Distribuciones continuas y absolutamente continuas
Práctico 5

Ejercicio 1 : Sea X una variable aleatoria real continua y $a < b$ reales.

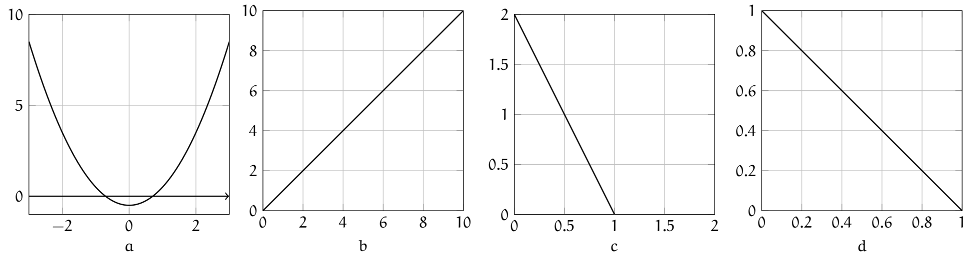
1. Demostrar que:

$$P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a).$$

2. Si además X es absolutamente continua con densidad f_X deducir que:

$$P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$

Ejercicio 2 : ¿Cuáles de las gráficas de la figura corresponden a una densidad y cuáles no?



Ejercicio 3 : Se considera la variable aleatoria X absolutamente continua con densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,, \\ bx & \text{si } x \in (0,1], \\ ae^{-x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Hallar a y b sabiendo que $P(X \in [0,2]) = 2P(X \in [2,4])$.

Ejercicio 4 : Se consideran las siguientes funciones reales:

$$f_1(x) = \begin{cases} c_1\sqrt{x} & \text{si } x \in (0,1)\,, \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1)\,, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ c_2x^2 & \text{si } x \in [1,2]\,, \\ c_2x & \text{si } x \in (2,3)\,, \\ 0 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

1. En cada caso, hallar c_i para que f_i sea una densidad.

2. Se considera ahora una variable aleatoria X con densidad f_i (con el c_i hallado).

   (a) Calcular $P(0.3 < X < 0.6)$, $P(X > 2)$ y $P(0.5 < X < 1.5)$.

   (b) Hallar la función de distribución de F_X para cada densidad y graficar.

Ejercicio 5 : En pruebas de medición de distancia de frenado de automóviles, los vehículos que viajan a determinada velocidad tienden a recorrer distancias de frenado que están distribuidas uniformemente entre dos puntos a y b. Calcular la probabilidad de que uno de estos automóviles:

1. se detenga más cerca de a que de b.
2. se detenga de tal modo que la distancia a a sea por lo menos 3 veces mayor que la distancia a b.

Ejercicio 6 : Suponga que la concentración de cierto contaminante se encuentra distribuida uniformemente en el intervalo de 4 a 20 *ppm* (partes por millón). Si se considera tóxica una concentración de 15 *ppm* o más, ¿cuál es la probabilidad de que al tomar una muestra la concentración sea tóxica?

Ejercicio 7 :

1. En la densidad normal estándar, encuentre el área bajo la curva que está:
   (a) A la derecha de $z = 1.84$.
   (b) Entre $z = -1.97$ y $z = 0.86$.
2. Si $Z \sim N(0, 1)$, encuentre los valores de k de tal forma que:
   (a) $P(Z > k) = 0.3015$.
   (b) $P(k < Z < -0.18) = 0.4197$.
3. En una distribución normal con $\mu = 40$ y $\sigma = 6$, encuentre el valor de x que tiene:
   (a) 45% del área a la izquierda.
   (b) 14% del área a la derecha.

Ejercicio 8 : En un proceso industrial el diámetro de un balero es parte importante de un componente. El comprador establece en sus especificaciones que el diámetro debe ser 3.0 ± 0.01 *cm*. Por lo tanto, no se acepta ningún balero que se salga de esa especificación. Se sabe que en el proceso de producción, el diámetro de un balero tiene una distribución normal con media $\mu = 3.0$ *cm* y desviación estándar $\sigma = 0.005$ *cm*. En promedio, ¿qué porcentaje de baleros fabricados se descartarán?

Ejercicio 9 : Una cierta máquina produce resistencias eléctricas que tienen un valor medio de 40Ω y una desviación estándar de 2Ω. Suponga que los valores de las resistencias siguen una distribución normal.

1. ¿Qué porcentaje de las resistencias tendrán un valor que exceda de 43Ω?

2. Si al medir el valor de las resistencias, el medidor redondea la medida al valor entero más cercano (en Ω), ¿qué porcentaje de las resistencias será considerada como mayores de 43Ω?

Ejercicio 10 : Considere $\lambda > 0$ y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Demuestre que f es una función de densidad para cualquier valor de $\lambda > 0$. Si una variable aleatoria X absolutamente continua tiene una densidad de esta forma se dice que X tiene *distribución exponencial* de parámetro λ y se escribe $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.
2. Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ hallar y graficar la función de distribución F_X.
3. Sea X una variable aleatoria que mide el tiempo de vida en años de un cierto aparato electrónico. El fabricante desea garantizar que la duración de estos aparatos supera los x_0 años con una probabilidad de 0.90. Si se sabe que $X \sim \text{Exp}(0.01)$, determinar x_0. Halle también la menor cantidad de años enteros que cumple con la condición.
4. Un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de vida en años está dado por la variable aleatoria $T \sim \text{Exp}(0.125)$. Si cinco de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos continúen funcionando después de ocho años?

Ejercicio 11 (Examen, febrero de 2000): El consumo máximo de agua potable de una ciudad en un día cualquiera es una variable aleatoria X (en miles de m^3) con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ kxe^{-\frac{x}{3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Determine el valor de k para que f sea una densidad (de ahora en adelante se trabaja con ese valor).
2. Si la capacidad máxima de suministro de agua es de 27.000 m^3, hallar la probabilidad de que en un día determinado no se pueda satisfacer la demanda de agua potable (y por lo tanto haya corte de suministro).
3. Hallar la probabilidad de que en dos días cualesquiera de la próxima semana haya corte de suministro.
4. Hallar la probabilidad de que por lo menos en un día de la próxima semana haya corte de suministro.

Ejercicio 12 (Primer parcial 2001):

1. Sea X una variable aleatoria real absolutamente continua con densidad f, siendo f una función par.[1] Sea F_X su función de distribución. Probar que $F_X(-x) = 1 - F_X(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2. La intensidad relativa de una señal de sonido se puede modelar como una variable aleatoria X absolutamente continua con densidad $f(x) = 0.5e^{-|x|}\ \forall x \in \mathbb{R}$ (conocida como distribución de Laplace). Se sabe además que una cierta señal de sonido es claramente perceptible para el oído humano medio si la intensidad relativa medida por X está entre -2.1 y 2.1 ¿Cuál es la probabilidad de que al enviar una señal, ésta no sea percibida claramente por los destinatarios, suponiendo que los mismos son personas con capacidad auditiva media?

3. Se emiten señales de sonido en forma independiente hasta que se reciben dos señales con claridad. Hallar la probabilidad de tener que enviar exactamente cinco señales.

[1] es decir, $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$