Práctico 1 – Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas lineales

1. Determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas.

$$\text{(a)} \begin{cases} -x+y-z=-1 \\ 4x+2y-z=5 \\ x+z=2 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x-y+5z=-2 \\ 2x+y+4z=2 \\ 2x+4y-2z=8 \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} x-2y-z=1 \\ -x+3y+3z=4 \\ 2x-3y+z=10 \end{cases} \quad \text{(e)} \begin{cases} x-y+5z=-2 \\ 2x+y+4z=2 \\ 2x+4y-2z=8 \end{cases} \quad \text{(f)} \begin{cases} x+2y-2z=1 \\ 2x+2y-z=6 \\ 3x+4y-3z=5 \end{cases}$$

2. Determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas.

$$\text{(a)} \begin{cases} 2w+x+z=6 \\ y-2z=-3 \\ x+2y-z=-2 \\ -2w+2x+y+3z=0 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+y+2z+2w=0 \\ 2x+2y+3z+4w=1 \\ 2x+3y+4z+5w=2 \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} w+2x+z=5 \\ -w+y=-1 \\ -w+3x-z=0 \\ w+4x+y+2z=9 \end{cases}$$

3. Determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas.

$$\text{(a)} \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -x-2y+z=1 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+4y-2z=1 \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} w+x-y=0 \\ 2w+3x-z=0 \\ 2w+x-4y+z=0 \end{cases} \quad \text{(d)} \begin{cases} x-y+z=2 \\ 4x-2y-z=2 \\ x+y+5z=2 \\ -x-y-z=2 \end{cases}$$

4. Las siguientes son matrices de sistemas homogéneos. Para cada parte, determinar el conjunto solución.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas en función de λ.

$$\text{(a)} \begin{cases} x+y=2 \\ x+\lambda y=4 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} \lambda x+y=-2 \\ 2x-2y=4 \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} \lambda x+y=0 \\ x+\lambda y=0 \end{cases} \quad \text{(d)} \begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(\lambda-5)z=\lambda \end{cases}$$

6. Resolver y discutir según α y β reales.

$$\text{(a)} \begin{cases} x+y+z=\alpha \\ x+y+\beta z=1 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} \alpha x+2y+3z=4 \\ 4x+5y+\beta z=3 \\ 14x+16y+3\beta z=0 \end{cases}$$

7. Consideremos un sistema lineal homogéneo con m ecuaciones y n incógnitas.

   (a) Probar que si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es solución entonces $(c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$ también es solución $\forall\ c \in \mathbb{R}$.

   (b) Probar que si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ son soluciones entonces $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ también es solución.

   (c) Mostrar que si $m < n$ entonces el sistema tiene soluciones no triviales.

   (d) Mostrar que si el sistema es determinado y admite como única solución la trivial (solución en que todas las incógnitas toman el valor 0), entonces $m \geq n$.

   (e) Dar ejemplos de sistemas homogéneos indeterminados en los que m sea mayor que n.

8. Consideremos sistemas lineales cualesquiera, con m ecuaciones y n incógnitas.

   (a) Para el caso $m > n$, en que el sistema tiene más ecuaciones que incógnitas:

      (i) Dar ejemplos de sistemas incompatibles.

      (ii) Dar ejemplos de sistemas compatibles y determinados.

      (iii) Dar ejemplos de sistemas compatibles e indeterminados.

   (b) Repetir la parte anterior para el caso $m = n$, en que el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

   (c) Para el caso $m < n$, en que el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas:

      (i) Dar ejemplos de sistemas incompatibles.

      (ii) Dar ejemplos de sistemas compatibles e indeterminados.

      (iii) Mostrar que el sistema nunca puede ser compatible y determinado.

Sistemas lineales con restricciones enteras

En el siguiente ejercicio se busca expresar un problema en términos de un sistema de ecuaciones lineales, para luego resolverlo e imponer restricciones dentro del conjunto solución. Por ejemplo, en el caso del reparto de tablas de sushi, las cantidades de cada tipo de tabla deben ser enteras no negativas, puesto que son cantidades discretas.

9. **Reparto de cantidades.** Para un almuerzo de trabajo en un Departamento de Matemática, la dirección del mismo compró diferentes piezas de sushi: 32 de *Philadelphia*, 22 de *New York* y 50 de *California*. Se repartirán en diferentes tablas de 8, 12 y 24 unidades como se describe a continuación:

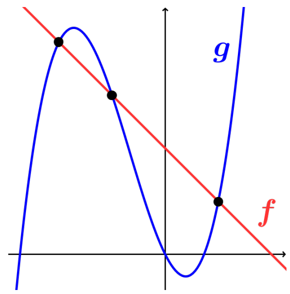
   - La tabla Lagrange tiene 4 piezas de *Philadelphia*, 3 de *New York* y 5 de *California*.
   - La tabla Hausdorff tiene 2 piezas de *Philadelphia*, 1 de *New York* y 5 de *California*.
   - La tabla Gauss contiene 6 piezas de *Philadelphia*, 3 de *New York* y 15 de *California*.
   - La tabla Kolmogorov tiene 8 piezas de *Philadelphia*, 6 de *New York* y 10 de *California*.

   Encontrar todas las formas en las que se pueden armar las tablas sabiendo que se usarán todas las piezas y garantizando que haya al menos una tabla de cada tipo.

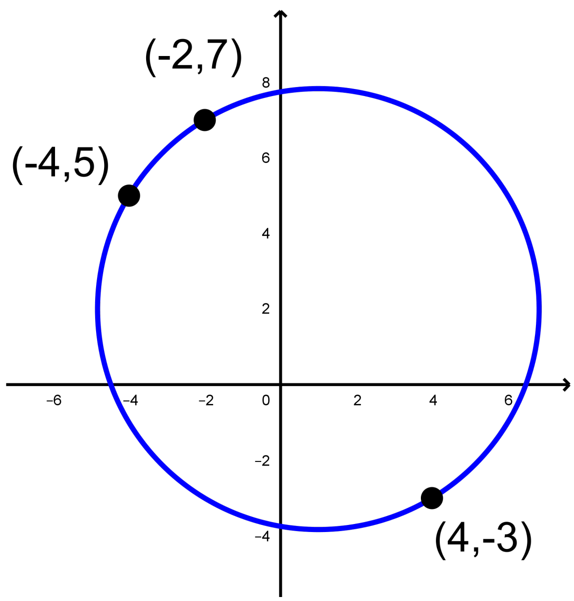
Geometría

En esta sección veremos como algunos problemas geométricos se pueden modelar mediante ecuaciones y/o sistemas de ecuaciones.

10. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones con expresiones $f(x) = a_1x + b_1$ y $g(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x$. Determinar f y g a partir del gráfico, donde los puntos marcados son $(-2, 4)$, $(-1, 3)$ y $(1, 1)$.



11. Tres puntos no alineados en el plano determinan una única circunferencia. Encontrar los coeficientes a, b y c de la circunferencia $x^2 + ax + y^2 + by = c$ dada en la figura. Determinar radio y centro de la misma.



12. Los puntos del espacio pueden representarse como una terna (x, y, z), donde x, y y z representan las coordenadas en un sistema coordenado.

    Un plano dentro de este espacio puede representarse con una ecuación del tipo $ax + by + cz = d$, donde a,b y c no son todos nulos. Así, por ejemplo, el plano del suelo esta dada por la ecuación $z = 0$

    Tomando $d = 10$, determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 1, -1)$, $(3, -2, -2)$, $(5, 5, 3)$.

Aplicaciones

Sistema masa-resorte: Supongamos que tenemos un resorte colgado desde el techo, con una longitud natural L. Si se agrega un bloque de masa m en el vértice libre y el resorte se estira una longitud Δx entonces este ejercerá una fuerza "hacia arriba" sobre el bloque. El módulo de esta fuerza es $k\Delta x$ donde k es la constante elástica del resorte.

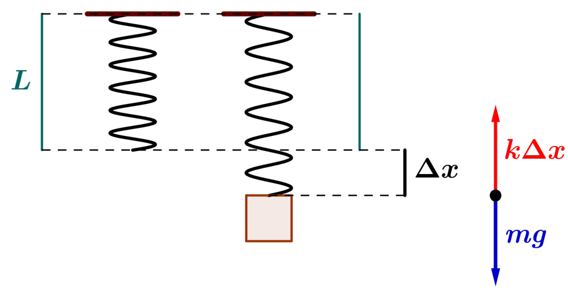


Figura 1: representación gráfica de los elementos del problema

Si el bloque queda en equilibrio entonces la suma de fuerzas es 0 (es decir $mg = k\Delta x$).

13. Se tienen 3 bloques unidos por resortes, que en un primer momento están en su longitud natural. El sistema se deja hasta que se estabiliza. Sea x_i el desplazamiento del bloque i desde la posición inicial.

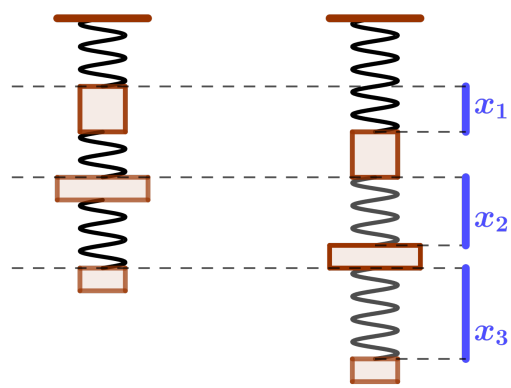


Figura 2: representación gráfica de los elementos del problema (los valores x_i no están a escala)

   (a) Sabiendo que $m_1 = 10$kg, $m_2 = 2$kg, $m_3 = 2$kg, $k_1 = 10$ kg/sec^2, $k_2 = 20$ kg/sec^2, $k_3 = 10$ kg/sec^2 Calcular los valores de x_i.

   (b) Sabiendo que $m_1 = 2$kg, $m_2 = 3$kg, $m_3 = 2{,}5$kg, $x_1 = 7$ cm, $x_2 = 10$ cm, $x_3 = 12$ cm. Calcular los valores de k_i.

Guía del práctico

Para acompañar el curso se suguiere como mínimo resolver al menos la siguiente lista de problemas. No contabilizar dentro de esta lista los ejercicios resueltos en el pizarrón durante la clase.

- Ejercicio 1, una parte por fila
- Ejercicio 2, una parte
- Ejercicio 3, una parte
- Ejercicio 4, una parte
- Ejercicio 5, una parte
- Ejercicio 6, una parte
- Ejercicio 7
- Dos ejercicios ejercicios del 9 al 13.