Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Examen Julio 2024

26 de julio de 2024

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del examen es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El parcial tiene cinco ejercicios de múltiple opción y tres ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**
- **En el desarrollo, todos los razonamientos y/o resultados a los que llegue deben ser justificados. Resultados correctos sin justificación tendrán 0 puntos.**
- Recuerde que $\sin(x) \sim x$ cuando $x \to 0$.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 40 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 8 puntos. Incorrectas: -1 punto. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 60 puntos)

Tres ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.a)	D.1.b)	D.1.c)	D.1.c)	D.2.a)	D.2.b)	D.2.c)	D.3	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. El polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = e^{x^2-y+1}$ en el punto $(0,1)$ es:

(A) $p_2(x,y) = \frac{5}{2} - 2y + x^2 + \frac{y^2}{2}$

(B) $p_2(x,y) = 1 - y + x^2 + y^2$

(C) $p_2(x,y) = \frac{5}{2} - 2y + 2x^2 + \frac{y^2}{2}$

(D) $p_2(x,y) = 1 - y + 2x^2 + y^2$

(E) $p_2(x,y) = \frac{5}{2} - y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$

2. Sea $y(x)$ la solución de la ecuación diferencial $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 2 - 12x$, que verifica $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$. Entonces:

(A) $y(1) = e^2 + e^{-3} - 2$

(B) $y(1) = e^2 - e^{-3} + 2$

(C) $y(1) = e^{-3} - 2$

(D) $y(1) = e^2$

(E) $y(1) = e^2 + 2$

3. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ la solución de $z^2 = 2i$, que se encuentra en el primer cuadrante. Entonces $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^7$ vale:

(A) 1

(B) $\frac{2i}{\sqrt{2}^7}$

(C) -1

(D) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

(E) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

4. Considere los conjuntos del plano $A_1 = ([-1,1] \times [-1,1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, y la bola de centro $(2,0)$ y radio 1, es decir $A_2 = B\left((2,0),1\right) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(2,0)) < 1\}$, . Sea $A = A_1 \cup A_2$. Entonces:

(A) A es abierto, y el $(1,0)$ es punto de acumulación de A.

(B) A no es ni cerrado ni abierto, pero $\bar{A} = A$.

(C) A no es ni cerrado ni abierto, y el $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es un punto de acumulación de A

(D) A no es ni cerrado ni abierto, y el $(1,0)$ es un punto interior a A.

(E) A es cerrado, y el $(\frac{3}{2},0)$ es interior a A.

5. Considere las funciones

$$f(x,y,z) = \left(e^x + cos(y), \log(xz)\right)\ ,\ g(u,v) = \left((u + cos(v))^2, u + e^v, (u+v)^3\right),$$

y la composición $h = g \circ f$. Entonces el valor de la suma de la primera fila de la matriz Jacobiana de h en el punto $(1,0,1)$ es igual a

(A) $\log(2)$

(B) $\frac{e^3}{4}$

(C) 0

(D) $e^2 + 2$

(E) $2e^2 + 4e$

DESARROLLO

1. Ejercicio 1 (25 puntos)

(a) Sea a_n una sucesión en $\mathbb{R}^2$. Definir límite finito de a_n. (Decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ sii ...)

(b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, y $a \in \mathbb{R}^2$ un punto. Definir continuidad de f en a. (Decimos que f es continua en a sii ...)

(c) Considere el siguiente enunciado.

$$f \text{ es continua en } a \iff \text{para toda sucesión } a_n \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$
$$\text{tenemos que } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

Elija una de las direcciones del enunciado (el directo o el recíproco) y demuéstrelo.

(d) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Utilizando el resultado del item anterior, demuestre que f no es continua en el origen.

2. Ejercicio 2 (20 puntos)

(a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, y $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto. Definir diferenciabilidad de f en a. (Decimos que f es diferenciable en a sii ...)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sin(x)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) Estudiar la existencia de derivadas parciales en el origen.

(c) Estudiar la diferenciabilidad de f en el origen.

3. Ejercicio 3 (15 puntos)

Calcule el volumen del sólido delimitado entre $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.