

___ Facultad de Ingeniería ___

Universidad de la República

Ecuaciones Diferenciales

Teórico



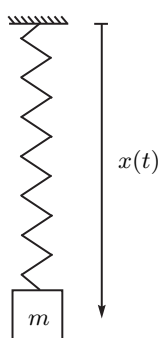
Servicio de
Impresiones del Centro
de Estudiantes de
Ingeniería

Correcciones o sugerencias a: impresiones.fing@gmail.com

Introducción a las ecuaciones diferenciales

En este capítulo comenzaremos dando una introducción a las ecuaciones diferenciales, seguido de algunas definiciones y conceptos importantes que se trabajaran más en profundidad en el resto del texto. Aprenderemos a resolver algunas ecuaciones diferenciales y empezaremos a estudiar como bosquejar las soluciones o trayectorias de las soluciones sin la necesidad de resolver las ecuaciones.

Si ya han cursado algún curso de física, es probable que se hayan enfrentado a alguna ecuación diferencial ya que las mismas aparecen en innumerables problemas físicos. Una ecuación diferencial consiste en una ecuación que relaciona una función con sus derivadas. Veamos un ejemplo.



Consideremos el sistema de una masa enganchada a un resorte de constante k y longitud natural nula como muestra la figura. Si despreciamos el rozamiento del aire, por la segunda ley de Newton sabemos que la ecuación que rige el movimiento de la masa m es:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + mg$$

donde $\ddot{x}(t)$ se corresponde con la aceleración de la masa en este caso. Esta es una ecuación diferencial donde vemos que la derivada segunda $\ddot{x}(t)$ depende de la posición de la masa. Una solución a esta ecuación diferencial es una función $x(t)$ que verifique dicha ecuación.

Este sistema tiene una posición de equilibrio cuando la fuerza del resorte se iguala al peso, esto sucede en $x = \frac{mg}{k}$. Si colocamos la masa en esa posición con velocidad nula, la masa no se moverá. De otra forma, uno esperaría que la masa oscile alrededor de ese punto, es decir que la función posición tenga la siguiente forma:

$$x(t) = \frac{mg}{k} + A \sin(\omega t + \phi).$$

Pero para que el movimiento de la masa efectivamente tenga esta forma esa función debe verificar la ecuación diferencial del sistema. Veamos si esto sucede. Derivando obtenemos que:

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos que:

$$-mA\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -k \left(\frac{mg}{k} + A \sin(\omega t + \phi) \right) + mg = -kA \sin(\omega t + \phi)$$

Para que la igualdad se cumpla se debe verificar que $\omega^2 = \frac{k}{m}$ por lo tanto las soluciones a la ecuación serán de la forma:

$$(0.1) \quad x(t) = \frac{mg}{k} + A \sin \left(\sqrt{k/m} t + \phi \right).$$

Notar que tenemos infinitas soluciones para la misma ecuación, dependiendo de los valores de A y ϕ . Esto tiene sentido con el problema, ya que la masa no tiene un único movimiento posible. La masa puede oscilar con mayor o menor amplitud o permanecer en reposo en $x = \frac{mg}{k}$ dependiendo de las condiciones iniciales (posición y velocidad).

A la solución particular con $A = 0$ se le llama **solución estacionaria**. Una solución estacionaria es una función que verifique la ecuación diferencial y sea de la forma:

$$x(t) = x_0(\text{cte}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De ahí el nombre estacionaria, no varía con el tiempo. Diremos indistintamente que x_0 es un punto de equilibrio o un punto crítico si existe una solución estacionaria de la forma $x(t) = x_0$.

Volviendo al ejemplo del resorte vemos que si consideramos la función $x(t) = \frac{mg}{k}$ la misma tiene derivada nula. Si sustituimos esta función en la ecuación diferencial tenemos que:

$$m \cdot 0 = -k \frac{mg}{k} + mg = 0$$

por lo tanto la función verifica la misma. Hallar los puntos de equilibrio de una ecuación generalmente es la parte más sencilla del análisis (para los ejercicios del curso) ya que basta con fijarse los valores de x que anulan las derivadas.

Si bien habíamos visto que teníamos infinitas soluciones para la ecuación diferencial, intuitivamente se esperaría que dada una posición inicial y una velocidad inicial tengamos una única solución ya que el movimiento de la masa quedaría determinado. Es decir que el problema

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + mg \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

tenga una única solución. Se está suponiendo como tiempo inicial $t = 0$. Imponiendo las condiciones iniciales a las soluciones halladas en 0.1 tenemos lo siguiente:

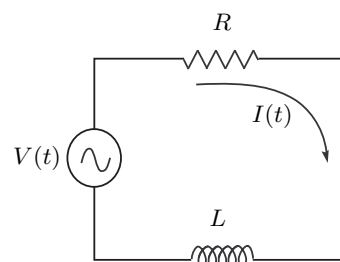
$$\begin{aligned} \frac{mg}{k} + A \sin(\phi) &= x_0 \\ A \sqrt{\frac{k}{m}} \cos(\phi) &= v_0 \end{aligned}$$

donde podemos despejar A y ϕ obteniendo una única solución de la forma (0.1) para el problema con condiciones iniciales.

¿Esto quiere decir que el problema tiene una única solución? En realidad, esto no basta. Tiene una única solución de la forma 0.1 pero no sabemos si existe otra función que verifique las tres condiciones que no tenga la forma mencionada. Podría pasar que en caso de existir otra solución la misma no tenga sentido físico y por lo tanto no sea de interés o que algo está faltando para dejar el movimiento determinado. Una parte importante del curso tratará acerca de la unicidad de las soluciones.

Veamos ahora otro ejemplo considerando el circuito de la figura. Este circuito está formado por una fuente sinusoidal $V(t) = A \sin(\omega t)$ con $A > 0$, una resistencia R y una bobina L . $I(t)$ es la intensidad que pasa por el circuito. Realizando mallas (aplicando las leyes de Kirchhoff) tenemos que:

$$A \sin(\omega t) = RI + L\dot{I}.$$



Nuevamente este sistema se rige por una ecuación diferencial. En este caso \dot{I} no solo depende de la intensidad si no también del tiempo. Este problema no tiene ninguna solución estacionaria ya que no existe ninguna constante I_0 que anule \dot{I} para todo tiempo. La derivada de I se anula cuando $A \sin(\omega t) = RI$, de donde $I = A \sin(\omega t)/R$ lo que no es constante.

La forma genérica de las ecuaciones diferenciales con las que trabajaremos será:

$$\dot{x} = f(t, x(t)).$$

Muchas veces escribiremos x en vez de $x(t)$ por comodidad, pero recordar que nos estamos refiriendo a una función que depende de t .

En el futuro, nos referiremos a la función x de la ecuación diferencial como una posición la cual dependerá del tiempo. Por esta razón, hablaremos de que pasa en el futuro o en el pasado, refiriéndonos a tiempos mayores o menores a la condición inicial. Obviamente en un problema físico la variable no tiene por que ser el tiempo, ni la función tiene que representar una posición (como en el caso del circuito, la función representa una intensidad), pero por comodidad utilizaremos estos términos.

Ejemplo 0.1.

Consideremos ahora la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = x$$

Pensemos en que nos está diciendo esta ecuación. Tenemos que la derivada de la función $x(t)$ es igual a la función. ¿Qué implica esto? Recordemos que la derivada representa la pendiente, es decir, que la pendiente será igual a la posición.

Dada una solución $x(t)$ de la ecuación, cuando $x(t)$ alcance el valor 3, en ese instante debe tener una pendiente de 3. Esto sucede para cualquier solución independientemente del tiempo en el cual alcancen el valor 3. A este tipo de ecuaciones diferenciales de la forma $\dot{x} = f(x)$ las llamaremos ecuaciones **autónomas**. Graficando estas pendientes nos quedamos con una clara idea de como son las soluciones (ver figura (1)).

Observar que para $x > 0$, \dot{x} es positiva y por lo tanto las soluciones deberán ser crecientes en esa zona. Además a medida que va creciendo la función $x(t)$ también lo hace su pendiente (a mayor x mayor \dot{x}). De forma inversa para los $x < 0$, donde tenemos que la pendiente es negativa, las soluciones son decrecientes y decrecen cada vez más rápido. Para el caso particular $x = 0$ tenemos que la pendiente es horizontal, por lo tanto las soluciones no crecen ni decrecen en esta recta.

Resolver esta ecuación es sencillo. ¿Que función cuando la derivamos nos da la misma función? Las soluciones a esta ecuación serán de la forma $x(t) = x_0 e^t$. En particular tenemos una solución constante cuando $x_0 = 0$ por lo que 0 es un punto de equilibrio.

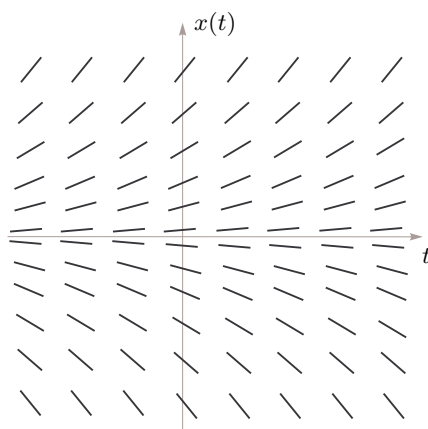


FIGURA 1. Campo de pendientes de la ecuación $\dot{x} = x$

En la mayoría de los casos, no será fácil resolver la ecuación diferencial obteniendo la forma analítica de las soluciones. Por esta razón, trataremos siempre de sacar la máxima información posible estudiando la ecuación. A continuación veremos un ejemplo de como hacer esto.

Hasta ahora hemos visto ecuaciones diferenciales donde las soluciones son funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pero también podemos tener casos de funciones que van de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si queremos saber la ecuación diferencial de como varía la demanda de la sandía, seguramente también depende de la estación, del precio, localidad, etc. Es decir que la derivada de la demanda de la sandía también depende de otras variables. Si consideramos n variables $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ la ecuación diferencial que rige el sistema la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{cases}$$

Ejemplo 0.2.

Ahora tomemos un problema donde la función se encuentra en \mathbb{R}^2 , donde llamaremos x e y a las funciones del primer y segundo elemento del vector. En otras palabras la solución será de la forma $(x(t), y(t))$. El problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Lo primero que se recomienda hacer al enfrentarse con una ecuación diferencial, es **hallar los puntos de equilibrio** de la ecuación. En este caso los puntos de equilibrio serán los puntos de la forma (x_0, y_0) donde ambas derivadas se anulen. Esto solo sucede en el origen, por lo tanto la única solución estacionaria es $(x(t), y(t)) = (0, 0)$.

Luego, **estudiar el signo de las derivadas** y comenzar a hacerse un dibujo indicando en que zonas la solución será creciente o decreciente. Dado que nuestra solución se encuentra en \mathbb{R}^2 y por lo tanto, el gráfico de las soluciones estaría en \mathbb{R}^3 no dibujaremos las soluciones, si no que dibujaremos las trayectorias. En un plano $x - y$ iremos indicando como se mueven las soluciones.

En nuestro problema tenemos que para $x > 0$, $\dot{x} > 0$, por lo tanto las soluciones tendrán que ir moviéndose hacia la derecha (crece x). De modo contrario para $x < 0$. Para $y > 0$, tenemos que $\dot{y} < 0$ y por lo tanto las soluciones tienen que bajar. Para $y < 0$, las soluciones tendrán que subir. Las flechas azules en los extremos de la imagen (2.a) indican lo dicho en este párrafo.

En la curva donde $\dot{x} = 0$, tenemos que $x(t)$ no está creciendo ni decreciendo, en consecuencia, las trayectorias tendrán pendiente vertical en esta curva. Razonando de forma análoga donde $\dot{y} = 0$ concluimos que en esa zona las trayectorias tendrán pendiente horizontal. En nuestro caso las derivadas se anulan en los ejes. En $y = 0$ tenemos que las soluciones tendrán pendiente horizontal mientras que en $x = 0$ tendrán pendiente vertical. Esto nos permite pensar que existen posibles soluciones donde las trayectorias sean semirectas del eje x o y . Observar que las funciones $(x_0 e^t, 0)$ o $(0, y_0 e^{-t})$ son soluciones a nuestra ecuación diferencial y sus trayectorias son justamente semirectas de los ejes. El tercer paso conveniente, es **encontrar soluciones fáciles**, como las recién mencionadas. Esto no siempre es posible.

Por último, se puede realizar un estudio más profundo de las velocidades. Supongamos que en un punto del plano tenemos que $\dot{y} = 2\dot{x}$, esto implicaría que cuando las soluciones pasen por ahí se estarán moviendo el doble de rápido según la dirección y que la de x . Por lo tanto, la tangente a la trayectoria en ese punto será 2. De la comparación de \dot{x} con \dot{y} podemos ver según que dirección crece más y por lo tanto ver como es la tangente a la trayectoria.

Teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo anterior podemos generar la imagen (2.a) donde vemos las tangentes a las trayectorias de las soluciones. Las flechas cambian de tamaño ya que tenemos en cuenta el módulo de la velocidad. Este diagrama nos permite hacernos una idea de como son las trayectorias de estas soluciones, las cuales se muestran en la imagen (2.b). Las flechas indican el sentido en que las soluciones recorren estas curvas a medida que pasa el tiempo.

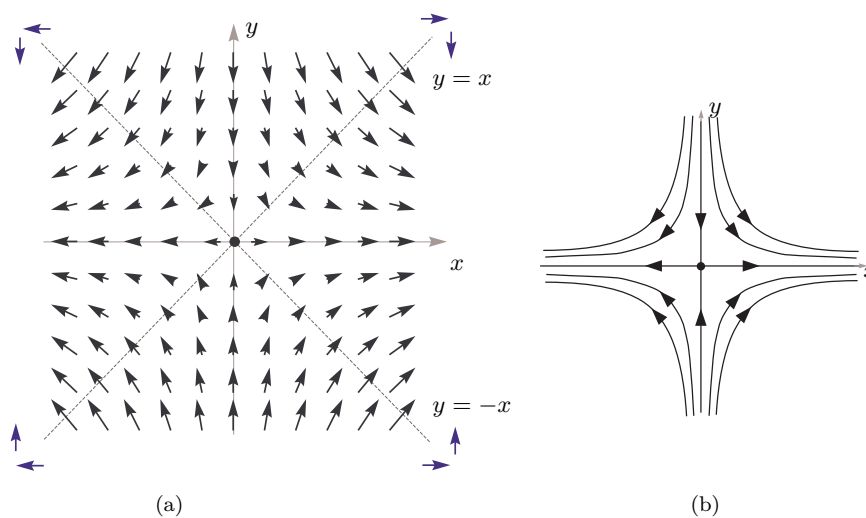


FIGURA 2

Una solución se encontrará en una trayectoria o en otra dependiendo de la condición inicial. Si la condición inicial es $(x_0, 0)$ la solución se mantendrá en la semirecta correspondiente. Si $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$ la solución se mantendrá en la curva con forma hiperbólica a la que pertenezca la condición inicial. Al segundo diagrama de la figura (2.b) se le llama **diagrama de fases**, el cual nos permite ver distintas trayectorias de las soluciones con distinta condición inicial. \square

Es interesante notar que distintas ecuaciones diferenciales pueden tener el mismo diagrama de fases. Tener el mismo diagrama de fases implica tener la misma trayectoria y recorrerla en igual sentido, pero en el diagrama de fases no vemos el tiempo. No sabemos cuanto tiempo demoró la

solución en ir de un punto hasta otro. Dos ecuaciones pueden tener el mismo diagrama pero recorrer las órbitas a distintas velocidades.

Veremos un ejemplo de lo mencionado en el párrafo anterior. Consideremos los problemas

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y^3 \\ \dot{y} = x^3 - y^3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

Los puntos críticos de ambas soluciones son la recta $x = y$. Si tomamos cualquier función de la forma $(x(t), y(t)) = (x_0, x_0)$ se puede comprobar fácilmente que verifica la ecuación. Las derivadas son positivas cuando $x > y$ (zona debajo de dicha recta) y negativas por arriba de la recta. Dado $\dot{x} = \dot{y}$ en cualquier punto, tenemos que tanto x como y crecen con la misma velocidad, lo que hace que las trayectorias de las soluciones sean rectas a 45 grados. Si esa forma de verlo no los convence, también tenemos que dado que $\dot{x} = \dot{y}$, integrando de ambos lados respecto al tiempo obtenemos que $x = y + C$, llegando a la misma conclusión. El diagrama de fase para ambos problemas es el de la figura (3).

Dado que las trayectorias de las soluciones son de la forma $y = x + C$, tenemos que $x(t) - y(t) = -C$. En consecuencia las soluciones al segundo problema recorrerán a velocidad constante la recta ($\dot{x} = \dot{y} = -C$) y en particular la recorrerán más rápido cuanto mayor sea $|C|$. Esto no sucede en el primer problema, la velocidad con la cual recorren la curva va cambiando ($x^3 - y^3$ no es constante en la trayectoria).

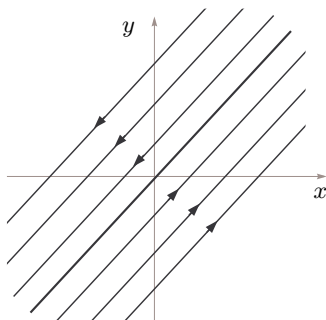


FIGURA 3

0.1. Métodos para resolver ecuaciones diferenciales

Si bien como ya mencionamos trataremos de saber lo más posible acerca de las soluciones sin resolverlas, veremos como resolver algunos casos sencillos. Para eso mencionaremos dos métodos, aunque existen muchos más. Comenzamos dando, informalmente, la definición de que entendemos por una ecuación diferencial y que es una solución.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Una ecuación diferencial es una ecuación del tipo $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$. Una solución es una función $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ para todo $t \in (a, b)$.

0.1.1. Separación de variables

Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2tx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Esta ecuación tiene un punto de equilibrio en $x = 0$, es creciente cuando x y t tienen el mismo signo y decreciente en caso contrario. Vemos que la derivada también se anula en $t = 0$, esto nos está diciendo que todas las soluciones a esta ecuación tienen pendiente horizontal ($\dot{x} = 0$) en tiempo cero. Si despejamos el tiempo de la ecuación diferencial tenemos que

$$\frac{\dot{x}}{x} = 2t.$$

Integrando de ambos lados según el tiempo:

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x}}{x} dt = \int_{t_0}^t 2t dt$$

Entonces $\log |x(t)|_{t_0}^t = t^2|_{t_0}^t$ de donde obtenemos que $\log |x(t)| = \log |x(t_0)| + t^2 - t_0^2$.

Despejando $|x(t)|$ y usando que $x(t_0) = x_0$, se obtiene lo siguiente.

$$|x(t)| = |x_0|e^{t^2-t_0^2}.$$

Por lo tanto, $|x(t)| = \pm|x_0|e^{t^2-t_0^2}$, donde tomamos + si $x_0 > 0$ y - si $x_0 < 0$.

Este método sirve cuando tenemos una ecuación diferencial de la forma $\dot{x} = f(x)g(t)$. En este caso:

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x}}{f(x)} dt = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{f(u)} = \int_{t_0}^t g(t) dt$$

donde en la segunda igualdad hicimos el cambio de variable $u = x(t)$.

0.1.2. Ecuaciones lineales de primer orden

Las ecuaciones de la forma $\dot{x} + a(t)x = b(t)$, donde $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas definidas en algún intervalo I son llamadas lineales de primer orden. Vamos a resolver este tipo de ecuaciones de dos formas. El primer método es una fórmula que nos permite resolver la ecuación y el segundo método es conocido como variación de constantes.

a) Fórmula para lineales.

Vamos a probar que si x verifica $\dot{x} + a(t)x = b(t)$ entonces

$$x(t) = e^{-\int a(t)dt} \left(\int e^{\int a(t)dt} b(t) dt + K \right) \text{ donde } K \text{ es una constante.}$$

Prueba: Primero observemos que

$$(0.2) \quad \left(x e^{\int a(t)dt} \right)' = \dot{x} e^{\int a(t)dt} + x e^{\int a(t)dt} a(t).$$

Por otro lado, partiendo de la igualdad $\dot{x} + a(t)x = b(t)$, si la multiplicamos a ambos miembros por $e^{\int a(t)dt}$, tenemos que $(\dot{x} + a(t)x)e^{\int a(t)dt} = e^{\int a(t)dt} b(t)$. Usando (0.2), tenemos que

$$\begin{aligned} (\dot{x} + a(t)x)e^{\int a(t)dt} &= \left(x e^{\int a(t)dt} \right)' . \text{ Por lo tanto} \\ \left(x e^{\int a(t)dt} \right)' &= e^{\int a(t)dt} b(t) \end{aligned}$$

Integrando esta última igualdad (y simplificando el integral con la derivada) obtenemos

$$x e^{\int a(t)dt} = \int e^{\int a(t)dt} b(t) dt + K$$

despejando, se llega a

$$x(t) = e^{-\int a(t)dt} \left(\int e^{\int a(t)dt} b(t) dt + K \right)$$

Veamos un ejemplo. Sea la ecuación $\dot{x} - 3x = e^t$. Por lo tanto $a(t) = -3$ y $b(t) = e^t$. Claramente $\int a(t) = -3t$. Aplicando la fórmula, tenemos que

$$x(t) = e^{3t} \left(\int e^{-3t} e^t dt + K \right) = e^{3t} \left(-e^{-2}/2 dt + K \right) = -e^t/2 + K e^{3t}.$$

b) Variación de constantes.

Una solución genérica a este tipo de ecuaciones es de la forma $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$ donde las funciones de la derecha de la igualdad se les llama solución homogénea y particular. La solución particular es una solución a la ecuación diferencial lineal mientras que la homogénea debe cumplir que:

$$\dot{x}_H + a(t)x_H = 0.$$

Es fácil de verificar que la suma de una solución homogénea más una particular es solución.

$$(\dot{x}_H + \dot{x}_P) + a(t)(x_H + x_P) = (\dot{x}_H + a(t)x_H) + (\dot{x}_P + a(t)x_P) = b(t)$$

Lo que propone este método es que la solución particular sea de la forma

$$x_P = K(t)x_H.$$

Esto facilita mucho las cosas ya que la solución homogénea es fácil de calcular mediante variables separables. Veamos un ejemplo de como resolver una ecuación diferencial por este método. Consideremos la siguiente ecuación:

$$\dot{x} - 2tx = t$$

Por lo tanto la solución homogénea deberá cumplir:

$$\dot{x}_H - 2tx_H = 0.$$

Este es el mismo problema que se resolvió con variables separables, por lo que tenemos que $x_H(t) = Ae^{t^2}$, de modo que la solución particular será de la forma $x_P(t) = AK(t)e^{t^2}$. Para que esta función sea solución tendrá que verificar la ecuación diferencial, por lo tanto:

$$\begin{aligned} A\dot{K}(t)e^{t^2} + 2AtK(t)e^{t^2} - 2tAK(t)e^{t^2} &= t \\ A\dot{K}(t)e^{t^2} &= t \end{aligned}$$

En consecuencia $K(t)$ debe cumplir que:

$$\dot{K}(t) = \frac{te^{-t^2}}{A}$$

Integrando tenemos que la función $K(t)$ es

$$K(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2A} \Rightarrow x_P(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2A} Ae^{t^2} = -\frac{1}{2}$$

Observar que $-\frac{1}{2}$ es un punto de equilibrio. Esto también lo podíamos deducir estudiando donde se anula \dot{x} . Por último una solución genérica la podremos escribir como:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = Ae^{t^2} - \frac{1}{2}$$

Ejercicio: imponiendo que la función particular debe ser una solución a la ecuación diferencial $\dot{x} + a(t)x = b(t)$ demostrar que:

$$\dot{K}(t)x_H = b(t)$$

0.1.3. Ecuaciones lineales de segundo orden.

Comenzamos recordando algunos conceptos de álgebra lineal que serán de mucha ayuda. Sea $W = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \varphi \text{ es continua}\}$. No es difícil probar que W es un espacio vectorial. El vector nulo de este espacio es la función $\vec{0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{0}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dos funciones φ_1 y φ_2 son linealmente independientes, si $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = \vec{0}$ implica $C_1 = C_2 = 0$. La igualdad $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = \vec{0}$ implica que $C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq \beta$. Entonces las funciones $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}$ y $\varphi_2(t) = e^{\beta t}$ son linealmente independientes.

Como vimos antes la igualdad $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = \vec{0}$ implica que $C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t} = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\alpha \neq \beta$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\beta > \alpha$. Luego Dividiendo ambos miembros por $e^{\alpha t}$ la igualdad $C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t} = 0$ se transforma en $C_1 + C_2e^{(\beta-\alpha)t} = 0$. Entonces

$$0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} C_1 + C_2e^{(\beta-\alpha)t} = C_1.$$

Como $C_1 = 0$ entonces $C_2e^{\beta t} = 0$, lo que implica que $C_2 = 0$.

Lineales de segundo orden homogénea.

Consideremos la ecuación diferencial (*) $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ donde a, b y c son números reales. Para esta ecuación sea $V = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) = 0\}$, o sea el conjunto de todas las soluciones de (*). El siguiente resultado que será probado más adelante nos ayuda a resolver la ecuación.

Proposición 0.1. Sea $V = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) = 0\}$. Entonces

1. V es un espacio vectorial.
2. La dimensión de V es dos.

El ítem 1. es muy fácil de probar. Para probar el ítem 2. necesitamos utilizar el Teorema de Picard, el cuál será enunciado más adelante.

La proposición 0.1 nos dice que el conjunto solución de (*) es un espacio vectorial de dimensión dos, por lo que, para resolver dicha ecuación basta con encontrar dos soluciones φ_1 y φ_2 que sean linealmente independientes. Luego toda solución es de la forma $\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$ donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Polinomio característico.

El siguiente método nos permite encontrar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (*). Dada la ecuación $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ consideramos el polinomio, en la variable λ , $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$. Como es un polinomio de grado dos, tenemos tres posibilidades para las raíces de P :

1. P tiene dos raíces reales α y β con $\alpha \neq \beta$.
2. P tiene una raíz real doble α .
3. P tiene dos raíces complejas $\alpha + i\beta$ y $\alpha - i\beta$.

Para el ítem 1. consideramos las funciones $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}$ y $\varphi_2(t) = e^{\beta t}$. Como las funciones φ_1 y φ_2 son linealmente independientes, entonces por la proposición 0.1, toda solución φ es de la forma $\varphi(t) = C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Para el ítem 2. consideramos las funciones $\varphi_1(t) = e^{\alpha t}$ y $\varphi_2(t) = te^{\alpha t}$. Nuevamente, como son li se tiene que toda solución φ es de la forma $\varphi(t) = C_1e^{\alpha t} + C_2te^{\alpha t}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Para el ítem 3. consideramos las funciones $\varphi_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ y $\varphi_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$. Como son li, toda solución φ es de la forma $\varphi(t) = C_1e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Resolver la ecuación $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$.

Su polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$. Luego sus raíces son $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Por el ítem 1. todas las soluciones son de la forma $\varphi(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t}$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Lineales de segundo orden no homogénea.

Ahora consideramos la ecuación (*) $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = R(t)$ donde a, b y c son números reales y $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

Vamos a notar por φ_H todas las soluciones de la ecuación homogénea $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ y por φ_p una solución particular de (*).

Proposición 0.2. φ es solución de la ecuación $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = R(t)$ si y solo si $\varphi = \varphi_H + \varphi_p$.

Los que nos dice esta proposición es si conocemos una solución particular, como las soluciones de la homogénea son fáciles de hallar, conocemos todas las soluciones de (*).

Ejemplo. Resolver la ecuación $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = e^t$.

Busquemos una solución particular φ_p de la forma $\varphi_p(t) = Ae^t$. Como $\varphi_p''(t) = \varphi_p'(t) = \varphi_p(t) = Ae^t$. Se tiene que cumplir

$$\varphi_p''(t) - 5\varphi_p'(t) + 6\varphi_p(t) = Ae^t - 5Ae^t + 6Ae^t = e^t.$$

Por lo tanto tomando $A = 1/2$ se tiene que $\varphi_p(t) = 1/2e^t$ es solución de (*). Luego, por la proposición 0.2, se tiene que las soluciones son de la forma $\varphi(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t} + 1/2e^t$.

0.2. Ecuaciones autónomas

Como ya se mencionó anteriormente, las ecuaciones autónomas son aquellas con la forma:

$$\dot{x} = f(x(t))$$

donde no aparece el tiempo directamente en la ecuación. En estos casos decimos que la derivada depende solo de la posición y no del tiempo ya que si bien la posición depende del tiempo, lo que nos da la derivada es su posición. Distintas soluciones pueden tener la misma posición en distintos tiempos pero tendrán la misma pendiente en esa posición.

Consideremos el problema $\dot{x} = f(x)$ y una solución $x(t)$ con condición inicial $x(0) = x_0$. Ahora tomemos la función $y(t) = x(t - t_0)$ lo que gráficamente es la función x corrida en el tiempo (a la derecha o a la izquierda dependiendo del signo de t_0). Veremos que $y(t)$ también es solución. Para eso debemos fijarnos que verifique la ecuación diferencial.

$$\dot{y} = \dot{x}(t - t_0) = f(x(t - t_0)) = f(y(t))$$

De modo que la función $y(t)$ es solución a la ecuación. La diferencia es que esta solución tiene distinta condición inicial ya que $y(t_0) = x(0) = x_0$ ¿Que nos dice esto? Que las soluciones con condición inicial $x(t_0) = x_0$ tendrán la misma forma independientemente de t_0 pero estarán corridas en el tiempo. Es por esta razón que generalmente pondremos como tiempo inicial el cero y no por esto perderemos generalidad en las ecuaciones autónomas.

Ejemplo 0.3.

Estudiemos la ecuación:

$$\dot{x} = \sin(x).$$

Como dijimos anteriormente lo primero es ver los puntos de equilibrio. En este caso tenemos infinitos puntos de equilibrio que son de la forma $n\pi$, es decir que tenemos infinitas soluciones estacionarias (ir dibujándose estas soluciones). Luego tenemos que las soluciones serán crecientes mientras x está entre 0 y π , decrecientes entre π y 2π y así sucesivamente. Supongamos que la solución al problema con condición inicial es única, es decir que

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución. Esto implicaría que los gráficos de las soluciones no se pueden cortar, ya que si consideráramos el problema con condición inicial el punto donde se cortan tendríamos dos soluciones posibles para ese problema. Haciendo esa suposición tenemos entonces que el resto de las soluciones estarán contenidas entre las soluciones estacionarias (franjas de espesor π).

A su vez las soluciones son estrictamente crecientes o decrecientes en estas franjas y están acotadas, por lo que las soluciones tendrán que tener asíntotas horizontales tanto en el futuro como en el pasado. Si una función tiene una asíntota horizontal la pendiente está tendiendo a cero. Esto solo sucede cuando nos acercamos a $x = n\pi$ por lo tanto las asíntotas tendrán que estar en esos valores.

Por último, por ser una ecuación autónoma tenemos que las soluciones se repiten corridas en el tiempo. En la figura (4) tenemos algunas soluciones a la ecuación diferencial con distinta condición inicial. Este problema se puede resolver por variables separables, queda a cargo del lector resolverlo y comparar los resultados.

Si la condición inicial es de la forma $n\pi$ sabemos que las soluciones permanecerán ahí, pero veamos que sucede si la condición inicial es cercana a $n\pi$. Vemos que si la condición inicial es $x_0 \approx 0$ las soluciones se van alejando del cero a medida que pasa el tiempo sin importar que tan chico sea x_0 . Por esta razón decimos que el punto de equilibrio 0 es inestable. Esto no sucede si consideramos una condición inicial muy cerca de π . En este caso, las soluciones se van acercando a π a medida que pasa el tiempo. Diremos que π es un punto de equilibrio asintóticamente estable, ya que no solo las soluciones se mantienen cerca de π si no que también se acercan al punto. Estos conceptos los formalizaremos más adelante.

Si quisiéramos realizar el diagrama de fases en este caso el mismo sería una recta ya que las soluciones están en \mathbb{R} .

En este caso las trayectorias son los puntos de equilibrio o un conjunto de la forma $n\pi < x < (n + 1)\pi$. Tener en cuenta que en cada trayectoria tenemos infinitas soluciones con la misma forma pero corridas en el tiempo. Esto mismo pasaba en el ejemplo 2 en la ecuación en \mathbb{R}^2 , esta también era autónoma ya que no aparecía directamente el tiempo en la ecuación. Cada trayectoria representa infinitas soluciones corridas en el tiempo. ○

Ejemplo 0.4.

Consideremos una nueva ecuación diferencial que es la siguiente:

$$\dot{x} = x^2 - 1.$$

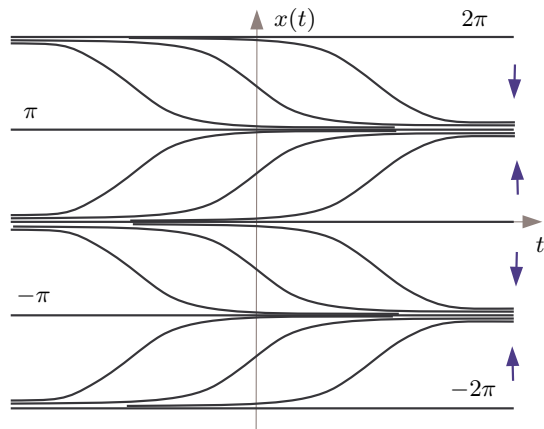
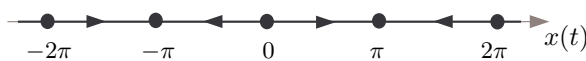


FIGURA 4. Soluciones de la ecuación $\dot{x} = \sin(x)$



Esta ecuación se anula en $|x| = 1$ donde tiene los puntos de equilibrio, es creciente cuando $|x| > 1$ y decreciente cuando $|x| < 1$. Este problema lo podemos resolver mediante variables separables. Consideraremos $t_0 = 0$ para facilitar las cuentas.

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{x^2 - 1} = \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{2} \left(L \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - L \left| \frac{1-x_0}{1+x_0} \right| \right) = t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0 + 1 - (1 - x_0)e^{2t}}{e^{2t}(1 - x_0) + x_0 + 1}$$

Podemos ver que esta función podría tener un tiempo donde se anule el denominador y por lo tanto no estar definida para todo tiempo. Esto sucede cuando:

$$e^{2t}(1 - x_0) + x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2t} = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$$

Se puede deducir que para $|x_0| < 1$ el término de la derecha de la igualdad anterior es negativo y por lo tanto no existe ningún tiempo que anule el denominador, mientras que para los $x_0 < -1$ el término de la derecha es positivo pero menor que 1, por lo que se anula para un tiempo menor que cero (en el pasado) y al contrario cuando $x_0 > 1$. Tenemos entonces que las soluciones del medio, estarán definidas tanto para el futuro como para el pasado. Las soluciones de más arriba no estarán definidas para todo tiempo en el futuro y las de más abajo no lo estarán para todo tiempo en el pasado.

Deducimos que **el dominio de las soluciones depende de la condición inicial**. Realizando los límites cuando el tiempo tiende a más o menos infinito pudimos realizar un bosquejo de las soluciones que se encuentra en la figura (5). Todas las funciones con $x_0 > 1$ son iguales pero corridas en el tiempo y lo mismo pasa con las otras condiciones iniciales. Vemos claramente que el 1 es un punto inestable mientras que el -1 es asintóticamente estable.

Ejemplo 0.5.

Veamos un último ejemplo en \mathbb{R}^2 al que le realizaremos el diagrama de fase y esta conectado con el ejemplo anterior. Nuevamente, ir marcando en el plano $x - y$ la información que vamos obteniendo.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = xy \end{cases}$$

La ecuación de \dot{x} es igual al ejemplo anterior por lo que ya sabemos como es la primera componente de las soluciones a este problema. De la segunda componente tenemos que $\dot{y} = 0$ en $x = 0$ e $y = 0$ donde las trayectorias tendrán pendiente horizontal. Los puntos de equilibrio serán donde ambas derivadas se anulen, por lo que los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ son de equilibrio. Luego tenemos que:

$$\dot{x} > 0 \Rightarrow |x| > 1 \quad \dot{y} > 0 \Rightarrow x \text{ e } y \text{ tienen el mismo signo}$$

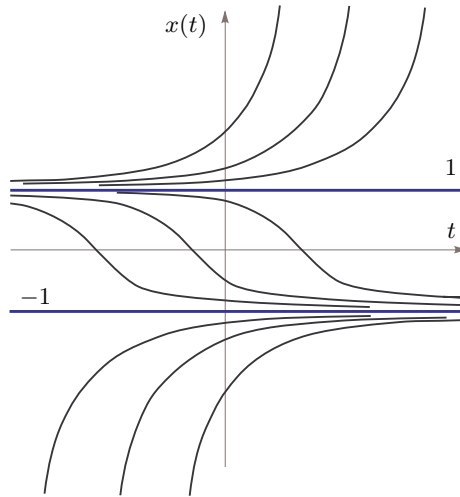


FIGURA 5. Soluciones de la ecuación $\dot{x} = x^2 - 1$

○

$$\dot{x} < 0 \Rightarrow |x| < 1 \quad \dot{y} < 0 \Rightarrow x \text{ e } y \text{ tienen distinto signo}$$

Si nos paramos en $x = 1$ con $y \neq 0$ tendremos velocidad según y pero no según x . Esto, al igual que en el segundo ejemplo, nos permite pensar que podríamos tener soluciones de la forma $(1, y(t))$. De la misma forma podríamos pensar para las rectas $x = -1$ e $y = 0$. Veamos si esto es cierto. Tratemos de buscar una solución de la forma $(1, y(t))$. Vamos a sustituir esta función en la ecuación diferencial e imponer que la misma verifique la ecuación.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

La primera condición con $\dot{x} = 0$ ya la verifica. La segunda ecuación ya la hemos resuelto y basta con tomar $y(t) = y_0 e^t$. Entonces si consideramos la función $(1, y_0 e^t)$ la misma verifica la ecuación. Por si quedan dudas, podemos corroborarlo.

$$(x(t), y(t)) = (1, y_0 e^t) \Rightarrow (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (0, y_0 e^t)$$

Si sustituimos la función en la ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - 1 = 0 \\ \dot{y} &= 1 \cdot y_0 e^t = y_0 e^t \end{aligned}$$

Por lo tanto la función verifica la ecuación diferencial. Análogamente tenemos soluciones de la forma $(-1, y_0 e^t)$ y $(x(t), 0)$ donde $x(t)$ es de la forma hallada en el ejemplo anterior. Respetando los signos de las derivadas, teniendo en cuenta que ya conocemos la forma de la primera componente de las soluciones y teniendo en cuenta las soluciones sencillas encontradas, podemos realizar un bosquejo del diagrama de fases que se encuentra en la imagen (6).

Por la primer componente de las soluciones, sabemos que las soluciones con $|x_0| < 1$ deben tender a $x = -1$ en el futuro y a $x = 1$ en el pasado. En la zona de la derecha las soluciones tienen que tender en el pasado a $x = 1$ y sabemos que las mismas no están definidas para todo tiempo en el futuro, ya que la primera componente no está definida para todo tiempo (para que la solución $(x(t), y(t))$ este definida ambas componentes deben estarlo). De forma contraria para la zona de la izquierda.

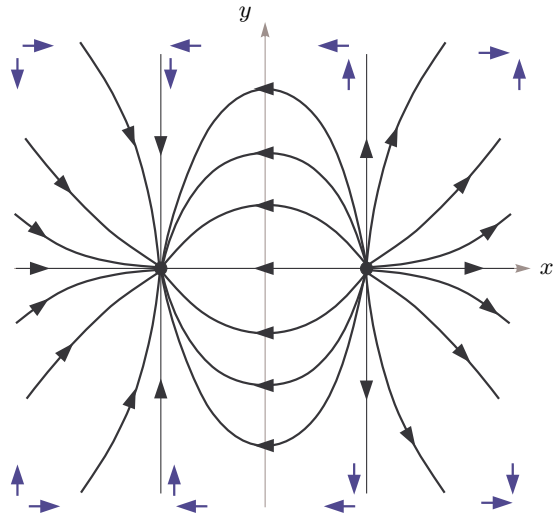


FIGURA 6. Diagrama de fases del ejemplo 5



Transformada de Laplace

Este capítulo es un adaptación de las Notas hechas por J. Vieitez y N. Moller para el curso de funciones de variable compleja.

Comenzamos recordando que por definición, $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t)dt$. Si $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t)dt$ es finito decimos que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge y si el limite es infinito decimos que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Definición 0.1. Decimos que una función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua a trozos, si es continua excepto en un conjunto $D = \{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ (D puede ser vacío o tener infinitos elementos), tal que para todo $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ se cumple que $D \cap [0, K]$ es un conjunto finito. Además, existen los limites laterales $\lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_i^-} f(t)$ y son finitos para todo $t_i \in D$.

Definición 0.2. Decimos que una función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua a trozos es de orden exponencial si existen $\alpha > 0$ y $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$.

Proposición 0.1. Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de orden exponencial ($|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para todo $t \geq 0$). Entonces:

1. Para todo s , con $s > \alpha$, se cumple que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ es convergente.
2. Para todo $s > \alpha$ se cumple que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st}f(t) = 0$.
3. $F(t) = \int_0^t f(u)du$ es de orden exponencial.

Prueba del ítem 1. Sea s con $s > \alpha$, entonces

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt \stackrel{|f(t)| \leq Me^{\alpha t}}{\leq} \int_0^{+\infty} Me^{(\alpha-s)t} dt = \frac{Me^{(\alpha-s)t}}{(\alpha-s)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{s-\alpha}.$$

Prueba del ítem 2. Consideremos $s > \alpha$, entonces

$$\left| \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st}f(t) \right| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-st}f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st}Me^{\alpha t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} Me^{(\alpha-s)t} = 0.$$

Prueba del ítem 3.

$$|F(t)| = \left| \int_0^t f(u)du \right| \leq \int_0^t |f(u)|du \leq \int_0^t Me^{\alpha u}du = \frac{Me^{\alpha u}}{\alpha} \Big|_0^t = \frac{M(e^{\alpha t} - 1)}{\alpha} \leq \frac{M}{\alpha}e^{\alpha t}.$$

Ejercicio

1. Probar que la función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = e^{t^2}$ **no** es de orden exponencial y además para todo $s \in \mathbb{R}$ se cumple que la integral $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ es divergente.
2. Dar un ejemplo de una función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua a trozos que no es de orden exponencial y que la integral $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ sea convergente.

Ejemplos de funciones de orden exponencial.

1. La función constante.
2. $f(t) = e^{at}$ con $a \in \mathbb{R}$.
3. La función Pulso. Esta función es definida por (mirar figura 1):

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } t \in [t_0 - \frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}], \\ 0 & \text{si } t \notin [t_0 - \frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}]. \end{cases}$$

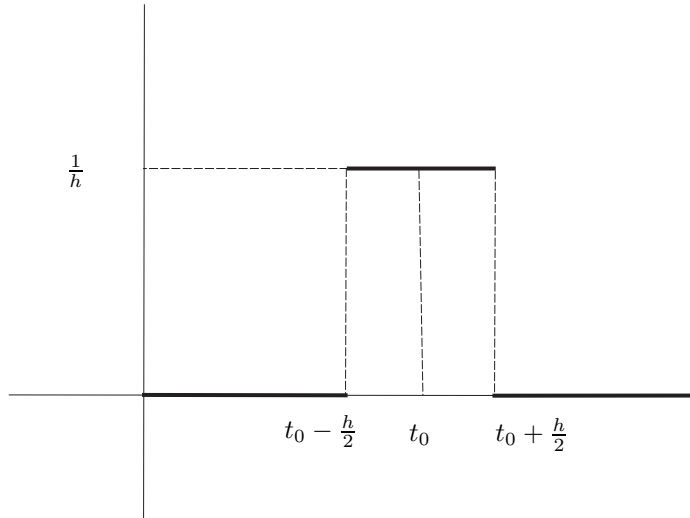


FIGURA 1

4. Los polinomios, $\log(t)$, $\cos(t)$ y $\text{sen}(t)$.

Definición 0.3. Llamamos transformada de Laplace de la función continua a trozos $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a la función

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

siempre que la integral impropia sea convergente.

Observación 1. Si f es de orden exponencial, entonces, por la Proposición 0.1 ítem 1, la integral $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$ es convergente para $s > \alpha$. Luego la transformada de Laplace está definida para todo $s > \alpha$.

Ejemplos de Transformadas de Laplace.

1. La función constante $f(t) = 1$ para $t \geq 0$. Entonces

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t)e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^T = \frac{1}{s}.$$

Es claro que este último integral converge si y solo si $s > 0$.

2. $f(t) = e^{at}$ para $t \geq 0$. Entonces

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{(a-s)t} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_0^T = \frac{1}{s-a}.$$

Este último integral converge si y solo si $s > a$.

3. $f(t) = t^\alpha$, con $\alpha > -1$, para $t \geq 0$.

Antes de hacer los cálculos, recordamos que la función Γ de Euler definida por $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$ es convergente para $x > 0$ y si $x = n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Por otro lado

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^T t^\alpha e^{-st} dt.$$

Tomando $s > 0$ y haciendo el cambio de variable $u = st$, se tiene que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^T t^\alpha e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{s\varepsilon}^{sT} \frac{u^\alpha e^{-u}}{s^\alpha} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Para el caso en que $\alpha = n \in \mathbb{N}$, como $\Gamma(n+1) = n!$ se tiene que si $f(t) = t^n$ entonces $\mathcal{L}[f](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Propiedades.

Para las siguientes propiedades asumimos que las funciones f y g son de orden exponencial.

1. **Linealidad.** $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s)$ para todo α y β reales.

La demostración se deduce fácilmente de la definición y del hecho que suma de funciones exponenciales es exponencial.

2. **Transformada de la derivada.** Si f' es continua para todo $t \geq 0$ entonces

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

Antes de comenzar la prueba, hacemos notar que la función $f(t) = \text{sen}(e^{t^2})$ es de orden exponencial y $f'(t) = \cos(e^{t^2})e^{t^2}2t$ no es de orden exponencial.

Demostración. Por la proposición 0.1 ítem 2, para todo $s \geq \alpha$ se cumple que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) = 0$. Por definición $\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f'(t)e^{-st} dt$. Usando partes, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f'(t)e^{-st} dt &= \lim_{T \rightarrow +\infty} f(t)e^{-st} \Big|_0^T - \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t)(-s)e^{-st} dt = \\ &= -f(0) + s \cdot \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t)e^{-st} dt = -f(0) + s\mathcal{L}[f](s). \end{aligned}$$

□

A partir de esto último se deduce fácilmente que

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](s) = s^k \mathcal{L}[f](s) - f(0)s^{k-1} - f'(0)s^{k-2} - f''(0)s^{k-3} - \dots - f^{(k-1)}(0).$$

(Para esta última igualdad asumimos que podemos aplicar la transformada a $f^{(k)}$ para todo k)

3. **Transformada del integral.** Si f es continua para todo $t \geq 0$, entonces $\mathcal{L}[\int_0^t f](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s)$.

Demostración. Tomando $F(t) = \int_0^t f$ se tiene que $F' = f$ y $F(0) = 0$. Además, como f es de orden exponencial, por la Proposición 0.1 ítem 3, se tiene que F es de orden exponencial y por el ítem 2 se tiene que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} F(t) = 0$.

Por la transformada de la derivada tenemos que $\mathcal{L}[F'](s) = s\mathcal{L}[F](s) - F(0)$. De donde se deduce que $\mathcal{L}[f](s) = s\mathcal{L}[\int_0^t f](s)$. Despejando se obtiene que $\mathcal{L}[\int_0^t f](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s)$.

□

4. **Transformada de la convolución.** Dadas dos funciones f y g se define la convolución de f con g como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u) \cdot g(t-u) du.$$

Vamos a probar que si f y g son funciones primarias entonces $\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^{+\infty} (f * g)(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(u) \cdot g(t-u) du \right) e^{-st} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(\int_0^t f(u)g(t-u)e^{-st} du \right) e^{-st} dt. \end{aligned}$$

La región de integración está dada por la figura 2. Primero integramos la variable u , desde $u = 0$ hasta $u = t$ y luego la variable t desde $t = 0$ hasta $t = T$. Usando el Teorema de Fubini, si cambiamos el orden de integración, primero integramos la variable t , desde $t = u$ hasta $t = T$ y luego la variable u desde $u = 0$ hasta $u = T$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(\int_0^t f(u)g(t-u) du \right) e^{-st} dt &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \left(\int_u^T f(u)g(t-u)e^{-st} dt \right) du = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(u)e^{-su} \left(\int_u^T g(t-u)e^{-s(t-u)} dt \right) du = \end{aligned}$$

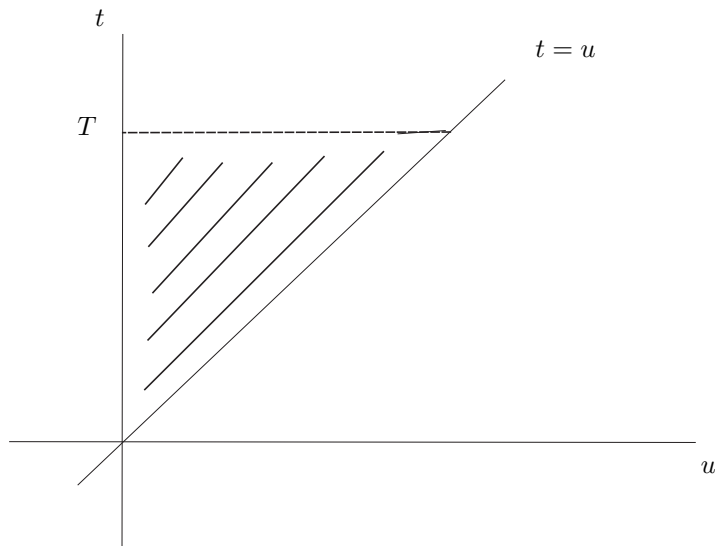


FIGURA 2

haciendo el cambio de variable $x = t - u$, tenemos

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(u) e^{-su} \left(\int_0^{T-u} g(x) e^{-sx} dt \right) du =$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T f(u) e^{-su} du \cdot \left(\int_0^{T-u} g(x) e^{-sx} dt \right) = \int_0^{+\infty} f(u) e^{-su} du \cdot \left(\int_0^{\infty} g(x) e^{-sx} dt \right) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s).$$

□

Pruebe, como ejercicio, que $f * g = g * f$.

Antitransformada de Laplace.

Dos preguntas surgen muy naturalmente: ¿Podrían dos funciones diferentes f_1 y f_2 tener la misma transformada de Laplace?

¿Existe un procedimiento constructivo o explícito para determinar $f(t)$ a partir de $\mathcal{L}[f](s)$?

Existe un problema potencial al trabajar con la transformada inversa, y es que esta puede no ser única. En efecto, es posible que $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, siendo $f \neq g$. Para nuestro propósito esto no es tan malo como parece, pues, si f y g son continuas y de orden exponencial en $[0, +\infty]$ y $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, entonces $f = g$; pero, si f y g no son continuas y de orden exponencial en $[0, +\infty]$ y $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, entonces se puede demostrar que las funciones f y g son casi iguales; esto quiere decir, que pueden diferir sólo en puntos de discontinuidad.

Teorema 0.4. *Sean f y g dos funciones continuas y de orden exponencial. Si $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$, entonces $f = g$.*

No daremos la demostración de este resultado ya que requiere técnicas que están fuera del alcance de este curso.

Denotaremos por $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ a la antitransformada de la función $F(s)$. Por ejemplo, como $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}$, entonces $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$.

Ejemplos de antitransformada.

Vamos a hallar la antitransformada de $F(s) = \frac{2}{s^3(s+1)}$. Como

$$\frac{2}{s^3(s+1)} = \frac{2}{s} + \frac{-2}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{-2}{s+1}.$$

Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s+1}\right].$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] = 2$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s^2}\right] = 2t$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] = t^2$ y $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s+1}\right] = -2e^{-t}$. Se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3(s+1)}\right] = 2 - 2t + t^2 - 2e^{-t}.$$

Veamos algunos ejemplos de como aplicar la transformada para resolver ecuaciones diferenciales:

1) Hallar la solución de la siguiente ecuación:
$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} = e^t \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Llamemos $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$. Por la propiedad de la transformada de la derivada se tiene que $\mathcal{L}(\dot{x}(t)) = s\mathcal{L}(x(t)) - x(0) = sX(s) - 1$. Usando nuevamente esta propiedad, se cumple que

$$\mathcal{L}(\ddot{x}(t)) = s^2\mathcal{L}(x(t)) - sx(0) - \dot{x}(0) = s^2X(s) - s - 1.$$

Por último, usando la tabla de transformadas, tenemos que $\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s-1}$. Por lo tanto, al aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros de la igualdad $\ddot{x} + \dot{x} = e^t$ obtenemos que $\mathcal{L}(\ddot{x} + \dot{x}) = \mathcal{L}(e^t)$. Usando las igualdades anteriores se llega a que

$$[s^2X(s) - s - 1] + [sX(s) - 1] = \frac{1}{s-1}.$$

Operando obtenemos $(s^2 + s)X(s) = \frac{1}{s-1} + 2 + s$, que se reduce a

$$X(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s^3 - s}.$$

Por el método de fracciones simples obtenemos

$$X(s) = \frac{s^2 + s - 1}{s^3 - s} = \frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1}$$

Recurriendo a la tabla de transformadas deducimos que la solución es

$$x(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t = 1 + sh(t).$$

2) Sea $V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, resolver $\dot{V}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot V(t)$ y $V(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Observemos en primer lugar que podemos escribir la ecuación anterior como un sistema en coordenadas dado por
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

LLamando $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$ e $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$, entonces, tomando transformada a ambos lados obtenemos
$$\begin{cases} sX(s) + 1 = 2X(s) + Y(s) \\ sY(s) - 5 = X(s) + 2Y(s) \end{cases}$$

Equivalentemente,
$$\begin{cases} (2-s)X(s) + Y(s) = 1 \\ X(s) + (2-s)Y(s) = -5 \end{cases}$$

Resolviendo llegamos a que $X(s) = \frac{7-s}{s^2-4s+3}$ y que $Y(s) = \frac{5s-11}{s^2-4s+3}$, descomponiéndolas en fracciones simples tenemos que $X(s) = \frac{-3}{s-1} + \frac{2}{s-3}$ y que $Y(s) = \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s-3}$. Luego, utilizando las tablas podemos determinar que las soluciones vienen dadas por $x(t) = -3e^t + 2e^{3t}$ e $y(t) = 3e^t + 2e^{3t}$ lo que nos permite determinar el vector $V(t)$ solución de la ecuación diferencial. \square

Algunos resultados sin demostración.

Para terminar vamos a enunciar unas propiedades de las cuales daremos una idea de la demostración. Para las siguientes propiedades asumimos que la función f es de orden exponencial.

1. $\lim_{s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}[f](s) = f(0)$.
2. $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$.
3. $\lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Prueba del ítem 1. Por lo probado anteriormente (transformada de la derivada) tenemos que $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Por lo tanto $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f'](s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Para probar el ítem 1. basta probar que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f'](s) = 0$.

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f'](s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f'(t) \underbrace{\lim_{s \rightarrow +\infty} e^{-st} dt}_{=0} = \int_0^{+\infty} 0 = 0.$$

La parte informal de la demostración es que no hemos probado que se pueda intercambiar el límite con el integral (segunda igualdad).

Prueba del ítem 2.

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}[f](s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \underbrace{\lim_{s \rightarrow +\infty} e^{-st} dt}_{=0} = \int_0^{+\infty} 0 = 0.$$

Prueba del ítem 3. Nuevamente, por la transformada de la derivada tenemos que $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Por lo tanto

$\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}[f'](s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}[f'](s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f'(t) \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} dt}_{=1} = \int_0^{+\infty} f'(t) dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0). \end{aligned}$$

Combinando las dos igualdades anteriores se tiene que $\lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Note que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t}{s} dt \neq \int_0^{+\infty} \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{t}{s} dt.$$

Tabla de transformadas y transformadas inversas.

$f(t)$	$[\mathcal{L}(f)](s) = F(s)$	$G(s)$	$[\mathcal{L}^{-1}(G)](t)$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s}$	1
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^2}$	t
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$t^\alpha, \alpha > 1$	$\frac{\Gamma(1+\alpha)}{s^{1+\alpha}}$	$\frac{1}{s^\alpha}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t)$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\cosh(\omega t)$
$\text{senh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\frac{1}{s^2-\omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \text{senh}(\omega t)$
$f'(t)$	$s.F(s) - f(0)$	-	-
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s}.F(s)$	-	-
$a.f(t) + b.g(t)$	$a.F(s) + b.G(s)$	$a.F(s) + b.G(s)$	$a.f(t) + b.g(t)$
$f(t).e^{at}$	$F(s-a)$	$F(s-a)$	$e^{-at}.\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{+\infty} F(s)ds$	si existe	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$
$t^n.f(t)$	$(-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} F(s)$	-	-
$E(t) = \begin{cases} 0 \leq t \leq a : 1 \\ t \geq a : 0 \end{cases}$	$\frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-as})$	-	-
$A(t) = \begin{cases} 0 \leq t < a : 0 \\ t \geq a : 1 \end{cases}$	$\frac{1}{s} \cdot e^{-as}$	-	-
$f(t).A(t)$	$e^{-as}.\mathcal{L}[f(t+a)]$	-	-
$f(t)$ de período T	$\frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt$	-	-
$(f * g)(t)$	$F(s).G(s)$	-	-

Ecuaciones lineales autónomas

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas autónomas en \mathbb{R}^2 , que de paso nos ayudará a ir familiarizándonos un poco más con las ecuaciones diferenciales. Además realizaremos los posibles diagramas de fase para los distintos casos. Para este capítulo será necesario utilizar conocimientos previos de GAL2. Algunos de estos conocimientos se irán recordando en la medida que los vayamos necesitando, en caso de necesitar más información para comprender se recomienda repasar los temas.

En su forma más genérica, en \mathbb{R}^n , las ecuaciones diferenciales lineales autónomas las podemos escribir como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

o de forma abreviada:

$$\dot{X} = AX + b.$$

Nos enfocaremos en las ecuaciones en \mathbb{R}^2 con el vector b nulo (ecuación homogénea). Considerando que $X(t) = (x(t), y(t))$, notación que se usará en el resto del capítulo, el problema se reduce a:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o lo que es equivalente:

$$(0.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Se puede observar que en estos problemas el origen siempre es un punto crítico. A continuación analizaremos los distintos casos que se pueden presentar discutiendo según los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

0.1. Matriz A diagonalizable con valores propios reales

0.1.1. Matriz A diagonal

Comenzaremos con los casos más sencillos cuando la matriz A es diagonal, $b = c = 0$, donde los valores propios coinciden con a y d . En este caso podemos reescribir la ecuación (0.1) como:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = dy \end{cases}$$

esto simplifica considerablemente el problema ya que las ecuaciones del sistema están desacopladas, lo que nos permite resolver cada una por el método de variables separables, obteniendo las soluciones:

$$(0.2) \quad X(t) = (x_0 e^{at}, y_0 e^{dt})$$

donde $X(0) = (x_0, y_0)$ es la condición inicial. Recordamos que por ser una ecuación autónoma las soluciones con la misma posición inicial tienen la misma forma pero corridas en el tiempo, por lo que no estamos perdiendo generalidad al tomar como tiempo inicial el cero.

0.1.1.1. Un valor propio cero

Supongamos $a = 0$, $d \neq 0$. En este caso la ecuación diferencial es:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = dy. \end{cases}$$

Mirando (0.2) tenemos que las soluciones son $(x_0, y_0 e^{dt})$, de donde se deduce que la recta $y = 0$ está formada por puntos de equilibrio y las soluciones están incluidas en rectas verticales. Realizando

los límites cuando el tiempo tiende a más o menos infinito, o alternativamente estudiando el signo de \dot{y} se obtiene el siguiente diagrama de fase:

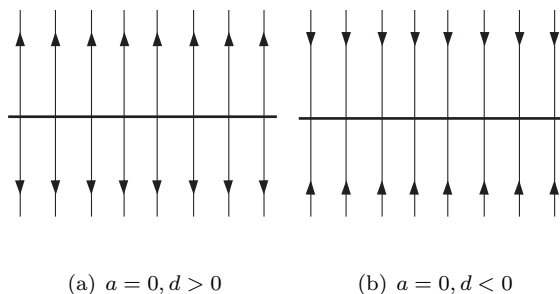


FIGURA 1. Matriz diagonal con un valor propio cero.

De forma análoga para $a \neq 0, d = 0$ se obtienen diagramas de fase similares, donde las soluciones están contenidas en rectas horizontales.

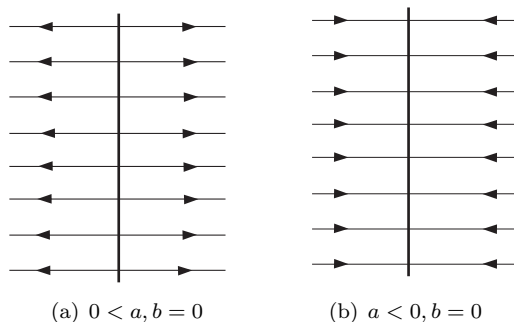


FIGURA 2. Matriz diagonal con un valor propio cero.

0.1.1.2. Valores propios distintos de cero

Si ningún valor propio es nulo, el único punto de equilibrio será el origen (dentro del caso A diagonal). Si consideramos como condición inicial $x_0 = 0$, mirando (0.2), se puede observar que las trayectorias de estas soluciones permanecerán en el eje Oy , mientras que para $y_0 = 0$ las mismas pertenecen al eje Ox . Si $x_0 \neq 0$, de (0.2), despejando e^t de $x(t)$ y sustituyéndolo en $y(t)$, se obtiene que:

$$(0.3) \quad y = \left(\frac{y_0}{x_0^{d/a}} \right) x^{\frac{d}{a}}$$

0.1.1.2.1. Valores propios del mismo signo

Si ambos valores propios son del mismo signo, el cociente $\frac{d}{a}$ de la ecuación (0.3) es positivo. Si consideramos a y d positivos, de la ecuación (0.2) vemos que las soluciones se alejan del origen a medida que pasa el tiempo, por lo que los diagramas de fase serán como muestra la figura (4).

En estos casos se dice que el origen es un punto *repulsor*, ya que todas las soluciones se alejan del origen. Para el caso donde los valores propios son negativos, las soluciones tienden al origen cuando el tiempo tiende a más infinito, por lo que el origen es un punto *atractor*.

Es importante notar que en el caso de un valor propio cero, figuras (1) y (2), para cualquier entorno alrededor de un punto crítico, no todas las soluciones se alejan (o acercan) al punto, ya que siempre se pueden encontrar otros puntos críticos en el entorno (los puntos críticos no son aislados).

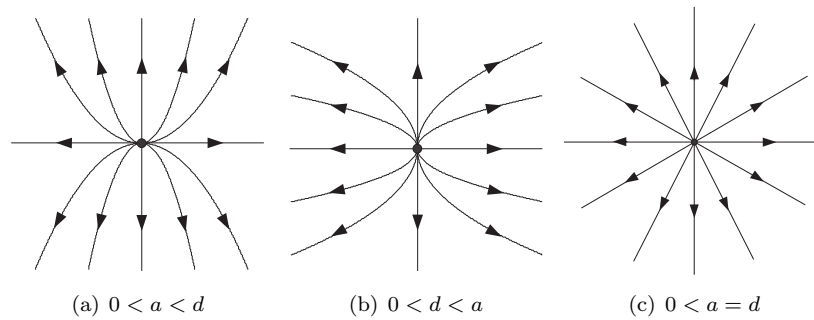


FIGURA 3. Matriz diagonal con valores propios del mismo signo.

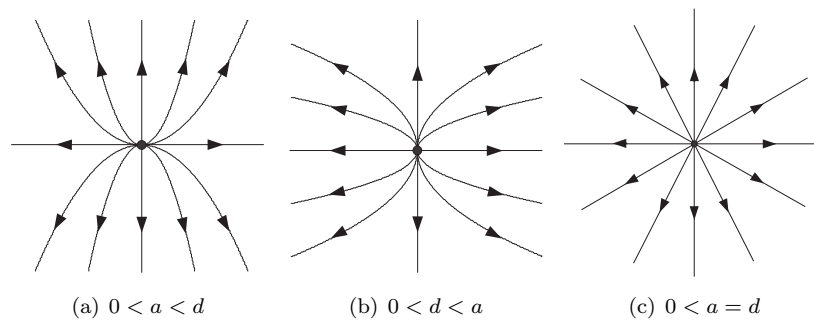


FIGURA 4. Matriz diagonal con valores propios del mismo signo.

0.1.1.2.2. Valores propios de distinto signo

Nuevamente podemos sacar las trayectorias de la ecuación (0.3). En estas condiciones el cociente $\frac{d}{a}$ es negativo, por lo que las soluciones estarán contenidas en trayectorias con forma hiperbólicas. Con los límites de las soluciones o estudiando los signos de las derivadas se pueden obtener la orientación de las curvas.

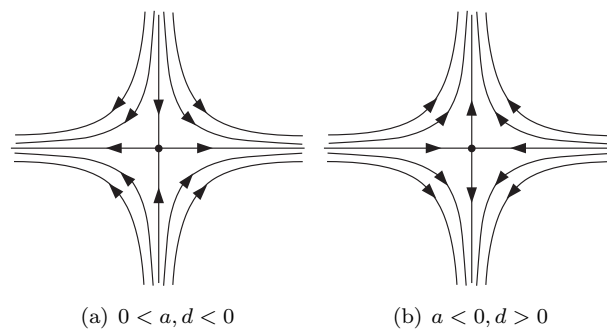


FIGURA 5. Matriz diagonal con valores propios de distinto signo.

En estos diagramas, se ven soluciones que se acercan al punto de equilibrio mientras que otras se alejan, por lo que el origen no será ni atractor ni repulsor. Este caso se conoce como punto silla.

Algo interesante de observar es que por la ecuación (0.3) la forma del diagrama de fases depende del cociente $\frac{d}{a}$. Dados dos problemas con distintos valores propios pero que el cociente $\frac{d}{a}$ coincide tendrán el mismo diagrama de fase pero distintas soluciones. Como ya se mencionó en el primer capítulo distintas ecuaciones diferenciales pueden tener el mismo diagrama de fases. Considerando los problemas:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 10x \\ \dot{y} = 20y \end{cases}$$

las soluciones a los mismos serán $X_1(t) = (x_0e^t, y_0e^{2t})$ y $X_2(t) = (x_0e^{10t}, y_0e^{20t})$ respectivamente. El diagrama de ambos serán parábolas, similar al de la figura (4a). La diferencia es la velocidad con la cual las soluciones recorren las curvas. En este caso particular, se observa de los exponentes de las soluciones que X_2 recorre las curvas a una mayor velocidad.

0.1.2. Matriz A diagonalizable

Hemos analizado todos los posibles casos cuando la matriz A es diagonal, ¿pero qué sucede si la matriz es diagonalizable pero no diagonal? En este caso veremos en el siguiente ejemplo que mediante un cambio de variable podremos volver a un problema diagonal que si sabemos resolver.

Se recuerda que:

Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y una base $B = \{v_1, v_2\}$ de \mathbb{R}^2 tenemos que $T(v_1)$ y $T(v_2)$ son combinaciones lineales de v_1, v_2 por lo que existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ que cumplen:

$$T(v_1) = av_1 + cv_2$$

$$T(v_2) = bv_1 + dv_2.$$

La matriz asociada a la transformación T en la base B es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Sea C una matriz diagonalizable con valores propios α y β con vectores propios v_α y v_β respectivamente y $B = \{v_\alpha, v_\beta\}$ la base de \mathbb{R}^2 formada por vectores propios. Entonces existe una matriz P tal que:

$$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

donde la matriz P tiene los vectores propios v_α y v_β "colgados" en columnas (en ese orden). Geométricamente esto representa un cambio de base de la base canónica a la base B .

Ejemplo 0.1.

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La ecuación asociada a esta matriz es:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

la cual ya no podemos resolver directamente mediante el método de variables separables.

Es fácil verificar que A tiene valores propios 1 y -1 con vectores propios $v_1 = (1, 0)$ y $v_{-1} = (1, 1)$ respectivamente ¹. Tomando $B = \{u, v\} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ la matriz cambio de base P es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora el cambio de variable $Y(t) = P^{-1}X(t)$, que representa el vector X expresado en la base B (se utilizará esta notación de aquí en más), y teniendo en cuenta que $X(t) = PY(t)$ se tiene que:

$$\dot{Y} = P^{-1}\dot{X} = P^{-1}AX = P^{-1}APY = DY$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hemos traducido nuestro problema a un problema diagonal, tomando $Y(t) = (u(t), v(t))$:

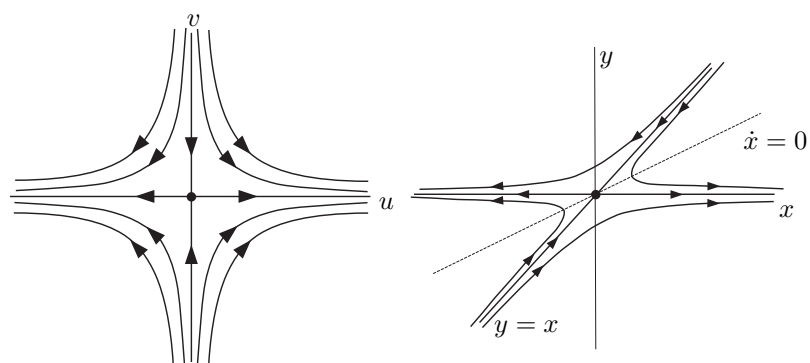
$$\begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = -v. \end{cases}$$

De donde se obtiene por lo visto anteriormente (ecuación 0.2) que $Y(t) = (u_0e^t, v_0e^{-t})$. El diagrama de fases en la base B es como el de la figura (6a). Deshaciendo el cambio de variable:

$$X(t) = PY = (u_0e^t + v_0e^{-t}, v_0e^{-t})$$

¹Si no se recuerda como obtener los valores y vectores propios de una matriz, ir al ejemplo del Capítulo 3: Matriz fundamental.

donde las condiciones iniciales son $(u_0 + v_0, v_0)$. Para realizar el diagrama simplemente llevamos los



(a) Diagrama en la base formada por vectores propios

(b) Diagrama en la base canónica

FIGURA 6. Ejemplo con matriz diagonalizable.

ejes u y v a su lugar en el sistema cartesiano. En este caso el eje u no cambia, ya que tiene la dirección $(1, 0)$ y el eje v se mueve hasta la recta $y = x$, lo que corresponde con la dirección $(1, 1)$. El diagrama de fase correspondiente a este ejemplo se encuentra en la figura (6). ○

En resumen, si estamos frente a una matriz diagonalizable, procediendo como se hizo en este ejemplo, se puede llevar el problema a uno de los casos donde la matriz es diagonal. De forma más genérica, las soluciones a ecuaciones lineales donde la matriz A tiene valores propios α y β , con vectores propios v_α y v_β respectivamente son de la forma:

$$X(t) = u_0 e^{\alpha t} v_\alpha + v_0 e^{\beta t} v_\beta$$

con posición inicial $u_0 v_\alpha + v_0 v_\beta$.

0.2. Matriz de Jordan

Se recuerda que:

- La multiplicidad algebraica de un valor propio λ ($ma(\lambda)$) representa la multiplicidad de λ como raíz en el polinomio característico de A .
- La multiplicidad geométrica es la dimensión del subespacio propio ($mg(\lambda)$), es decir $\dim(N(A - \lambda I))$.

Se le llama matriz de Jordan a las matrices con la siguiente forma:

$$(0.4) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene valor propio doble λ y un único vector propio $(0, 1)$, es decir que $ma(\lambda) = 2$ y $mg(\lambda) = 1$.

Cuando $mg(\lambda) < ma(\lambda)$ mediante un cambio de base la matriz se puede llevar a la forma de la ecuación (0.4). O lo que es lo mismo, existe P tal que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

En este caso, la matriz P esta formada por los vectores de la base de Jordan “colgados” en columnas. Sea $B = \{v_1, v_2\}$ la base de Jordan, la misma debe verificar que:

$$Av_1 = \lambda v_1 + v_2 \quad Av_2 = \lambda v_2$$

De manera que v_2 será un vector propio y estará relacionado con v_1 mediante la siguiente expresión:

$$(0.5) \quad (A - \lambda I)v_1 = v_2$$

0.2.1. Matriz A de Jordan

Consideremos ahora el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(0.6) \quad \begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y \end{cases}$$

donde la matriz asociada es una matriz de Jordan. Trataremos de encontrar una solución para este tipo de problemas discutiendo según λ .

0.2.1.1. Valor propio cero

Para el caso particular $\lambda = 0$ la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

Se observa que la recta $x = 0$ está formada por puntos de equilibrio. De la primera ecuación se obtiene rápidamente que $x(t) = x_0$, por lo que $\dot{y} = x_0$, obteniendo la solución:

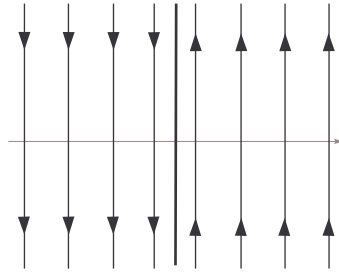
$$X(t) = (x_0, x_0 t + y_0).$$

En este caso las trayectorias son rectas con $x = x_0$, de modo que el diagrama de fases es:

0.2.1.2. Valor propio distinto de cero

De forma rápida, de la primera ecuación del sistema (0.6), se puede obtener que $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, permitiéndonos escribir la segunda ecuación como:

$$\dot{y} = x_0 e^{\lambda t} + y$$



(a) $\lambda = 0$

FIGURA 7. Matriz de Jordan con $\lambda = 0$.

Separando la solución $y(t)$ en una solución homogénea más una particular, la ecuación anterior se puede resolver por el método de variación de constantes obteniéndose que:

$$y(t) = e^{\lambda t}(y_0 + x_0 t)$$

Por lo que la solución es:

$$(0.7) \quad (x(t), y(t)) = (x_0 e^{\lambda t}, e^{\lambda t}(y_0 + x_0 t))$$

Se puede ver que para $x_0 = 0$ las trayectorias están incluidas en el eje Oy y que $\dot{y} = 0$ en la recta $y = \frac{-x}{\lambda}$, lo que significa que en el diagrama de fases las trayectorias tendrán pendiente horizontal cuando crucen la recta.

Despejando el tiempo de $x(t)$ y sustituyéndolo en $y(t)$ se obtiene que para $x_0 \neq 0$ y $\lambda \neq 0$:

$$y = x \left(\frac{y_0}{x_0} + \frac{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\lambda} \right)$$

Graficando esta función se obtiene lo que está representado en la imagen (8).

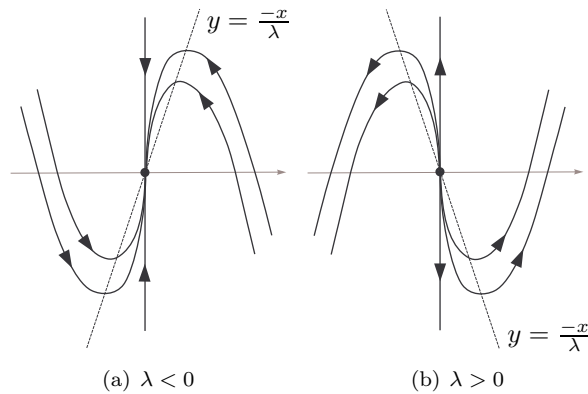


FIGURA 8. Matriz de Jordan con $\lambda \neq 0$.

0.2.2. Matriz A semejante a una matriz de Jordan

Al igual que en el caso de las matrices diagonalizables, de tener una matriz con valor propio doble λ con $\dim(N(A - \lambda I)) = 1$, mediante un cambio de variable transformaremos el problema en otro como este último.

Ejemplo 0.2.

Trabajaremos con el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$$

La matriz asociada a este problema tiene valor propio 1 doble y su subespacio propio es $S_1 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ de modo que $mg(1) < ma(1)$ ². Escogiendo $v_2 = (-1, -1)$ debemos obtener v_1 que verifique la ecuación (0.5) para hallar la base de Jordan. Sea $v_1 = (a, b)$:

$$(A - I)v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De donde $-a + b = -1$. Eligiendo $v_1 = (1, 0)$ tenemos que la base de Jordan es $B = \{u, v\} = \{(1, 0), (-1, -1)\}$. De forma análoga al caso diagonal, realizado el cambio de variable $Y(t) = P^{-1}X(t)$ se tiene el problema:

$$\begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = u + v \end{cases}$$

que ya sabemos resolver. De la expresión (0.7) tenemos que las soluciones son $Y(t) = (u_0 e^t, e^t(u_0 t + v_0))$, con el diagrama de fases de la figura (8b).

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos que:

$$X(t) = (u_0 e^t - e^t(u_0 t + v_0), -e^t(u_0 t + v_0))$$

donde la condición inicial es $(u_0 - v_0, -v_0)$. Se puede observar que las soluciones tienden a infinito en el futuro y que para $u_0 = 0$, $x(t) = y(t)$. Al volver a la base cartesiana pueden aparecer algunas dudas de como quedaría el diagrama. Hay dos posibles opciones representadas en la figura (9).

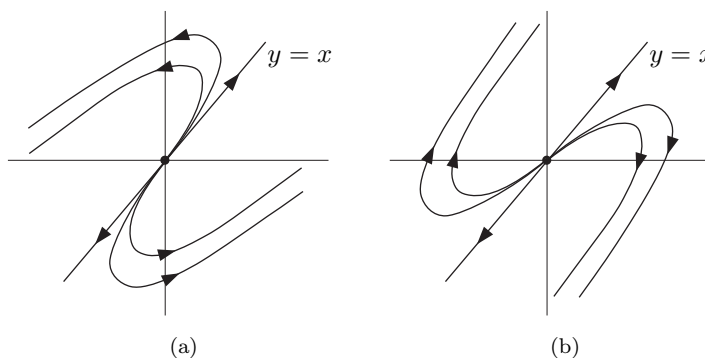


FIGURA 9

Para saber cual de las dos es, se recomienda estudiar el signo de las derivadas \dot{x} y/o \dot{y} . En este caso, vemos que \dot{x} es positivo para los valores de $y > 0$, por lo que el diagrama será similar a la segunda opción. Respetando los signos de las derivadas el diagrama de fase correcto es el de la figura (10).

²En caso de no recordar como se obtiene el valor y vector propio ir al ejemplo del Capítulo 3: Matriz fundamental.

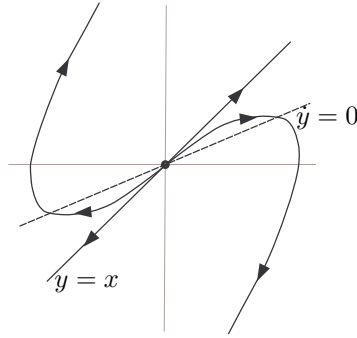


FIGURA 10. Ejemplo con una matriz con valor propio doble no diagonalizable.

Vale la pena aclarar que la elección de la base de Jordan NO cambia el resultado. De forma rápida se puede verificar que la trayectoria recta queda en la dirección del valor propio, la cual no cambia al elegir otra base. ○

La solución a cualquier ecuación diferencial con una matriz asociada con valor propio doble λ con $\text{mg}(\lambda)=1$ y base de Jordan asociada $B = \{u, v\}$ es:

$$X(t) = u_0 e^{\lambda t} u + e^{\lambda t} (v_0 + u_0 t) v$$

con condición inicial $u_0 u + v_0 v$.

0.3. Valores propios complejos

0.3.1. Caso sencillo con valores propios complejos

Ya hemos analizado todos los casos donde la matriz A tiene valores propios reales. Por último analizaremos que sucede cuando la misma tiene valores propios complejos. Empecemos considerando el siguiente problema:

$$(0.8) \quad \begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = -bx + ay \end{cases}$$

Donde

$$(0.9) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene valores propios $a \pm bi$. Para obtener la solución y el diagrama de fases procederemos realizando un cambio de variable a coordenadas polares donde $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, tratando de obtener un sistema de ecuaciones con $\dot{r}(r, \theta)$ y $\dot{\theta}(r, \theta)$. Sabemos que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Derivando:

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$$

Sustituyendo \dot{x} e \dot{y} de la ecuación (0.8):

$$\dot{r}r = x(ax + by) + y(-bx + ay) = a(x^2 + y^2) = ar^2$$

En consecuencia:

$$\dot{r} = ar$$

Derivando la expresión $x = r \cos \theta$ tenemos que:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

Sustituyendo nuevamente \dot{x} y \dot{r} :

$$ax + by = ar \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

Reemplazando $r \cos \theta$ y $r \sin \theta$ por x e y :

$$ax + by = a x - y \dot{\theta}$$

Por último:

$$\dot{\theta} = -b$$

De manera que, en coordenadas polares, el sistema de ecuaciones es:

$$(0.10) \quad \begin{cases} \dot{r} = ar \\ \dot{\theta} = -b \end{cases}$$

A partir de este sistema se tiene que para $a = 0$, r es constante ($\dot{r} = 0$), por lo que las trayectorias serán circunferencias. Si $a \neq 0$, dado que r es siempre positivo, el radio irá aumentando ($a > 0$) o disminuyendo ($a < 0$). El signo de $\dot{\theta}$ determina el sentido de giro, para $\dot{\theta} > 0$ ($b < 0$) las trayectorias giran en sentido antihorario mientras que para $\dot{\theta} < 0$ ($b > 0$) en sentido horario³. Como el sentido de giro es siempre el mismo y el radio siempre crece o decrece las trayectorias tienen forma de espiral. Teniendo en cuenta esto, los diagramas de fases correspondientes son:

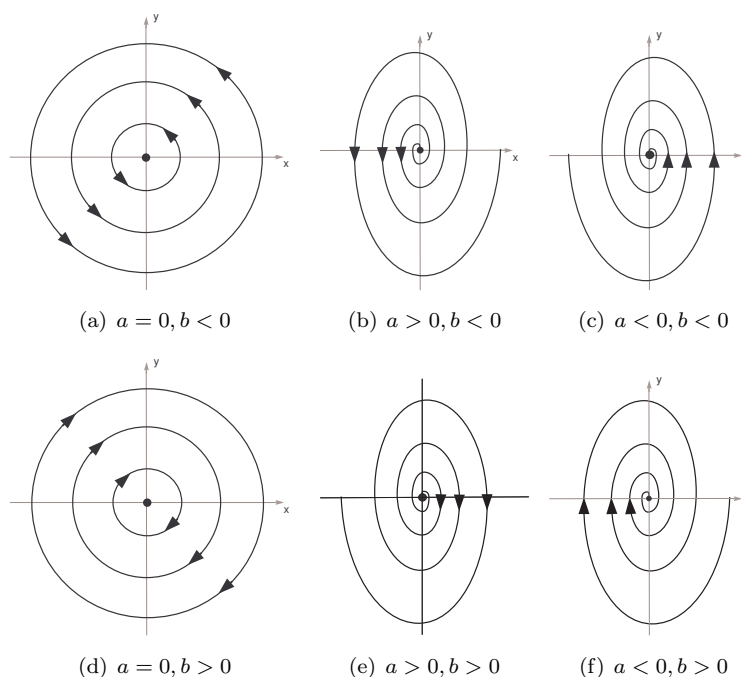


FIGURA 11. Matriz con valores propios complejos.

Se puede ver que el origen es repulsor para el caso $a > 0$ y atractor para $a < 0$. Las soluciones explícitas las podemos hallar utilizando el método de separación de variables para el problema en coordenadas polares, obteniendo:

$$(0.11) \quad r(t) = r_0 e^{at} \quad \theta(t) = -bt + \theta_0$$

Pasando las soluciones a coordenadas cartesianas:

$$(0.12) \quad X(t) = (r_0 e^{at} \cos(-bt + \theta_0), r_0 e^{at} \sin(-bt + \theta_0))$$

donde la condición inicial es $(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$

0.3.2. Cambio de base

Sin embargo no todas las matrices con valores propios complejos son de la forma de la expresión (0.9). Procederemos de forma análoga que en los casos anteriores, realizando un cambio de variable que nos permita reescribir la matriz de forma más sencilla, en este caso la reescribiremos como en la ecuación (0.9). A continuación demostraremos que siempre podremos realizar un cambio de variable que nos lleve una matriz con valores propios complejos a una con la forma vista recientemente.

³ Observar que si $b = 0$ estamos en el caso de valores propios reales, el cual ya fue estudiado.

Notación:

Sea $v_\lambda \in \mathbb{C}^2$ el vector propio del valor propio $\lambda = a + bi$, $v_\lambda = (z, w)$ donde $z = c + di$ y $w = e + fi$. Llamaremos $Re(v_\lambda) = (c, e)$ e $Im(v_\lambda) = (d, f)$ de modo que $v_\lambda = Re(v_\lambda) + Im(v_\lambda)i$.

Lema 0.1.

Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con valores propios complejos $\lambda = a + bi$ y $\bar{\lambda} = a - bi$ y vectores propios v_λ y $v_{\bar{\lambda}}$ respectivamente. Se cumple que:

1. $B = \{Re(v_\lambda), Im(v_\lambda)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^2$
2. Sea P la matriz con los vectores $Re(v_\lambda)$ y $Im(v_\lambda)$ "colgados" en columnas, se tiene que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Demostración:

Comenzaremos con la primera afirmación. Sabemos que por la definición de vector propio v_λ cumple que:

$$Av_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow \overline{Av_\lambda} = \overline{\lambda v_\lambda}.$$

Como la matriz A es real y por propiedades del conjugado la igualdad queda:

$$A\overline{v_\lambda} = \bar{\lambda}\overline{v_\lambda} \Rightarrow v_{\bar{\lambda}} = \overline{v_\lambda}.$$

Por ende podemos escribir los vectores propios como:

$$v_\lambda = Re(v_\lambda) + Im(v_\lambda)i$$

$$v_{\bar{\lambda}} = Re(v_\lambda) - Im(v_\lambda)i.$$

Por otro lado, como v_λ y $v_{\bar{\lambda}}$ son vectores propios, tenemos que:

$$\begin{aligned} \{v_\lambda, v_{\bar{\lambda}}\} &\xrightarrow{b} \mathbb{C}^2 \Rightarrow B = \{Re(v_\lambda), Im(v_\lambda)\} \xrightarrow{b} \mathbb{C}^2 \\ &\Rightarrow B \text{ es un conjunto L.I. en } \mathbb{C}^2 \Rightarrow B \text{ es un conjunto L.I. en } \mathbb{R}^2 \\ &\Rightarrow B = \{Re(v_\lambda), Im(v_\lambda)\} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

por lo que queda demostrada la primera afirmación. Ahora vamos por la segunda.

Nuevamente por definición de vector propio tenemos que:

$$Av_\lambda = \lambda v_\lambda \Rightarrow A(Re(v_\lambda) + Im(v_\lambda)i) = (a + bi)(Re(v_\lambda) + Im(v_\lambda)i).$$

Para que se cumpla la igualdad, se tiene que igualar la parte real y la parte compleja. Dado que A es real, tenemos que:

$$\begin{aligned} ARe(v_\lambda) &= aRe(v_\lambda) - bIm(v_\lambda) \\ AIm(v_\lambda) &= bRe(v_\lambda) + aIm(v_\lambda). \end{aligned}$$

utilizando lo que se recordó previamente en la parte de la matriz A diagonalizable acerca de los coeficientes de la matriz asociada a una transformación queda demostrado. \square

Ejemplo 0.3.

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ que tiene asociada la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

Esta matriz tiene valores propios $1 \pm 2i$. Trabajaremos con $\lambda = 1 + 2i$, por lo que $a = 1$ y $b = 2$ (la elección de $b = 2$ o $b = -2$ es arbitraria) y el subespacio propio es $S_\lambda = \{(z, z\frac{1-i}{2}) : z \in \mathbb{C}\}$. Escogiendo como vector propio:

$$v_\lambda = (2, 1 - i) = (2, 1) + (0, -1)i$$

se tiene que $Re(v_\lambda) = (2, 1)$ y $Im(v_\lambda) = (0, -1)$. Por el lema anterior se sabe que, dado $B = \{u, v\} = \{(2, 1), (0, -1)\}$:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto realizando el cambio de variable $Y(t) = P^{-1}X(t)$ el problema obtenido es:

$$\begin{cases} \dot{u} = u + 2v \\ \dot{v} = -2u + v \end{cases}$$

De la ecuación (0.12) se llega a que:

$$Y(t) = (r_0 e^t \cos(-2t + \theta_0), r_0 e^t \sin(-2t + \theta_0))$$

con el diagrama de fases como la figura (11e). Finalmente, deshaciendo el cambio de variable:

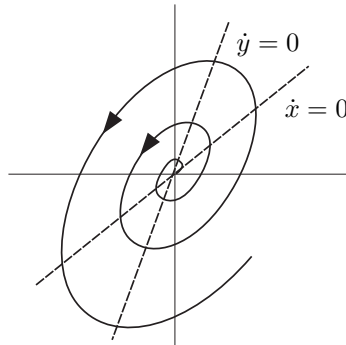


FIGURA 12. Ejemplo de matriz con valores propios complejos.

$$X(t) = r_0 e^t (2 \cos(-2t + \theta_0), \cos(-2t + \theta_0) - \sin(-2t + \theta_0))$$

con condición inicial $(2r_0 \cos(\theta_0), r_0(\cos(\theta_0) - \sin(\theta_0)))$.

Observaciones:

1. r_0 y θ_0 son las condiciones iniciales pasando a polares desde la base B , las cuales no tienen por qué coincidir con el radio y el ángulo inicial en la base cartesiana.
2. En caso de haber tomado $b = -2$, la base B sería $B = \{u, v\} = \{(2, 1), (0, 1)\}$. El diagrama de $Y(t)$ quedaría girando en sentido antihorario, pero al deshacer el cambio de variable los resultados son los mismos.

3. Para saber en que sentido gira al deshacer el cambio de variable, se recomienda pararse en un punto del eje Ox o Oy y estudiar el signo de las derivadas \dot{x} y \dot{y} . Por ejemplo, si nos paramos en el punto $(1, 0)$ tenemos que $\dot{x} = 3$ e $\dot{y} = 2$, por lo que el sentido del giro al deshacer el cambio de base es antihorario. \bigcirc

De forma genérica, las soluciones a ecuaciones donde su matriz asociada A tiene valores propios complejos $\lambda = a + bi$ y $\bar{\lambda} = a - bi$ con v_λ el vector propio asociado a λ son:

$$X(t) = r_0 e^{at} (\cos(-bt + \theta_0) \operatorname{Re}(v_\lambda) + \sin(-bt + \theta_0) \operatorname{Im}(v_\lambda))$$

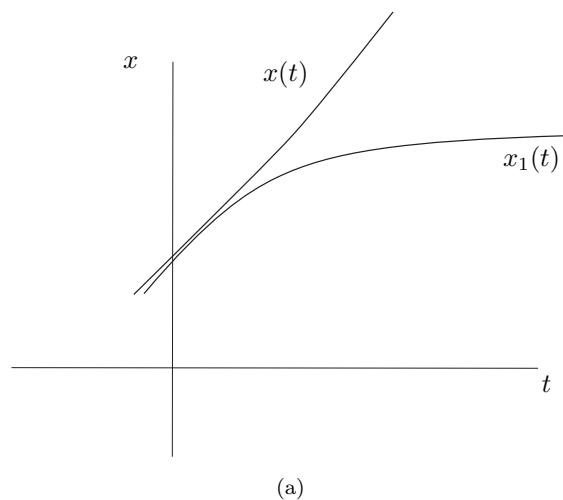
con condición inicial $r_0(\cos(\theta_0) \operatorname{Re}(v_\lambda) + \sin(\theta_0) \operatorname{Im}(v_\lambda))$.

0.3.3. Estabilidad de soluciones.

La estabilidad es muy importante en física y ciencias aplicadas, ya que en general en los problemas prácticos las condiciones iniciales nunca se conocen con toda precisión, y la predictibilidad requiere que pequeñas desviaciones iniciales, no generen comportamientos cualitativamente muy diferentes a corto plazo.

Supongamos que modelamos un problema y necesitamos saber como se comporta en el futuro la solución de una ecuación diferencial con condición inicial $x(0) = e$. Como del número e solo conocemos aproximaciones, supongamos que consideramos la solución x_1 tal que $x_1(0) = 2,718$ y supongamos, además, que las soluciones x y x_1 en el futuro se separan como en la figura 13. Por lo tanto las conclusiones que obtengamos para el futuro de la solución x_1 , no son válidas para la solución x . Para poder predecir el comportamiento de x a partir de una solución, suficientemente cercana x_1 , necesitamos saber que ambas soluciones en el futuro no se separen.

FIGURA 13



Sea la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

- Decimos que una solución X es estable, para el futuro, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|Y_0 - X(0)\| < \delta$, la solución Y con $Y(0) = Y_0$ cumple que $\|Y(t) - X(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$.
- Decimos que una solución X es asintóticamente estable, para el futuro, si es estable y además existe $\delta > 0$ tal que si $\|Y_0 - X(0)\| < \delta$, la solución Y con $Y(0) = Y_0$ cumple que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0.$$

- Decimos que una solución X es inestable, si no es estable.

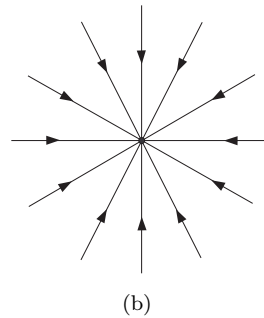
Análogamente, se pueden definir los conceptos de estable y asintóticamente estable para el pasado.

Ejemplos.

1) Considere la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y la solución $X(t) = (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Vamos a ver que la solución X es asintóticamente estable. Por lo visto anteriormente, tenemos que el diagrama de fase es el dado por la siguiente figura

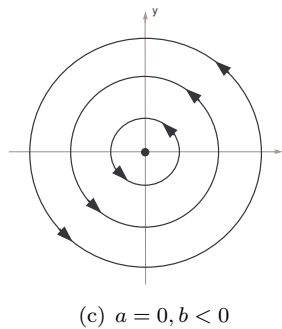


De esto último deducimos que dada cualquier condición inicial Y_0 , la solución Y con $Y(0) = Y_0$ cumple que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0$.

2) Sea la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y la solución $X(t) = (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Vamos a ver que la solución X es estable pero no asintóticamente estable. Los valores propios son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$. Como la parte real es cero, entonces tenemos que el diagrama de fase es el dado por la siguiente figura



Por lo tanto, las soluciones Y con condición inicial $Y(0) = Y_0 \neq (0, 0)$ están incluidas en una cfa. Por lo tanto permanecen cercanas al origen pero se cumple que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) \neq 0$.

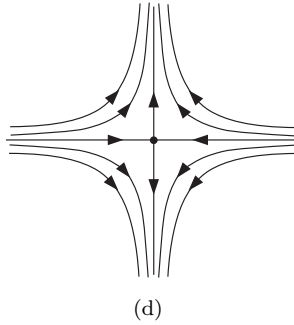
3) Por último, la ecuación Sea la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tiene valores propios reales y de distinto signo.

Mirando el diagrama de fase, es claro que si tomamos $Y_0 = (0, \delta/2)$. La solución Y con $Y(0) = Y_0$ se aleja del origen y por lo tanto la solución $X(t) = (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es inestable.

Ejercicio



Sea la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

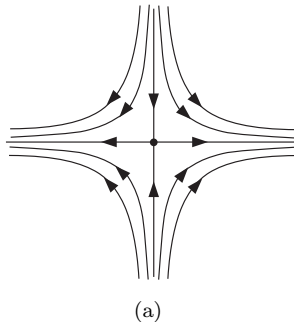
Probar que si la solución $X(t) = (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es estable entonces cualquier otra solución es estable. Idem con asintóticamente estable.

Explique que esta mal en el siguiente razonamiento: Considere la ecuación

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tiene valores propios reales y de distinto signo, por lo tanto el diagrama de fase es el dado por la figura 14

FIGURA 14



Mirando el diagrama de fase, es claro que si tomamos $Y_1 = (1, 0)$. La solución Y con $Y(0) = Y_1$ es estable. Nuevamente, mirando el diagrama de fase es claro que la solución $X(t) = (0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ no es estable. ¿donde está el error?

Para finalizar vamos a enunciar un resultado sobre estabilidad del sistema $\dot{X} = AX$.

Teorema 0.2. Estabilidad de un sistema lineal. Sea A una matriz cuadrada de tamaño n con $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ y la ecuación $\dot{X} = AX$. Entonces:

1. Si todos los valores propios de A tiene parte real negativa, entonces todas las soluciones son asintóticamente estables.
2. Si existe un valor propio de A con parte real positiva, entonces todas las soluciones son inestables.
3. Supongamos que todos los valores propios tienen parte real menor o igual a cero. Sean $\lambda_1 = i\alpha_1, \dots, \lambda_l = i\alpha_l$ todos los valores propios de A con parte real cero. Sea k_j la multiplicidad algebraica de λ_j . O sea que si p es el polinomio característico de A , entonces p se factoriza de la forma

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_l)^{k_l} Q(\lambda)$$

donde todas las raíces de Q tienen parte real negativa.

Si para todo $j = 1, \dots, l$ la matriz A tiene k_j vectores propios linealmente independiente para el valor propio λ_j entonces toda solución es estable pero no asintóticamente estable. En otro caso, toda solución es inestable.

Matriz fundamental

Continuaremos estudiando las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas autónomas pero ahora en \mathbb{R}^n . Obtendremos la solución analítica para algunos casos y mencionaremos como se podría obtener para los restantes.

Definiremos la matriz fundamental de una ecuación diferencial $\dot{X} = AX$ como la matriz $\varphi(t) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \\ \varphi(0) = I_{n \times n} \text{ (matriz identidad)}. \end{cases}$$

Dado que las columnas de la matriz resultante de multiplicar dos matrices es la primera matriz por la columna correspondiente de la segunda matriz, se puede observar que si consideramos X_1, X_2, \dots, X_n las columnas de φ las mismas verifican que $\dot{X}_i = AX_i$. En otras palabras la matriz fundamental es la que contiene como columnas las soluciones $X_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ de la ecuación homogénea con condición inicial $X_i(0) = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, donde el 1 se encuentra en la posición i .

Lo interesante de la matriz fundamental es que dado el problema:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

la solución al mismo es $X(t) = \varphi(t)X_0$. La verificación es sencilla ya que:

$$X(0) = \varphi(0)X_0 = IX_0 = X_0$$

$$\dot{X} = \dot{\varphi}X_0 = A\varphi X_0 = AX.$$

Por esta razón intentaremos hallar la matriz fundamental.

Si retomamos el problema que apareció en el capítulo anterior $\dot{X} = AX$ con $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ diagonal con valores propios a y d , vimos que las soluciones a este problema eran:

$$X(t) = (x_0 e^{at}, y_0 e^{dt})$$

o lo que es lo mismo:

$$(0.1) \quad X(t) = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Donde tenemos que la solución es una matriz por la condición inicial. Se puede observar que las columnas de esa matriz son las soluciones al problema con condición inicial $(1,0)$ y $(0,1)$ respectivamente, como debía cumplir la matriz fundamental. Estas soluciones se parecen a las soluciones de una ecuación diferencial $\dot{x} = ax$, con $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y a real, donde la solución era $x(t) = e^{at}x_0$. Análogo a las soluciones en un problema unidimensional, llamaremos a esta primer matriz de la ecuación (0.1) como e^{At} . Definiremos la exponencial de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ como:

$$e^A = \sum_0^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

Lo que se puede asociar con el desarrollo de Taylor de e^a con a real. En particular:

$$(0.2) \quad e^{At} = \sum_0^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots \quad t \in \mathbb{R}$$

Veremos más adelante, que para el caso particular donde A es diagonal con valores propios a y d , esta serie coincide con la matriz de la igualdad (0.1).

Teorema 0.1.

La matriz fundamental de una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes $\dot{X} = AX$ es $e^{At} = \sum_0^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$.

Demostración:

Sea $\Phi(t) = e^{At}$, debemos demostrar que Φ cumple las dos condiciones necesarias para ser una matriz fundamental. La primera condición es fácil de verificar, ya que de la ecuación (0.2) se tiene que:

$$\Phi(0) = e^0 = I$$

donde solo sobrevive el primer término de la serie. Ahora resta comprobar que $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$

$$\dot{\Phi} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{A^k t^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k A^k t^{k-1}}{k!} = A \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{j=k-1}{=} A \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j t^j}{j!} = A\Phi$$

donde en la tercera igualdad se utilizó que $(At)^0 = I$ por lo que la derivada del primer término se va, mientras que en la cuarta se hizo el cambio $j = k - 1$. Acerca de la segunda igualdad, uno podría pensar que se cumple que la derivada de la serie es la serie de las derivadas por la linealidad de la derivada. Sin embargo al tener infinitos términos esto no tiene por que suceder. Más adelante verificaremos que se puede realizar este cambio entre la sumatoria y la derivada en este caso. \square

Hemos encontrado la solución a cualquier ecuación del la forma $\dot{X} = AX$! Pero escribir las soluciones con una serie no es muy práctico. A continuación presentaremos proposiciones que nos permitirán escribir la expresión de dicha solución de forma más sencilla.

0.1. A diagonalizable

Proposición 0.1.

Sea A una matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con valores propios λ_i con $i = 1, \dots, n$ entonces:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Demostración:

Esta primera proposición la podemos demostrar directamente usando la definición de la matriz e^{At} . Dado que las potencias de A siguen siendo matrices diagonales de la forma:

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

tenemos que:

$$e^{At} = I + t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \dots$$

Por ende:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 + t\lambda_1 + \frac{(t\lambda_1)^2}{2!} + \dots & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 + t\lambda_n + \frac{(t\lambda_n)^2}{2!} + \dots \end{pmatrix}$$

usando que $e^{\lambda_i t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i t^n}{n!}$ (Taylor) para todo $t \in \mathbb{R}$ queda demostrada la proposición. \square

Pero, si la matriz es diagonalizable pero no diagonal, ¿podremos proceder de forma análoga al capítulo anterior, realizando un cambio de base que nos simplifique la expresión? La proposición siguiente nos demostrará que si.

Proposición 0.2.

Si existe P tal que $A = PBP^{-1}$ entonces $e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}$.

Demostración:

Dado que $A = PBP^{-1}$ tenemos que:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(PBP^{-1})^k t^k}{k!}$$

Desarrollando el término $(PBP^{-1})^k$:

$$(PBP^{-1})^k = PBP^{-1}PBP^{-1} \dots PBP^{-1}.$$

Utilizando que $PP^{-1} = I$ se deduce de la igualdad anterior que:

$$(PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sustituyendo esta igualdad en la expresión de e^{At} :

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{PB^kP^{-1}t^k}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k t^k}{k!} \right) P^{-1} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

\square

Recordando que para las matrices diagonalizables existe una matriz P con los vectores propios “colgados” en columnas que cumple que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal con los valores propios en ella y utilizando estas dos proposiciones podremos hallar la matriz fundamental de la misma. Esta proposición no solo se verifica para matrices diagonalizables, puede aplicarse a dos matrices A y B cualquiera que estén relacionadas por $B = PAP^{-1}$.

0.2. Matriz de Jordan

Estudiaremos ahora que sucede si la matriz A es de Jordan con valor propio λ . Para eso utilizaremos la siguiente propiedad¹ que nos facilitará llegar a la forma de e^{At} cuando tenemos una matriz de este estilo.

Propiedad 1. *Dadas dos matrices A y B tales que $A.B = B.A$ se cumple que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.*

¹ Esta propiedad se demostrará más adelante.

Proposición 0.3.

Sea J una matriz de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces:

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración:

Trataremos de utilizar la propiedad 1 para facilitar el procedimiento. Podemos reescribir la matriz J de la forma:

$$J = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde llamaremos $D = \lambda I$ y B a la segunda matriz. Dado que $DB = BD$ podemos utilizar la propiedad mencionada anteriormente. Como la matriz D es diagonal con la primera proposición se deduce que:

$$e^{Dt} = e^{\lambda t} I$$

y gracias a la propiedad 1:

$$(0.3) \quad e^{Jt} = e^{\lambda t} e^{Bt}.$$

Se puede verificar, realizando las potencias de B , que al ir aumentando el exponente la diagonal de unos va bajando hasta volverse la matriz nula. Por lo que, para $k \geq n$, $B^k = 0$. La serie de e^{Bt} no será una serie infinita, sino que tendrá n términos. Realizaremos las cuentas para una matriz 4×4 para que se pueda visualizar de forma más sencilla la demostración, pero sucede lo mismo para una matriz $n \times n$. Utilizando la definición de la matriz exponencial para e^{Bt} tenemos que:

$$e^{Bt} = I + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_B + \frac{t^2}{2!} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B^2} + \frac{t^3}{3!} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B^3}$$

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & 0 \\ \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}$$

Por último utilizando la igualdad (0.3) se obtiene la fórmula que aparece en la proposición. □

0.3. Matriz con valores propios complejos

Empezaremos viendo una matriz de 2×2 y más adelante veremos que pasa para matrices más grandes.

Proposición 0.4.

Dada una matriz A de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ entonces:

$$e^{At} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

Demostración:

Análogamente al caso anterior, simplificaremos el problema separando la matriz A como suma de dos matrices más fáciles. Sea $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, podemos escribir la matriz A como:

$$A = B + C$$

como $BC = CB$ nuevamente por la propiedad 1

$$(0.4) \quad e^{At} = e^{at} e^{Ct}.$$

Para obtener e^{Ct} , escribiremos las potencias de C de la siguiente forma:

$$C^n = b^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Llamaremos a la matriz del lado derecho de la igualdad anterior E . Procederemos calculando algunas potencias de E para luego aplicar la definición de e^{Ct} .

$$E^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E^5 = E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede ver que luego de la quinta potencia se vuelve a la primer matriz. Por ende las potencias tendrán un ciclo de 4 matrices antes de volver a repetirse. En la diagonal habrá ceros en las potencias impares y en los pares ambos elementos coinciden, alternándose entre 1 y -1. Los otros dos elementos serán ceros en los pares y en los impares serán opuestos turnándose entre 1 y -1. Si ahora planteamos e^{Ct} :

$$e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bt \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(bt)^2}{2!} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{(bt)^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\Rightarrow e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(bt)^2}{2!} + \frac{(bt)^4}{4!} + \dots & bt - \frac{(bt)^3}{3!} + \frac{(bt)^5}{5!} - \dots \\ -bt + \frac{(bt)^3}{3!} - \frac{(bt)^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{(bt)^2}{2!} + \frac{(bt)^4}{4!} + \dots \end{pmatrix}$$

Donde se encuentran los desarrollos de Taylor de $\sin(bt)$ y $\cos(bt)$, pudiendo deducir que:

$$e^{Ct} = \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

Volviendo a la ecuación (0.4) tenemos que:

$$e^{At} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

□

Tanto para las matrices 2×2 con valores propios complejos, o matrices $n \times n$ que mediante un cambio de base se pueden llevar a la forma de Jordan, gracias a la proposición 0.2 también sabremos las soluciones.

Sin embargo no todas las matrices podemos llevarlas a una de las formas vistas recientemente, por ejemplo una matriz que tenga valores propios complejos y reales. Para esos casos nos servirá la siguiente proposición, donde con esta ya podremos abarcar todas las posibles opciones.

Proposición 0.5.

Sea A una matriz de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{B}_{n \times n} & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{C}_{m \times m} \end{array} \right)$$

entonces:

$$e^A = \left(\begin{array}{c|c} e^{\mathcal{B}} & 0 \\ \hline 0 & e^{\mathcal{C}} \end{array} \right)$$

Esta propiedad se deduce de la siguiente igualdad:

$$A^k = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{B}_{n \times n}^k & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{C}_{m \times m}^k \end{array} \right).$$

En consecuencia, no solo sabemos las soluciones en caso de tener una matriz diagonal, de Jordan o la matriz con valores propios complejos como en la proposición 0.4. Gracias a la proposición 0.5 sabemos que si la misma es una composición de estas o, por la proposición 0.2, si realizando un cambio de base podemos llevarla a la forma de una composición de estas, también encontraremos la solución. En conclusión, utilizando las proposiciones podemos hallar la solución de cualquier ecuación lineal homogénea con A constante.

Veremos un ejemplo de como resolver una ecuación diferencial mediante el cálculo de e^{At} .

Ejemplo 0.1.

Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3z \\ \dot{y} = -8 + y + 11z \\ \dot{z} = -2x + 4z \end{cases}$$

donde la matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -8 & 1 & 11 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

de la cual no podemos determinar de forma directa como es e^{At} . Por esa razón, realizaremos un cambio de variable para poder llevar la matriz a una más fácil. Procedemos con el cálculo de los valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 & 3 \\ -8 & 1 - \lambda & 11 \\ -2 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

Este polinomio tiene raíz evidente 1, por lo que bajando por Ruffini se puede obtener que los valores propios son 1 doble y 2. Para hallar los vectores propios v_1 y v_2 respectivamente, procedemos de la siguiente manera:

$$Av_1 = v_1 \rightarrow (A - I)v_1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 11 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Considerando $v_1 = (x, y, z)$, dado que las primeras dos filas no son L.I obtenemos que $x = z = 0$. En consecuencia, el subespacio propio de 1 es $S_1 = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ de donde obtenemos que $\dim(N(A - I)) = 1$. De forma análoga para el subespacio propio de 2 se llega a que $S_2 = \{(x, 3x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Escogeremos como vectores propios a $v_1 = (0, 1, 0)$ y $v_2 = (1, 3, 1)$. Necesitamos un tercer vector v_0 para poder realizar el cambio de base. El mismo debe verificar que:

$$Av_0 = v_0 + v_1 \Rightarrow (A - I)v_0 = v_1$$

Similar a como se realizó en el capítulo anterior en el ejemplo dentro de la sección de la base de Jordan, se obtiene que v_0 debe ser de la forma $(-3/2, y, -1)$, por lo que elegiremos $v_0 = (-3/2, 0, -1)$.

Escogiendo una base \mathcal{B} con los vectores mencionados, $\mathcal{B} = \{(-3/2, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 3, 1)\}$, la matriz P resultante es:

$$P = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que:

$$P^{-1}AP = B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

o lo que es lo mismo, $A = PBP^{-1}$. Se observa que la matriz B se puede separar en una matriz de Jordan y una diagonal (1×1) . Por la proposición 5:

$$e^{Bt} = \left(\begin{array}{cc|c} e^t & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{2t} \end{array} \right)$$

Luego por la proposición 4:

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

De modo que:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & -2/5 \\ -6/5 & 1 & -9/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = 5 \begin{pmatrix} -3e^t + 2e^{2t} & 0 & 3(e^{2t} + e^t) \\ 2te^t + 6(e^{2t} - e^t) & 5e^t & -2te^t + 9(e^{2t} - e^t) \\ 2(e^{2t} - e^t) & 0 & 2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

Por último la solución a la ecuación diferencial con una condición inicial genérica es:

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t)) = 5 \begin{pmatrix} -3e^t + 2e^{2t} & 0 & 3(e^{2t} + e^t) \\ 2te^t + 6(e^{2t} - e^t) & 5e^t & -2te^t + 9(e^{2t} - e^t) \\ 2(e^{2t} - e^t) & 0 & 2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix} X_0$$

○

0.3.1. Ecuaciones lineales de grado n

Hasta ahora hemos estudiado ecuaciones de grado 1, es decir, donde aparece hasta la primera derivada. Veremos a continuación que una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes de grado n , podremos transformarlas en una ecuación lineal autónoma homogénea de grado 1, pero en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 0.2.

Sea el problema:

$$\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$$

La solución a este problema es una función de \mathbb{R} a \mathbb{R} . Si realizamos el cambio de variable $y = \dot{x}$ tenemos que $\dot{y} = \ddot{x}$. Despejando de la ecuación de segundo grado obtenemos que:

$$\ddot{x} = -x + 2\dot{x} = -x + 2y.$$

Por ende:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases} .$$

Esta última ecuación la sabemos resolver. En particular esta ecuación se resolvió en el capítulo anterior, donde se obtuvo que:

$$(x(t), y(t)) = ((x_0 - y_0)e^t - e^t((x_0 - y_0)t - y_0), -e^t((x_0 - y_0)t - y_0))$$

Sin embargo, este vector no es una solución a nuestro problema original de segundo grado. La solución es solo la primer componente $x(t)$. ○

Análogamente a como se resolvió este problema, se pueden resolver problemas de mayor orden.

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de grado n .

$$x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + a_{n-1} x^{(n-2)} + \dots + a_3 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_1 x = 0$$

Realizando los cambios de variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x}_1 \\ x_3 &= \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \dot{x}_{n-2} = x_1^{(n-2)} \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} = x_1^{(n-1)} \end{aligned}$$

se obtiene el problema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 - \dots - a_{n-1} x_{n-1} - a_n x_n \end{cases} .$$

Enunciado del Teorema de Picard

En esta sección vamos a enunciar el teorema más importante del curso, el Teorema de Picard. No daremos la demostración pero si probaremos varias resultados que son de mucha importancia y que se deducen con relativa facilidad de su enunciado.

Vamos a definir los conceptos básicos que nos ayudaran a entender el enunciado.

Decimos que una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **Lipschitziana** respecto a la variable espacial si existe $k > 0$ constante tal que:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k \|x - y\|, \forall (t, x), (t, y) \in \Omega$$

Diremos que una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz según la variable espacial si para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe una constante $k > 0$ y un entorno $U \subset \Omega$ alrededor de (t_0, x_0) tal que:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq k \|x - y\|, \forall (t, x), (t, y) \in U.$$

Observación:

- Cuando hablamos de la norma en este caso nos referimos a la norma en \mathbb{R}^n .
- Que una función sea de Lipschitz según la variable espacial implica que la función es continua y acotada según la variable espacial, pero no según el tiempo. La función no tiene porque ser continua ni acotada.

Propiedad 1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en Ω . Entonces f es localmente Lipschitziana según la variable espacial.

La demostración sale bastante directo del teorema del valor medio. Por lo tanto:

TODA FUNCIÓN DE CLASE C^1 VERIFICA LA HIPÓTESIS DEL TEOREMA DE PICARD.

Se recuerda que:

Si bien seguramente ya saben distinguir cuando un conjunto es abierto o no, puede ser que estén olvidados de la definición formal. Por esta razón la repasaremos.

$$A \text{ es un conjunto abierto} \Leftrightarrow \forall a \in A, \exists \delta > 0 / B_{a,\delta} \subset A.$$

En palabras, dado cualquier elemento del conjunto, se puede definir un entorno alrededor del mismo tal que el entorno también este incluido en el conjunto.

Repetidas veces nos definiremos un entorno alrededor de un elemento del conjunto Ω a lo largo del capítulo y podremos hacerlo sin problemas porque estaremos trabajando con Ω abierto.

Ahora si, estamos preparados para demostrar el teorema de Picard.

Teorema 0.1. Teorema de Picard.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz según la variable espacial, continua y $(t_0, x_0) \in \Omega$. Entonces:

1. Existe $\alpha > 0$ donde la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$.

2. Para el α hallado en el ítem anterior, existe $r > 0$ tal que si $\|(t_1, x_1) - (t_0, x_0)\| < r$, $(t_1, x_1) \in \Omega$, se cumple que la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha)$.

El ítem 1 de este teorema nos dice que, bajo las hipótesis de Picard, la ecuación diferencial tiene solución única local. El ítem 2 nos dice que el tamaño del intervalo donde está definida localmente la solución no cambia si movemos poco la condición inicial.

Continuaremos con un ejemplo.

Ejemplo 0.1.

Consideremos la ecuación diferencial

$$(*) \quad \dot{x} = \sqrt{|x|} = f(t, x).$$

Lo primero que podemos deducir de las soluciones es que hay una solución estacionaria $x(t) = 0$ y que las soluciones tendrán que ser no decrecientes ya que \dot{x} es siempre mayor o igual a cero. Veamos que podemos decir de la unicidad de las soluciones. Dado que la derivada de la raíz tiende a infinito en cero, tenemos que:

$$\frac{\|f(t, x) - f(t, y)\|}{\|x - y\|} = \frac{\|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\|}{\|x - y\|}$$

tenderá a infinito para x tendiendo a cero y tomando $y = 0$. De manera que f no cumple la condición de Lipschitz en $x = 0$.

Definimos la función x_1 tal que

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Vamos a probar que x_1 es solución de (*). Si $t \leq 0$, se cumple que $x_1(t) \equiv 0$, lo que es claro que es solución. Si $t \geq 0$, $x_1(t) = \frac{t^2}{4}$. Luego $\dot{x}_1 = \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{t^2}{4}}$. Lo que muestra que es solución.

Por lo tanto, x_1 y $x(t) \equiv 0$ son soluciones de (*). Este ejemplo muestra que si f no cumple la condición de Lipschitz, entonces no tiene porque existir solución única.

Ejercicio.

Sea la ecuación

$$\dot{x}'(t) = \begin{cases} \frac{4t^3x}{t^4+x^2} & \text{si } (t, x) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (t, x) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Probar que $x(t) = c^2 - \sqrt{t^4 + c^4}$ es solución para todo $c \in \mathbb{R}$ con la condición $x(0) = 0$.
2. ¿Qué hipótesis del Teorema de Picard no se cumplen?.

0.1. Consecuencias del teorema de Picard

0.1.1. Soluciones maximales

Lo que continuaremos estudiando en esta sección, es donde están definidas las soluciones. Picard nos asegura la existencia en un entorno de t_0 pero veremos que tanto podemos extender estas soluciones y si estas extensiones, bajo algunas hipótesis, son únicas.

Es bastante intuitivo que quiere decir extender una función (y ya se ha utilizado ese término en el último ejemplo), pero por las dudas lo definiremos formalmente. Denotaremos (I, φ) a la solución de una ecuación diferencial con condiciones iniciales definida en el intervalo I . Se dice que (I, φ) es una extensión de otra solución (J, ψ) si $J \subset I$ y $\varphi|_J = \psi$, donde la notación $\varphi|_J$ indica la función φ evaluada en los puntos de J . Otra forma de escribir eso último es que $\varphi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in J$.

Definiremos el **intervalo maximal** de una solución como el intervalo más grande donde la solución esta definida. La solución asociada a este intervalo se le llama **solución maximal**. Más formalmente, decimos que (I, φ) es la solución maximal cuando ella misma es su única extensión, en ese caso I es el intervalo maximal. De aquí en más denotaremos $I(t_0, x_0)$ al intervalo maximal de la solución con condición inicial (t_0, x_0) .

En el ejemplo anterior vimos que podíamos extender las soluciones hasta estar definidas en todo \mathbb{R} , sin embargo la extensión no era única. El problema surge justamente en $x = 0$ donde no se cumplen las hipótesis de Picard, pero parece lógico que si la función no pasa por ningún punto donde no se cumplan las condiciones de Picard la extensión sea única.

En primer lugar, demostraremos que dadas dos soluciones a la misma ecuación diferencial en las hipótesis de Picard con condiciones iniciales (I_1, φ_1) y (I_2, φ_2) coinciden en la intersección de sus dominios. Que sean dos soluciones al mismo problema con condiciones iniciales implica que $t_0 \in I_1$, $t_0 \in I_2$ y además $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$.

Recordamos que un conjunto abierto es conexo si no lo podemos escribir como la unión de dos abiertos disjuntos. Por ejemplo los reales son un conjunto conexo, también lo son el conjunto $(1, 2)$ o $(3, +\infty)$. Un conjunto no conexo es el $(0, 3) \cup (7, 8)$.

Lema 0.2. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ en las hipótesis de Picard. Sean (I_1, φ_1) y (I_2, φ_2) soluciones a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ con condición inicial (t_0, x_0) . Entonces $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.*

Demostración:

Sea $J = I_1 \cap I_2$. Es claro que J es conexo (la intersección de I_1 e I_2 es un intervalo en \mathbb{R} de la forma (a, b)) y abierto (por ser intersección de abiertos). Podemos escribir a J como la unión de:

$$A = \{t \in J / \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$$

$$B = \{t \in J / \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}$$

se ve claramente que $J = A \cup B$ y que $A \cap B = \emptyset$. Podemos deducir que B es abierto por la continuidad de las soluciones (si $\varphi_1(t_1) \neq \varphi_2(t_1)$ existe un entorno de t_1 donde las funciones siguen siendo distintas). Por otro lado, si $t_2 \in A$ implica que $\varphi_1(t_2) = \varphi_2(t_2) = x_2$. Por Picard, existe una única solución con condición inicial (t_2, x_2) definida en $(t_2 - \alpha, t_2 + \alpha)$, por lo tanto $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in (t_2 - \alpha, t_2 + \alpha)$. En consecuencia, $(t_2 - \alpha, t_2 + \alpha) \subset A$ por lo que A también es abierto (por definición de abierto).

Dado que J es conexo, no se puede escribir como la unión de dos abiertos disjuntos, por lo que uno de los conjuntos tendrá que ser vacío. Sabemos que $t_0 \in A$, de modo que $B = \emptyset$. Dejando demostrado el lema. \square

Ahora si, vayamos a las soluciones maximales.

Teorema 0.3. Existencia de solución maximal.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz según la variable espacial y continua. Entonces para cualquier condición inicial $(t_0, x_0) \in \Omega$ el problema

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución maximal.

Demostración:

Definamos el conjunto \mathcal{S} como la familia de soluciones a $(*)$ definidas en distintos intervalos que contienen a t_0 :

$$\mathcal{S} = \{\varphi_\lambda : I_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n / \varphi_\lambda \text{ es solución a } (*)\}.$$

Por Picard sabemos que este conjunto no es vacío. Ahora definamos el intervalo I como:

$$I = \bigcup_{\lambda} I_\lambda$$

Por como definimos I , se cumple que:

$$t \in I \Rightarrow \exists \lambda_0 / t \in I_{\lambda_0}.$$

Por esta razón definimos la función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ como:

$$\varphi(t) = \varphi_{\lambda_0}(t)$$

En caso de existir más de un λ_0 no hay problema, ya que por el lema anterior todas las funciones que estén definidas en ese t valen lo mismo.

Si esta función φ es solución a la ecuación diferencial, lo cual es bastante obvio, vemos que la misma es la solución maximal, ya que ninguna otra solución puede ser una extensión de φ (todos los I_λ están incluidos en I). Veamos si verifica (*). Por un lado:

$$\varphi(t_0) = \varphi_{\lambda_0}(t_0) = x_0.$$

Por otro lado $\varphi|_{I_{\lambda_1}} = \varphi_{\lambda_1}$. Entonces

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_{\lambda_1} = f(t, \varphi_{\lambda_1}) = f(t, \varphi(t))$$

por lo que φ verifica la ecuación diferencial, dejando demostrado el teorema. \square

Nuevamente, el ejemplo visto anteriormente de $\dot{x} = \sqrt{x}$ no contradice este último teorema. Este teorema vale donde valga Picard, mientras que las soluciones definidas en el ejemplo no permanecen en el conjunto donde vale Picard.

Algo que parece tener bastante sentido, es que dada una ecuación diferencial en las hipótesis de Picard, si consideramos dos condiciones iniciales lo suficientemente cerca las soluciones permanecerán cerca por un tiempo. Y cuanto más cerca las condiciones iniciales más tiempo permanecerán cerca las soluciones. Si bien esto parece bastante obvio no es tan fácil de demostrar, por lo que simplemente enunciaremos este teorema.

Teorema 0.4. Continuidad respecto a las condiciones iniciales.

Sea $\varphi(t)$ la solución maximal a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ con condición inicial $\varphi(t_0) = x_0$ con f en las hipótesis de Picard. Entonces:

$$\text{dado } T \in I(t_0, x_0) \text{ y } \epsilon > 0, \exists \delta(T, \epsilon) > 0 / \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)\| < \epsilon \text{ con } t_0 < t < T$$

donde $\bar{\varphi}(t)$ es una solución a $\dot{x} = f(t, x)$ con $\bar{\varphi}(t_0) = \bar{x}$.

¿Que nos esta diciendo este teorema? Que si nosotros queremos que dos soluciones distintas permanezcan cerca (a una distancia menor que ϵ) hasta un tiempo $T \in I(t_0, x_0)$, basta con considerar las condiciones iniciales lo suficientemente cerca. ¿Que tan cerca tienen que estar las condiciones iniciales? Tener una distancia menor a δ , la cual depende de ϵ y T .

Por ejemplo, consideremos el problema $\dot{x} = x$. Sabemos que las soluciones a este problema son $x(t) = x_0 e^{t-t_0}$ y el cero es un punto de equilibrio inestable. Sin embargo, aunque sea inestable veremos que podemos mantenernos cerca del cero por determinado tiempo si nuestra condición inicial es suficientemente chica. Consideremos la solución $x(t)$ con condición inicial $(0, 0)$ y otra más genérica $(0, x_0)$. Si queremos que ambas soluciones se mantengan a una distancia menor a ϵ un tiempo T tenemos que:

$$\sup_{t \in (t_0, T)} |x_0 e^t - 0| = x_0 e^T < \epsilon \Rightarrow x_0 < \epsilon e^{-T}$$

Considerando una condición inicial menor a ese número las soluciones cumplirán lo pedido.

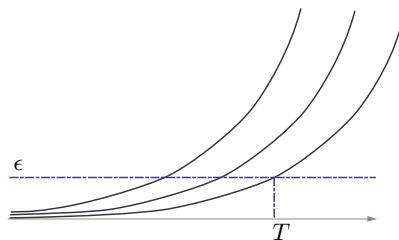


FIGURA 1. Continuidad respecto a las condiciones iniciales.

0.1.2. Intervalo maximal

A continuación veremos tres teoremas que nos permitirán deducir como es el intervalo maximal de una solución.

El primer teorema nos dice que no podemos encerrar al par $(t, \varphi(t))$, lo que representa el gráfico de la solución, en un compacto si estamos en las hipótesis de Picard. Siempre existirá un tiempo que pertenezca al intervalo maximal, tanto en el futuro como en el pasado, donde el gráfico se escape del compacto.

Esto implicará que, en las hipótesis de Picard, las soluciones tendrán que estar definidas para todo tiempo o no estar acotadas si el intervalo maximal esta acotado.

Se recuerda que:

- Toda sucesión en \mathbb{R}^n que sea acotada tiene una subsucesión convergente.
- Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si es cerrado y acotado.
- Toda sucesión convergente dentro de un cerrado, converge a un punto del conjunto. En consecuencia, toda sucesión convergente en un compacto converge a un punto del conjunto.

Haremos un corto resumen del teorema, ya que puede no ser fácil entenderlo. El teorema se divide en dos casos, el primero en el cual el intervalo maximal es todo \mathbb{R} y la demostración es directa, el segundo donde el intervalo maximal está acotado en el futuro (es análogo para el pasado). Para el caso que el intervalo maximal esta acotado en el futuro por $b \in \mathbb{R}$ trataremos de demostrarlo por el absurdo. En este caso, el teorema consiste en suponer que $(t_n, \varphi(t_n))$, donde $t_n = b - \frac{1}{n}$, esta incluido en un compacto $K \subset \Omega$. En caso de que algo así suceda podemos definirnos una subsucesión convergente que tienda a un punto $(b, \bar{x}) \in K^1$. Por el segundo ítem del Teorema de Picard existe un entorno U y un $\alpha > 0$ tal que las soluciones a cualquier condición inicial dentro de U tiene una única solución de tamaño 2α . Sin embargo, si la subsucesión converge a (b, \bar{x}) podemos acercarnos tanto como queramos, llegando a un punto como muestra la figura (2).

Aplicando Picard a la ecuación con condición inicial (t_1, x_1) sabemos que existe una única solución entre $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha)$ de modo que podemos extender la solución un poco más de b . Esto es absurdo ya que el intervalo maximal es hasta b . En conclusión $(t, \varphi(t))$ no podrá estar incluido en un compacto.

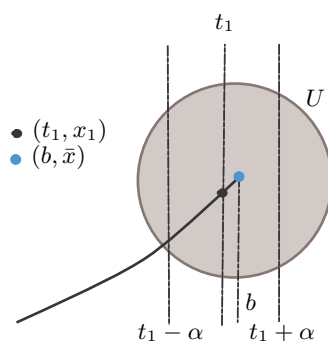


FIGURA 2. Escape de compactos.

Teorema 0.5. Escape de Compactos.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz según la variable espacial y continua, $K \subset \Omega$ un conjunto compacto y $\varphi : I(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución maximal a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \exists t_1 < t_0, t_1 \in I(t_0, x_0) / (t_1, \varphi(t_1)) \notin K \\ \exists t_2 > t_0, t_2 \in I(t_0, x_0) / (t_2, \varphi(t_2)) \notin K \end{aligned}$$

Demostración:

¹ Por lo que se recordó previamente.

Probaremos la existencia de t_2 , la existencia de t_1 es análoga. Llamemos (a, b) al intervalo maximal $I(t_0, x_0)$. Si $b = +\infty$ no hay nada que probar, ya que $(t, \varphi(t))$ no está acotado y por lo tanto no está contenido en un compacto.

Ahora veremos que pasa para cuando $b \in \mathbb{R}$ ($b < +\infty$). Trataremos de demostrar este caso por el absurdo, es decir, supondremos que $(t, \varphi(t)) \in K$ para todo $t > t_0$, $t \in I(t_0, x_0)$ y llegaremos a una contradicción, por lo que $(t, \varphi(t))$ no podrá estar contenido en K . Llamando $t_n = b - \frac{1}{n}$, podemos considerarnos la sucesión

$$(t_n, \varphi(t_n)) \in K \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si suponemos que $(t, \varphi(t)) \in K$ para todo $t \in I(t_0, x_0)$, $t > t_0$, entonces esta sucesión también tendrá que estar incluida en K . En este caso tenemos una sucesión acotada, por lo que la misma tiene una subsucesión convergente. Además, como la subsucesión está incluida en K (cerrado), la misma converge a un punto del conjunto, es decir:

$$(t_{n_r}, \varphi(t_{n_r})) \rightarrow (b, \bar{x}) \in K$$

Por la segunda versión del teorema de Picard, sabemos que existe un entorno U alrededor de (b, \bar{x}) y $\alpha > 0$ tal que para todo $(t_1, x_1) \in U$ existe una única solución definida en $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha)$. Como la subsucesión converge a (b, \bar{x}) podemos acercarnos tanto como queramos a ese punto, por lo que:

$$\exists r_0 / t_{n_{r_0}} > b - \alpha \text{ y } (t_{n_{r_0}}, \varphi(t_{n_{r_0}})) \in U$$

Ahora bien, si consideramos la solución con condición inicial $(t_{n_{r_0}}, \varphi(t_{n_{r_0}}))$ sabemos que la misma está definida hasta $t_{n_{r_0}} + \alpha > b$. Por otro lado, este punto pertenece a la solución $\varphi(t)$ y dado que existe una única solución maximal se cumple $I(t_0, x_0) = I(t_{n_{r_0}}, \varphi(t_{n_{r_0}})) = (a, b)$. Pero esto es absurdo, ya que $t_{n_{r_0}} + \alpha > b$ (figura (2)). En ese caso se refuta nuestra suposición, que era que $(t, \varphi(t))$ estuviese incluido en K para todo $t \in I(t_0, x_0)$, $t > t_0$. \square

Ahora veremos otro teorema, que consiste en comparar dos soluciones de distintas ecuaciones diferenciales. Este teorema nos servirá para hallar el intervalo maximal en ecuaciones en \mathbb{R} . Este último es bastante intuitivo. Lo que dice, es que si tenemos dos ecuaciones diferenciales con $f_1(t, x) < f_2(t, x)$ con la misma condición inicial, la solución φ_1 asociada a f_1 es menor a φ_2 asociada a f_2 para tiempos mayores a t_0 . Esto es lógico, ya que si $f_1(t, x) < f_2(t, x)$ la derivada del primer problema es menor a la del segundo problema, por que lo sus soluciones crecen más lento.

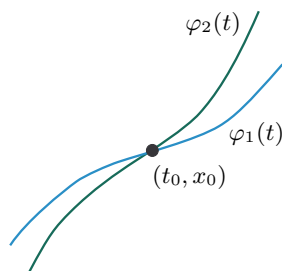


FIGURA 3. Comparación.

Teorema 0.6 (Comparación de ecuaciones diferenciales).

Sean los problemas:

$$(*_1) \begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (*_2) \begin{cases} \dot{x} = f_2(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $f_1 : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ en las hipótesis de Picard tal que $f_1(t, x) < f_2(t, x)$ para todo $(t, x) \in \Omega$. Sea $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ la solución a $(*_1)$ y $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ la solución a $(*_2)$. Entonces:

$$\varphi_1(t) > \varphi_2(t), \quad \forall t < t_0, t \in I_1 \cap I_2$$

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t), \quad \forall t > t_0, t \in I_1 \cap I_2$$

Demostración:

Consideremos la función $D(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Si realizamos la derivada:

$$\dot{D}(t) = \dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t) = f_1(t, \varphi_1(t)) - f_2(t, \varphi_2(t))$$

Dado que $f_1(t_0, x_0) < f_2(t_0, x_0)$ y las funciones son continuas existe un entorno U de (t_0, x_0) tal que $f_1(t, x) < f_2(t, x)$ para todo $(t, x) \in U$. Como las soluciones a las ecuaciones diferenciables también son continuas podemos definir un intervalo de tiempo donde $(t, \varphi_i(t))$ este en U . Más formalmente, existe $t_1, t_2 \in I_1 \cap I_2$ con $t_1 < t_0 < t_2$ tal que:

$$(t, \varphi_i(t)) \in U, \forall t \in (t_1, t_2) \text{ con } i = 1, 2.$$

Por consiguiente:

$$\dot{D}(t) < 0 \text{ con } t_1 < t < t_2.$$

Dado que la función D esta decreciendo y $D(t_0) = \varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) = 0$ se cumple que:

$$\varphi_1(t) > \varphi_2(t), \quad t_1 < t < t_0$$

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t), \quad t_0 < t < t_2$$

Supongamos que φ_1 y φ_2 se vuelven a cruzar en algún tiempo $t_3 > t_0, t_3 \in I_1 \cap I_2$, es decir que $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$, $t_0 < t < t_3$ y $\varphi_1(t_3) = \varphi_2(t_3)$. Entonces aplicando lo que concluimos recién en t_3 tendría que pasar que $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ para $t_0 < t < t_3$. Pero esto es absurdo. Podemos hacer el mismo razonamiento si suponemos que se cruzan en el pasado, dejando demostrado el teorema. \square

El último teorema que nos puede servir en algunos casos para hallar el intervalo maximal es el siguiente.

Teorema 0.7.

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en las hipótesis de Picard tal que $f(t, x(t))$ está acotada. Entonces las soluciones al problema $\dot{x} = f(t, x)$ están definidas para todo tiempo.

La demostración queda a cargo del lector. Se sugiere acotar la solución mediante la fórmula:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

0.1.3. Ejemplos prácticos

En lo que queda del capítulo veremos ejemplos utilizando el teorema de Picard y sus consecuencias.

Ejemplo 0.2.

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = x^4 - 1.$$

Tratemos de graficar las soluciones a este problema sin resolver la ecuación, utilizando los teoremas que hemos visto y estudiando el signo de la de la derivada. Viendo donde se anula \dot{x} tenemos que 1 y -1 son puntos de equilibrio. Por otro lado las soluciones crecen para x mayores a 1 o menor que -1, mientras que decrece entre -1 y 1.

Además, esta ecuación se encuentra en las hipótesis de Picard en todo \mathbb{R}^2 por lo que para cualquier condición inicial tenemos una única solución. En consecuencia, las soluciones no podrán cortarse, ya que no se respetaría la unicidad en el punto de corte. Gracias a esto último las soluciones estacionarias nos dividirán el plano en tres. Las soluciones que están por arriba del 1, entre el -1 y 1 y por debajo de -1 no podrán pasar de una zona a otra.

Caso $-1 < x_0 < 1$:

En este caso las soluciones serán decrecientes. Dado que estamos en las hipótesis de Picard podemos usar el teorema de escape de compactos. Consideremos el compacto $K_1 = [a, b] \times [-1, 1]$ donde $a < t_0 < b$ dibujado en la figura (4). Por el teorema ya mencionado, si consideramos $\varphi(t)$ la solución maximal de esta ecuación sabemos que $(t, \varphi(t))$ debe escaparse de ese compacto tanto en el futuro como en el pasado. Sin embargo $(t, \varphi(t))$ no puede escaparse por arriba ni por abajo, ya que no respetaría la unicidad de las soluciones. En consecuencia la gráfica de la solución debe escaparse por

los costados lo que implica que debe existir un $t_1, t_2 \in I(t_0, x_0)$ donde $t_1 < a$ y $t_2 > b$. Esto sucede para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$, de donde podemos concluir que el intervalo maximal de la solución sera todo \mathbb{R} .

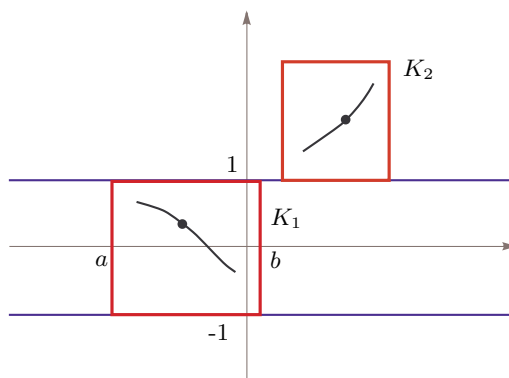


FIGURA 4. Ejemplo con escape de compactos.

Dado que las soluciones tendrán que ser siempre decrecientes y están acotadas, las mismas tendrán que tener una asíntota horizontal. Recordar que la derivada tiende a cero en una asíntota horizontal. Mirando la forma de \dot{x} vemos que esto solo sucede cuando nos acercamos a 1 o -1. Con esta información podemos concluir que las soluciones de esta zona serán de la forma de la figura (6).

Caso $x_0 > 1$:

Si ahora consideramos un compacto K_2 como el de la figura (4), sabemos que el gráfico de solución no podrá escaparse por debajo ya que no puede cortar la recta $x = 1$. En este caso no tenemos una cota superior (al menos no que sepamos). De todas formas escape de compactos nos permitirá sacar conclusiones de como es el intervalo maximal en el pasado. Dado que la soluciones son crecientes en esa zona, sabemos que en el pasado tampoco podrá escaparse por la parte de arriba del compacto, de modo que tendrá que escaparse del lado temporal. Razonando igual que en caso anterior, podemos deducir que el intervalo maximal será de la forma $I(t_0, x_0) = (-\infty, b)$, donde b podría ser infinito, y que las soluciones tienden a 1 cuando el tiempo tiende a menos infinito.

Nos faltaría ver que sucede en el futuro. Para esto utilizaremos el teorema 3. Consideremos el problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Este problema es fácil de resolver por variables separables, obteniéndose que las soluciones son de la forma:

$$x(t) = \frac{1}{1/x_0 + t_0 - t}$$

Vemos que estas soluciones no están definidas para todo tiempo, ya que se anula el denominador en el tiempo $t^* = t_0 + 1/x_0$. Cuando la condición inicial es $x_0 > 0$ nos encontramos con que el intervalo maximal está acotado superiormente ($t^* > t_0$), mientras que para $x_0 < 0$ el intervalo maximal está acotado inferiormente ($t^* < t_0$).

Si llamamos $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^4 - 1$ sabemos que existe un $k > 0$ tal que para $x > k$ se cumple que $f_1(x) < f_2(x)$ (por el grado de los polinomios). Si $x_0 > k$, podemos considerar (I_1, φ_1) la solución maximal a $\dot{x} = f_1(x)$ y (I_2, φ_2) la solución maximal a nuestro problema original $\dot{x} = f_2(x)$ ambas con condición inicial (t_0, x_0) . Como $x_0 > k > 0$, $I_1 = (-\infty, t^*)$. Dado que φ_1 y φ_2 son crecientes, si $x_0 > k$ también lo serán las soluciones en el futuro (en el futuro nos mantendremos en la zona donde vale la desigualdad), lo que nos permitirá usar el teorema de comparación. Por el teorema ya mencionado tenemos que $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ para todo $t > t_0$ y $t \in I_1 \cap I_2$.

Sabemos que φ_1 se va a más infinito en t^* , de modo que si φ_2 está definida hasta t^* también tendrá que irse a más infinito (figura (5.a)). En conclusión $I_2 = (-\infty, b)$, donde $b \leq t^*$ (observar que la solución φ_2 podría haberse escapado a más infinito antes que φ_1). Claramente el valor de b depende de las condiciones iniciales (t^* depende de (t_0, x_0)).

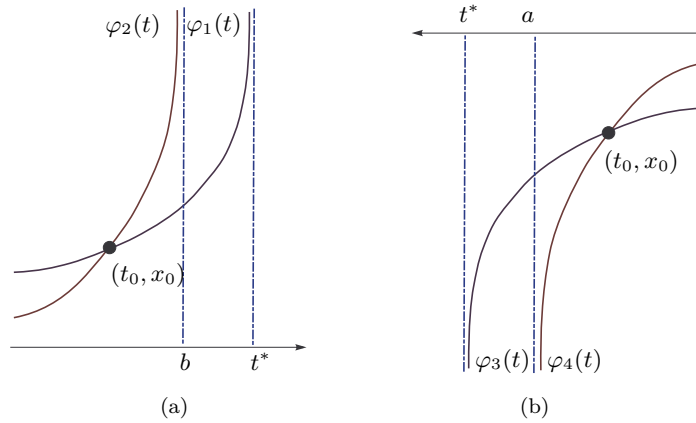


FIGURA 5. Ejemplo usando el teorema 3.

Podemos observar que las soluciones a $\dot{x} = x^4 - 1$ con condición inicial $x_0 > 1$ no pueden estar acotadas. Esto lo podemos deducir ya que en caso de estar acotadas, podemos razonar de forma análoga a cuando la condición inicial se encontraba entre -1 y 1, concluyendo que las soluciones tendrían que tener una asíntota horizontal mayor a 1. Sin embargo, la derivada de \dot{x} es continua y vale cero solo en 1 y -1, por lo que no es posible que tenga una asíntota horizontal en otro valor. Por lo tanto las soluciones van a alcanzar en algún momento el valor k mencionado en el párrafo anterior y una vez alcanzado podemos aplicar el teorema 3, deduciendo que $I(t_0, x_0) = (-\infty, b)$ con $b \in \mathbb{R}$ para $x_0 > 1$.

Caso $x_0 < -1$:

Podemos proceder de forma análoga al caso anterior. Por escape de compactos podemos deducir que el intervalo maximal no está acotado superiormente. Luego para el pasado podemos utilizar el teorema 3. Llamaremos (I_3, φ_3) la solución maximal de $\dot{x} = x^2$ y (I_4, φ_4) la solución maximal de $\dot{x} = x^4 - 1$ con la misma condición inicial (t_0, x_0) . En este caso, estamos en condiciones iniciales negativas por lo que $I_3 = (t^*, +\infty)$. Dado que ahora nos hace falta saber como es el intervalo maximal en el pasado, consideramos la desigualdad para tiempos menores a t_0 , donde tenemos que $\varphi_4(t) < \varphi_3(t), \forall t < t_0, t \in I_3 \cap I_4$. Razonando igual que el caso anterior, deducimos que el intervalo maximal para una condición inicial $x_0 < -1$ tiene la forma $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$ que depende de (t_0, x_0) (figura (5.b)).

Por último recordemos que al ser una ecuación diferencial autónoma, las soluciones tienen la misma forma independientemente de t_0 , pero corridas en el tiempo. Teniendo en cuenta estas cosas, un buen bosquejo de las soluciones es el siguiente.

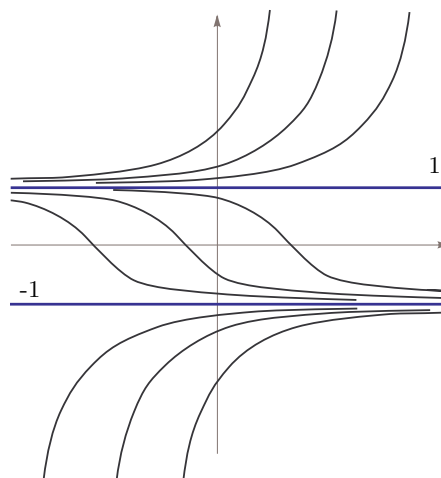


FIGURA 6. Soluciones a $\dot{x} = x^4 - 1$.



¿Como saber que teorema usar? Escape de compactos sirve cuando sabemos que la solución esta acotada. Si esta acotada superior e inferiormente, seguro tendrá que escaparse por la variable temporal. Si esta acotada solo superiormente o inferiormente, ahí habrá que fijarse el signo de la derivada, como nos pasó en este ejemplo.

Verán que es bastante intuitivo darse cuenta si el intervalo maximal está acotado superior o inferiormente en ecuaciones diferenciales sencillas. Si consideramos el problema:

$$\dot{x} = x^\alpha, \quad \alpha > 0$$

por variables separables obtenemos que la solución a este problema es:

$$x^{1-\alpha}(t) = x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)(t-t_0), \quad \text{si } \alpha \neq 1$$

$$x(t) = x_0 e^{t-t_0}, \quad \text{si } \alpha = 1.$$

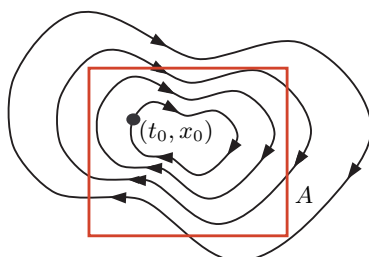
Si $1-\alpha < 0$, $x(t)$ será un cociente y por lo tanto, no estará definida cuando se anule el denominador. En consecuencia se cumple que:

si $\alpha > 1 \Rightarrow$ la solución no está definida para todo tiempo

si $0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow$ la solución está definida para todo tiempo.

Para ecuaciones diferenciales con $f(t,x) > x^\alpha$, con $\alpha > 1$, la derivada ya es demasiado grande y la solución se va a infinito en un tiempo finito. Generalmente las soluciones que se utilizan para comparar son de la forma $\dot{x} = ax^\alpha$, dado que estas son fáciles de resolver y ya vimos cuales están definidas para todo \mathbb{R} y cuales no.

Recordar que al usar escape de compactos el compacto siempre debe estar incluido en \mathbb{R}^{n+1} . Un clásico error es decir que las soluciones deben escaparse de un compacto y no es la solución, si no el gráfico de la solución el que debe escaparse. Por ejemplo consideremos una ecuación diferencial en las hipótesis de Picard con el diagrama de fases de la siguiente figura:



La solución de esta ecuación con condición inicial (t_0, x_0) que llamaremos $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ está contenida en un compacto A . En este caso si queremos usar escape de compactos, el compacto K sale de la hoja. Considerando el compacto $K = [a, b] \times A$, con $a < t_0 < b$, vemos del diagrama que $\varphi(t) \subset A$, de modo que el gráfico de la solución deberá escaparse del lado temporal, de donde podemos concluir que las soluciones están definidas para todo tiempo.

Ejemplo 0.3.

Consideremos ahora el siguiente problema:

$$\dot{x} = t - x^2.$$

Tratemos de bosquejar las funciones con las herramientas que tenemos. Se verifica rápidamente que $f(t,x)$ es continua y que la derivada respecto a x también lo es, de modo que estamos en las hipótesis de Picard. Comenzaremos estudiando el signo de f para hacernos una primera idea de como serán las soluciones.

Para empezar vemos que esta ecuación no tiene puntos de equilibrio. La derivada es nula en la parábola $t = x^2$, por lo que las soluciones tendrán que cruzar esta curva con pendiente nula. Dentro de la parábola la derivada es positiva, y por fuera es negativa, de donde podemos concluir que las soluciones que cortan la curva venían decreciendo, la atraviesan con pendiente horizontal y luego crecen, por lo que las soluciones tendrán un mínimo en la curva $t = x^2$. También podemos deducir

que las soluciones que atraviesan la curva tienen un mínimo observando que la derivada segunda es positiva en esos puntos.

$$\ddot{x} = 1 - 2x\dot{x} \Rightarrow \ddot{x}(\dot{x} = 0) = 1$$

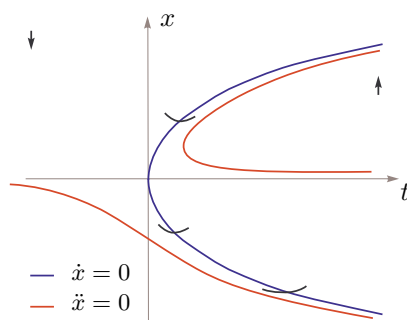


FIGURA 7

Dado que los puntos de la parábola son mínimos, una vez que las soluciones entran a la parábola no podrán salir. Esto es debido a que cuando entran a la parábola su derivada es positiva por lo que las soluciones estarán creciendo. Pero si cortarían la curva tendrían que tener un mínimo, lo cual no es posible ya que están creciendo. Observar que esto implica que las curvas que entran en algún momento deben cambiar su concavidad. Calculando donde las curvas cambian su concavidad ($\ddot{x} = 0$) tenemos que:

$$\ddot{x} = 1 - 2x\dot{x} = 1 - 2x(t - x^2) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2x} + x^2.$$

Para poder dibujar esta curva se recomienda realizar la curva de $t(x)$ y luego dibujar la inversa (simétrica respecto a la recta $x = t$). De modo que las soluciones luego de entrar a la parábola tendrán que cortar la curva roja de la figura (7). Estudiando el signo de la concavidad tenemos que la concavidad es negativa en la parte inferior y superior derecha y positiva en el resto del plano, lo que concuerda con lo dicho anteriormente.

Si las soluciones que entran a la parábola no pueden salir, tendremos una cota superior para las mismas, lo que nos permitirá sacar conclusiones utilizando el teorema de escape de compactos. Considerando el compacto de la figura (8). Sabemos que la solución dentro de la parábola es creciente y no puede cortar la curva $t = x^2$ en el futuro, de donde podemos concluir que el intervalo maximal no está acotado superiormente.

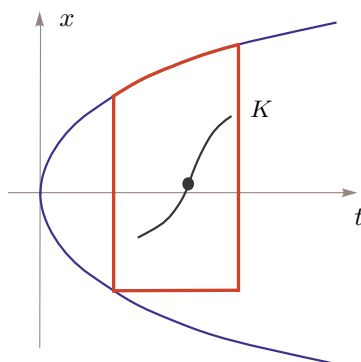


FIGURA 8. Escape de compactos ejemplo $\dot{x} = t - x^2$.

Esto no quiere decir que todas las soluciones estén definidas para todo tiempo en el futuro, ya que podrían haber soluciones que nunca entren a la parábola. Llamaremos φ_c a las soluciones que cumplen que $\varphi(0) = c$. Para $c \geq 0$, las soluciones entrarán a la parábola y en consecuencia su intervalo maximal no está acotado superiormente. Uno podría intuir que para valores cercanos a $c = 0$ negativos, las

soluciones también entrarán a la parábola ya que su pendiente en $t = 0$ será casi horizontal por la continuidad de las derivadas (si $f(t, x) = t - x^2$, $f(0, 0) = 0$). Pero veamos que pasa para c más chicos.

Consideremos el problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x^2 \\ x(0) = c \end{cases}$$

Por variables separables obtenemos que las soluciones a este problema son:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{c}}$$

Estas soluciones para $x_0 < 0$ están definidas para $t < -\frac{2}{c}$. Se cumple que $t - x^2 < -\frac{1}{2}x^2$ en la zona $t < \frac{1}{2}x^2$. Consideremos ψ una solución de $\dot{x} = -\frac{1}{2}x^2$ como en la figura (9) con $\psi(0) = k$. Esta solución se mantiene en la zona donde $t - x^2 < -\frac{1}{2}x^2$. Por lo tanto, si consideramos φ_k la solución a $\dot{x} = t - x^2$ con $\varphi_k(0) = k$, por comparación obtenemos que $\varphi_k(t) < \psi(t)$ para $t > 0$ donde ambas soluciones estén definidas. Dado que ψ se va a menos infinito en un tiempo finito, también lo hará φ_k .

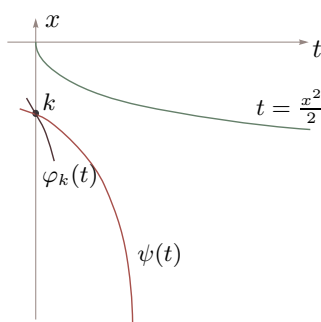


FIGURA 9. Comparación con la ecuación $\dot{x} = -\frac{1}{2}x^2$.

Para $c < k$, dado que las soluciones no se pueden cortar, φ_c tendrá que mantenerse por debajo de φ_k , de modo que tampoco estarán definidas para todo tiempo en el futuro.

En consecuencia, tendremos un conjunto de soluciones que entran a la parábola $t = x^2$ en determinado tiempo y están definidas para todo tiempo en el futuro y otro conjunto de soluciones que se escapan a menos infinito en un tiempo finito en el futuro. ¿Habrá alguna solución que este definida para todo tiempo pero que nunca entre a la parábola?

Definamos el conjunto $A = \{c \in \mathbb{R} / \varphi_c \text{ corta la curva } t = x^2\}$ y $B = \{c \in \mathbb{R} / I(0, c) = (a, b), \text{ con } b \in \mathbb{R}\}$, donde $I(0, c)$ es el intervalo maximal de la solución $\varphi_c(t)$. Por lo que ya comentamos, el conjunto de los $c \geq 0$ pertenecen a A , mientras que para $c \leq k$ (siendo k el valor utilizado en la comparación) pertenecen a B . Estos valores de c mencionados no son los únicos que perteneces a A ni a B , simplemente son los que estamos seguros en que conjunto se encuentran.

Tanto el conjunto A como el B tendrán que ser conjuntos abiertos por el teorema de la continuidad respecto a las condiciones iniciales (teorema 0.4). Por ejemplo, supongamos que $B = (-\infty, d]$. Esto implica que para $c > d$, las soluciones φ_c si están definidas para todo tiempo en el futuro, ya que si no pertenecerían al conjunto B . Dado que $d \in B$ sabemos que existe un tiempo t^* donde φ_d se va a menos infinito. Por la continuidad de las soluciones tendríamos que poder encontrar un δ tal que las soluciones con $d < c < d + \delta$ estén tan cerca como queramos por un tiempo $T < t^*$. Sin embargo esto no es posible, ya que cuando T se acerca a t^* , φ_d tiende a menos infinito, alejándose del resto de las soluciones con $d < c < d + \delta$. Podemos pensar de forma análoga con el conjunto A .

Como el conjunto de los reales es conexo y A, B son dos abiertos disjuntos, claramente no pueden cubrir todo \mathbb{R} . Es decir, que existe al menos un c_0 que está definido para todo tiempo pero que no corta la curva. Observar que φ_{c_0} tendrá que estar contenida entre la curva $\ddot{x} = 0$ y $x = -\sqrt{t}$ para tiempos lo suficientemente grandes. Ver que φ_{c_0} es menor a $x = -\sqrt{t}$ es sencillo, ya que $c_0 < 0$ (los $c \geq 0$ cortan la curva $t = x^2$) y nunca entra a la parábola. Por otro lado, si la solución se mantuviera por debajo e la curva $\ddot{x} = 0$, la solución tendría una concavidad negativa, por lo que en algún momento saldría de la parábola $t = -\frac{1}{2}x^2$ (curva que aparecía en la comparación de ecuaciones diferenciales). Y si la solución saldría de la parábola $t = -\frac{1}{2}x^2$ por comparación obtendríamos que φ_{c_0} se va a menos infinito en un tiempo finito, lo cual es absurdo.

También podemos deducir que existe un único $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $c_0 \notin A$ y $c_0 \notin B$. Supongamos que existe φ_{c_0} y φ_{c_1} soluciones tal que ambas están definidas para todo tiempo pero no entran a la parábola $t = x^2$. Supongamos que $c_1 > c_0$, lo que implica que $\varphi_{c_1}(t) > \varphi_{c_0}(t)$. En ese caso tenemos que:

$$(\varphi_{c_1} - \varphi_{c_0})' = (t - \varphi_{c_1}^2(t)) - (t - \varphi_{c_0}^2(t)) = \varphi_{c_1}^2(t) - \varphi_{c_0}^2(t) > 0.$$

Es decir, que la distancia entre φ_{c_1} y φ_{c_0} va aumentando. Pero esto es absurdo, ya que ambas soluciones tienen que estar entre las curvas $\dot{x} = 0$ y $\ddot{x} = 0$, las cuales se acercan cada vez más. En consecuencia, existe un único c_0 tal que φ_{c_0} está definida para todo tiempo en el futuro y no entra a la parábola.

Queda a cargo del lector, demostrar que las soluciones no están definidas para todo tiempo en el pasado. Observar que para tiempos negativos, se cumple que $t - x^2 < -x^2$. Ahora si, un bosquejo de las soluciones es el la imagen (10).

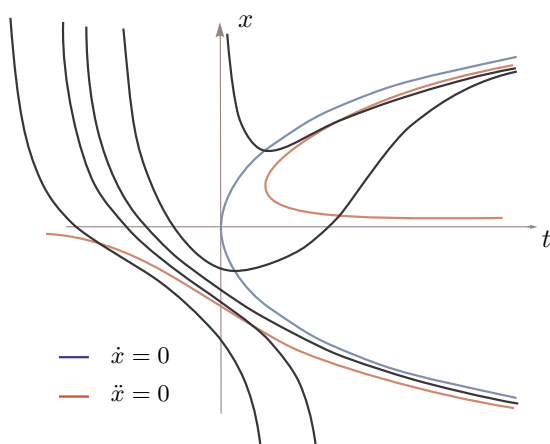


FIGURA 10. Soluciones a $\dot{x} = t - x^2$.

○

Es fácil darse cuenta que por Picard, los gráficos de las soluciones a ecuaciones diferenciales en \mathbb{R} no pueden cortarse. Ya que, en caso de que se corten, si nuestra condición inicial es en ese punto tendríamos dos soluciones posibles. Consideremos la función $\varphi(t) = (t \sin(t), t^2 \sin(t))$, donde su derivada es $\dot{\varphi} = (t \cos(t) + \sin(t), t^2 \cos(t) + 2t \sin(t))$. Por lo tanto φ es solución a:

$$\begin{cases} \dot{x} = t \cos(t) + \sin(t) \\ \dot{y} = t^2 \cos(t) + 2t \sin(t) \end{cases}$$

Este problema se encuentra en las hipótesis de Picard. Observar que $\varphi(\pi) = \varphi(2\pi) = (0, 0)$ y que $\dot{\varphi}(\pi) = (-\pi, -\pi^2)$, $\dot{\varphi}(2\pi) = (2\pi, 4\pi^2)$. Si graficamos la trayectoria de φ en un intervalo de tiempo que contenga a $[\pi, 2\pi]$ veríamos algo parecido a la siguiente imagen.

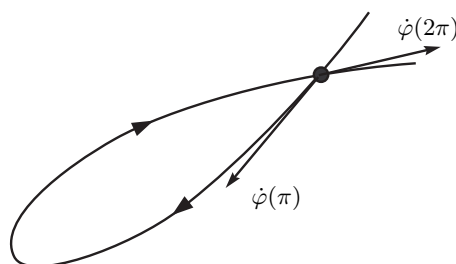


FIGURA 11. Ejemplo de ecuación no autónoma.

La solución da una vuelta y vuelve al punto $(0, 0)$. Uno podría pensar, que si considero como condición inicial $(0, 0)$ hay dos posibles soluciones. Por un lado, podría dar la vuelta y volver a pasar

por el origen y por otro lado irse sin agarrar la vuelta. En consecuencia, no se cumpliría Picard. Esto no es cierto. Recordar que cuando nos referimos a una condición inicial no es solo la posición, la condición inicial contiene posición y tiempo inicial, es decir (t_0, x_0) . Que agarre un camino o el otro depende del tiempo inicial (que $t_0 = \pi$ o $t_0 = 2\pi$). El gráfico de esta función $(t, \varphi(t))$ se encuentra en \mathbb{R}^3 , en realidad ese punto que en la trayectoria se corta, no se corta en el gráfico de la función ya que está evaluado en distintos tiempo. En resumen, Picard no impide que las trayectorias de las soluciones se corten.

Claramente esta ecuación no es autónoma. Además de observarse en la ecuación diferencial, en una ecuación autónoma para una misma posición no podemos tener dos derivadas distintas. Veremos que **en las ecuaciones autónomas no pueden cortarse las trayectorias**. Como ya vimos en el primer capítulo, si tenemos una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ y $\varphi(t)$ una solución con $\varphi(0) = x_0$, las funciones $\varphi_{t_0}(t) = \varphi(t - t_0)$ también serán soluciones a la ecuación con condición inicial $\varphi(t_0) = x_0$, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Sea $\varphi(t)$ una solución a una ecuación diferencial autónoma y \mathcal{C}_1 la curva de su trayectoria. Sabemos que otras infinitas soluciones de la forma $\varphi_{t_0} = \varphi(t - t_0)$ tendrán la misma trayectoria pero recorrida a distinto tiempo. Si existiera otra solución $\phi(t)$ con su correspondiente curva de la trayectoria \mathcal{C}_2 que cortara la curva \mathcal{C}_1 en un tiempo \bar{t} en \bar{x} seguro podemos encontrar otra solución φ_{t_0} que pase por el mismo punto en el mismo tiempo. Por lo tanto la solución con condición inicial (\bar{t}, \bar{x}) no sería única.

Esto último podría generar ciertas confusiones en lo siguiente. Si consideramos el problema lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Las soluciones son de la forma $(x_0 e^t, y_0 e^t)$ y el diagrama de fases como ya se vio anteriormente es un haz de rectas que pasan por el origen. Esto no contradice lo que deducimos recién. En cada recta se encuentran tres tipos de soluciones distintas, la solución estacionaria $(0, 0)$ y dos semirectas que salen desde el origen sin incluirlo. Esto lo podemos ver ya que si $x_0 \neq 0$ o $y_0 \neq 0$ la solución nunca alcanza el origen, solo tiende a él en el menos infinito. Por lo tanto, las trayectorias no se cortan.

0.1.4. Ecuaciones lineales

Ahora que conocemos el teorema de Picard, podremos ver algunas cosas más de las ecuaciones lineales. Empezaremos con el intervalo maximal de las soluciones a ecuaciones diferenciales lineales. Capítulos anteriores obtuvimos las soluciones para cualquier ecuación lineal autónoma y homogénea, las cuales vimos que estaban definidas para todo \mathbb{R} . A continuación estudiaremos el intervalo maximal de cualquier ecuación lineal. Veamos primero un lema que nos ayudará a estudiar el intervalo maximal.

Lema 0.8 (Gronwall).

Sea $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas, no negativas. Si existe $\alpha > 0$ tal que:

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s) ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Entonces:

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Demostración:

Definiremos:

$$w(t) = \alpha + \int_a^t u(s)v(s) ds$$

Por las hipótesis podemos afirmar que la función w cumple que:

$$u(t) \leq w(t) \quad 0 \leq w(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

Si derivamos función w se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= u(t)v(t) \leq w(t)v(t) \Rightarrow \frac{\dot{w}}{w}(t) \leq v(t) \\ \Rightarrow \int_a^t \frac{\dot{w}}{w}(s) ds &\leq \int_a^t v(s) ds. \Rightarrow \text{Log}(w(t)) \leq \text{Log}(w(a)) + \int_a^t v(s) ds = \alpha + \int_a^t v(s) ds \\ \text{Entonces } w(t) &\leq e^{\int_a^t v(s) ds}, \text{ lo que implica que } u(t) \leq e^{\int_a^t v(s) ds}. \end{aligned}$$

□

Teorema 0.9.

Sean $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}$ y $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas. Las soluciones maximales a la ecuación lineal

$$\dot{x} = A(t)x + c(t)$$

están definidas en todo \mathbb{R} .

Demostración:

Trataremos de demostrarlo por el absurdo. Este problema se encuentra en las hipótesis de Picard, lo que nos asegura la existencia y unicidad de las soluciones para cualquier condición inicial. Sea $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución maximal al problema con condición inicial (t_0, x_0) . Supongamos que el intervalo maximal está acotado superiormente. Sea $I = (a, b)$, con $t_0 \in I$ (a puede ser $-\infty$) dicho intervalo. Análogamente se prueba que no puede estar acotado inferiormente. Sabemos que la misma debe verificar que:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s) + c(s) ds \quad \text{para } t_0 \leq t < b. \\ \Rightarrow \|\varphi(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|A(s)\|\|\varphi(s)\| ds + \int_{t_0}^t \|c(s)\| ds \quad \text{para } t_0 \leq t < b. \end{aligned}$$

Dado que A y c son funciones continuas en \mathbb{R} , sabemos que las mismas en el intervalo cerrado $[t_0, b]$ están acotadas, por lo que:

$$\|A(t)\| < M \quad \|c(t)\| < C, \quad \forall t \in [t_0, b].$$

Utilizando esta acotación a la desigualdad anterior:

$$\Rightarrow \|\varphi(t)\| \leq \|x_0\| + C(b-a) + \int_{t_0}^t M\|\varphi(s)\| ds \quad \text{para } t_0 \leq t < b.$$

Llamaremos $\alpha = \|x_0\| + C(b-a)$. Esto solo puede ser nulo si c y x_0 fueran el vector nulo. En este caso, sabemos que la única solución al problema es la solución trivial, la cual está definida para todo \mathbb{R} . Fuera de esa caso, esta acotación nos permitirá utilizar el lema anterior 0.8, utilizando $\|\varphi(t)\| = u(t)$ y $M = v(t)$:

$$\|\varphi(t)\| \leq \alpha + \int_{t_0}^t M\|\varphi(s)\| ds \Rightarrow \|\varphi(t)\| \leq \alpha e^{M|t-t_0|} \leq \alpha e^{M(b-a)}.$$

Suponiendo que el intervalo maximal de las soluciones estaba acotado superiormente, concluimos que la solución está acotada superiormente. Considerando el compacto:

$$K = \left\{ (t, x) : t \in [a, b], \|x\| \leq \alpha e^{M(b-a)} \right\},$$

tenemos que $(t, \varphi(t)) \in K$ para todo $t \in (t_0, b)$. Por el Teorema de escape de compactos esto es absurdo. Por lo tanto $b = +\infty$. Análogamente se prueba que $a = -\infty$. □

Por último, vamos a probar que el conjunto de soluciones de la ecuación $\dot{X} = AX$ es un espacio vectorial.

Proposición 0.1. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $V = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : \dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$. Entonces V es un espacio vectorial de dimensión n .

Demostración. Claramente V es un espacio vectorial. Vamos a probar que V tiene dimensión n . Sean $e_1 = (1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 1)$ la base canónica de \mathbb{R}^n y $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ las soluciones de la ecuación $\dot{X} = AX$ con $\varphi_i(0) = e_i$. Las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ existen por el Teorema de Picard. Vamos a probar que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es una base de V .

Sea $\varphi \in V$. Entonces $\varphi(0) = v \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. Sea $\psi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t)$. Entonces φ y ψ son soluciones de la ecuación

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = v \end{cases}$$

Por lo tanto, por el Teorema de Picard se tiene que $\varphi(t) = \psi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t)$. Lo que muestra que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es un generador de V .

Falta probar que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Sea $\alpha_1 \varphi_1(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t) = 0$. Tomando $t = 0$ se tiene que

$0 = \alpha_1 \varphi_1(0) + \dots + \alpha_n \varphi_n(0) = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$. Como $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, se tiene que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

□

Como corolario de este último resultado tenemos la siguiente proposición:

Corolario 0.1. *Sea la ecuación lineal de segundo orden $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $V = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : a\ddot{\varphi}(t) + b\dot{\varphi}(t) + c\varphi(t) = 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$. Entonces V es un espacio vectorial de dimensión dos.*

Demostración. Lamando $y = \dot{x}$, se tiene que $\dot{y} = \ddot{x}$. Como $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ entonces

$$\dot{y} = \ddot{x} = -\frac{b}{a}\dot{x} - \frac{c}{a}x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}x.$$

Por lo tanto la ecuación $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ se transforma en la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}x \end{cases} \text{ o equivalentemete en } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

No es difícil probar que φ es solución de $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ si y solo si $(\varphi, \dot{\varphi})$ es solución de $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Por la Proposición anterior, se tiene que el conjunto de soluciones de $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un espacio vectorial de dimensión dos, por lo tanto el conjunto de soluciones de $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ es un espacio vectorial de dimensión dos.

□

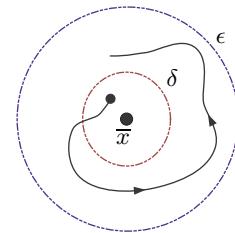
Estabilidad

Ya hemos comentado que quiere decir estabilidad, estabilidad asintótica o inestabilidad, tenemos los conceptos de estos términos. En este capítulo formalizaremos estos conceptos en ecuaciones autónomas (y en particular en las hipótesis de Picard) y veremos algunos métodos para estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio.

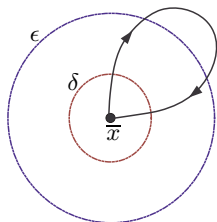
Empecemos con las definiciones formales. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, la ecuación diferencial autónoma $\dot{x} = f(x)$. Se llama autónoma a toda ecuación donde $f(t, x) = f(x)$. Sea $\varphi(t)$ una solución a la ecuación diferencial con condición inicial $\varphi(t_0) = x_0$ y definida para todo $t > t_0$. Un punto $\bar{x} \in \Omega$ es un punto crítico si $f(\bar{x}) = 0$. Observar que $x(t) = \bar{x}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial.

Decimos que el punto crítico es:

- **estable** si
 dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ / si $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon$, $\forall t > t_0$.
- **asintóticamente estable** si:
 - es estable y además
 - $\exists \delta' > 0$ / $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta' \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \bar{x}$.
- **inestable** si no es estable.



Razonemos juntos que es lo que implican estas definiciones. En primer lugar, tenemos que es estable si para cualquier ϵ podemos encontrar un δ tal que si la condición inicial de la solución empieza a una distancia menor que δ del punto crítico, la misma se mantendrá a una distancia menor a ϵ del punto crítico de ahí en adelante. Esto debe pasar con todas las soluciones con condición inicial a una distancia menor que δ . En particular todas las soluciones que están a menos de δ , su intervalo maximal no está acotado superiormente. Con que exista una solución que no se mantenga en la bola de radio ϵ para ningún δ , alcanza para decir que es inestable.



Luego, asintóticamente estable implica que además de ser estable las soluciones que empiezan en un entorno cercano al punto de equilibrio tiendan al mismo. Podría parecer innecesaria la condición de estabilidad, pero veamos como no lo es. Si consideramos una solución que tiene una trayectoria como la de la figura siguiente, tenemos que se cumple la segunda condición de la estabilidad asintótica. Sin embargo el punto de equilibrio no es estable, ya que dado el $\epsilon > 0$ de la figura no existe ningún $\delta > 0$ tal que si la condición inicial se encuentra a menos de δ del punto crítico la solución no salga de la bola $B_{\bar{x}, \epsilon}$.

Estudiar la estabilidad de un sistema es algo muy importante en muchas aplicaciones dado que nunca sabemos con exactitud las condiciones iniciales. Si tenemos un punto de equilibrio estable, no saber con exactitud la posición inicial o iniciar en posiciones parecidas podría no cambiar significativamente el comportamiento de las soluciones. Sin embargo en un punto de equilibrio inestable esto sí podría suceder.

Con estas definiciones, podemos repasar los diagramas de fases vistos en las ecuaciones lineales autónomas en \mathbb{R}^2 y confirmar la estabilidad de los puntos de equilibrio en esos casos. Observar que cuando la parte real de todos los valores propios era negativa, el origen era un punto de equilibrio asintóticamente estable. Si un valor propio tenía parte real positiva, teníamos al menos una solución que se alejaba del punto de equilibrio, esto implica que el origen no es estable y por lo tanto es inestable.

Cuando unos de los valores propios tiene parte real nula y los demás parte real negativa pueden ocurrir distintas cosas. En el caso de los valores propios imaginarios puros, donde las trayectorias son elipses alrededor del origen es claro que el origen es un punto de equilibrio estable. También lo son estables los puntos de equilibrio de una matriz diagonalizable con un valor propio nulo y el otro negativo. En este caso se obtenía una recta de puntos de equilibrio y las demás soluciones eran otras rectas que tendían a la recta de puntos de equilibrio. En consecuencia, si tomo una bola alrededor de \bar{x} un punto de equilibrio de la recta, la bola siempre contendrá otros puntos de equilibrio. Esas soluciones de equilibrio no tienden a \bar{x} y por lo tanto los puntos no pueden ser asintóticamente estables.

En resumen, **si los puntos de equilibrio no están aislados no pueden ser asintóticamente estables**. Cuando teníamos una matriz no diagonalizable con valor propio cero, también obteníamos una recta de puntos de equilibrio pero en este caso los mismos eran inestables.

Proposición 0.1.

Sea la ecuación $\dot{x} = f(x)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$ el conjunto de los puntos críticos de la ecuación. Si $\bar{x} \in \mathcal{R}$ es un punto de acumulación de \mathcal{R} (no es aislado) entonces no es asintóticamente estable.

La demostración queda a cargo del lector. □

En el curso nos concentraremos en estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio en ecuaciones autónomas y en las hipótesis de Picard. Veremos distintos teoremas que nos permitirán deducir la estabilidad de un punto de equilibrio. El primer teorema que veremos es el teorema de Liapunov.

0.1. Teorema del Liapunov

Daremos la idea de Liapunov con un ejemplo. Consideremos una ecuación diferencial en \mathbb{R}^2 que tiende al origen como punto de equilibrio asintóticamente estable, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una solución a la ecuación distinta a la de equilibrio que tiende al $(0,0)$ con condición inicial (t_0, x_0) y la función $V(x, y) = x^2 + y^2$. En la siguiente imagen vemos la trayectoria de la solución φ y también la proyección de la misma en el paraboloides ($V(\varphi(t))$).

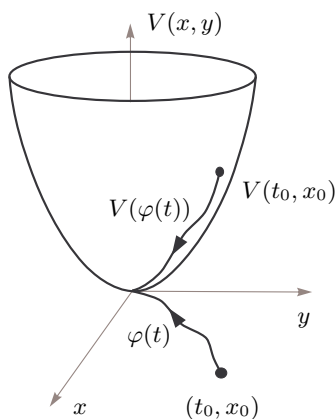


FIGURA 1. Teorema de Liapunov

Dado que $V(x, y)$ tiene un mínimo en el origen y $\varphi(t)$ tiende al mismo, vemos que $V(\varphi(t))$ va decreciendo, lo que implica que $\dot{V}(\varphi(t)) \leq 0$. Esto no solo sucede en este caso. Si tenemos una ecuación diferencial con \bar{x} un punto de equilibrio asintóticamente estable y una función $V(x, y)$ con un mínimo estricto en \bar{x} . Si tomamos una solución $\varphi(t)$ con condición inicial lo suficientemente cerca, se cumplirá que $V(\varphi(t))$ deberá decrecer y por lo tanto $\dot{V}(\varphi(t)) \leq 0$.

En este último párrafo partimos de la base que sabíamos la estabilidad del punto de equilibrio, pero podemos pensarlo al revés. Dado un punto de equilibrio \bar{x} , una función V y $\epsilon > 0$, si $\dot{V} \leq 0$ podremos afirmar que empezando en una condición inicial lo suficientemente cerca las soluciones permanecerán en $B_{\bar{x}, \epsilon}$ ya que en caso contrario, $V(\varphi(t))$ debería aumentar.

0.1.1. Derivada de una función a lo largo de las trayectorias

Como hemos comentado en el primer capítulo, dado un problema $\dot{x} = f(x)$ la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de velocidades. Dada una posición nos devuelve la velocidad y dirección hacia donde se mueven las soluciones.

Sea $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y $\varphi(t)$ una solución a la ecuación diferencial mencionada arriba, podemos definir la composición de ambas funciones:

$$v(t) = V(\varphi(t)) \Rightarrow \dot{v}(t) = \nabla V(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = \nabla V(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t))$$

En este último producto nos estamos refiriendo al producto escalar. Vemos que \dot{v} depende de la posición de la solución ($\varphi(t)$) y no explícitamente del tiempo. Nos referiremos a \dot{V} como la derivada a lo largo de las trayectorias la cual será definida como:

$$\dot{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x).$$

Como mencionamos arriba, si V tiene un mínimo estricto en el punto de equilibrio y el mismo es asintóticamente estable, \dot{V} deberá ser negativo en un entorno del punto de equilibrio, ya que la composición $V(\varphi(t))$ deberá tomar valores cada vez más chicos. Esto también lo podemos pensar de la siguiente forma. Una posible V con un mínimo en \bar{x} podría tener unas curvas de nivel como muestra la figura 2. Se recuerda que el vector gradiente era perpendicular a las curvas de nivel y apuntaba en el sentido creciente de las mismas.

Que \dot{V} sea negativo, implica que el ángulo formado entre el gradiente y el vector $f(x)$ es mayor o igual a 90° . De esta forma, la solución tiene una velocidad que la dirige hacia las curvas de nivel más chicas, acercándose al punto de equilibrio. En el caso particular donde \dot{V} sea nulo, implicaría que f es perpendicular a la curva de nivel. Si esto sucediera para todo x , es decir que \dot{V} sea la función nula, implicaría que las soluciones se mantengan en las curvas de nivel de V . Esto es coherente con lo mencionado anteriormente, ya que si $V(\varphi(t)) = 0$, $V(\varphi(t))$ es una función constante y por lo tanto la solución deberá permanecer en las curvas de nivel de V . En este caso particular donde \dot{V} es la función nula se dice que $V(x)$ es una **preintegral** de la ecuación diferencial. Conceptualmente, la preintegral es una magnitud que se conserva a lo largo del tiempo para cualquier solución.

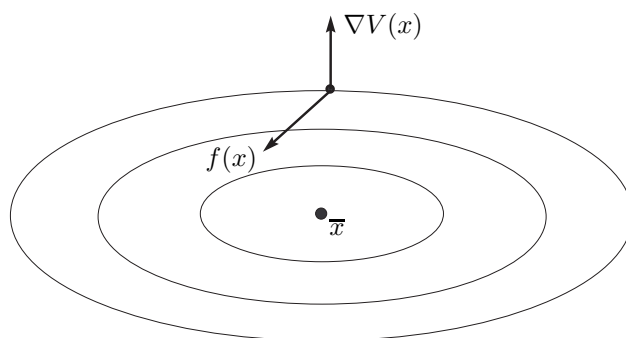


FIGURA 2. Idea de Liapunov con el gradiente de $V(x)$.

Observación 0.1. Como las funciones f que vamos a considerar no dependen de la variable t , la hipótesis continua y localmente de Lipschitz según la variable espacial se cambia por "localmente de Lipschitz según la variable espacial". Localmente de Lipschitz según la variable espacial implica la continuidad de f .

Teorema 0.1 (Liapunov 1).

Sea \bar{x} un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz según la variable espacial y $U \subset \Omega$ un entorno de \bar{x} . Si existe $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que:

- V tiene un mínimo estricto en \bar{x} .
- $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in U - \{\bar{x}\}$.

Entonces \bar{x} es estable.

Demostración:

Para facilitar la demostración empecemos considerando el caso donde $V(\bar{x}) = 0$. Queremos probar que:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 / \text{ si } \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t > t_0$$

siendo $\varphi(t)$ la solución a la ecuación con condición inicial $\varphi(t_0) = x_0$.

Dado $\epsilon > 0$ tal que $B_{\bar{x}, \epsilon} \subset U$, llamaremos $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| = \epsilon\}$. Dado que S es un conjunto compacto y V una función continua existe:

$$m = \min\{V(x) : x \in S\} > 0.$$

m es mayor que cero ya que V tiene un mínimo estricto en $x = \bar{x}$. Por otro lado, como V es continua y $V(\bar{x}) = 0$ por la definición de continuidad obtenemos que:

$$\exists \delta > 0 / \text{ si } \|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow V(x) < \frac{m}{2}.$$

Consideraremos $\varphi(t)$ una solución con condición inicial $\varphi(t_0) = x_0$ tal que $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ con intervalo maximal $I(t_0, x_0)$ y la función $v(t) = V(\varphi(t))$. Observar que $\dot{v}(t) = \dot{V}(\varphi(t)) \leq 0$ por lo que la función $v(t)$ será decreciente.

$$(0.1) \quad v(t) \leq v(t_0) = V(x_0) < \frac{m}{2}, \quad \forall t \in I(t_0, x_0), t > t_0.$$

Por lo tanto, si suponemos que la solución en algún momento se escapa de la bola de radio ϵ tendrá que atravesar el conjunto S . Si definimos el tiempo $t_1 \in I(t_0, x_0)$, $t_1 > t_0$ tal que:

$$\|\varphi(t_1) - \bar{x}\| = \epsilon$$

como el mínimo V obtenido en S es m , tendríamos que:

$$v(t_1) = V(\varphi(t_1)) \geq m.$$

Esto es absurdo por lo obtenido en (0.1). Por lo tanto, dado un $\epsilon > 0$ encontramos un δ (por la continuidad) tal que si $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$:

$$\|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon \quad \forall t \in I(t_0, x_0), t > t_0.$$

Haría falta demostrar que esta solución está definida para todo $t > t_0$, es decir que el intervalo maximal $I(t_0, x_0)$ no está acotado superiormente. Esto último lo deducimos rápidamente con escape de compactos. Dado que las soluciones están acotadas espacialmente en el futuro por la bola $B_{\bar{x}, \epsilon}$, se concluye que la solución deberá estar definida para todo $t > t_0$.

Por lo tanto ha quedado demostrado el teorema para el caso donde $V(\bar{x}) = 0$. Si $V(\bar{x}) = \alpha \neq 0$, si consideramos la función $\tilde{V}(x) = V(x) - \alpha$ caemos en el caso anterior, permitiéndonos demostrar el teorema también para este caso. \square

Teorema 0.2 (Liapunov 2).

Sea \bar{x} un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz según la variable espacial y $U \subset \Omega$ un entorno de \bar{x} . Si existe $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que:

- V tiene un mínimo estricto en \bar{x} .
- $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \in U - \{\bar{x}\}$.

Entonces \bar{x} es asintóticamente estable.

Demostración:

Por el teorema de Liapunov 1 ya podemos afirmar que \bar{x} es estable. Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ tal que $B_{\bar{x}, \epsilon} \subset U$ sabemos que:

$$\exists \delta(\epsilon) > 0 / \text{ si } \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \quad \forall t > t_0$$

siendo $\varphi(t)$ la solución a la ecuación con $\varphi(t_0) = x_0$. Falta fijarnos que:

$$\exists \delta' > 0 / \|x_0 - \bar{x}\| < \delta' \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \bar{x}.$$

Nuevamente para simplificar supondremos que $V(\bar{x}) = 0$.

Haremos la demostración en dos partes. Primero vamos a demostrar que $v(t) = V(\varphi(t))$ tiende a $V(\bar{x}) = 0$. Una vez deducido esto último, veremos que eso implica que $\varphi(t)$ tiende a \bar{x} .

Dado que $\varphi(t) \in B_{\bar{x}, \epsilon} \subset U$ y que por hipótesis se tiene que

$$\dot{v}(t) = \dot{V}(\varphi(t)) < 0,$$

entonces $v(t)$ será estrictamente decreciente. Como la función $V(x)$ tiene un mínimo estricto en \bar{x} sabemos que:

$$V(\bar{x}) = 0 \leq v(t) < v(t_0) = V(x_0), \quad \forall t > t_0.$$

Por ser una función decreciente y acotada inferiormente $v(t)$ deberá tener una asíntota horizontal (figura (3.a)). O sea existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \alpha \geq 0.$$

Esto implica que:

$$(0.2) \quad \alpha \leq v(t) < V(x_0), \quad \forall t > t_0.$$

Supondremos que $\alpha > 0$. Por la continuidad de V .

$$\exists \gamma > 0 \quad / \quad \|x - \bar{x}\| < \gamma \Rightarrow V(x) < \alpha.$$

Como $V(\varphi(t)) \geq \alpha$ para todo $t > t_0$ se cumple que

$$\gamma < \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \quad \forall t > t_0.$$

Sea $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma \leq \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon\}$, el anillo pintado en la figura (3.b). Consideraremos:

$$-r = \max_{x \in K} \{\dot{V}(x)\} < 0 \Rightarrow \dot{v}(t) = \dot{V}(\varphi(t)) \leq -r, \quad \forall t > t_0.$$

$$v(t) = V(x_0) + \int_{t_0}^t \dot{v}(s) ds \leq V(x_0) + \int_{t_0}^t -r ds = V(x_0) - r(t - t_0) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$$

esto último es absurdo ya que en la inecuación (0.2) habíamos concluido que $v(t) \geq \alpha > 0$. Al suponer $\alpha > 0$ llegamos a un absurdo, por lo que $\alpha = 0$.

Hemos demostrado que si $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ la función $v(t) = V(\varphi(t))$ tiende a $V(\bar{x}) = 0$. Falta probar que esto implica que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \bar{x}$. Recordamos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \bar{x} \Leftrightarrow \text{Dado } \epsilon' > 0, \exists T > 0 / \text{ si } t > T \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon'.$$

Sea $0 < \epsilon' < \epsilon$, consideremos el conjunto:

$$K' = \{x \in \mathbb{R}^n : \epsilon' \leq \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon\}$$

$$m = \min_{x \in K'} \{V(x)\} > 0.$$

Como $v(t)$ tiende a cero, podemos afirmar que existe $T > t_0$ tal que:

$$v(t) < \frac{m}{2}, \quad \forall t > T \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon' \quad \forall t > T.$$

Tomando $\delta' = \delta$, vemos que si $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta'$ por la definición del límite, esto último implica que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \bar{x}.$$

□

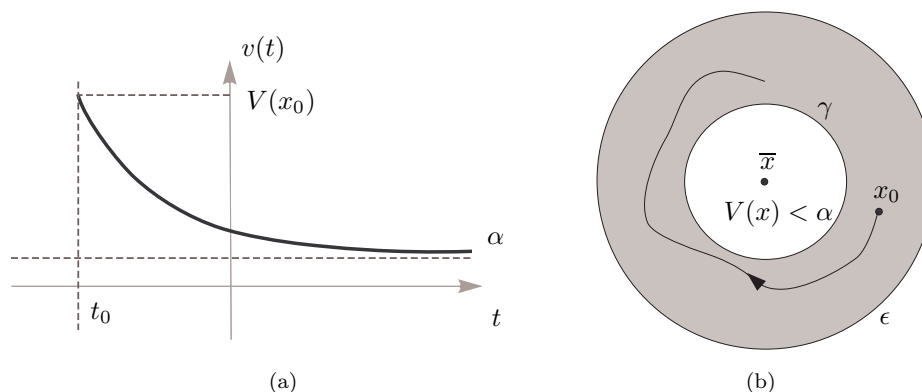


FIGURA 3. Demostración de Liapunov 2

Estos dos teoremas nos servirán para afirmar que un punto de equilibrio es estable o asintóticamente estable. Sin embargo, no hemos visto ningún teorema que nos asegure la inestabilidad. A continuación veremos el teorema de Cetaev que nos afirma de la inestabilidad de un punto de equilibrio, la idea es similar a la de Liapunov.

Si ahora tuviéramos una función V que tenga un máximo en el punto de equilibrio y $\dot{V} < 0$, razonando de forma análoga a los teoremas anteriores podríamos deducir que la solución se aleja del punto de equilibrio y por lo tanto es inestable. Sin embargo, dado que para la inestabilidad alcanza con que alguna solución se aleje, no es necesario pedir que la V tenga un máximo.

Teorema 0.3 (Cetaev).

Sea \bar{x} un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz según la variable espacial y $U \subset \Omega$ un entorno de \bar{x} . Si existe $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que:

- Existe una sucesión $x_n \subset U - \{\bar{x}\}$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \bar{x}$ y $V(x_n) \leq V(\bar{x})$.
- $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in U - \{\bar{x}\}$.

Entonces \bar{x} es inestable.

Demostración:

Al igual que en los teoremas de Liapunov, supondremos que $V(\bar{x}) = 0$. Trataremos de demostrarlo por el absurdo. Supongamos que \bar{x} es estable. En este caso, dado $\epsilon > 0$ tal que $B_{\bar{x}, \epsilon} \subset U$:

$$\exists \delta > 0 / \text{ si } \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon.$$

Como x_n converge a \bar{x} , sabemos que:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \text{ si } n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - \bar{x}\| < \delta.$$

Si fijamos un $m > n_0$, podemos deducir por la definición de estabilidad que la solución a la ecuación diferencial con condición inicial $\varphi(t_0) = x_m$ verifica que:

$$\|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t > t_0.$$

Por otro lado, si consideramos la función $v(t) = V(\varphi(t))$, dado que $\dot{V} < 0$ y $V(x_m) \leq 0$, se cumple que $v(t)$ es una función estrictamente decreciente. Esto nos permite afirmar lo siguiente:

$$\exists M > 0, T > t_0 / V(\varphi(t)) < -M, \forall t > T.$$

y por la continuidad de V :

$$\exists 0 < \delta' < \epsilon / \text{ si } \|x - \bar{x}\| < \delta' \Rightarrow |V(x)| < M.$$

$$\Rightarrow \delta' < \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \forall t > T.$$

Donde la cota de ϵ se debe a que supusimos que el punto de equilibrio era estable. Ahora razonaremos de forma análoga al segundo teorema del Liapunov. Consideremos el anillo $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \delta' \leq \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon\}$, como es un compacto y las funciones V y \dot{V} son continua podemos definir:

$$m = \min_{x \in A} \{V(x)\} \Rightarrow v(t) \geq m, \forall t > t_0$$

$$-r = \max_{x \in A} \{\dot{V}(x)\} < 0.$$

Entonces:

$$v(t) = V(\varphi(T)) + \int_T^t \dot{v}(s) ds \leq V(\varphi(T)) - r(t - T) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Esto es absurdo ya que habíamos concluido que $v(t) \geq m$. Por lo tanto, nuestra suposición no se cumple, es decir \bar{x} no puede ser estable. □

Proposición 0.2.

Sea \bar{x} un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$ con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz según la variable espacial. Sea $U \subset \Omega$ un entorno de \bar{x} y $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que:

- V tiene un mínimo estricto en \bar{x} .
- $\dot{V}(x) > 0, \forall x \in U - \{\bar{x}\}$.

Entonces \bar{x} es inestable.

Demostración:

Si consideramos $U(x) = -V(x)$, $U(x)$ se encuentra en las hipótesis del teorema de Cetaev y por lo tanto \bar{x} es inestable. \square

Luego de estos teoremas, deben quedar dudas de que función V considerarse. Sea (x_0, y_0) el punto de equilibrio, necesitaríamos una función que tenga un mínimo estricto en ese punto para poder usar los teoremas del Liapunov. Una posible función es $V(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ o más genéricamente $V(x, y) = a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2$ con $a, b > 0$. Para el teorema de Cetaev, necesitaríamos una función que no tenga un mínimo estricto. Las funciones más comunes a considerarse para ambos teoremas son las formas cuadrática $V(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Para utilizar estos teoremas también necesitamos una condición para $\dot{V} = \nabla V(x) \cdot f(x)$, esto ya depende de la ecuación diferencial.

Ejemplo 0.1.

Consideremos la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = -x^3.$$

Esta ecuación tiene un único punto de equilibrio $x = 0$ y estudiando el signo de las derivadas o resolviendo la ecuación se puede ver rápidamente que el mismo es asintóticamente estable. Si quisiéramos utilizar el teorema de Liapunov para demostrarlo, podríamos considerarnos la función:

$$V(x) = x^2.$$

Esta función es de clase C^1 , tiene un mínimo en el punto de equilibrio y si nos fijamos en la derivada a lo largo de las trayectorias tenemos que:

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = -2x^4 < 0, \forall x \neq 0.$$

Dado que la función $f(t, x) = -x^3$ se encuentra en las hipótesis de Picard y la función V definida se encuentra en las hipótesis del teorema de Liapunov 2, podemos afirmar que el 0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable. \circ

Ejemplo 0.2 (Preintegral).

Como mencionamos previamente, una preintegral es una función que cumple $\dot{V} = 0$, lo que implica que $V(\varphi(t))$ es constante. Esto nos permite saber que las soluciones a la ecuación están incluidas en las curvas de nivel de V con lo que podemos realizar el diagrama de fases.

Consideremos el problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x - y) \\ \dot{y} = -\frac{x}{2}(x - y) \end{cases}$$

Obtenemos rápidamente que este problema tiene infinitos puntos de equilibrio de la forma $x = y$. Para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio trataremos de obtener el diagrama de fases a través de una preintegral. Supongamos que este problema tiene una preintegral de la forma:

$$\begin{aligned} H(x, y) = F(x) + G(y) &\Rightarrow F'(x)\dot{x} + G'(y)\dot{y} = 0 \Rightarrow F'(x)y(x - y) = G'(y)\frac{x}{2}(x - y) \\ &\Rightarrow \frac{F'(x)}{x} = \frac{G'(y)}{2y} \end{aligned}$$

dado que tenemos una igualdad donde de un lado tenemos una función que depende de x y del otro lado una función que depende de y ambas deberán ser constantes (si derivamos respecto a x a ambos lados la derivada sería nula ya que la función de la derecha no depende de x).

$$\Rightarrow \frac{F'(x)}{x} = \frac{G'(y)}{2y} = A \Rightarrow F(x) = \frac{Ax^2}{2} \quad G(y) = Ay^2$$

Si consideramos $A = 1$, obtenemos la preintegral:

$$H(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2$$

Las curvas de nivel de esta función son elipses centradas en cero.

$$H(x, y) = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 = C \Rightarrow \frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{C} = 1$$

Sabiendo que las soluciones se mantendrán en las elipses y con el signos de las derivadas, podemos realizar el diagrama de fases de la figura (4). Observar que en cada elipse encontramos 4 tipos de soluciones distintas, dos soluciones de equilibrio y 2 dos a cada lado de las soluciones de equilibrio.

Con el diagrama de fases, podemos obtener que los puntos de equilibrio en el semiplano superior son inestables, mientras que los del plano inferior incluyendo el origen son estables. Recordar que como los puntos de equilibrio no son aislados, no pueden ser asintóticamente estables.

En particular, la función $H(x, y)$ tiene un mínimo estricto en $(0, 0)$ y $\dot{H} \leq 0$, por lo que está en las hipótesis de Liapunov 1 y podemos deducir que es un punto de equilibrio estable también por este camino. La función H no tiene un mínimo estricto en los demás puntos de equilibrio, por lo que no sirve esta función para usar Liapunov en los demás puntos. \circ

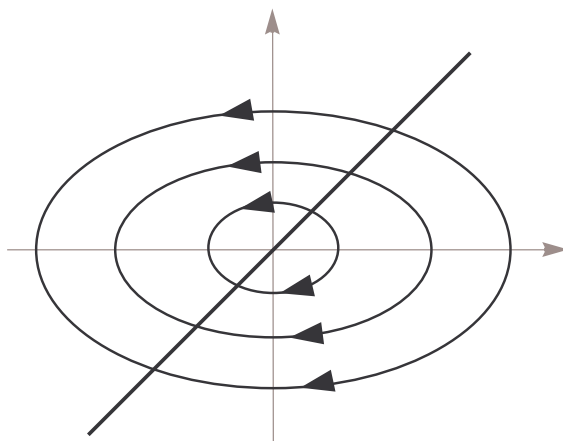


FIGURA 4. Diagrama de fases del ejemplo 0.2.

0.2. Linealización

Un método común y conocido al enfrentarse con una función no lineal es aproximarla por una función lineal. Hasta ahora, no hemos hablado de que sucede con las soluciones de una ecuación diferencial en comparación con la ecuación diferencial linealizada. Ahora, comparemos ambos problemas para poder deducir la estabilidad de los puntos de los equilibrio.

Como ya sabemos, dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

donde las funciones $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 , se cumple que:

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + r(x^2)$$

donde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $r(x^2) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ representa el resto de orden 2 y $J_f(\bar{x})$ es el Jacobiano de la función evaluado en el punto \bar{x} . Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x) & \frac{df_1}{dx_2}(x) & \dots & \frac{df_1}{dx_n}(x) \\ \frac{df_2}{dx_1}(x) & \frac{df_2}{dx_2}(x) & \dots & \frac{df_2}{dx_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_1}(x) & \frac{df_m}{dx_2}(x) & \dots & \frac{df_m}{dx_n}(x) \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

La aproximación:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

olvidándonos del resto, es muy buena en un entorno de \bar{x} .

El siguiente teorema que nos ayudará a determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio no será demostrado. Sea \bar{x} un punto de equilibrio ($f(\bar{x}) = 0$), la idea será comparar el problema $\dot{x} = f(x)$ con el problema linealizado, es decir:

$$\dot{x} = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) = J_f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Este teorema no será demostrado. El mismo determina que en un entorno al punto de equilibrio, las soluciones a la ecuación diferencial original serán muy similares a la de la ecuación diferencial, siempre y cuando las partes reales de los valores propios de $J_f(\bar{x})$ sean diferentes de cero.

Esta restricción con respecto a la parte real del valor propio se debe a lo siguiente. Si bien nuestro problema original tiene una pequeña perturbación, la misma puede ser tan chica como queramos achicando el entorno alrededor del punto de equilibrio. Por lo tanto, si estamos lo suficientemente cerca y las soluciones en el sistema lineal se acercan a \bar{x} (VAP's negativos), también lo harán en el sistema original. Es análogo si las soluciones se están alejando (VAP's positivos). Sin embargo, si consideramos un problema que al linealizarlo obtenemos una ecuación lineal con valores propios imaginarios puros, el diagrama de fase que se obtiene serán circunferencias. Ahora si, por más mínima que sea la perturbación, las circunferencias podrían abrirse, haciendo el punto asintóticamente estable o inestable. Es por esta razón, el sistema linealizado no nos dará información en este caso acerca de la estabilidad del punto de equilibrio del problema original.

En otras palabras, cuando el sistema lineal tiene un valor propio positivo (negativo) indica que las soluciones tienen una dirección en las cuales se alejan (acercan) del punto de equilibrio y esto se mantendrá con un error lo suficientemente chico. Sin embargo, cuando el valor propio es cero que indica una dirección en las cuales las soluciones no se acercan ni se alejan, un pequeño error puede alterar esto.

Teorema de Grossman-Hartman.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y \bar{x} un punto de equilibrio de la ecuación $\dot{x} = f(x)$. Entonces:

1. Si todos los valores propios de la matriz $J_f(\bar{x})$ tienen parte real negativa \bar{x} es asintóticamente estable.
2. Si hay un valor propio de $J_f(\bar{x})$ con parte real positiva \bar{x} es inestable.

Ejemplo 0.3 (Linealización con valores propios imaginarios puros).

La idea de este ejemplo es convencerlos de que el teorema de Hartman no sirve cuando la linealización tiene valores propios con parte real cero. Veremos 3 ecuaciones diferenciales con una linealización con valores propios imaginarios puros y para cada caso estudiaremos la estabilidad del punto de equilibrio.

Sean los problemas:

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + 1) \\ \dot{y} = -x(x^2 + 1) \end{cases}$$

Estos tres problemas tiene como único punto de equilibrio el origen. Si linealizamos estos problemas obtenemos:

$$J_1(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 1 \\ -1 & -3y^2 \end{pmatrix} \quad J_2(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ -1 & 3y^2 \end{pmatrix} \quad J_3(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + 1 \\ -3x^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_i(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dado que el Jacobiano para cualquiera de estas ecuaciones tienen todos los valores propios con parte real nula no nos sirve el Teorema de Grossman-Hartman. Trataremos de estudiar la estabilidad por otros métodos.

Problema 1:

De la ecuación podemos obtener que las derivadas se anulan en las curvas:

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow y = x^3$$

$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow x = -y^3$$

Estudiando el signo de las derivadas en el plano, podemos ver donde crece o decrecen ambas componentes. Esto está indicado con las flechas de la figura (5.a). Estos signos no nos permiten deducir si las soluciones deben acercarse o no al origen.

Trataremos de deducir la estabilidad por los teoremas del Liapunov. Una típica función a considerar es la siguiente:

$$V(x, y) = ax^2 + by^2$$

Esta función sabemos que tiene un mínimo escrito en el punto de equilibrio si consideramos $a, b > 0$. Observar que no sirve considerar a o b nulos, ya que en ese caso no habría un mínimo estricto. Si estudiamos \dot{V} :

$$\dot{V}(x, y) = 2(ax\dot{x} + by\dot{y}) = 2(axy - ax^4 - bxy - by^4) \xrightarrow{a=b=1} \dot{V} = -2(x^4 + y^4) < 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$$

Donde a y b se escogieron convenientemente para estar en las hipótesis de Liapunov. Utilizando la función $V(x, y) = x^2 + y^2$ podemos deducir que el origen es asintóticamente estable por el teorema de Liapunov 2 (teorema 0.2). Un posible diagrama de fases para este problema es como muestra la figura (5.a).

Problema 2:

Estudiando el signo de la derivada:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\Leftrightarrow y = -x^3 \\ \dot{y} = 0 &\Leftrightarrow x = y^3 \end{aligned}$$

y las zonas donde las derivadas sean positivas o negativas se representan por las flechas de la imagen (5.b). Nuevamente, estos signos no nos permiten definir la estabilidad del origen. Si quisiéramos usar Liapunov y utilizamos una función $V(x, y) = ax^2 + by^2$ como en el caso anterior:

$$\dot{V} = 2(ax\dot{x} + by\dot{y}) = 2(axy + ax^4 - bxy + by^4) \xrightarrow{a=b=1} \dot{V} = 2(x^4 + y^4) > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0).$$

Por la proposición 0.2 deducida del teorema de Cetaev podemos deducir que el origen es inestable. En este caso, un posible diagrama de fases es el representado en la figura (5.b).

Problema 3:

En este último problema:

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \\ \dot{y} = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Nuevamente como los signos de las derivadas no nos alcanzan para determinar la estabilidad, trataremos de estudiar la ecuación por Liapunov. Utilizando la misma función V que en los casos anteriores obtenemos:

$$\dot{V} = 2(ax\dot{x} + by\dot{y}) = 2(axy(x^2 + 1) - bxy(x^2 + 1)) \xrightarrow{a=b=1} \dot{V} = 0$$

Esta función V no solo se encuentra en las hipótesis de Liapunov 1 (teorema 0.1) y por ende podemos deducir que el origen es estable si no que a su vez es una preintegral a nuestro problema. Como las soluciones deben estar contenidas en las curvas de nivel de la preintegral ($V(x, y) = x^2 + y^2$), las soluciones deberán estar contenidas en circunferencias. El diagrama de fases queda como indica la figura (5.c).

Tener en cuenta que si encontramos una función que se encuentra en las hipótesis de Liapunov 1 y no en las de Liapunov 2 (nos permite afirmar estabilidad pero no estabilidad asintótica), no significa que el punto no sea asintóticamente estable. Así como que no encontremos una función V que nos permita utilizar cualquiera de los dos teoremas del Liapunov no significa que el punto sea inestable. En este problema, si bien caímos en las hipótesis de Liapunov 1 lo que en principio no descarta la opción de que el origen sea un punto asintóticamente estable podemos afirmar que no lo es por el diagrama de fases del problema.

Con este ejemplo se ve claramente que el teorema de Hartman no es válido para estos casos, ya que dados 3 ecuaciones diferenciales con el mismo problema linealizado, obtuvimos que el punto de equilibrio podía ser estable, asintóticamente estable o inestable. \circ

Ejemplo 0.4 (Péndulo sin rozamiento).

Estudiaremos el problema del péndulo simple sin rozamiento. Este problema consiste en un cuerpo de masa m enganchado a una varilla sin masa e inextensible, donde las únicas fuerzas que actúan son el peso y la tensión. Al desprestigiar el rozamiento, podemos decir que la energía se conserva, que implica lo siguiente:

$$E_{\text{potencial}} + E_{\text{cinética}} = -mgR\cos\theta + \frac{m(R\dot{\theta})^2}{2} = E_0$$

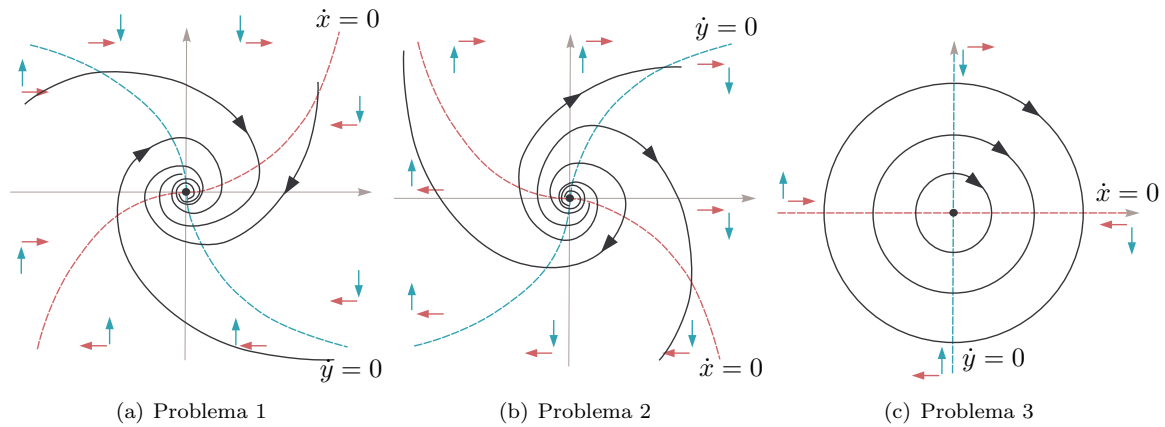


FIGURA 5. Diagrama de fases del ejemplo 0.3

donde se utilizó que la velocidad de la masa será $v = R\dot{\theta}$ y se definió E_0 como la energía inicial. Si derivamos esta ecuación respecto al tiempo para deshacernos de la dependencia de la condición inicial se obtiene que:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\text{sen}(\theta).$$

A esta igualdad se le llama ecuación de movimiento del péndulo. Podríamos haber llegado a la misma ecuación utilizando las leyes de Newton. Si suponemos $R = g$ (para simplificar) y realizamos el cambio de variable $x = \theta$ e $y = \dot{\theta}$, obtenemos:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\text{sen}(x) \end{cases}$$

En este caso, x representa el ángulo e y representa la velocidad angular. Este último problema tiene infinitos puntos de equilibrio de la forma $(n\pi, 0)$ con $n \in \mathbb{N}$, lo que representa los puntos con velocidad cero ($\dot{\theta} = 0$) y en posición vertical. Estudiaremos la estabilidad de estos puntos.

Liapunov con la función $V(x, y) = (x - k\pi)^2 + y^2$

Empecemos tratando de estudiar la estabilidad con el teorema de Liapunov utilizando la función $V(x, y) = (x - k\pi)^2 + y^2$ ¹. Dado un punto de equilibrio $(k\pi, 0)$ esta función V tiene un mínimo estricto en el punto de equilibrio. Sin embargo, esta función no está dentro de las hipótesis de los teoremas.

$$\dot{V} = 2((x - k\pi)x\dot{x} + y\dot{y}) = 2y(x - k\pi - \text{sen}(x)).$$

Para estar en las hipótesis de Liapunov nos haría falta que \dot{V} sea siempre negativo en un entorno del punto o siempre positivo para que nos permita utilizar la proposición de Cetaev (proposición 0.2). Sin embargo, no existe ningún entorno donde esto ocurra. Para estudiar el signo de $x - k\pi - \text{sen}(x)$ se pueden graficar la recta $f(x) = x - k\pi$ y la función $g(x) = \text{sen}(x)$ y comparar donde una es mayor que la otra.

Por ejemplo si tomamos $k = 0$, se tiene que $x - \text{sen}(x) > 0$ si $x > 0$ y $x - \text{sen}(x) < 0$ si $x < 0$. Dado un entorno alrededor del punto de equilibrio $(0, 0)$ ($k = 0$), siempre podremos encontrar un punto (x_1, y_1) con $x_1, y_1 > 0$ y por lo tanto $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$ y otro punto (x_1, y_2) con $y_2 < 0$ donde $\dot{V}(x_1, y_2) < 0$. Se puede razonar de forma análoga para los otros valores de k . Esta función V no nos permite deducir nada acerca de la estabilidad de los puntos.

Preintegral

Buscaremos otra función para utilizar Liapunov, que nos dará mucha más información que la estabilidad. Se recuerda que la preintegral, era una magnitud que se conserva a lo largo de las trayectorias. Para este problema particular, sabemos que la energía se conserva para cualquiera sea la condición inicial, justamente partimos de acá para obtener la ecuación diferencial. Si consideramos la función

¹Se puede realizar el mismo razonamiento con la función $V(x, y) = a(x - 2k\pi)^2 + by^2$ pero para simplificar la explicación se utilizó $a = b = 1$.

$H(x, y)$ como la energía por unidad de masa, esta función es una preintegral al problema.

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos(x) \Rightarrow \dot{H}(x, y) = y\dot{y} + \operatorname{sen}(x)\dot{x} = 0$$

Observar que esta función es la misma que consideramos en un principio, por tomando $g = R$, $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$ y dividiendo entre la masa. Esta función tiene mínimos estrictos donde $y = 0$ y $\cos(x) = 1$, es decir, en los puntos de equilibrios de la forma $(2k\pi, 0)$. Dado que esta función tiene mínimos escritos en esos puntos de equilibrio y $\dot{H} = 0$, gracias al teorema de Liapunov 1 (teorema 0.1) podemos deducir que todos los puntos de equilibrio $(2k\pi, 0)$ son estables.

Utilizando los teoremas vistos en este capítulo no podemos demostrar nada acerca de los otros punto de equilibrio con esta función, ya que V no tiene un mínimo en esos puntos, ni \dot{V} es estrictamente menor a cero para tratar de utilizar Cetaev.

Al ser H una preintegral, también sabemos que nuestras soluciones permanecerán en las curvas de nivel de la H , es decir que $x(t), y(t)$ deberán verificar que:

$$\frac{y^2}{2} - \cos(x) = C \Rightarrow y = \pm \sqrt{2\cos(x) + 2C}.$$

Estudiaremos el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{2\cos(x) + 2C}$ para ver como son esas curvas. En primer lugar, el dominio de esta función nos depende de C . Para $C \geq 1$, el dominio es todo \mathbb{R} y para $C < -1$, esa función nunca está definida. Si C es poco menor que 1, la función dejará de estar definida en intervalos alrededor de los puntos $x = (2k+1)\pi$, donde $\cos(x) = -1$. El dominio de f serán intervalos simétricos centrados en los puntos $x = 2k\pi$ que a medida que C se achique, los intervalos se irán achicando hasta alcanzar $C = -1$ donde el dominio serán los puntos aislados $x = 2k\pi$.

Por otro lado, sabemos que f será siempre positiva, tendrá máximos o mínimos donde $2\cos(x) + 2C$ lo tenga y será decreciente o creciente donde $2\cos(x) + 2C$ lo sea. Por lo tanto, para $C \geq 1$, la función estará definida en todo \mathbb{R} e irá oscilando. Tendrá sus máximos en $x = 2k\pi$ y los mínimos en $x = (2k+1)\pi$. Esto también lo podemos ver con su derivada.

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2\cos(x) + 2C}}$$

Esta función está definida para todo x y es continua mientras que $C > 1$. Para el caso particular donde $C = 1$ tenemos un problema en los puntos $x = (2k+1)\pi$ ya que se anula el denominador, aunque también el numerador. Si realizamos el límite de f'^2 (para sacarnos la raíz) cuando tendemos a esos valor se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} f'^2(x) &= \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2(\cos(x) + 1)} \\ \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} f'^2(x) &= \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2(\cos(x) + 1)} = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{-2\operatorname{sen}(x)} = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} |f'(x)| = 1 \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se utilizó el L'Hospital. Dado que la raíz es siempre mayor o igual a cero con $C = 1$, el signo de $f'(x)$ lo determina el seno.

$$\lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^-} f'(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^+} f'(x) = 1$$

Estos signos también los podíamos deducir ya que sabemos que en esos puntos la función tiene un mínimo. Vemos que los límites laterales no coinciden y por lo tanto la función no será derivable en esos puntos. Para $x = (2k+1)\pi$ el gráfico de f tendrá unos puntos angulosos.

Por último, para los $C \in (-1, 1)$ la función será derivable en los intervalos abiertos donde la misma está definida. En los extremos, donde la raíz se anula, se puede observar que la derivada tiende a infinito ya que el denominador tiende a cero y no lo hace el numerador (los valores de $x = (2k+1)\pi$ no pertenecen al dominio y los $x = 2k\pi$ son el centro de los intervalos, no los extremos).

En la siguiente figura, vemos como quedaría el gráfico de la función f .

Volviendo a la ecuación diferencial, habíamos obtenida que las soluciones deberían permanecer en las curvas $y = \pm \sqrt{2\cos(x) + 2C}$. Las de $+$ la raíz, coinciden con los gráficos de la función f y las

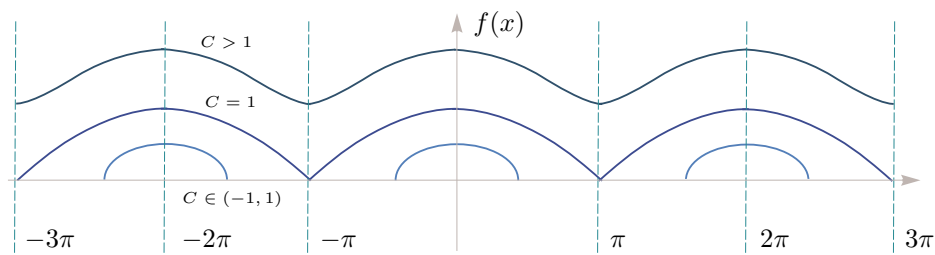


FIGURA 6. Gráfico de la función $f(x) = \sqrt{2\cos(x) + 2C}$.

otras serán las simétricas respecto al eje x . Por lo tanto, el diagrama de fases del péndulo será como muestra la imagen (7).

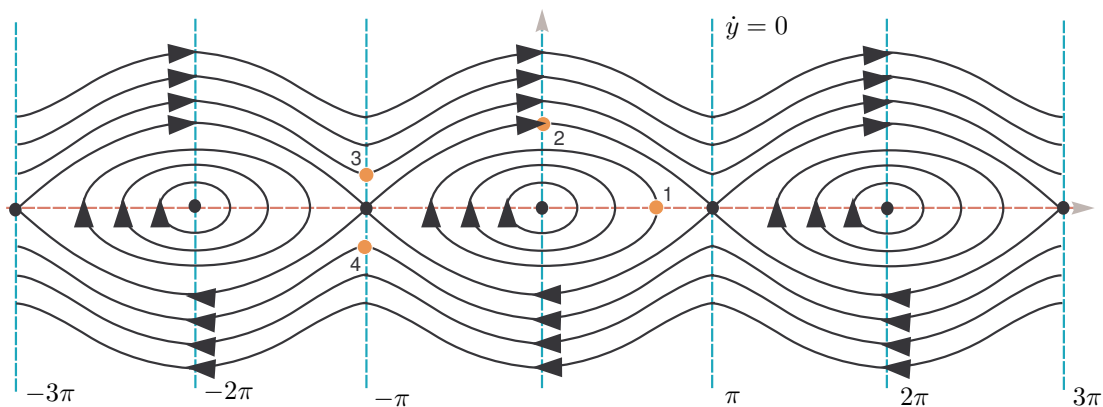


FIGURA 7. Diagrama de fases del péndulo.

En este diagrama, tenemos varios tipos de soluciones distintas. Además de los puntos de equilibrio, tenemos unas soluciones que dan vueltas alrededor de algunos puntos de equilibrio, otras que van de un punto de equilibrio a otro y las soluciones que van por arriba o por debajo de las soluciones anteriores. Si consideramos una condición inicial en el punto 1 de la figura, representaría empezar con determinado ángulo corrido de la vertical pero sin velocidad. En este caso, las soluciones empezarán a bajar hasta la vertical donde alcanzan el máximo módulo de la velocidad y siguen subiendo hacia el otro lado. Así repetidamente.

Una condición inicial en el punto 3, representaría empezar arriba con cierta velocidad angular. Con esta condición inicial las soluciones darían infinitas vueltas completas. El punto 4 es análogo, pero empezando con una velocidad en el sentido contrario (gira hacia el otro lado). Por último una condición inicial en el punto 2, representaría empezar abajo con la velocidad justa para llegar arriba. En este caso, la masa demoraría infinito tiempo en subir, por lo tanto las soluciones tenderán a $(\pi, 0)$ pero nunca llegaría.

Ahora que tenemos el diagrama de fases, podemos afirmar que los puntos de equilibrio de la forma $((2k + 1)\pi, 0)$ son inestables. Este es coherente con el problema físico.

Linealización

Veamos ahora que podríamos haber deducido utilizando el problema linealizado. El Jacobiano de la función $f(x, y)$ es el siguiente:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_f(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_f((2k + 1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para los puntos de equilibrio de la forma $(2k\pi, 0)$, los que representaría la posición vertical de abajo para el péndulo, el problema linealizado nos queda con VAP's imaginarios lo que no nos permite

deducir nada acerca de la estabilidad de los mismos. En este caso particular, vemos que en un entorno de estos puntos el diagrama de fases de la figura (7) alrededor de estos puntos es similar al problema linealizado, pero como se vio en el ejemplo anterior (ejemplo 0.3) esto no siempre tiene que pasar.

Para los puntos de equilibrio $((2k + 1)\pi, 0)$, obtenemos un problema linealizado que se corresponde a uno diagonal con valores propios 1 y -1 y vectores propios $(1, 1)$ y $(1, -1)$ respectivamente. Dado que este problema tiene un VAP positivo, podemos deducir que estos puntos son inestables por el lema de Hartman ??.

Observar que el diagrama de fases alrededor de los puntos de equilibrio de la forma $x = (2k + 1)\pi$ es efectivamente muy similar al problema linealizado. En la siguiente imagen se realiza un zoom del diagrama de fases alrededor del punto $(\pi, 0)$, en donde se puede verificar como el diagrama de fases alrededor del punto $(\pi, 0)$ es muy parecido al diagrama de fases del problema lineal. Incluso coinciden las direcciones de las soluciones que tienden al punto de equilibrio en el pasado o en el futuro con las direcciones de los vectores propios correspondientes. \circ

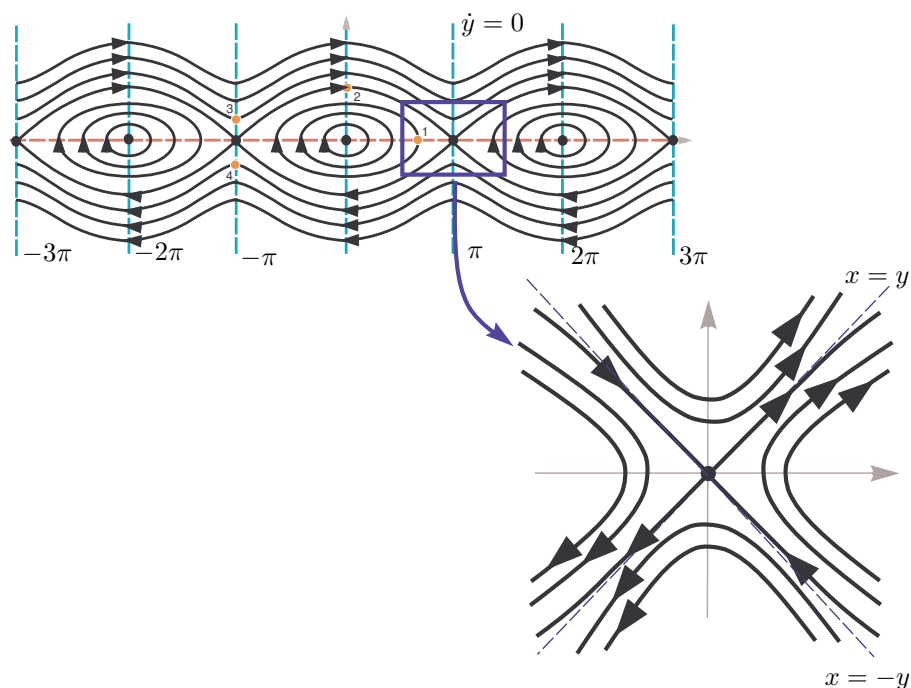


FIGURA 8. Similitud del diagrama de fases del péndulo con el problema linealizado.

Ejemplo 0.5 (Péndulo con rozamiento).

Cambiaremos un poco el ejemplo anterior, sumándole la fuerza del rozamiento con el aire. Esta fuerza actúa en sentido contrario a la velocidad y suele modelarse como $F_{roz} = -by$, donde b es una constante e y es la velocidad. Ajustando el ejemplo anterior y considerando todas las constantes como la unidad la ecuación diferencial obtenida es:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\text{sen}(x) - y \end{cases}$$

Los puntos de equilibrio siguen siendo los mismo que en el caso anterior, $(k\pi, 0)$. Veamos que pasa con la estabilidad de estos puntos en este caso.

Liapunov

Si ahora consideráramos la función de energía para utilizar el teorema de Liapunov, sabemos que la misma tiene un mínimo estricto en los puntos de equilibrio $(2k\pi, 0)$ y debería ser decreciente.

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos(x) \Rightarrow \dot{V} = y\dot{y} - \text{sen}(x)\dot{x} = -y\text{sen}(x) - y^2 + y\text{sen}(x) = -y^2 \leq 0$$

Observar que esta función no es estrictamente negativa en ningún entorno de los puntos de equilibrio ya que $\dot{V}(x, 0) = 0$. Esto tiene sentido físico. La pérdida de energía en este sistema se da por el

rozamiento, el cual existe cuando el péndulo está en movimiento. Sin embargo, cuando el péndulo tiene velocidad cero no hay rozamiento y por lo tanto no hay pérdida de energía. Por Liapunov 1 esta función nos permite deducir que los puntos de equilibrio $(2k\pi, 0)$ son estables pero no asintóticamente estables.

Linealización

Ahora estudiaremos el problema linealizado.

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_f(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad J_f((2k+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz $J_f(2k\pi, 0)$ tiene valores propios $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ por lo que los puntos de equilibrio $(2k\pi, 0)$ son asintóticamente estables. La matriz $J_f((2k+1)\pi, 0)$ tiene valores propios $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, lo que deja un valor propio positivo y otro negativo. Como consecuencia del Teorema de Grossman-Hartman ?? estos puntos deberán ser inestables.

En este ejemplo, vemos que por más de que la función que utilizamos para el teorema del Liapunov en los puntos $(2k\pi, 0)$ no nos permitió afirmar que los mismos sean asintóticamente estables, no implica que no lo sea.

Convergencia entre funciones

0.1. Convergencia de funciones

Para hablar de convergencia entre funciones será fundamental definir una distancia para las mismas. Comenzamos recordando la definición de norma y luego definiremos distancia entre dos elementos de un conjunto. Una gran diferencia que hay entre estos dos conceptos, es que las normas solo se pueden definir en un espacio vectorial y la distancia se pueden definir en cualquier conjunto. También, si tenemos definida una norma, a partir de ésta se puede definir una distancia, pero no toda distancia proviene de una norma.

Definition 0.1. Sea V un espacio vectorial. Una norma en V es una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ para todo λ escalar y para todo $v \in V$.
2. $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in V$ y $\|v\| = 0$ implica $v = 0$.
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ para todo $v, w \in V$ (desigualdad triangular).

Definition 0.2. Una distancia en un conjunto M es una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, que cumple con las siguientes propiedades:

1. $d(x, x) = 0$, para todo $x \in M$.
2. Si $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in M$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in M$.

No es difícil probar que si M es un espacio vectorial en el que está definida una norma $\|\cdot\|$, la función d definida como:

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{es una distancia en } M.$$

En los reales $\|x\| = |x|$, en \mathbb{R}^2 $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Una posible función distancia entre funciones, que será la que utilizaremos de aquí en adelante, es la distancia del supremo. Dada $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas la distancia del supremo entre ambas funciones está definida como:

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x) - g(x)|\}.$$

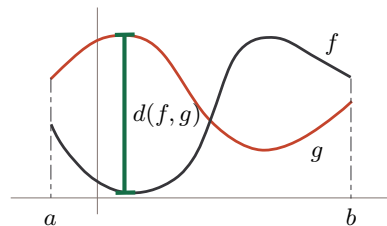


FIGURA 1. Distancia del supremo.

Como se recordó antes, la distancia entre dos elementos debe ser un real positivo y por lo tanto no puede ser infinito. Es por eso que se considera el conjunto cerrado $[a, b]$ y funciones continuas para asegurarnos de que exista el supremo, pero no es necesario que las funciones sean así para utilizar la distancia del supremo, basta con que el supremo exista.

Estudiaremos dos tipos de convergencia entre funciones que las introduciremos con un ejemplo. Consideremos la sucesión de funciones:

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = x/n$$

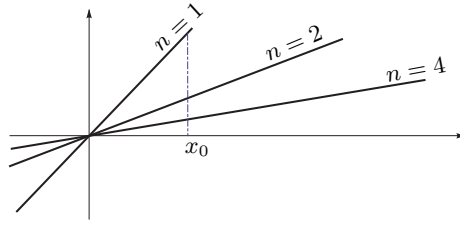


FIGURA 2. Sucesión $f_n(x) = x/n$.

Si graficamos algunas de estas funciones el resultado es el que se indica en la figura (2). Se puede ver que si nos paramos en un $x_0 \in \mathbb{R}$ particular se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = 0$$

A esta clase de convergencia se le llama convergencia puntual.

Convergencia puntual

Decimos que $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ converge puntualmente (c.p.) a $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ si:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in M$$

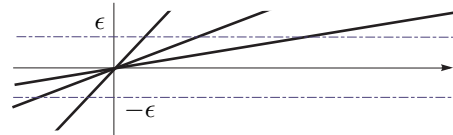
es decir:

$$\text{dado } x \in M \text{ y } \epsilon > 0, \exists n_0(x, \epsilon) \text{ tal que si } n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon.$$

Cuando una función converge puntualmente a otra utilizaremos la notación $f_n \xrightarrow{\text{c.p.}} f$.

Para $f_n(x) = x/n$ tenemos que f_n c.p. a la función nula ($f(x) = 0$). Dado $\epsilon > 0$, tomando $n_0 > |x_0|/\epsilon$ se cumple que $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, donde se ve claramente como n_0 depende de x_0 y ϵ .

Sin embargo dado un $\epsilon > 0$, si quisiéramos encontrar un n_0 de forma que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo x , vemos que esto no es posible. Para cualquier n_0 se puede escoger un x lo suficientemente grande tal que $x/n_0 > \epsilon$ y por lo tanto $|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$. Por esta razón diremos que f_n no converge uniformemente a f .



Convergencia uniforme

Decimos que $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ converge uniformemente (c.u.) a $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ si:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \text{ tal que si } n > n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon, \quad \forall x \in M$$

o lo que es lo mismo:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \text{ tal que si } n > n_0 \Rightarrow \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$$

La notación usada cuando f_n c.u. a f será $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} f$.

Si $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ c.u. a f tenemos que para $n \geq n_0$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in M$$

o equivalentemente:

$$-\epsilon < f_n(x) - f(x) < \epsilon, \quad \forall x \in M$$

lo que es lo mismo que:

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon, \quad \forall x \in M$$

Gráficamente esto implica que si f_n c.u. a f , a partir de cierto n_0 , f_n deberá encontrarse en una banda de espesor 2ϵ alrededor de f , como indica la figura siguiente.

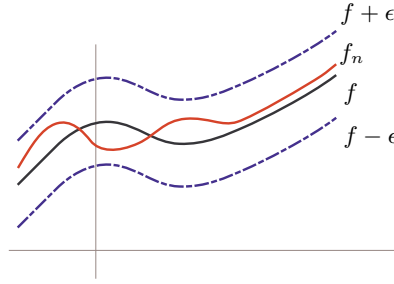


FIGURA 3. Convergencia uniforme.

En el ejemplo que estábamos trabajando de las rectas, que converja uniformemente a la función nula implicaría que f_n este en una banda $(-\epsilon, \epsilon)$ lo cual es imposible ya que las rectas de la sucesión no están acotadas.

Proposición 0.1.

Una sucesión de funciones $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ c.u. a $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ si y solo si:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| = 0$$

La demostración sale directo de la definición de límite. En la práctica, se suele utilizar esta proposición para estudiar la convergencia uniforme de una función.

Si ahora consideráramos la misma sucesión de funciones pero en el dominio cerrado $[a, b]$ con a y b reales, es decir:

$$f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = x/n$$

La sucesión sigue convergiendo puntualmente a cero, pero veamos la convergencia uniforme. En este caso, sabemos que al f_n ser continua en un dominio cerrado $|f_n(x)|$ tiene un máximo en $[a, b]$ alcanzado en uno de sus extremos ya que la función es creciente. Suponiendo que $|a| < |b|$, el máximo se daría en b por lo que:

$$\sup_{x \in [a, b]} |x/n - 0| = \sup_{x \in [a, b]} |x/n| = |f(b)| = \frac{|b|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

en conclusión, por la proposición 0.1, f_n converge puntual y uniformemente en este dominio. Podemos concluir que **la convergencia depende del dominio de las funciones**. Esta dependencia vale tanto para la convergencia puntual como la convergencia uniforme.

Observación:

Es evidente por las definiciones que si $f_n \xrightarrow{c.u.} f(x)$ también $f_n \xrightarrow{c.p.} f(x)$, pero como ya vimos no vale el recíproco. En particular, si $f_n \xrightarrow{c.p.} f(x)$, f_n no puede converger uniformemente a una función que no sea f .

Vemos ahora otro ejemplo. Sea:

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = x^n$$

Si estudiamos la convergencia puntual de f_n tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Por lo que:

$$f_n \xrightarrow{c.p.} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Para ver si la misma converge uniformemente podemos ver que dado un $\epsilon < 1$ la función siempre tendrá que salir de la banda para llegar hasta el 1, por lo que no converge uniformemente. Más formalmente podemos calcular el supremo. Dado que $f_n(1) = f(1)$ el supremo de la diferencia se dará en $x \in [0, 1)$.

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1)} |x^n| = \lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1$$

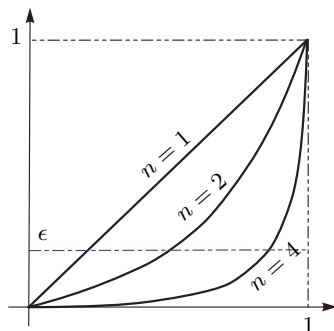


FIGURA 4. Sucesión $f_n = x^n$.

Donde dijimos que el supremo se da cuando x tiende a 1 ya que la función es creciente. Por la proposición 0.1 f_n no converge uniformemente. Tener en cuenta que el supremo vale 1 y no tiende a 1, lo cual podría generar problemas en el límite cuando n tiende a infinito para utilizar la proposición 0.1, donde quedaría un límite indeterminado.

Uno podría pensar que el problema es el 1, por lo que si uno quiere que converja uniformemente debe considerar el dominio $[0, 1)$, donde tendríamos que la sucesión f_n c.p. a la función nula. Sin embargo, esto no funcionaría ya que lo hecho en la parte anterior para calcular el supremo sigue siendo válido. De modo que si uno quisiera que converja uniformemente debería tomar el dominio $[0, 1 - \delta]$ donde $\delta \in (0, 1)$. En este caso:

$$\sup_{x \in [0, 1 - \delta]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1 - \delta]} |x^n| = f_n(1 - \delta) = (1 - \delta)^n$$

Por último:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, 1 - \delta]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \delta)^n = 0$$

ya que $(1 - \delta)$ es menor que 1. En este dominio, la sucesión de funciones si converge uniformemente.

El nombre de la convergencia puntual puede engañar un poco y generar algunas confusiones. Si bien el límite para hallar la función a la que podría converger f_n se hace fijando un x , este límite debe existir y no ser infinito para todos los x del dominio. Esta mal decir que una función converge puntualmente en unos puntos del dominio y no en otros. Con que exista un número del dominio donde el límite no exista o de infinito ya alcanza para que la sucesión de funciones no converja puntualmente.

En este último ejemplo si el dominio hubiera sido $[-1, 1]$ la sucesión no hubiera convergido puntualmente ya que el límite de $f_n(-1)$ no existe. Análogamente si el dominio hubiera considerado números mayores a 1 o menores a -1 donde $f_n(x) = x^n$ tendería a infinito, por ende tampoco puede converger puntualmente.

Algo que se logra ver en este ejemplo es que dada una sucesión de funciones continua la misma no tiene por que converger puntualmente a una función continua.

En el siguiente teorema veremos que esto no sucede en la convergencia uniforme, si una sucesión de funciones continuas converge uniformemente, deberá converger a una función continua.

Teorema 0.3.

Sea $f_n : M \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ una sucesión de funciones continua en $a \in M$. Si $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ entonces f es continua en a .

Demostración:

Debemos probar que dado $a \in M$ se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

o lo que es equivalente:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists \delta \text{ tal que si } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Por convergencia uniforme sabemos que:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists n_0 \text{ tal que si } n > n_0 \Rightarrow \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Fijando un $m \geq n_0$ y manteniendo el ϵ de la convergencia uniforme, tenemos por continuidad de f_m que:

$$\exists \delta(\epsilon) \text{ tal que si } \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f_m(x) - f_m(a)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

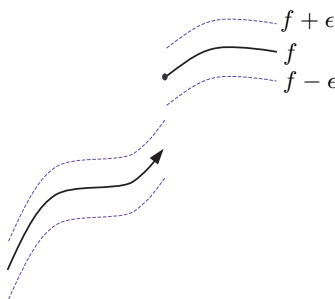
Dado x tal que $\|x - a\| < \delta$ se cumple que:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &= \|f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(a) + f_m(a) - f(a)\| \\ \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f_m(x)\| + \|f_m(x) - f_m(a)\| + \|f_m(a) - f(a)\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Lo que muestra que $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$.

Por lo que queda demostrado. □

Este teorema se puede visualizar en la imagen siguiente. Si una sucesión de funciones continuas f_n c.u. a una función f discontinua la misma debería estar, a partir de cierto n_0 , en la banda $f - \epsilon, f + \epsilon$. Sin embargo, escogiendo un ϵ suficientemente chico donde la banda queda como en la figura, f_n no puede pasar de un lado de la discontinuidad al otro sin salir de la banda.



En consecuencia, si una sucesión de funciones continuas converge puntualmente a una discontinua, la misma no converge uniformemente. Esta es otra forma de demostrar que la sucesión $f_n(x) = x^n$ con $x \in [0, 1]$ no converge uniformemente. ¿Una sucesión de funciones discontinua podrá converger uniformemente a una función continua? Esto si puede suceder, un ejemplo sencillo es la sucesión:

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1/n, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

que converge puntual y uniformemente a la función nula.

0.1.1. Convergencia, integración y derivación

Empecemos hablando de la integración. Uno podría imaginarse que si una sucesión f_n de funciones converge a f , cuando n es suficientemente grande la integral de f_n se parecería a la de f , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Pero, ¿en que clase de convergencia? Un ejemplo donde se puede ver que la convergencia puntual no alcanza para que la igualdad anterior se cumpla es:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } x \in (0, 1/n] \\ 0, & \text{si } x \in (1/n, 1] \end{cases}$$

donde $f_n \xrightarrow{c.p.} 0$ y $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq \int_0^1 f(x) dx = 0$. Si no está claro porque la sucesión de funciones converge puntualmente a cero, observar que dado $x_0 \in (0, 1]$:

$$\exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow x_0 > \frac{1}{n}.$$

A partir de ese n_0 tenemos que $f_n(x_0) = 0$, por lo que el límite cuando n tiende a infinito da cero y por lo tanto converge puntualmente a la función nula. Veamos que pasa con la convergencia uniforme.

Teorema 0.4.

Sea un sucesión de funciones continuas $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Sean $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_n(x) = \int_a^x f_n(s) ds$ y $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_a^x f(s) ds$. Entonces:

1. F_n converge uniformemente a F .
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Demostración del ítem 1.:

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_a^x f_n(s) ds - \int_a^x f(s) ds \right| \leq \int_a^x |f_n(s) - f(s)| ds \leq \int_a^b |f_n(s) - f(s)| ds \leq \int_a^b \sup_{s \in [a, b]} |f_n(s) - f(s)| ds \leq (b-a) \sup_{s \in [a, b]} |f_n(s) - f(s)|.$$

Por hipótesis f_n converge uniformemente a f . Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $(b-a) \sup_{s \in [a, b]} |f_n(s) - f(s)| < \varepsilon$. Por lo tanto, para $n \geq n_0$ se cumple que $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ y para todo $x \in [a, b]$. Lo que muestra que F_n converge uniformemente a F .

Demostración del ítem 2.:

Como F_n converge uniformemente a F , entonces hay convergencia puntual. Por lo tanto $F_n(b)$ converge a $F(b)$. Luego

$$F_n(b) = \int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = F(b).$$

□

Es importante notar que el teorema no es un si solo si, es decir, se puede cumplir la igualdad sin que la sucesión f_n converja uniformemente. Un ejemplo donde esto sucede es el caso que ya estudiamos $f_n(x) = x^n$ con $x \in [0, 1]$, esta sucesión no converge uniformemente, pero verifica la igualdad. Otro detalle, es que el intervalo debe ser acotado. Si estamos trabajando con funciones donde su dominio no está acotado este teorema no vale.

Ejercicio: considerar la sucesión

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que f_n c.u. a la función nula pero que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx \neq 0$.

Veremos ahora que podemos decir de la derivada. El resultado más agradable, sería que si una sucesión de funciones converge uniformemente a otra, las derivadas hagan lo mismo. Consideremos la sucesión de funciones:

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_n(x) = \frac{x}{n^2 x^2 + 1}$$

Realizando las derivadas para hacernos una idea de como son las gráficas de la sucesión obtenemos:

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{(n^2 x^2 + 1)^2}$$

Se puede observar que la función es impar y por el signo de la derivada alcanza su máximo en $1/n$ que vale:

$$f_n(1/n) = \frac{1/n}{2} = \frac{1}{2n}$$

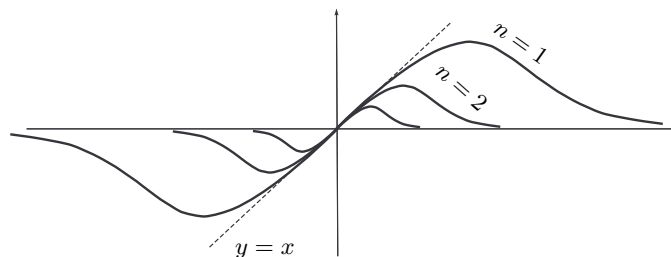
Con esta información, podemos ver que estas sucesiones tendrán la forma de la imagen siguiente.

donde se tuvo en cuenta que $f_n'(0) = 1$ para cualquier n . Si estudiamos la convergencia puntual de esta función tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por lo que $f_n \xrightarrow{c.p.} 0$. Para la convergencia uniforme:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$



Nuevamente por la proposición 0.1, $f_n \xrightarrow{c.u.} f(x) = 0$. Podemos ver que $f'_n(0) \neq f'(0)$. Por lo que ni pidiendo la convergencia más fuerte entre f_n y f (la convergencia uniforme) podemos concluir algo de las derivadas. Para poder concluir algo acerca de las derivadas de una sucesión de funciones, tendremos que exigirle condiciones a f'_n .

Teorema 0.5.

Sea $f_n : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones de clase C^1 y una función $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Si se cumple que:

1. $f'_n \xrightarrow{c.u.} g$
2. $\exists x_0 \in (a, b) / \{f_n(x_0)\}$ converge.

Entonces existe $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ y $f' = g$

Demostración:

Podemos escribir $f_n(x)$ como:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(s) ds.$$

Del teorema 0.4 de las integrales tenemos que:

$$\int_{x_0}^x f'_n(s) ds \xrightarrow{c.u.} \int_{x_0}^x g(s) ds$$

utilizando esto último sumado a que $f_n(x_0)$ converge a un número que llamaremos c .*

$$f_n \xrightarrow{c.u.} c + \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

Llamando f a la función a la que converge f_n se obtiene que:

$$f_n(x) \xrightarrow{c.u.} f(x) = c + \int_{x_0}^x g(s) ds.$$

Derivando f obtenemos efectivamente que $f' = g$, por lo que queda demostrado. \square

* Ejercicio: demostrar que si $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ y $g_n \xrightarrow{c.u.} g$ entonces $f_n + g_n \xrightarrow{c.u.} f + g$ (esto fue utilizado en la demostración de este último teorema).

Uno podría pensar que si f'_n c.u. ya alcanzaría para demostrar que f_n también lo hace. Sin embargo sin la segunda condición el teorema no es cierto, se puede ver en el siguiente ejemplo. Sea

$$f_n(x) = n + \frac{\text{sen}(x)}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

tenemos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ se va a infinito para cualquier valor de x , por lo que f_n no converge puntualmente y por lo tanto tampoco uniformemente. Sin embargo $f'_n(x) = \frac{\cos(x)}{n}$ converge uniformemente a cero. Sin la segunda condición, tendríamos que f_n debería converger uniformemente, lo cual no es cierto.

0.2. Sucesiones de Cauchy

Se recuerda que:

- Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy si y solo si:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n, m \geq n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$$

o lo que es lo mismo:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n \geq n_0 \text{ y } k \in \mathbb{N} \Rightarrow d(a_{n+k}, a_n) < \epsilon$$

A partir de cierto momento todos los elementos de la sucesión están arbitrariamente cerca.

- Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es convergente $\Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

En el conjunto de las funciones la distancia que utilizaremos será la distancia del supremo, de donde tenemos la siguiente definición.

Decimos que $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ es de Cauchy si:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \text{ tal que si } n \geq n_0 \text{ y } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \|f_{n+k} - f_n\|_\infty < \epsilon$$

es decir:

$$\text{dado } \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \text{ tal que si } n \geq n_0 \text{ y } k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sup_{x \in M} |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

A continuación veremos un teorema que nos ayudará a demostrar el teorema de Picard, el cual es parecido al segundo punto de lo que se recordó recientemente pero en sucesiones de funciones.

Teorema 0.6.

Sea una sucesión de funciones $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_n \text{ es de Cauchy} \Leftrightarrow \text{existe una función } f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f_n \xrightarrow{c.u.} f.$$

Demostración:

Comencemos con la demostración directa, es decir, sabiendo que es una sucesión es de Cauchy demostrar que converge uniformemente. Dado que es de Cauchy tenemos que a partir de cierto n_0 :

$$\sup_{x \in M} |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \text{con } n \geq n_0, k \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia:

$$(0.1) \quad |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in M$$

lo que implica que la sucesión real $f_n(x)$ es de Cauchy y por lo tanto convergente, para todo $x \in M$. Por ende, f_n converge puntualmente a una función que llamaremos f . Si ahora fijamos n y x y realizamos el límite cuando k tiende a infinito de la ecuación (0.1) obtenemos que:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in M$$

Dado que este resultado es para todo $x \in M$, tenemos que para todo $n \geq n_0$ se cumple que:

$$\sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$$

es decir, $f_n \xrightarrow{c.u.} f$.

Ahora iremos con el recíproco. Debemos demostrar que si $f_n \xrightarrow{c.u.} f$ entonces es una sucesión de Cauchy. Por ser una sucesión que converge uniformemente tenemos que dado $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces:

$$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Si quisiéramos estudiar la diferencia entre f_n y f_{n+k} , donde $k \in \mathbb{N}$, dado un $x \in M$ tenemos que:

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| = |f_{n+k}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+k}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)|, \quad \forall x \in M.$$

Por lo tanto:

$$\sup_{x \in M} |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x \in M} |f_{n+k}(x) - f(x)| + \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Por último:

$$\sup_{x \in M} |f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

llegando a la definición de una sucesión uniformemente de Cauchy. \square

0.3. Series de funciones

Por último hablaremos brevemente de las series de funciones. Dada una sucesión de funciones $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos asociada una serie

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

la cual no es más que una sucesión de funciones definida como la suma de otra sucesión. Por lo tanto, todo lo visto hasta ahora sigue valiendo para las series de funciones. Veremos un teorema que sirve para probar que una serie converge uniformemente apoyándonos en el teorema visto recientemente (teorema 0.6).

Teorema 0.7 (Criterio del mayorante de Weierstrass). *Sea $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Si existe una sucesión A_n de números reales tal que:*

$$|f_n(x)| \leq A_n, \quad \forall x \in M, \quad \forall n \geq 1$$

y $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ converge entonces la serie $s_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$ converge uniformemente.

Demostración:

Trataremos de probar que la serie es una sucesión de Cauchy y por lo tanto gracias al teorema anterior la misma convergerá uniformemente. En primer lugar dado que $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ converge, la sucesión real $b_n = \sum_{i=1}^n A_i$ es convergente y por lo tanto de Cauchy. Es decir, dado $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ y $k \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$|b_{n+k} - b_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} A_i \right| = \sum_{i=n+1}^{n+k} A_i < \epsilon$$

donde en la última igualdad se usó que A_n es siempre positivo, ya que $|f_n(x)| \leq A_n$. Veamos ahora que pasa con la serie s_n .

$$|s_{n+k}(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+k} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} A_i < \epsilon, \quad \forall x \in M$$

por lo que queda demostrado. \square

Tanto este último teorema como el teorema 0.5 de las derivadas se utilizarán mucho en los últimos capítulos, cuando estudiemos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Ejemplo:

Probar que las siguientes series convergen uniformemente.

1. $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$.
2. $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2+x^2}$.

1. Como $\left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Entonces por el Criterio del mayorante de Weierstrass se tiene que $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ converge uniformemente.

2. Como

$$0 \leq \frac{e^{-nx^2}}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2+x^2}$ converge uniformemente.

Series de Fourier

En este capítulo estudiaremos las series de Fourier con el fin de poder utilizarlas en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

0.1. Introducción

Así como ya han visto que podemos aproximar una función derivable con un polinomio (Taylor), la idea de las series de Fourier es aproximar una función con la suma de senos y cosenos. Las series de Fourier se utilizan mucho en varios campos de la tecnología, principalmente en la ingeniería eléctrica.

La motivación a encontrar una serie de senos y cosenos con la cual podamos describir una función, surgió gracias a la ecuación diferencial de calor en derivadas parciales. En este problema, que veremos en el siguiente capítulo, podremos encontrar una solución analítica a la misma si la condición inicial es suma de senos y cosenos.

Una aplicación sencilla de las series de Fourier es un cronómetro. Para medir el tiempo, la mayoría de los cronómetros utiliza un voltaje con forma de onda cuadrada. Esto es una onda que toma el valor A y $-A$ alternadamente. Cuando el valor del voltaje cambia, el cronómetro interpreta que ha transcurrido una unidad de tiempo. Lo que se hace normalmente para formar esta onda cuadrada, es sumar varios voltajes sinusoidales de distinta frecuencia y distinta amplitud.

En las imágenes de la figura (1) podemos ver como aproximar mediante senos una onda cuadrada con $A = 1$ y período 2π . De forma gruesa uno podría aproximar la onda por un único seno como se ve en la figura (1.a). En esta aproximación se observa que tenemos excedentes en los valores cercanos a $\pm\pi/2$ y déficit donde el seno se anula. Para compensar esto, podríamos sumar un seno de menor amplitud pero con el triple de frecuencia ($\text{sen}(3t)$), obteniendo un resultado como muestra la imagen (1.b). Nuevamente se tienen zonas de excedente y otras de deficit, que se pueden tratar de compensar sumando un $\text{sen}(5t)$ (1.c), luego de $\text{sen}(7t)$ (1.d), $\text{sen}(9t)$ (1.e) y así sucesivamente. A medida que vayamos sumando más términos (con la frecuencia y amplitud conveniente) nos iremos aproximando con mayor precisión a la onda cuadrada. La figura (1.f) se puede obtener haciendo la correcta combinación lineal de 20 senos de distintas frecuencias y amplitudes. A medida que aumentamos la frecuencia del seno, podemos compensar de forma más precisa los errores que van quedando al aproximar.

En este ejemplo, vemos gráficamente que esta suma de senos va convergiendo a la onda cuadrada. Esto será lo que trataremos de hacer. Encontrar la correcta combinación lineal de senos y cosenos con la que podamos escribir, en principio, cualquier función periódica.

0.2. Repaso de espacio vectorial real con producto interno

Como menciona el título, haremos un repaso de lo visto en álgebra lineal para espacios vectorial con producto interno y luego aplicaremos esto para las series de Fourier.

Consideremos V un espacio vectorial real con producto interno \langle, \rangle y $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal de V . Recordemos que un conjunto es ortonormal si:

$$\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle = 0 \text{ si } i \neq k$$

$$\|\varphi_i\|^2 = \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = 1 \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

En nuestro caso (para las series de Fourier), φ_k serán los senos y cosenos con distinta frecuencia y lo que queremos es encontrar la combinación lineal de los mismos que mejor aproxime una función f periódica. En el caso de un espacio con producto interno, esta combinación lineal era justamente la proyección de f en el subespacio generado por $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Esta combinación lineal expresada analíticamente es:

$$(0.1) \quad S_n = \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$$

donde definimos $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$.

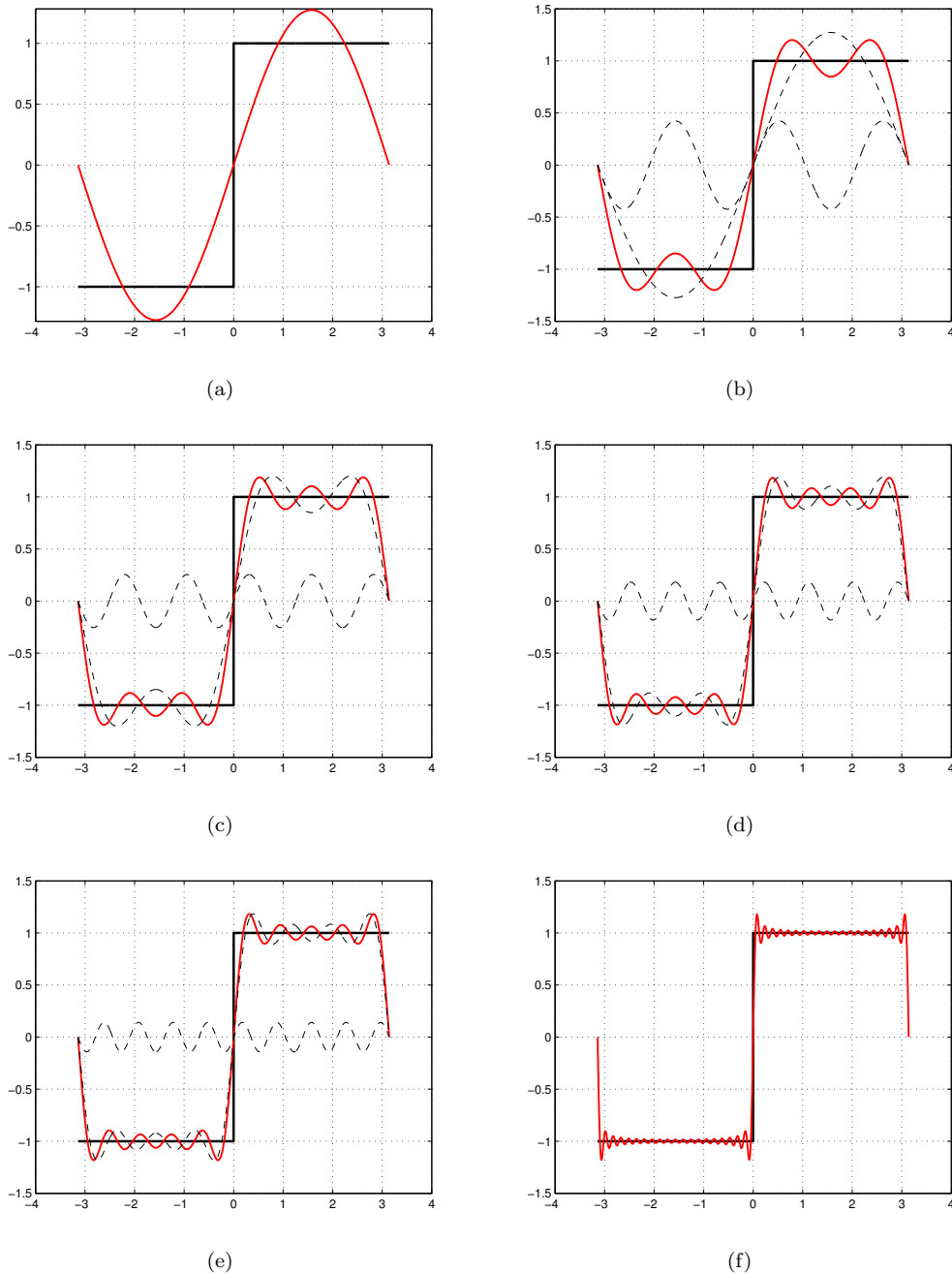


FIGURA 1. Aproximación con senos de la onda cuadrada

Proposición 0.1. Sea V un espacio vectorial real con producto interno \langle, \rangle , $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, $f \in V$ y $S_n = \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$. Entonces

$f - S_n \perp \varphi_k$ (esto es $\langle f - S_n, \varphi_k \rangle = 0$) para todo $k = 1, \dots, n$.

Demostración:

Por propiedad del producto interno:

$$\langle f - S_n, \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle - \langle S_n, \varphi_k \rangle$$

Si sustituimos S_n y desarrollamos el segundo término a la derecha de la igualdad tenemos que:

$$\langle S_n, \varphi_k \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i, \varphi_k \right\rangle = \sum_{i=0}^n \langle \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i, \varphi_k \rangle = \sum_{i=0}^n \langle f, \varphi_i \rangle \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle$$

$$\langle S_n, \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \langle f, \varphi_k \rangle.$$

Donde se utilizó propiedades del producto interno y que el conjunto S es ortonormal. Sustituyendo esto último en la primer ecuación obtenemos el resultado deseado. \square

Corolario 0.1. Sea V un espacio vectorial real con producto interno \langle, \rangle , $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, S el subespacio generado por $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $f \in V$ y $S_n = \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$. Entonces para todo $s \in S$ se cumple que

$$f - S_n \perp s.$$

La demostración es directa ya que todo $s \in S$ es combinación lineal de φ_k los cuales son perpendiculares a $f - S_n$. \square

En esta sección siempre que hablemos de la norma, será la norma asociada al producto interno, es decir $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

Corolario 0.2. Sea V un espacio vectorial real con producto interno \langle, \rangle , $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, $f \in V$ y $S_n = \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$. Entonces

$$\|f\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \|S_n\|^2.$$

Demostración:

Como $f - S_n$ es perpendicular a S_n , se cumple Pitágoras, de donde tenemos que:

$$\|f\|^2 = \|(S_n - f) - S_n\|^2 = \|S_n - f\|^2 + \|S_n\|^2 \Rightarrow \|f\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \|S_n\|^2.$$

\square

Corolario 0.3. Sea V un espacio vectorial real con producto interno \langle, \rangle , $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, $f \in V$ y $S_n = \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$. Entonces

$$\|S_n\| \leq \|f\|.$$

La demostración es directa del corolario anterior. \square

Además como $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, se cumple que

$$\begin{aligned} \|S_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|^2 \stackrel{\text{Pitágoras}}{=} \sum_{k=0}^n \|\langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k\|^2 = \\ &= \sum_{k=0}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \|\varphi_k\|^2 \stackrel{\|\varphi_k\|=1}{=} \sum_{k=0}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

De donde se deduce, aplicando el corolario anterior, que

$$(0.2) \quad \sum_{k=0}^n |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

En el siguiente teorema demostraremos que la mejor aproximación de f en el subespacio generado

por $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es S_n .

Teorema 0.1. Sea V un espacio vectorial real con producto interno \langle, \rangle , $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un conjunto ortonormal, $f \in V$ y $S_n = \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$. Si $T_n = \sum_{k=0}^n d_k \varphi_k$ con d_k cualesquiera, se cumple que:

$$\|f - S_n\| \leq \|f - T_n\|.$$

Demostración: Sea S el subespacio generado por $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Como $S_n, T_n \in S$ entonces, por el Corolario 0.1, se tiene que $f - S_n \perp S_n - T_n$. Luego

$$\|f - T_n\|^2 = \|f - S_n + S_n - T_n\|^2 \stackrel{\text{Pitágoras}}{=} \|f - S_n\|^2 + \|S_n - T_n\|^2.$$

Entonces

$$\|f - T_n\|^2 \geq \|f - S_n\|^2 \Rightarrow \|f - T_n\| \geq \|f - S_n\|.$$

\square

0.3. Series de Fourier

Ahora si, llevaremos lo visto en la sección pasada a las series de Fourier. Consideremos el espacio de funciones:

$$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua a trozos y } 2\pi \text{ periódica}\}$$

Se recuerda que una **función continua a trozos** es una función que en cualquier intervalo cerrado es continua excepto en una cantidad finita de puntos, donde los límites laterales existen y son finitos. Una función 2π **periódica** significa que $f(x) = f(x + 2\pi)$. Observar que como el $\text{sen}(nx)$ y $\text{cos}(nx)$ son funciones 2π periódicas, la suma de cualquier combinación lineal de los mismos también será una función 2π periódica. En la figura (2) se pueden ver algunas posibles funciones que perteneces al conjunto V .

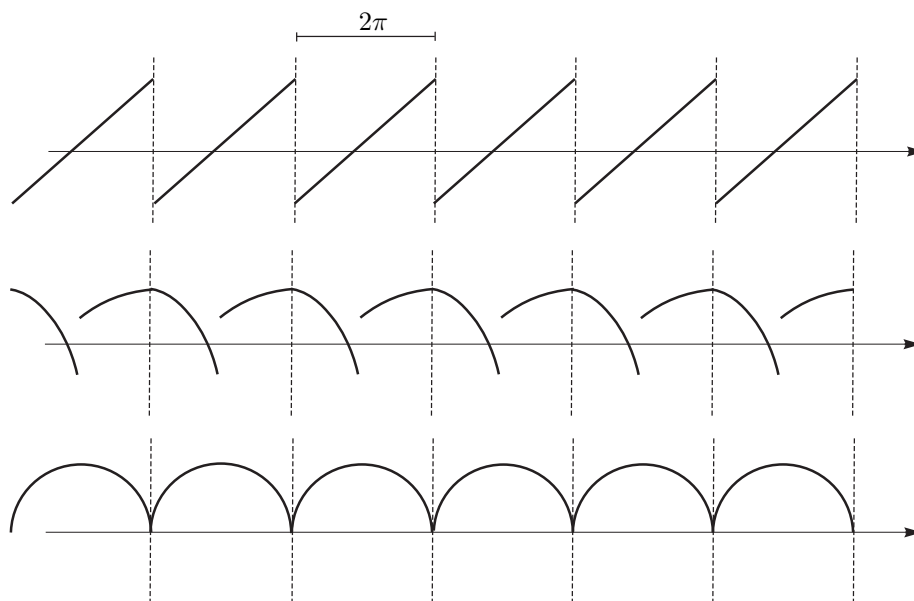


FIGURA 2. Funciones en el espacio V

Quizás recuerden de GAL, que un posible producto interno en un espacio de funciones continuas es:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Si tratáramos de verificar que el mismo sea un producto interno para el espacio de funciones V , deberíamos verificar si cumple las propiedades del producto interno. Sea $u, w, z \in V$:

- $\langle u + w, z \rangle = \langle u, z \rangle + \langle w, z \rangle$.
- $\langle au, z \rangle = a \langle u, z \rangle$, con $a \in \mathbb{R}$.
- $\langle u, z \rangle = \langle z, u \rangle$.
- $\langle u, u \rangle \geq 0$ y $\langle u, u \rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

Se puede demostrar rápidamente que verifica las primeras 3 propiedades. Sin embargo, no se verifica la última propiedad para el conjunto de las funciones continuas a trozos. Si consideramos una función nula entre $[-\pi, \pi]$ en todos lados salvo en un punto, el producto interno de esa función con sigo misma sería nulo aunque la función no sea nula. En consecuencia, esa operación no es un producto interno para el espacio vectorial V y no podríamos usar lo obtenido en la sección anterior. Hacemos notar que dentro de los teoremas que fueron demostrados no se utilizó esta propiedad por lo que los teoremas anteriores son válidos aunque \langle, \rangle no cumpla con todas las propiedades de un producto interno. Este problema se arregla definiendo una clase de equivalencia en V . Decimos que dos funciones $f, g \in V$ son equivalentes si f y g difieren en una cantidad finita de puntos. Aunque no haremos hincapié en este último concepto.

¹El que tenga interés en comprobar esta valides puede dirigirse a <https://www.fing.edu.uy/~omargil/ecdif/texto00>

El primer conjunto S que uno pensaría en tomarse para desarrollar una función según senos y cosenos sería el siguiente:

$$S = \{1, \cos(x), \operatorname{sen}(x), \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \dots\}.$$

Veamos si este conjunto es ortonormal. Es decir, que si consideramos dos funciones cualesquiera distintas del conjunto, el producto interno es nulo y si consideramos el producto interno de una función de S consigo misma da la unidad. Empecemos con la ortogonalidad:

- $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen}(nx) \, dx = 0$ por integrar una función impar.
- $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx) \, dx = \operatorname{sen}(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \operatorname{sen}(mx) \, dx = 0$ por integrar una función impar.

Para las siguientes integrales, recordar la igualdad trigonométrica:

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(b-a) + \cos(b+a)) \\ \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) &= \frac{1}{2} (\cos(b-a) - \cos(b+a)) \end{aligned}$$

- Con $n \neq m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) \, dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x(n-m)) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x(n+m)) \, dx \right) = 0.$$
- Con $n \neq m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cdot \operatorname{sen}(mx) \, dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x(n-m)) \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x(n+m)) \, dx \right) = 0$$

Con estas cuentas hemos probado que el conjunto es ortogonal. Veamos ahora si es ortonormal.

- $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2nx) \, dx = \pi$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2(nx) \, dx = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2nx) \, dx = \pi$

Claramente el conjunto S no es ortonormal con el producto interno definido. Redefiniremos entonces el producto interno y el conjunto S .

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx \\ S &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(x), \operatorname{sen}(x), \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \dots \right\} \end{aligned}$$

Proposición 0.2.

El conjunto $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(x), \operatorname{sen}(x), \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \dots \right\}$ es un conjunto ortonormal respecto al producto interno $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx$.

Para la demostración basta volver a realizar las cuentas anteriores teniendo en cuenta estas modificaciones.

Llamaremos **serie parcial de Fourier** de f a:

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen}(kx)$$

donde a_0 , a_k y b_k son los coeficientes de Fourier que se definen como:

$$a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_k = \langle f, \cos(kx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$b_k = \langle f, \sin(kx) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Para la siguiente definición vamos asumir que dada f las series $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx)$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx)$ son convergentes.

Llamaremos **serie de Fourier** de f a:

$$S_{\infty}(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx).$$

Tanto S_n como en S_{∞} dependen de la función f . Esta dependencia la encontramos en los coeficientes a_0 , a_k y b_k .

Para lo que resta de este capítulo, asumimos que $S_{\infty}(f)$ es una serie convergente.

Proposición 0.3.

$$\|S_n(f)\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2.$$

Demostración:

$$\|S_n(f)\|^2 = \langle S_n, S_n \rangle = \left\langle \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right\rangle$$

Dado que el conjunto S es ortogonal, utilizando las propiedades del producto interno se llega a que:

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|^2 &= \left\langle \frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{2} \right\rangle + \sum_{k=1}^n \langle a_k \cos(kx), a_k \cos(kx) \rangle + \sum_{k=1}^n \langle b_k \sin(kx), b_k \sin(kx) \rangle \\ &= \left\| \frac{a_0}{2} \right\|^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\cos(kx)\|^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \|\sin(kx)\|^2 \end{aligned}$$

Dado que S es ortonormal se cumple que $\|\cos(kx)\| = \|\sin(kx)\| = 1$. A su vez, la norma de una constante con el producto interno definido es $\|A\|^2 = 2A^2$ obteniendo finalmente que:

$$\|S_n\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2.$$

□

Corolario 0.4 (Desigualdad de Bessel).

Sea $f \in V$ se cumple que:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

La demostración es inmediata de la proposición anterior (0.3) y el Corolario 0.3.

Corolario 0.5.

Las series reales $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$ son convergentes.

Demostración:

Dado que la función f es continua a trozos, la integral del módulo de f es un número finito (no diverge). Utilizando el teorema anterior y esto último deducimos que $\sum_{k=1}^n a_k^2 + b_k^2$ está acotado para cualquier n . Dado que $a_k^2 + b_k^2$ es siempre positivo, que esa sumatoria está acotada implica que sea convergente. □

Si bien ya hemos visto que S_n es la mejor aproximación de f en el subespacio generado por S , no sabemos si esta aproximación es buena. ¿A que nos referimos con que una aproximación sea buena?

Cuando hablemos de una buena aproximación nos estamos refiriendo a que S_n puede ser tan cercano a f como quisiéramos. En otras palabras, esto implica que $\|f - S_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Teorema 0.2.

S es completo en V. Es decir que dado $f \in V$ se cumple que:

$$\|f - S_n(f)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Este teorema no será demostrado en el curso.

Observación:

- El hecho que $\|f - S_n(f)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, NO implica que S_n tienda a f puntualmente.

Proposición 0.4 (Igualdad de Parseval).

Sea $f \in V$ se cumple que:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2 = \|f\|^2.$$

Aceptando el teorema anterior, esta igualdad se obtiene del Corolario 0.2 y de la igualdad (0.2).□

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a trozos y 2π periódica. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ definimos:

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ y } f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Teorema 0.3 (Dini).

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a trozos, 2π periódica y tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que existen y son finitos los siguientes límites:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} = L^+ \text{ y } \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x+t) - f(x^-)}{t} = L^-.$$

Entonces, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$S_\infty(f)(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

Cuando f es continua los puntos $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ coinciden. Por lo tanto tenemos el siguiente corolario:

Corolario 0.6.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en las hipótesis del Teorema de Dini. Entonces $S_n(f)$ converge puntualmente a f en \mathbb{R} . O lo que es equivalente:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx).$$

Se recuerda que:

- Sea f una función impar y $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- Sea f una función par y $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
- Sea f y g dos funciones pares (o impares) $\Rightarrow f.g(x)$ es una función par.
- Sea f una función par y g una función impar $\Rightarrow f.g(x)$ es una función impar.

En el siguiente ejemplo, hallaremos la serie de Fourier de una función continua a trozos. Y utilizaremos algunos de estos resultados.

Ejemplo 0.1.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π periódica tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Para hallar la serie de Fourier debemos hallar los coeficientes de Fourier.

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ ya que f es impar.
- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx) dx = 0$ ya que $f(x)\cos(kx)$ es impar.
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sen(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1.\sen(kx) dx$ por ser par la función $f(x)\sen(kx)$. Luego:

$$b_k = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} = \frac{1 - \cos(k\pi)}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ 4/\pi k & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Tenemos entonces que:

$$S_{\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sen(kx) \stackrel{k=2i+1}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)} \sen((2i+1)x).$$

Por el Teorema de Dini (0.3) podemos deducir que S_n converge puntualmente a:

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S_{\infty} = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ 1 & \text{si } x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi) \\ 0 & \text{si } x = k\pi \end{cases}$$

S_{∞} coincide con f en los puntos donde f es continua pero no en los puntos de la forma $k\pi$. Vemos que como se mencionó antes, si bien $\|f - S_n\|$ tiende a cero cuando n tiende a infinito (resultado del teorema 0.2), $f - S_n$ no tiende a la función nula. ¿Puede S_n converger uniformemente? Si se recuerda el teorema del capítulo de convergencia este decía que si una sucesión de funciones continuas f_n convergía uniformemente a una función f , esta última debía ser continua. S_n es una sucesión de funciones continuas (el seno es una función continua) y converge puntualmente a una función discontinua S_{∞} . En consecuencia, S_n no puede converger uniformemente.

Saber la convergencia puntual de S_n puede ser útil para averiguar cuanto valen algunas series reales. Por ejemplo en $x = \pi/2$ tenemos que:

$$S_{\infty} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)} \sen\left(\frac{(2i+1)\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)} (-1)^i = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)} (-1)^i = \frac{\pi}{4}$$

Otra forma de obtener el resultado de series reales es con la igualdad de Parseval (0.4). Esta proposición nos decía que:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 + b_k^2 = \|f\|^2 \Rightarrow \frac{16}{\pi^2} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

○

El teorema de Dini (0.3) nos permite hablar de la convergencia puntual de S_n pero no de la convergencia uniforme. Para ver la convergencia uniforme, utilizaremos un resultado visto en el capítulo de convergencia llamado el Criterio del Mayorante de Weierstrass.

Teorema 0.4.

Sea $f \in V$, continua, derivable a trozos y de período 2π , tal que sus coeficientes de Fourier cumplen que:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| + |b_k| \text{ converge} \Rightarrow S_n \xrightarrow{c.u.} f$$

Demostración:

El criterio del Mayorante (ver capítulo convergencia uniforme) nos dice que si tenemos una sucesión de funciones de la forma $s_n = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ y una sucesión real A_k que verifique que $|f_k(x)| < A_k$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $k \geq 1$, si $\sum_{k=0}^n A_k$ converge entonces la sucesión s_n converge uniformemente. En particular para las series de Fourier si se encuentra una sucesión real A_k que cumpla:

$$|a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)| \leq A_k$$

con $\sum_{k=0}^n A_k$ convergente S_n convergería uniformemente a S_∞ . Como se cumple que:

$$|a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)| \leq |a_k \cos(kx)| + |b_k \operatorname{sen}(kx)| \leq |a_k| + |b_k|$$

si consideramos $A_k = |a_k| + |b_k|$ se sabe por hipótesis que la serie de A_k converge, y por lo tanto S_n converge uniformemente. Por el Teorema de Dini S_n converge a f . \square

Ejemplo 0.2.

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π periódica tal que $f(x) = |x|$ con $x \in [-\pi, \pi]$. Hallemos la serie de Fourier de esta función.

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$
- $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \operatorname{sen}(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \right) \Big|_0^{\pi}$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ 4/\pi k^2 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$
- $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx = 0$.

Como f es continua y derivable a trozos se cumple que:

$$S_n(f) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(kx) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S_\infty(f) = f(x)$$

Tenemos que S_n converge puntualmente a f . Veamos si converge uniformemente.

$$\sum_{k=1}^n |a_k| + |b_k| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \right| < \sum_{k=1}^n \frac{2}{k^2}$$

Como la serie $\sum_{k=1}^n 2/k^2$ converge también lo hará $\sum_{k=1}^n |a_k| + |b_k|$. De modo que f se encuentra en las hipótesis del teorema 0.4 y por lo tanto converge uniformemente a f . En este caso la serie de Fourier es una excelente aproximación de f . En la figura 3 se puede ver como la sucesión $S_n(f)$ tiende a f muy rápidamente. \circ

Proposición 0.5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable, de período 2π y su derivada continua a trozos. Sean $a_n(f)$ y $b_n(f)$ los coeficientes de Fourier de f y $a_n(f')$ y $b_n(f')$ los coeficientes de Fourier de f' . Entonces:

- $a_0(f') = 0$.
- $a_k(f') = k b_k(f)$.
- $b_k(f') = -k a_k(f)$.

Demostración:

$$a_0(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0 \quad (\text{por ser } f \text{ de período } 2\pi).$$

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \underbrace{f(x) \cos(kx)}_{=0} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx = k b_k(f).$$

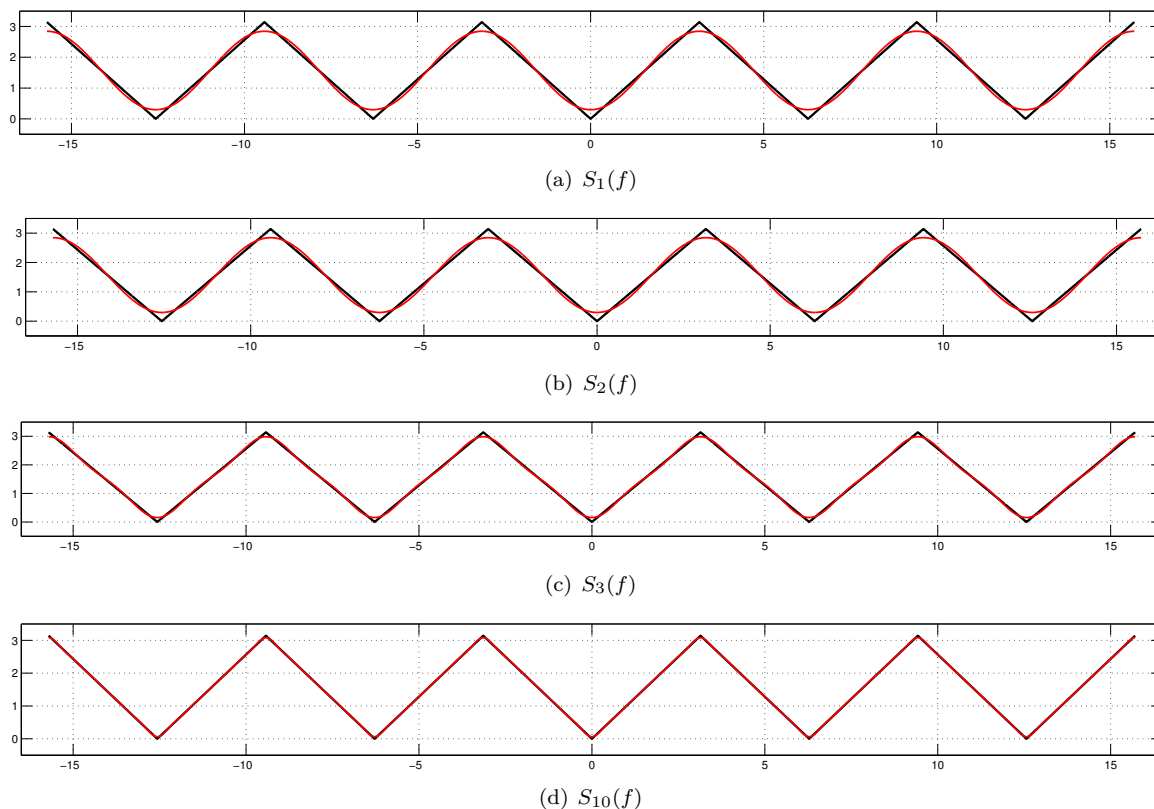


FIGURA 3. Serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$ con $x \in [-\pi, \pi]$.

$$b_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen}(kx) dx = \frac{1}{\pi} \underbrace{f(x) \operatorname{sen}(kx) \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = -ka_k(f).$$

Criterio: Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Si $\sum a_n^2$ converge, entonces $\sum \frac{|a_n|}{n}$ converge.
 Demostración:

Usando que $(|a_n| - \frac{1}{n})^2 \geq 0$ se tiene que $a_n^2 + \frac{1}{n^2} \geq 2\frac{|a_n|}{n}$. Luego por criterios de comparación se cumple que $\sum \frac{|a_n|}{n}$ converge.

Proposición 0.6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable con derivada continua, de período 2π . Entonces

$$S_n \xrightarrow{c.u} f$$

Demostración: Por la proposición 0.4 basta con probar que $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)|$ converge.

Por la desigualdad de Parseval sabemos que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2(f') + b_k^2(f')$ converge. Luego por el criterio de arriba se tiene que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k}$ converge. Por la proposición 0.5 se tiene que $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)|$ converge.

0.4. Series de Fourier para funciones $2L$ periódicas

Hasta ahora hemos trabajamos con funciones de período 2π . Sin embargo se puede razonar de forma análoga para funciones de período $2L$, con L cualquier real. Más genéricamente, nos consideraremos el espacio vectorial real:

$$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f \text{ es continua a trozos y } 2L \text{ periódica}\}$$

con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)g(x) dx.$$

Para formar funciones $2L$ periódicas, ahora debemos considerar el conjunto ortonormal:

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right), \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \dots \right\}.$$

Se puede verificar rápidamente que las funciones $\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ y $\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ son $2L$ periódicas.

La serie de Fourier para una función $2L$ será:

$$S_{\infty}(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

donde los coeficientes de Fourier son:

$$a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_k = \langle f, \cos(kx) \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$$

$$b_k = \langle f, \operatorname{sen}(kx) \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Todos los teoremas y corolarios vistos siguen siendo válidos para funciones $2L$ periódicas.

0.5. Extensiones pares e impares.

Se desea escribir la función $f(x) = x(x - \pi)$ con $x \in [0, \pi]$ como una suma infinita de senos y cosenos. Si consideramos cualquier función periódica continua y derivable a trozos definida en todo \mathbb{R} que valga $x(x - \pi)$ en $[0, \pi]$ sabemos que en ese intervalo convergerá puntualmente a f (teorema de Dini 0.3). Consideremos las siguientes funciones de la imagen 4.

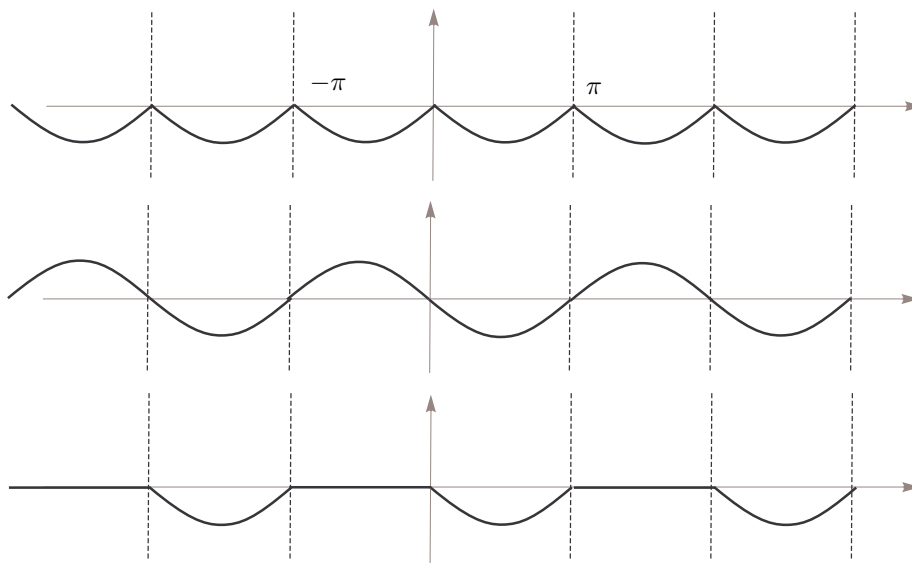


FIGURA 4. Posibles extensiones de la función $x(x - \pi)$ con $x \in [0, \pi]$.

Todas las funciones valen $x(x - \pi)$ cuando $x \in [0, \pi]$. La primera función, es la repetición de $x(x - \pi)$ con $x \in [0, \pi]$ en todos los reales. La segunda es una extensión impar de f en $[-\pi, \pi]$ y la repetición de este intervalo. La tercera es la función nula entre $[-\pi, 0)$ y la repetición del intervalo $[-\pi, \pi]$.

Todas estas funciones se encuentran en las hipótesis del corolario del teorema de Dini y por lo tanto se cumple que su serie de Fourier converge puntualmente a las funciones representadas. Las series de Fourier de estas funciones serán distintas ya que las funciones son distintas. Sin embargo, todas las series de Fourier deberán converger puntualmente a $f(x) = x(x - \pi)$ cuando $x \in [0, \pi]$. Así como consideramos esas tres extensiones periódicas, continuas y derivables a trozos de f , podríamos

haber considerado infinitas extensiones periódicas más. No es necesario que tenga periodo 2π , basta con que la función sea periódica. En otras palabras, tenemos infinitas formas distintas de escribir $f(x) = x(x - \pi)$ con $x \in [0, \pi]$ como una suma infinita de senos y cosenos.

Si queremos escribir f como una función infinita de cosenos (con $b_k = 0$) basta con tomar una extensión par, como la primera función de la figura. Si consideramos esta función:

- $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(x - \pi) = -\frac{\pi^2}{3}$.
- $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(x - \pi)\cos(kx) = 2\frac{1 - \cos(k\pi)}{k^2} = 2\frac{1 - (-1)^k}{k^2}$.
- $b_k = 0$.

Finalmente:

$$x(x - \pi) = -\frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^k}{k^2} \cos(kx), \quad x \in [0, \pi].$$

Si ahora quisiéramos escribir a f como una suma de senos, ahora deberíamos tomar una extensión impar, como la segunda función de la figura. En este caso:

- $a_0 = 0$.
- $a_k = 0$.
- $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(x - \pi)\sen(kx) = 4\frac{\cos(kx) - 1}{\pi k^3} = 4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3}$.

La serie que obtenemos ahora es:

$$x(x - \pi) = \sum_{k=1}^{+\infty} 4\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} \sen(kx), \quad x \in [0, \pi].$$

Observación:

Notar que tanto la extensión par como la impar, la fórmula analítica de la función es $x(x - \pi)$ SOLO en el intervalo $x \in [0, \pi]$. Si fuera del intervalo se tuviera la misma fórmula, el gráfico sería la parábola. Fuera de este intervalo, la función tiene otra fórmula que no fue necesario calcular para realizar la serie de Fourier. Considerando la extensión par o impar, está MAL decir que:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x(x - \pi)\cos(kx) \, dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x(x - \pi)\sen(kx)$$

ya que la extensión no tiene esa fórmula en el intervalo $[-\pi, 0)$. Si esto fuera cierto, la serie de Fourier sería la misma independientemente de la extensión que hagamos. Esto no puede suceder ya que las series de Fourier de las distintas extensiones deben converger a cosas distintas. \bigcirc

Ecuaciones en derivadas parciales

En este capítulo daremos una introducción a las ecuaciones en derivadas parciales. Estudiaremos principalmente dos ecuaciones conocidas como la ecuación de calor y la ecuación de ondas.

0.1. Introducción

Hasta ahora hemos estado estudiando ecuaciones diferenciales de una única variable. Las soluciones a los problemas vistos hasta ahora solo dependían del tiempo. Pero no hemos visto funciones que dependan de dos o más variables, donde en la ecuación diferencial puede relacionar la función con sus derivadas parciales.

En este capítulo veremos algunos ejemplos sencillos de funciones de dos variables que dependen del tiempo y de la posición. Dada una función $U(t, x)$, tendremos ecuaciones que relacionen U con sus derivadas temporales (U_t, U_{tt}, \dots) y sus derivadas dimensionales (U_x, U_{xx}, \dots).

A diferencia del resto del curso, trataremos de resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales y no realizaremos un estudio cualitativo.

0.2. Ecuación de calor

Comenzaremos estudiando esta ecuación en derivadas parciales. Consideremos una barra de largo L adiabática salvo en los bordes de la barra. Esto quiere decir que intercambia calor con el ambiente solo por los bordes (con un aislante alrededor de la barra). Además, consideraremos que la barra es delgada, o tiene variaciones de temperatura transversales despreciables con respecto a la variación de temperatura longitudinal. Por esta razón consideraremos que la temperatura de la barra en determinado instante depende solo de la posición longitudinal y tiene temperatura constante en cada sección transversal. Con estas hipótesis, se puede obtener que la ecuación que rige en este sistema es:

$$(0.1) \quad U_t(t, x) = U_{xx}(t, x)$$

donde $U(t, x)$ representa la temperatura de la barra en el tiempo t en la posición x . Esta ecuación tiene infinitas soluciones distintas. No solo depende de la temperatura inicial, si no que también depende de la transferencia de calor en los bordes de la barra. Dada una distribución inicial de temperatura, la temperatura de la barra no evolucionará igual si ponemos un hielo en los bordes o si colocamos algo caliente. Consideraremos el siguiente problema con condiciones iniciales, conocido como problema de Cauchy-Dirichlet:

$$(0.2) \quad \begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, L) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, L] \\ U_t = U_{xx} & (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ U(0, x) = u_0(x) & x \in [0, L] \\ U(t, 0) = f_1(t) & t \in [0, +\infty) \\ U(t, L) = f_2(t) & t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

donde a la primer condición se la referirá como condición inicial ya que es la distribución de temperaturas en el tiempo $t = 0$. Las últimas dos son las conocidas como condiciones de borde.

0.2.1. Ecuación de calor con condiciones de bordes nulas

Empezaremos tratando de resolver el problema de Cauchy-Dirichlet simplificando las condiciones de bordes. Con esta simplificación, el problema a resolver sería el siguiente:

$$(0.3) \quad \begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, L) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, L] \\ U_t = U_{xx} \text{ para todo } (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ U(0, x) = u_0(x) \text{ para todo } x \in [0, L] \text{ con } u_0 \text{ continua en } [0, L] \\ u_0(0) = u_0(L) = 0 \\ U(t, 0) = U(t, L) = 0 \text{ para todo } t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Físicamente, se podría obtener este problema si la barra está en contacto con algo a cero grados en sus bordes. Observar que si consideramos el caso particular donde u_0 es la función nula, tenemos una barra con temperatura inicial cero y sus bordes a temperatura constante cero. En este caso, no

hay diferencia de temperaturas y por lo tanto no hay transferencia de calor, manteniéndose la barra en equilibrio térmico a cero grados. La solución a ese problema sería la solución trivial $U(t, x) = 0$.

Si u_0 es distinto de la función nula, la función $U(t, x) = 0$ no será una solución al problema ya que no verifica la condición inicial $U(0, x) = u_0(x)$.

Para resolverla utilizaremos un método conocido como **variables separables**. El mismo consiste en suponer que las soluciones son de la forma:

$$(0.4) \quad U(t, x) = T(t)X(x).$$

Suponiendo que existe una solución de este estilo, veamos que implica para T y X verificar la ecuación diferencial y las condiciones de borde del problema (0.3).

1. $U_t = U_{xx} \Rightarrow T'(t)X(x) = T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$ En esta última igualdad tenemos una función que depende del tiempo igualado a una función que depende de la posición. De modo que:

$$\frac{d}{dt} \frac{T'}{T}(t) = \frac{d}{dx} \frac{X''}{X}(x) = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T}(t) = \mu \text{ (cte)} \Rightarrow \frac{T'}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x) = \mu \text{ (cte)}$$

Por lo tanto, podemos obtener el siguiente problema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias en vez de una ecuación en derivadas parciales.

$$\begin{cases} T' - \mu T = 0 \\ X'' - \mu X = 0 \end{cases}$$

2. Como $0 = U(t, 0) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) = 0$ o $X(0) = 0$. Si $T(t)$ fuese la función nula tendríamos que $U(t, x) = 0$ la cual no verifica la condición inicial si u_0 no es la función nula. Por lo tanto la opción que nos sirve es $X(0) = 0$.
3. $0 = U(t, L) = T(t)X(L) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$. Descartamos la opción $T(t) = 0$ por la misma razón que en el caso anterior.

En resumen:

$$\begin{cases} T'(t) - \mu T(t) = 0 \\ X''(x) - \mu X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

De la primera condición obtenemos que:

$$T' - \mu T = 0 \Rightarrow T(t) = C_0 e^{\mu t} \text{ con } C_0 \in \mathbb{R}.$$

De la ecuación $X'' - \mu X = 0$ procederemos calculando P el polinomio característico.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \mu = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \mu$$

En consecuencia, la forma de $X(x)$ depende del valor de μ . Discutiremos según los posibles valores de μ .

- Caso (a): $\mu > 0$.

Si $\mu > 0$ existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mu = \alpha^2$.

$$\mu = \alpha^2 \Rightarrow X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$

Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(L) = Ae^{\alpha L} + Be^{-\alpha L} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } A = B = 0 \end{cases}$$

La primera condición no es válida ya que supusimos $\mu = \alpha^2 > 0$. La segunda tampoco es válida ya que obtendríamos $X(x) = 0$ lo que resultaría nuevamente en la función $U(t, x) = 0$. Por ende, μ no podrá ser mayor a cero.

- Caso (b): $\mu = 0$.

$\mu = 0$ implica que $X'' = 0$, integrando dos veces, obtenemos que

$$X(x) = Ax + B$$

Nuevamente, imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} X(0) = B = 0 \\ X(L) = A.L + B \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$$

Nuevamente se obtendría la solución trivial la cual no es válida. Por lo tanto, μ tampoco podrá ser cero.

- Caso(c): $\mu < 0$.

Si μ es negativo, existe algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mu = -\alpha^2$.

$$\mu = -\alpha^2 \Rightarrow X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sen(\alpha x)$$

Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} X(0) = A = 0 \\ X(L) = B\sen(\alpha L) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ o } \sen(\alpha L) = 0 \end{cases}$$

Si consideramos la primera opción, obtenemos la solución trivial. Si se verificará la segunda opción:

$$\begin{aligned} \sen(\alpha L) = 0 &\Rightarrow \alpha L = n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}. \\ &\Rightarrow X(x) = B\sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \end{aligned}$$

Nuestra solución al problema de Cauchy-Dirichlet con condiciones iniciales nulas sería de la forma:

$$U(t, x) = X(x)T(t) = B\sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)C_0e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}, \quad n \in \mathbb{N}.^1$$

Llamando $b = C_0B$:

$$(0.5) \quad U(t, x) = b\sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}$$

Esta función verifica la ecuación diferencial y las condiciones de borde. Si evaluamos esta función en tiempo cero:

$$U(0, x) = b\sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Esta función podría o no coincidir con u_0 . Si u_0 no tiene esta forma, la función encontrada no será solución al problema (0.3). Sin embargo, es fácil verificar que si consideramos una función que sea una suma de funciones con la forma de (0.5) la misma también es solución con condición inicial que es la suma de las condiciones iniciales.

Concretamente, enunciamos el resultado cuya demostración es muy fácil.

Proposición 0.1. Sean $U_1 = b_1\sen\left(\frac{n_1\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n_1\pi}{L}\right)^2t}$ y $U_2 = b_2\sen\left(\frac{n_2\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n_2\pi}{L}\right)^2t}$ y consideremos la función $U = U_1 + U_2$. Entonces U es solución de la siguiente ecuación:

$$(0.6) \quad \begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, L) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, L] \\ U_t = U_{xx} \text{ para todo } (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ U(0, x) = b_1\sen\left(\frac{n_1\pi}{L}x\right) + b_2\sen\left(\frac{n_2\pi}{L}x\right) \\ U(t, 0) = U(t, L) = 0 \text{ para todo } t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Lo mismo sucede si sumamos 3, 4, 5 o una cantidad finita de funciones con la forma (0.5). En conclusión, sabemos resolver el problema de Cauchy-Dirichlet si la condición inicial, es una combinación lineal finita de senos con período $2L/n$.

¹Sea $n \in \mathbb{N}$, si consideramos el entero $m = -n$ tenemos que $\sen(mx) = -\sen(nx)$ y $(m)^2 = n^2$. En consecuencia las soluciones son las mismas si consideramos $n \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Se puede probar, de forma análoga, el siguiente resultado más general:

Proposición 0.2.

Sea $\{b_k\}$ una sucesión de números reales y $n \in \mathbb{N}$. La función

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$$

es solución al problema :

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, L) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, L] \\ U_t = U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ U(0, x) = \sum_{k=1}^n b_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \quad x \in [0, L] \\ U(t, 0) = U(t, L) = 0 \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Ambos proposiciones se verifican rápidamente verificando las condiciones del problema de Cauchy-Dirichlet .

Ejemplo 0.1.

Resolveremos el siguiente problema de la ecuación de calor con una barra de largo $L = \pi$.

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, \pi) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, \pi] \\ U_t = U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \\ U(0, x) = 3 \operatorname{sen}(4x) \quad x \in [0, \pi] \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0 \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

De la deducción anterior, sabemos que la función $U(t, x) = b \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$ verifica las condiciones de borde y la ecuación diferencial. Podemos ver que si consideramos $n = 4$ y $b = 3$, esta función también verifica la condición inicial. Determinadas estas constantes, la solución a este problema es:

$$U(t, x) = 3 \operatorname{sen}(4x) e^{-16t}.$$

Verifiquemos que esta función sea solución al problema planteado.

$$\begin{cases} U_t = -3.16 \operatorname{sen}(4x) e^{-16t} \\ U_x = 3.4 \cos(4x) e^{-16t} \\ U_{xx} = -3.16 \operatorname{sen}(4x) e^{-16t} \end{cases} \Rightarrow U_t = U_{xx}.$$

Si evaluamos la función en los bordes:

$$U(t, 0) = 0 \quad U(t, L) = 0$$

Falta verificar la condición inicial.

$$U(0, x) = 3 \operatorname{sen}(4x)$$

Hemos encontrado una solución a este problema. ○

Ejemplo 0.2.

Ahora resolveremos un nuevo problema con distinta condición inicial. Consideraremos nuevamente una barra de largo $L = \pi$.

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, \pi) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, \pi] \\ U_t = U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \\ U(0, x) = 2 \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x) \quad x \in [0, \pi] \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0 \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Si ahora consideráramos una solución de la forma $U(t, x) = b \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$, vemos que esta no verifica la condición inicial. Sin embargo, si consideramos la suma de dos funciones de este tipo con $b_1 = 2$, $n_1 = 3$ y $b_2 = 1$, $n_2 = 5$ podemos probar que la misma es solución a este problema.

$$U(t, x) = 2 \operatorname{sen}(3x) e^{-9t} + \operatorname{sen}(5x) e^{-25t}.$$

Por lo resuelto anteriormente, sabemos que esta función verifica la ecuación diferencial y condiciones de borde. Si evaluamos en tiempo cero:

$$U(0, x) = 2 \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x).$$

Por lo tanto, la función definida es solución al problema. ○

Pues bien, pudimos encontrar una solución al problema de Cauchy-Dirichlet si la condición inicial es una combinación lineal de senos. ¿Pero que sucede si la condición inicial es distinta? ¿Cual es la solución al problema de Cauchy-Dirichlet con condiciones de borde nulas si tenemos una condición inicial, por ejemplo, $u_0(x) = x(x - L)$? ¿Vale considerar una suma infinita de seno?

Para obtener que la suma de soluciones a la ecuación diferencial de calor también era solución, utilizamos la linealidad de la derivada. Sin embargo, la linealidad de la derivada no se tiene porque cumplir cuando tenemos una suma infinita.

Esta última afirmación se basa en que cuando hablamos de una suma infinita, estamos hablando de una convergencia. La expresión $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ no es más que el límite de una sucesión de funciones. Si consideramos como candidato a solución la función $U(t, x) = \sum_0^{+\infty} U_k(t, x)$, donde U_k son de la forma de la ecuación (0.5), $U(t, x)$ no es más que la función a la cual converge la sucesión de funciones $S_n(t, x) = \sum_{k=0}^n U_k(t, x)$. Por la linealidad de la derivada sabemos que S_n verifica la ecuación de calor.

$$S_{n_t} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n U_k = \sum_{k=0}^n \frac{dU_k}{dt} = \sum_{k=0}^n \frac{d^2 U_k}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=0}^n U_k = S_{n_{xx}}.$$

Pero por más que S_n verifica la ecuación diferencial la función a la cual converge (puntual o uniformemente) no tiene porque verificar la ecuación de calor. Si teníamos una sucesión de funciones f_n que convergiera puntual o incluso uniformemente a una función f , esto no implicaba que f'_n converja a f' . Esto no se cumple ni pidiendo la convergencia más fuerte (la convergencia uniforme). En otras palabras, no se tiene porque cumplir que:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} U_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{dU_n}{dt} \quad \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=0}^{+\infty} U_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^2 U_n}{dx^2}.$$

Sin embargo si esto último se cumpliera podemos ver que $U(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t, x)$ verificaría la ecuación de calor. Dado que $U_{k_t} = U_{k_{xx}}$ tendríamos que:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{dU_k}{dt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d^2 U_k}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k.$$

El teorema que vimos en la sección de convergencia para la derivada, afirmaba que si una sucesión de funciones f_n convergía en un punto x_0 y sus derivadas f'_n convergían uniformemente a una función g , entonces se cumplía que f_n también convergía uniformemente a una función f y esta verificaba que $f' = g$. En los siguientes teoremas, tenemos la aplicación directa de el teorema visto anteriormente pero para las series.

Proposición 0.3 (Derivada respecto de t).

Sea $S_n(t, x) = \sum_{k=1}^n U_k(t, x)$. Si:

- $S_n(t, x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t, x)$.
- $S_{n_t}(t, x) = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} U_k(t, x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t, x)$.

Entonces:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t, x).$$

La demostración es directa del teorema visto en el capítulo de convergencia. Análogamente, se cumple con la derivada respecto a la posición (o sea respecto de x).

Observación: Basta con pedir que $S_n(t_0, x_0)$ converja en algún punto (t_0, x_0) . No es necesario pedir que $S_n(t, x)$ converja uniformemente. Se pone la hipótesis de que $S_n(t, x)$ converge uniformemente, porque es de esta forma como lo vamos a usar más adelante.

Proposición 0.4 (Derivada respecto de x).

Sea $S_n(t, x) = \sum_{k=1}^n U_k(t, x)$. Si:

- $S_n(t, x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t, x)$.
- $S_{n_x}(t, x) = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} U_k(t, x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} U_k(t, x)$

Entonces:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} U_k(t, x).$$

Proposición 0.5 (Derivada segunda respecto de x).

Sea $S_n(t, x) = \sum_{k=1}^n U_k(t, x)$. Si:

- $S_n(t, x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t, x)$.
- $S_{n_x}(t, x) = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} U_k(t, x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} U_k(t, x)$.
- $S_{n_{xx}}(t, x) = \sum_{k=1}^n \frac{d^2}{dx^2} U_k(t, x)$ converge uniformemente a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} U_k(t, x)$.

Entonces:

$$\frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} U_k(t, x).$$

Demostración:

Con los primeros dos items, por la proposición (0.4) sabemos que:

$$(0.7) \quad \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} U_k(t, x).$$

Ahora trataremos de aplicarle el mismo teorema a S_{n_x} . Dado que S_{n_x} y $S_{n_{xx}}$ convergen uniformemente, tenemos que:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dx} U_k(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2 U_k(t, x)}{dx^2}.$$

Luego, por lo obtenido en la ecuación 0.7 sabemos que:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2 U_k(t, x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d U_k(t, x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t, x) \right) = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t, x).$$

□

Teorema 0.1.

Sea $u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right)$ condición inicial del problema de Cauchy-Dirichlet . Si $\sum_{k=1}^n |b_k|$ es convergente entonces:

$$(0.8) \quad U(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$$

es solución al problema de Cauchy-Dirichlet con condición de bordes nulas y condición inicial $u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen}(kx)$. Además $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$ converge uniformemente.

Demostración:

Se verifican rápidamente las condiciones de borde e iniciales.

$$U(0, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) e^0 = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) = u_0(x)$$

$$U(t, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen}(0) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} = 0$$

$$U(t, L) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen}(k\pi) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} = 0$$

Probemos que U es continua en $[0, +\infty) \times [0, L]$. Sea $U_k(t, x) = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$ veamos que $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$ converge uniformemente.

$$|U_k| = \left| b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \right| \leq |b_k|, \quad t \in [0, +\infty)$$

en la última desigualdad se utilizó que la exponencial (con $t \geq 0$) y el seno son menores o iguales a 1. Por hipótesis sabemos que $\sum_{k=1}^n |b_k|$ es convergente y utilizando el criterio del mayorante concluimos que S_n converge uniformemente a U . Como S_n es continua en $[0, +\infty) \times [0, L]$, entonces U es continua en $[0, +\infty) \times [0, L]$.

Falta verificar la ecuación diferencial. Sea $U_k(t, x) = b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$ para que se cumpla la ecuación diferencial debemos ver si:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{dU_k}{dt} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} U_k \stackrel{?}{=} \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k = \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

Debemos verificar que S_{n_t} , S_{n_x} y $S_{n_{xx}}$ convergen uniformemente, para poder utilizar las proposiciones anteriores y deducir que U verifica la ecuación diferencial. Dado que $S_{n_t} = S_{n_{xx}}$, basta con verificar que S_{n_t} y S_{n_x} convergen uniformemente.

$$S_{n_t} = \sum_{k=1}^n U_{k_t} = \sum_{k=1}^n -b_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$|U_{k_t}| = \left| -b_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \right| \leq \left| b_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \right|$$

Excluimos a los bordes ya que las derivadas no están definidas en los bordes. Empezaremos probandolo para tiempos tal que $0 < \delta < t$. Para estos tiempos se cumple que:

$$|U_{k_t}| < \left| b_k \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \delta} \right|, \quad t > \delta > 0.$$

Como la serie de b_k converge, sabemos que $|b_k|$ está acotado por un número M .

$$|U_{k_t}| < M \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \delta} \quad t > \delta > 0,$$

la sucesión asociada a la sucesión de la derecha es convergente de modo que nuevamente por el criterio del mayorante concluimos que S_{n_t} converge uniformemente en $(\delta, +\infty) \times (0, L)$.

Luego por la proposición 0.3 se cumple que:

$$U_t = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t, x) \quad \text{para } t > \delta > 0.$$

Análogamente se puede proceder con S_{n_x} y deducir que converge uniformemente (para $t > \delta > 0$). Como $S_{n_t} = S_{n_{xx}}$ y S_{n_t} converge uniformemente también lo hace $S_{n_{xx}}$. Luego por la proposición 0.5 se cumple:

$$U_{xx} = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} U_k(t, x) \quad \text{para } t > \delta > 0.$$

Finalmente utilizando que $U_{k_t} = U_{k_{xx}}$:

$$U_t = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2}{dx^2} U_k(t, x) = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t, x) = U_{xx} \quad \text{para } t > \delta > 0.$$

Finalmente, dado $(t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L)$ consideramos $\delta > 0$ tal que $t > \delta > 0$ y haciendo el razonamiento anterior, tenemos probado el resultado.

□

Observación:

- Si bien $u_0(x)$ puede ser una función no derivable, al pasar un instante ($t > 0$) la función temperatura de la barra $U(t, x)$ va a ser C^∞ . Esto se debe a que si seguimos derivando U (temporal o espacialmente), gracias a la exponencial las series seguirán convergiendo uniformemente.

Ejemplo 0.3.

Veamos como resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, \pi) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, \pi] \\ U_t = U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, \pi) \\ U(0, x) = x(x - \pi) \quad x \in [0, \pi] \\ U(t, 0) = U(t, \pi) = 0 \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Como ya vimos en el capítulo Series de Fourier, la función $x(x - \pi)$ la podemos escribir como una suma infinita de senos. Para esto lo que hicimos fue considerar la extensión impar de la función en $[-\pi, \pi]$ y luego la repetición de este intervalo. Considerando esta extensión, se obtuvo que:

$$u_0(x) = x(x - \pi) = \sum_{k=1}^{+\infty} 4 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} \text{sen}(kx), \quad x \in [0, \pi].$$

En este caso los coeficientes de Fourier b_k son:

$$b_k = 4 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3}.$$

Dado que la serie de b_k converge, podemos utilizar el teorema 0.1 que nos afirma que la función

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} 4 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} \text{sen}(kx) e^{-k^2 t}$$

es una solución al problema. Si deseáramos verificar que esta función es solución, podemos verificar rápidamente las condiciones de bordes y la inicial. Para verificar la ecuación diferencial, debemos actuar de forma análoga a la demostración del teorema 0.1.

$$\begin{aligned} |U_k| &= \left| 4 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} \text{sen}(kx) e^{-n^2 t} \right| \leq \left| 4 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} \right| \leq \frac{8}{k^3} \Rightarrow \sum_{k=1}^n U_k \xrightarrow{c.u.} U. \\ |U_{k_x}| &= \left| 4k \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} \cos(kx) e^{-n^2 t} \right| \leq \left| 4 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \right| \leq \frac{8}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^n U_{k_x} \xrightarrow{c.u.} U_x. \\ |U_{k_t}| &= \left| -4k^2 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^3} \text{sen}(kx) e^{-k^2 t} \right| \leq \left| 4 \frac{(-1)^k - 1}{\pi k} e^{-n^2 \delta} \right|, \quad t > \delta > 0 \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n U_{k_t} \xrightarrow{c.u.} U_t \end{aligned}$$

donde con la última acotación de $|U_{k_t}|$ deducimos que la serie de U_{k_t} converge para tiempos mayores a δ . Tomando en cuenta que δ puede ser tan chico como queramos lo podemos concluir para cualquier tiempo positivo. Gracias a las proposiciones vistas anteriormente, con esto podemos concluir que U verifica la ecuación de calor. ○

Es de esperarse que a medida que vaya pasando el tiempo la temperatura de la barra se estabilice. En especial, si los bordes de la barra se encuentra algo a cero grados y fuera de eso la barra no recibe calor, uno esperaría que la temperatura de toda la barra tienda a cero grados. Veamos que esto si sucede.

Teorema 0.2.

Sea $U(t, x)$ de la forma (0.8) con la serie de b_k convergente la solución al problema de Cauchy-Dirichlet con condiciones de borde nulas. Entonces $U(t, x)$ tiende a la función nula cuando t tiende a más infinito.

Demostración:

Usando que $k \geq 1$:

$$|U(t, x)| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \right| < \left| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \right|$$

$$\Rightarrow |U(t, x)| \leq e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \right| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Para afirmar que el módulo tiende a cero utilizamos que la serie que aparece es la condición inicial la cual está acotada. \square

0.2.2. Ecuación de calor con condiciones de bordes constantes

Ahora estudiaremos el problema:

$$(0.9) \quad \begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, L) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, L] \\ U_t = U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ U(x, 0) = u_0(x) \quad x \in [0, L] \\ U(t, 0) = A \in \mathbb{R} \quad t \in [0, +\infty) \\ U(t, L) = B \in \mathbb{R} \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

0.2.2.1. Solución estacionaria

Antes de estudiar el problema anterior, trataremos de encontrar una solución estacionaria (no depende del tiempo) al problema:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, L) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, L] \\ U_t = U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ U(t, 0) = A \in \mathbb{R} \quad t \in [0, +\infty) \\ U(t, L) = B \in \mathbb{R} \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Si la solución es estacionaria, la solución se mantendrá como en su condición inicial. Si suponemos que este problema tiene una solución estacionaria $U(t, x) = u_e(x)$ tendríamos que:

$$U_{e_t} = 0 = U_{e_{xx}} \Rightarrow u_e(x) = ax + b$$

Para que verifique las condiciones de borde:

$$u_e(0) = b = A, \quad u_e(L) = aL + b = B \Rightarrow u_e(x) = \frac{B - A}{L}x + A.$$

Este resultado es intuitivo ya que si la barra es de un material homogéneo, se esperaría que la distribución de temperaturas fuera lineal.

0.2.2.2. Solución no estacionaria

Si buscamos una solución distinta a la estacionaria (condición inicial distinta a $u_e(x)$), podemos empezar tratando de resolver el problema por el método de variables separables como se hizo en el problema con condiciones de borde nulas. Supongamos que la solución tiene la forma:

$$U(t, x) = T(t)X(x)$$

En este caso, si imponemos las condiciones de borde tenemos que:

$$U(t, 0) = T(t)X(0) = A \Rightarrow T(t) = cte \Rightarrow U(t, x) = U(x) = u_e(x)$$

Si buscamos soluciones de la forma $U(t, x) = T(t)X(x)$ la única que encontramos es la solución estacionaria, la cual no nos sirve si nuestra condición inicial no es la recta u_e . Este método no nos sirve directamente cuando las condiciones de borde son distintas a las nulas.

Intuitivamente podríamos pensar que la solución a este problema podría ser la suma de una función estacionaria más una transitoria. A medida que pasa el tiempo uno esperaría que la temperatura tienda a estabilizarse, tendiendo a u_e (la función transitoria tienda a la función nula). Consideremos una posible solución al problema de la forma:

$$U(t, x) = u_e(x) + \tilde{U}(t, x)$$

Imponiendo que esta función sea solución, podemos ver que debe verificar la función \tilde{U} . De la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} U_t &= \tilde{U}_t \\ U_{xx} &= U_{e_{xx}} + \tilde{U}_{xx} = \tilde{U}_{xx} \Rightarrow \tilde{U}_t = \tilde{U}_{xx} \end{aligned}$$

Condiciones de borde:

$$U(t, 0) = u_e(0) + \tilde{U}(t, 0) = A + \tilde{U}(t, 0) = A \Rightarrow \tilde{U}(t, 0) = 0$$

$$U(t, L) = u_e(L) + \tilde{U}(t, L) = B + \tilde{U}(t, L) = B \Rightarrow \tilde{U}(t, L) = 0$$

Condición inicial:

$$U(0, x) = u_e(x) + \tilde{U}(0, x) = u_0(x) \Rightarrow \tilde{U}(0, x) = u_0(x) - u_e(x)$$

En resumen, la función \tilde{U} deberá ser solución a:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, L) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, L] \\ U_t = U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ U(x, 0) = u_0(x) - u_e(x) \quad x \in [0, L] \\ U(t, 0) = U(t, L) = 0 \in \mathbb{R} \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Hemos transformado el problema original de condiciones de borde constante en uno con condiciones de borde nulo. Si sabemos resolver este último, sumándole la solución estacionaria ya tendremos una solución al problema original.

Ejemplo 0.4.

Trataremos de encontrar una solución al siguiente problema:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, 1) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, 1] \\ U_t = U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, 1) \\ U(x, 0) = \text{sen}(\pi x) + x \quad x \in [0, 1] \\ U(t, 0) = 0 \in \mathbb{R} \quad t \in [0, +\infty) \\ U(t, L) = 1 \in \mathbb{R} \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}.$$

Para esto utilizaremos lo que vimos recién. La solución estacionaria este problema es:

$$u_e(x) = x.$$

Si suponemos que una posible solución a este problema es de la forma:

$$U(t, x) = u_e(x) + \tilde{U}(t, x)$$

obtenemos que la función \tilde{U} debe ser solución a:

$$\begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, 1) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, 1] \\ U_t = U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, 1) \\ U(x, 0) = \text{sen}(\pi x) \quad x \in [0, 1] \\ U(t, 0) = U(t, L) = 0 \in \mathbb{R} \quad t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Este problema ya lo sabemos resolver. En este caso no es necesario encontrar la serie de Fourier de $u_0(x)$ ya que la misma función ya tiene la forma $\text{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)$. La solución a este problema será de la forma de la ecuación (0.5).

$$\tilde{U}(t, x) = \text{sen}(\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$$

Por ende, la solución al problema original es:

$$U(t, x) = x + \text{sen}(\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}$$

○

0.3. Ecuación de la cuerda

Ahora analizaremos el movimiento en el plano de una cuerda flexible. Definiremos $U(t, x)$ como la altura de la cuerda en la posición x y tiempo t , donde la altura la medimos desde la posición media de la cuerda (o la posición de equilibrio). Esto se encuentra representado en la figura (1). Considerando que cada punto de la cuerda se mueve sólo perpendicularmente al eje ox y no hay rozamiento, la ecuación que rige el movimiento de la cuerda es:

$$U_{tt} = c^2 U_{xx}$$

donde c es una constante real. Al fijar un tiempo t_0 la función $U(t_0, x)$ sería como sacarle una foto a la cuerda en ese instante. La derivada respecto al tiempo U_t representa las velocidades de cada punto y la derivada segunda U_{tt} representa las aceleraciones.

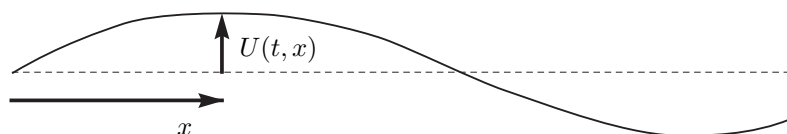


FIGURA 1. Ecuación de la cuerda

Intuitivamente uno pensaría que para que el problema quede definido esta vez necesitaríamos más condiciones. No solo necesitaríamos la posición inicial ($U(0, x)$) si no también las velocidades iniciales en cada punto para saber como se van a mover ($U_t(0, x)$). A su vez el movimiento también será distinto si tenemos una cuerda con extremos fijos, una cuerda con extremos móviles, una cuerda infinita, etc.

0.3.1. Cuerda con extremos fijos

Empezaremos analizando el caso de una cuerda de largo L con extremos fijos. El problema a considerar es el siguiente:

$$(0.10) \quad \begin{cases} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, L) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, L] \\ U_{tt} = c^2 U_{xx} & (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ U(0, x) = u_0(x) & x \in [0, L] \\ U_t(0, x) = v_0(x) & x \in [0, L] \\ U(t, 0) = U(t, L) = 0 & t \in [0, +\infty) \end{cases} .$$

En este caso, obtendríamos una solución estacionaria si u_0 y v_0 son las funciones nulas. Si alguna de estas no es nula, la cuerda se moverá. Estudiaremos el caso no trivial donde al menos una de estas dos funciones no es nula.

Trataremos de resolverlo de la misma forma que la ecuación de calor, a través del método de variables separables. Si la solución al problema es de la forma $U(t, x) = T(t)X(x)$ tenemos que:

1.

$$U_{tt} = c^2 U_{xx} \Rightarrow T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x) \Rightarrow \frac{T''}{T}(t) = c^2 \frac{X''}{X}(x)$$

De forma análoga a lo que realizamos en la ecuación de calor, dado que en la última igualdad tenemos una función que depende del tiempo igualada a otra función que depende de la posición, ambas deben ser constantes.

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T}(t) = \frac{X''}{X}(x) = \mu \Rightarrow \begin{cases} T'' - \mu c^2 T = 0 \\ X'' - \mu X = 0 \end{cases}$$

Pasamos de una ecuación en derivadas parciales a 2 ecuaciones ordinarias de segundo orden.

2. $U(t, 0) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) = 0$ o $X(0) = 0$. De la primera opción obtendríamos la solución trivial que solo es válida si u_0 y v_0 es la función nula, de modo que nos quedaremos con la segunda opción $X(0) = 0$.
3. $U(t, L) = T(t)X(L) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$. Razonando de forma análoga a la condición de borde anterior descartamos que $T(t) = 0$.

Si analizamos las condiciones de borde obtenidas para $X(x)$ y la ecuación diferencial que debe cumplir, son las mismas que las obtenidas de la ecuación de calor. Por lo tanto, si discutiéramos según las raíces del polinomio característico la forma de la función $X(x)$ alcanzaríamos el mismo resultado. En consecuencia:

$$\mu = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$X(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Nos falta saber la forma de T . De la ecuación diferencial tenemos que:

$$T'' - \mu c^2 T = 0 \Rightarrow T'' + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 c^2 T = 0$$

El polinomio característico de este problema es:

$$\lambda^2 + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 c^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 c^2$$

$$T(t) = B \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + C \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi c}{L}t\right)$$

Ahora si, la solución a (0.10) sería:

$$U(t, x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(B \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + C \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) \right)$$

$$(0.11) \quad U(t, x) = \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(E \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + F \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) \right)$$

Para que esta función sea solución deberá verificar las condiciones iniciales.

$$U(0, x) = E \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$U_t(t, x) = \frac{k\pi c}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(-E \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + F \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) \right)$$

$$\Rightarrow U_t(0, x) = F \frac{k\pi c}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Si las condiciones iniciales no tienen esta forma, procederemos a considerarnos la serie de Fourier, al igual que en el caso de la ecuación de calor.

Teorema 0.3.

Sea $u_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ y $v_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} b'_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ las condiciones iniciales del problema (0.10).

Si

$$|b_k| < \frac{M}{k^4} \quad |b'_k| < \frac{N}{k^3} \quad N, M \in \mathbb{R}$$

entonces:

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(A_k \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + B_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) \right)$$

con $A_k = b_k$ y $B_k = b'_k \frac{L}{k\pi c}$ es solución al problema (0.10).

Demostración:

Empecemos verificando las condiciones de borde y la posición inicial.

$$U(t, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(0) \left(b_k \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + b'_k \frac{L}{k\pi c} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) \right) = 0$$

$$U(t, L) = \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(k\pi) \left(b_k \cos\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) + b'_k \frac{L}{k\pi c} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi c}{L}t\right) \right) = 0$$

$$U(0, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left(b_k \cos(0) + b'_k \frac{L}{k\pi c} \text{sen}(0) \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) = u_0(x)$$

Para verificar la velocidad inicial v_0 , debemos derivar la función U . Para esto necesitaremos la proposición (0.3). Llamaremos $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$, con U_k los términos de la serie de U . Dado que U_k tiene la forma de la ecuación (0.10) verifican que $U_{ktt} = c^2 U_{kxx}$. Debemos verificar que S_n y S_{nt} convergen uniformemente para utilizar la proposición mencionada. Con las acotaciones de las hipótesis de b_k y b'_k obtenemos que:

$$A_k < \frac{M}{k^4} \quad B_k < \frac{L}{\pi c} \frac{N}{k^4}$$

$$|U_k| = \left| \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left(A_k \cos \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) + B_k \text{sen} \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) \right) \right| \leq |A_k| + |B_k|$$

$$|U_k| < \frac{M}{k^4} + \frac{L}{\pi c} \frac{N}{k^4} \Rightarrow S_n \xrightarrow{c.u.} U.$$

Veamos ahora con la derivada S_{nt} .

$$S_{nt} = \sum_{k=1}^n U_{kt} = \sum_{k=1}^n \frac{k\pi c}{L} \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left(-A_k \text{sen} \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) + B_k \cos \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) \right)$$

$$|U_{kt}| = \left| \frac{k\pi c}{L} \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left(-A_k \text{sen} \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) + B_k \cos \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) \right) \right|$$

$$|U_{kt}| \leq \frac{k\pi c}{L} (|A_k| + |B_k|) < \frac{k\pi c}{L} \left(\frac{M}{k^4} + \frac{L}{k\pi c} \frac{N}{k^3} \right) = \frac{\pi c}{L} \frac{M}{k^3} + \frac{N}{k^3} \Rightarrow S_{nt} \xrightarrow{c.u.} \sum_{k=1}^{+\infty} U_{kt}$$

Podemos afirmar gracias a la proposición 0.3 que:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{dU_k}{dt}$$

$$\Rightarrow U_t(0, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_{kt}(0, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\pi c}{L} \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) B_k = \sum_{k=1}^{+\infty} b'_k \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) = v_0(x).$$

Ahora si, hemos verificado todas las condiciones iniciales. La condición faltante es la ecuación en derivadas parciales. Para esto debemos proceder de igual manera que en la ecuación de calor. Ya hemos verificado que S_n y S_{nt} convergen uniformemente. Haría falta verificar que también lo hacen S_{ntt} , S_{nx} y S_{nxx} . Dado que $S_{ntt} = c^2 S_{nxx}$, si una de ellas converge también lo hará la otra. En resumen, resta verificar que S_{ntt} y S_{nxx} convergen uniformemente.

$$S_{ntt} = \sum_{k=1}^n U_{ktt} = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{k\pi c}{L} \right)^2 \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left(A_k \cos \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) + B_k \text{sen} \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) \right)$$

$$|U_{ktt}| = \left| \left(\frac{k\pi c}{L} \right)^2 \text{sen} \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left(A_k \cos \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) + B_k \text{sen} \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) \right) \right|$$

$$|U_{ktt}| \leq \left(\frac{k\pi c}{L} \right)^2 (|A_k| + |B_k|) < \frac{\pi c}{L} \left(\frac{\pi c}{L} \frac{N}{k^2} + \frac{M}{k^2} \right) \Rightarrow S_{ntt} \xrightarrow{c.u.} \sum_{k=1}^{+\infty} U_{ktt}$$

Esto nos permite afirmar que:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{dU_k}{dt} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2 U_k}{dt^2}.$$

Falta ver la convergencia de S_{nx} .

$$S_{nx} = \sum_{k=1}^n U_{kx} = \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{L} \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left(A_k \cos \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) + B_k \text{sen} \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) \right)$$

$$|U_{kx}| = \left| \frac{k\pi}{L} \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left(A_k \cos \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) + B_k \text{sen} \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) \right) \right|$$

$$|U_{kx}| \leq \frac{k\pi}{L} (|A_k| + |B_k|) < \frac{\pi}{L} \frac{M}{k^3} + \frac{1}{c} \frac{N}{k^3} \Rightarrow S_{nx} \xrightarrow{c.u.} \sum_{k=1}^{+\infty} U_{kx}$$

Con esto y sabiendo que $S_{n_{xx}}$ también converge uniformemente (dado que $S_{n_{tt}}$ lo hace) afirmamos gracias a la proposición 0.5 que:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2U_k}{dx^2}.$$

Luego usando que $U_{k_{tt}} = c^2U_{k_{xx}}$:

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2U_k}{dt^2} = c^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d^2U_k}{dx^2} = c^2 \frac{d^2U}{dx^2}.$$

□

Teorema 0.4.

La única solución C^2 al problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, L) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, L] \\ U_{tt} = c^2U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ U(0, x) = 0 \quad x \in [0, L] \\ U_t(0, x) = 0 \quad x \in [0, L] \\ U(t, 0) = 0 \quad t \in [0, +\infty) \\ U(t, L) = 0 \quad t \in [0, +\infty) \end{array} \right.$$

es la función nula.

Demostración:

Se verifica rápidamente que la función nula es solución a este problema. Debemos ver que no hay ninguna otra solución. Para la demostración, supondremos que hay otra solución $U(t, x)$ y utilizaremos la función de energía de la cuerda. Se puede probar, que la energía de la cuerda está representada por:

$$E(t) = \int_0^L U_x^2 + \frac{U_t^2}{c^2} dx$$

Veremos que la derivada respecto al tiempo de la energía es nula, es decir que la misma se conserva. Esto tiene sentido físico, ya que la ecuación de la cuerda considerada es válida si despreciamos el rozamiento.

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \int_0^L 2U_x U_{xt} + \frac{2U_t U_{tt}}{c^2} dx = 2 \int_0^L U_x U_{tx} + U_t U_{xx} dx = 2 \int_0^L \frac{d(U_x U_t)}{dx} dx \\ \dot{E}(t) &= 2[U_x(t, L)U_t(t, L) - U_x(t, 0)U_t(t, 0)] \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se utilizó que $U_{xt} = U_{tx}$, donde estamos utilizando la hipótesis de que la función sea de clase C^2 . Dado que $U(t, 0)$ y $U(t, L)$ son constantes, al derivada respecto al tiempo de estas funciones es cero, obteniendo que:

$$\dot{E}(t) = 0 \Rightarrow E(t) = E(0)$$

Podemos obtener la energía inicial evaluando en la fórmula $U_x(0, x)$ y $U_t(0, x)$. Por hipótesis sabemos que $U_t(0, x) = 0$ y como $U(0, t)$ es constante también lo es $U_x(0, x) = 0$ (no hay variaciones espaciales). De modo que la energía inicial es nula.

$$E(t) = \int_0^L U_x^2 + \frac{U_t^2}{c^2} = 0 \Rightarrow U_x = 0 \text{ y } U_t = 0 \Rightarrow U(t, x) = cte \Rightarrow U(t, x) = 0.$$

Al ser el integrando positivo, la única opción de que esa integral sea nula es que el integrando sea nulo. En consecuencia la función deberá ser constante y la única constante que verifica las condiciones de borde del problema es el cero. □

Teorema 0.5 (Unicidad).

El problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} U \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, +\infty) \times (0, L) \text{ y continua en } [0, +\infty) \times [0, L] \\ U_{tt} = c^2U_{xx} \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times (0, L) \\ U(0, x) = u_0(x) \quad x \in [0, L] \\ U_t(0, x) = v_0(x) \quad x \in [0, L] \\ U(t, 0) = f_1(t) \quad t \in [0, +\infty) \\ U(t, L) = f_2(t) \quad t \in [0, +\infty) \end{array} \right.$$

tiene a lo sumo una solución $U \in C^2$.

Demostración:

Supongamos que hay dos soluciones \tilde{U} y \bar{U} ambas C^2 . Si consideráramos la función:

$$U(t, x) = \tilde{U}(t, x) - \bar{U}(t, x)$$

la misma sería solución al problema con condiciones iniciales y de borde nulas. Al ser resta de dos funciones C^2 U también será C^2 . Luego por el teorema 0.4 se obtiene que:

$$U(t, x) = 0 \Rightarrow \tilde{U}(t, x) = \bar{U}(t, x).$$

□

0.3.2. Método de propagación de ondas para una cuerda infinita

Trataremos de encontrar la soluciones a la ecuación de la cuerda para una cuerda infinita.

$$U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad U_{tt} = c^2 U_{xx}.$$

Buscamos funciones $U(t, x)$ que verifiquen lo anterior. Esta vez trataremos de resolver esta ecuación realizando el cambio de variable:

$$\alpha = x + ct \quad \beta = x - ct$$

Con este cambio tenemos que:

$$U_x = U_\alpha \alpha_x + U_\beta \beta_x = U_\alpha + U_\beta$$

$$U_{xx} = U_{\alpha\alpha} \alpha_x + U_{\beta\alpha} \alpha_x + U_{\alpha\beta} \beta_x + U_{\beta\beta} \beta_x = U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} + U_{\alpha\beta} + U_{\beta\alpha}.$$

Si buscamos soluciones de clase C^2 podemos utilizar que $U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}$ obteniendo:

$$U_{xx} = U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} + 2U_{\alpha\beta}.$$

$$U_t = U_\alpha \alpha_t + U_\beta \beta_t = c(U_\alpha - U_\beta)$$

$$U_{tt} = c(U_{\alpha\alpha} \alpha_t + U_{\beta\alpha} \alpha_t + U_{\alpha\beta} \beta_t + U_{\beta\beta} \beta_t) = c^2(U_{\alpha\alpha} - 2U_{\alpha\beta} + U_{\beta\beta}).$$

Dado que queremos buscar soluciones estas deben satisfacer la ecuación de la cuerda.

$$U_{tt} = c^2 U_{xx} \Rightarrow c^2(U_{\alpha\alpha} - 2U_{\alpha\beta} + U_{\beta\beta}) = c^2(U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} + 2U_{\alpha\beta}) \Rightarrow U_{\alpha\beta} = 0.$$

Realizando este cambio de variable, la ecuación en derivadas parciales obtenida ($U_{\alpha\beta} = 0$) es significativamente más sencilla.

$$U_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow U_\alpha = f(\alpha) \Rightarrow U(\alpha, \beta) = F(\alpha) + G(\beta)$$

La primera deducción se realiza ya que si la derivada de U_α respecto a β es cero, la función U_α no depende de β . Luego si integramos U_α respecto a α no quedará una primitiva de $f(\alpha)$ más una constante respecto a α (que no dependa de α), pero si podría depender de β . Hasta ahora hemos obtenido que nuestra solución tendría la forma:

$$(0.12) \quad U(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

donde F y G son funciones de \mathbb{R} a \mathbb{R} , a las cuales les pediremos que sean de clase C^2 para que U sea de clase C^2 . Recordar que esta hipótesis la usamos al establecer que $U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}$.

Tratemos de darle un sentido físico a esto último. Tanto F como G son funciones que van de \mathbb{R} a \mathbb{R} , con sus respectivos gráficos en el plano. Si en particular estudiamos F , en el tiempo cero se tiene que $\alpha = x$ por lo tanto en el instante cero la función $F(x)$ tiene el mismo gráfico que $F(\alpha)$. Si ahora lo estudiamos en el tiempo $t = 1$ tendríamos que $F(x + c)$, lo que representa la función anterior corrida según el eje x . En otras palabras, el gráfico de F tiene siempre la misma forma pero se va corriendo a medida que pasa el tiempo. La velocidad a la que se mueve la onda, es justamente la constante c .

Ocurre exactamente lo mismo con G , la diferencia es que a medida que aumenta el tiempo el gráfico de G se moverá en sentido contrario. La interpretación a esto, es que cualquier solución se puede considerar como la combinación de dos ondas moviéndose en sentido contrario. Por esta razón es que a este método se lo conoce como método de propagación de ondas.

Que la velocidad a la que se mueva la onda sea c no es casualidad. Cuando se trabaja con una onda como lo es el sonido, la constante c es justamente la velocidad a la que se propaga la onda en ese medio donde se esté trabajando (depende si es el aire, agua, etc). Cuando se trabaja con la luz, esa constante c representa la velocidad de la luz.

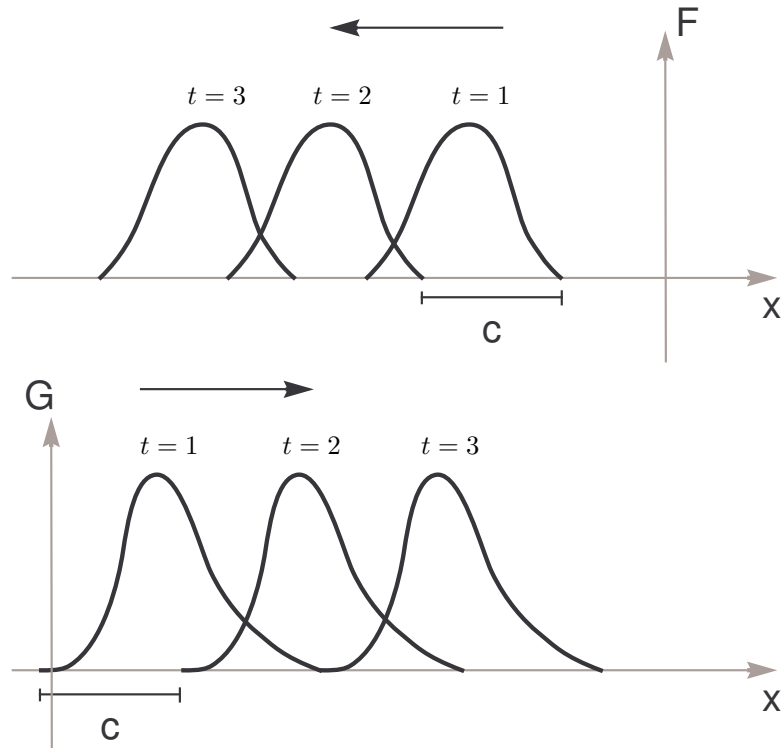


FIGURA 2. Interpretación de la solución a la ecuación de ondas

0.3.3. Cuerda infinita con condiciones iniciales

Hemos encontrado una solución genérica para las ecuación en derivadas parciales de la onda. Veamos que paso si le agregamos condiciones iniciales.

Teorema 0.6.

Sea el problema:

$$(0.13) \quad \begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx} & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ U(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \\ U_t(0, x) = v_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con $u_0 \in C^2$ y $v_0 \in C^1$, entonces:

$$U(t, x) = \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds$$

es una solución al problema (0.13).

Demostración:

Considerando que la forma de la solución será como la ecuación (0.12), las condiciones iniciales implican que:

$$(0.14) \quad U(0, x) = F(x) + G(x) = u_0(x)$$

$$U_t(t, x) = cF'(x + ct) - cG'(x - ct) \Rightarrow U_t(0, x) = c(F'(x) - G'(x)) = v_0(x).$$

Integrando la última ecuación obtenemos que:

$$(0.15) \quad \frac{1}{c} \int_0^x v_0(s) ds + K = F(x) - G(x)$$

Si sumamos las ecuaciones (0.14) y (0.15) obtenemos que:

$$F(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s) ds + C$$

Restando las mismas ecuaciones se obtiene que:

$$G(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x v_0(s) ds - C$$

Las condiciones de u_0 y v_0 son necesarias ya que para que la función (0.12) sea solución F y G debían ser de clase C^2 .

$$\Rightarrow U(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct) = \frac{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds.$$

□

0.3.4. Ecuación de Laplace.

Daremos un ejemplo (examen de diciembre de 2015) para mostrar como se resuelven este tipo de ecuaciones.

Se considera la ecuación:

$$(*) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{para todo } (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi), \\ u(0, y) = 0 \text{ y } u(\pi, y) = 0 & \text{para todo } y \in [0, \pi], \\ u(x, \pi) = 0 & \text{para todo } x \in [0, \pi] \\ u(x, 0) = x(\pi - x) & \text{para todo } x \in [0, \pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0, \pi) \times (0, \pi) \text{ y continua en } [0, \pi] \times [0, \pi]. \end{cases}$$

Buscando soluciones de la forma $X(x)Y(y)$ hallar un candidato a solución u de (*) de la forma

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y).$$

Luego, probar que el candidato a solución u hallado, verifica todas las condiciones enunciadas en (*).

Buscando soluciones de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, la condición $u_{xx} + u_{yy} = 0$ implica $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$. Por lo tanto

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \text{ (cte).}$$

Entonces hay que resolver las ecuaciones $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ y $Y''(y) + \lambda Y(y) = 0$. La condición $u(0, y) = 0$ implica $X(0) = 0$ y $u(\pi, y) = 0$ implica $X(\pi) = 0$. Por lo tanto hay que resolver

$$X'' - \lambda X = 0 \text{ con las condiciones } X(\pi) = X(0) = 0.$$

Resolviendo esta última ecuación tenemos que $X(x) = A_n \operatorname{sen}(nx)$ y que $\lambda = -n^2$ con $n \in \mathbb{N}$.

La ecuación $Y''(y) - n^2 Y(y) = 0$ tiene como solución $Y(y) = B_n e^{ny} + C_n e^{-ny}$. La condición $u(x, \pi) = 0$ implica $Y(\pi) = 0$, por lo tanto $Y(\pi) = B_n e^{n\pi} + C_n e^{-n\pi} = 0$ implica que $B_n = -C_n e^{-2n\pi}$. Entonces

$$Y(y) = -C_n e^{-2n\pi} e^{ny} + C_n e^{-ny} = C_n (-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$u_n(x, y) = \operatorname{sen}(nx) D_n (-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}) \text{ donde } D_n = A_n C_n.$$

Si consideramos $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$ entonces la condición $u(x, 0) = x(\pi - x)$ implica que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n (1 - e^{-2n\pi}) \operatorname{sen}(nx) = x(\pi - x).$$

Por lo que $D_n (1 - e^{-2n\pi})$ debe ser el coeficiente de Fourier de la extensión impar de la función $f(x) = x(\pi - x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Por lo tanto

$$D_n (1 - e^{-2n\pi}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^{n+1} + 1)$$

Entonces el candidato a solución es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^{n+1} + 1) \frac{1}{(1 - e^{-2n\pi})} \operatorname{sen}(nx) (-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny})$$

Vamos a probar que u verifica la condición $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ya que las demás condiciones son muy fáciles de verificar. Lo difícil es probar que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} \text{ y que } \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2}.$$

Si asumimos esto último, vale entonces

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Probemos que $\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x}$ ya que las igualdades

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2}$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2}$$

se demuestran en forma análoga.

Para esto necesitamos de los siguientes resultados:

Proposición 0.6. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

- $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$,
- la serie $\sum M_n$ es convergente

Entonces existe $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sum u_n(x)$ converge uniformemente a u .

Proposición 0.7. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 que verifica:

- Existe $x_0 \in X$ tal que $\sum u_n(x_0)$ es convergente.
- la serie $\sum \frac{\partial}{\partial x} u_n(x)$ converge uniformemente a una función v .

Entonces $\frac{\partial}{\partial x} \sum u_n(x) = \sum \frac{\partial}{\partial x} u_n(x)$ y $\sum u_n(x)$ converge uniformemente a una función u que cumple que $u' = v$.

En nuestro caso, tenemos

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) = \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^{n+1} + 1) \frac{1}{(1 - e^{-2n\pi})} n \cos(nx) (-e^{n(y-2\pi)} + e^{-ny}),$$

Sea $\delta > 0$ y consideremos los puntos (x, y) dentro del rectángulo $[0, \pi] \times [\delta, \pi]$. Como $y \geq \delta$, tenemos que

$$e^{-ny} \leq e^{-n\delta}.$$

A su vez, como $y \leq \pi$, tenemos que $y - 2\pi \leq -\pi$, por lo que

$$e^{n(y-2\pi)} \leq e^{-n\pi}.$$

Luego, podemos acotar de la siguiente manera

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right| \leq \left| \frac{4}{\pi n^3} ((-1)^{n+1} + 1) \frac{1}{(1 - e^{-2n\pi})} \right| n (e^{-n\pi} + e^{-n\delta}) \leq \frac{16}{\pi n^2} (e^{-n\pi} + e^{-n\delta}) = M_n.$$

Como M_n es convergente, podemos aplicar las Proposiciones 0.6 y 0.7. Finalmente, dado $(x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$ consideramos $\delta > 0$ tal que $y > \delta > 0$. Haciendo el razonamiento anterior, tenemos probado que $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$. Por lo tanto, esta última igualdad está probada para todo $(x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi)$.