables en t , e introducir un tiempo $\tau = (k/c)t$. Entonces $u_\tau = (c/k)u_t = u_{xx}$. A partir de ahora trabajaremos con esta versión convenientemente normalizada de la ecuación del calor. Es decir, consideraremos

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty). \quad (\text{B.12})$$

Nos interesará estudiar (B.12) con una condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, L],$$

que describe el estado de temperaturas de la barra al comienzo de la evolución. Para que la evolución posterior quede determinada hay que fijar además condiciones de contorno sobre los extremos $x = 0$ y $x = L$ de la barra, ya que resulta evidente que las temperaturas en el interior no serán las mismas si calentamos los extremos que si los enfriamos o los mantenemos aislados térmicamente. En lo sucesivo trabajaremos con dos tipos de condiciones:

1. **CONDICIONES SOBRE LA TEMPERATURA EN LOS EXTREMOS.** En este caso fijaremos el valor de la temperatura en los extremos de la barra. Para ello daremos dos funciones continuas $\Theta_1(t)$ y $\Theta_2(t)$, definidas en $t \geq 0$ tales que

$$u(0, t) = \Theta_1(t), \quad u(L, t) = \Theta_2(t), \quad t \geq 0. \quad (\text{B.13})$$

2. **CONDICIONES SOBRE EL FLUJO DE CALOR EN LOS EXTREMOS.** Como el flujo es proporcional a la derivada u_x prescribiremos dos funciones continuas $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$, definidas en $t \geq 0$, tales que

$$u_x(0, t) = \Psi_1(t), \quad u_x(L, t) = \Psi_2(t), \quad t \geq 0. \quad (\text{B.14})$$

A continuación formulamos los problemas correspondientes a cada clase de datos.

PROBLEMA DE CAUCHY-DIRICHLET. Llamaremos de esta manera al problema de resolver la ecuación del calor en la barra de longitud L con temperatura

prefijada en los extremos. Los datos serán la condición inicial $u_0(x)$ y las temperaturas $\Theta_1(t)$ y $\Theta_2(t)$, que serán funciones continuas de t , en los extremos de la barra. Buscaremos entonces una función

$$u : [0, L] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R},$$

continua en $[0, L] \times [0, \infty)$ y de clase C^2 en $(0, L) \times (0, \infty)$, que satisfaga

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u(0, t) = \Theta_1(t), & t \in [0, \infty), \\ u(L, t) = \Theta_2(t), & t \in [0, \infty). \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Naturalmente, para que pueda existir una solución de este problema son necesarias las condiciones de compatibilidad $u_0(0) = \Theta_1(0)$, $u_0(L) = \Theta_2(0)$, entre los datos iniciales y de contorno.

PROBLEMA DE CAUCHY-NEUMANN. Llamaremos de esta manera al problema con flujo, o equivalentemente u_x , prefijado en los extremos. En este caso los datos serán la condición inicial $u_0(x)$ y dos funciones continuas $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ que darán el valor de u_x en los extremos de la barra. Buscaremos entonces una función $u : [0, L] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, continua en $[0, L] \times [0, \infty)$, de clase C^2 en $(0, L) \times (0, \infty)$, con derivada u_x continua en $[0, L] \times (0, \infty)$ que satisfaga

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), & (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u_x(0, t) = \Psi_1(t), & t \in [0, \infty), \\ u_x(L, t) = \Psi_2(t), & t \in [0, \infty). \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Índice de Materias

- órbitas
 - asintóticamente estables, 271
 - estables, 271
 - inestables, 271
- órbitas, 15, 34
- bifurcaciones, 68, 88
- cambios de coordenadas, 68, 70
 - en el flujo, 75
 - lineales, 76
- campos vectoriales, ix, 39
- clasificación de una forma cuadrática, 257
- coeficientes de Fourier, 356
 - decaimiento, 371
- completitud de los números reales, 148
- condición de Cauchy
 - para la convergencia uniforme, 176
- condición de Cauchy
 - para sucesiones en \mathbf{R} , 147
- condición de Lipschitz, 212, 218
 - para transformaciones lineales, 220
 - local, 222
- conjuntos de medida nula, 383
- coordenadas polares, 70
- crecimiento de una población, 11
- curvas, iii
 - de nivel, 248
 - parametrizadas, 34
 - transversalidad, 278
- curvas características
 - ecuaciones de primer orden, 282, 297
 - ecuaciones de segundo orden, 298
- datos de contorno, 277
- derivada de una matriz que depende de t , 50
- derivadas débiles, 225, 371
- desigualdad de Bessel, 362, 368
- desigualdad de Cauchy-Schwarz, xii
- diagramas de fases, 22, 43
- difeomorfismo, 70
- diferenciales exactas, 139
- ecuación de
 - Tricomi, 300
- ecuación de ondas, 304
 - conservación de la energía, 317
 - derivación, xix
 - integrales de energía, 315
 - propiedad de propagación finita, 309
 - propiedad de semigrupo, 311
 - solución general, 304
- ecuación del calor
 - derivación, xxiii
- ecuación de
 - Bernoulli, 140
 - Burgers sin viscosidad, 278
 - Hermite, 140
 - Legendre, 140
 - Ricatti, 140
- ecuación de ondas
 - regularidad de las soluciones, 331
- ecuación del calor, 319

- comparación de soluciones, 341
- decaimiento de las soluciones, 332
- existencia y unicidad de soluciones, 340
- flujo asociado, 342
- principio del máximo, 336
- problema de Cauchy-Dirichlet, 319
- problema de Cauchy-Neumann, 324
- regularidad de soluciones, 331
- soluciones estacionarias, 332
- ecuaciones de Hamilton-Jacobi, 278
- ecuaciones en derivadas parciales
 - cuasilineales, 277
 - de primer orden, 277
 - elípticas, 299
 - hiperbólicas, 299
 - lineales de primer orden, 277
 - parabólicas, 299
 - soluciones clásicas, 292
 - soluciones débiles, 225, 293
- ecuaciones integrales, 144, 212
- ecuaciones ordinarias
 - autónomas en \mathbf{R} , 5
 - con variables separables, 138
 - condiciones iniciales, 8
 - continuidad del flujo, 234
 - crecimiento de las soluciones, 43
 - de orden n , 39
 - de primer orden, 35
 - de segundo orden, 35
 - derivadas sobre las soluciones, 246
 - diferenciabilidad del flujo, 235
 - discretización en el tiempo, 142
 - estudio cualitativo, 238
 - existencia y unicidad de soluciones, 213, 223, 227
 - flujo asociado, 13, 232
 - homogéneas, 138
 - interpretación geométrica, 7, 39, 127
 - intervalo de definición de las soluciones, 26, 222
 - linealización, 265
 - linealización, 52
 - problemas de valores iniciales, 8
 - regularidad de las soluciones, 8
 - simetrías, 236
 - soluciones, 5, 34, 126
 - soluciones estacionarias, 13, 43
 - soluciones maximales, 225
 - soluciones periódicas, 36, 236
- ecuaciones ordinarias lineales, 46, 76, 96
 - homogéneas, 128
 - no homogéneas, 127
 - notación matricial, 46
 - superposición de soluciones, 46
- equicontinuidad, 188
- factor integrante, 139
- flujos gradiente, 61
- función de Lipschitz, 154
- funciones de Liapunov, 60, 247
 - formas cuadráticas, 256
 - locales, 255
- geometría de las series trigonométricas, 350
- igualdad de Parseval, 363, 368
- intervalos maximales, 225
- lema de Riemann-Lebesgue, 362, 368
- método de
 - Euler, 141, 142
 - Newton, 159
 - Picard, 141
 - separación de variables, 319, 321, 333
 - variación de constantes, 128, 132

método iterativo, 141, 145

matrices

- con valores propios complejos, 108, 124
- de cambio de base, 77
- diagonalizables, 76, 78, 98
- formas canónicas, 96
- no diagonalizables con un valor propio doble, 99
- semejantes, 78, 96

matriz de una rotación, 115

matriz exponencial, 46, 49, 150

movimiento de un fluido

- descripción de Euler, 40
- descripción de Lagrange, 40

normas, 168, 195

- convergencia respecto a, 168, 196
- espacios completos, 203
- sucesiones de Cauchy, 202

ortogonalidad, 352

ortonormalidad de la familia de senos y cosenos, 355

oscilaciones forzadas, 134, 136

oscilador simple, 35

péndulo, 36, 58, 238

- punto crítico estable, 59

planos de fases, 43

preintegrales, 57, 61

principio del máximo para la ecuación de Laplace, 340

problemas de contorno, 277, 283

productos internos, x , 352

punto críticos

- asintóticamente estables, 17

punto fijo, 144

puntos críticos, 13, 43

- asintóticamente estables, 20
- estabilidad e inestabilidad, 245
- estables, 17, 18
- inestables, 17, 18

resonancia, 135

series de

- cosenos, 326, 350
- senos, 326, 350

series de Fourier, 350

- convergencia en L^2 , 361
- convergencia uniforme, 380
- forma compleja, 351

series de funciones, 178

sistemas conservativos, 61

sistemas dinámicos, 234

sucesiones de funciones

- convergencia puntual, 161, 166
- convergencia uniforme, 160, 166
- uniformemente de Cauchy, 176

teorema de

- Carleson, 384
- Cauchy-Peano, 224
- Cetaev, 263
- convergencia uniforme e integración, 189
- convergencia uniforme y continuidad, 184
- convergencia uniforme y derivación, 193
- Dini, 381
- Grobman-Hartman, 270
- Liapunov, 248
- Liapunov, interpretación geométrica, 248
- linealización y estabilidad, 265
- Massera, 263
- Parseval, 363, 368
- Picard, 227

valores propios con parte real nula en la linealización, 266

Bibliografía

- [BP] W.E. Boyce y R.C. di Prima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 4ta. edición, Limusa, 1998
- [B] I. Bronshtein y Y. Semendiaev *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*, Mir, 1973
- [CJ1] R. Courant y F. John, *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, Vol.1, Limusa, 1994
- [DM] H. Dym y H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academi Press 1972
- [F] G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press 1976
- [G] M. de Guzmán, *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control*, 1975
- [He] E. Hernández, *Álgebra y geometría*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid.
- [HS] M.W. Hirsch y S. Smale, *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza Editorial, 1983
- [I] V. Iorio, *EDP. Um Curso de Graduação*, IMPA, CNPq, 1991
- [J] F. John, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1982
- [Lo] J. David Logan, *Applied Mathematics. A Contemporary Approach*, John Wiley & Sons, 1987
- [Si] G.F. Simmons, *Ecuaciones Diferenciales*, 2da. edición, McGraw Hill, 1993
- [Sm] J. Smoller *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, 1980
- [Sz1] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Herman, 1957

[Sz2] L. Schwartz, *Métodos Matemáticos de la Física*, Madrid: Selecciones Científicas, 1969