Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

Solución – Examen 24 de julio de 2024.

Ejercicio 1. Se considera la ecuación $\dot{X} = AX$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -a & -1 \end{pmatrix} \text{ con } a > 0.$$

1. Hallar e^{At}. (9 puntos)
2. Resolver la ecuación para una condición inicial arbitraria $X(0) = (x_0, y_0)$. (8 puntos)
3. Bosquejar el diagrama de fase del sistema. (8 puntos)

Solución.

1. Por lo visto en el curso, sabemos que si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ entonces

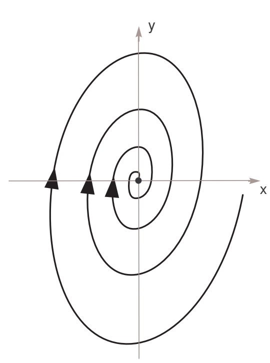
$$e^{At} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \operatorname{sen}(\beta t) \\ -\operatorname{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto $e^{At} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(at) & \operatorname{sen}(at) \\ -\operatorname{sen}(at) & \cos(at) \end{pmatrix}$.

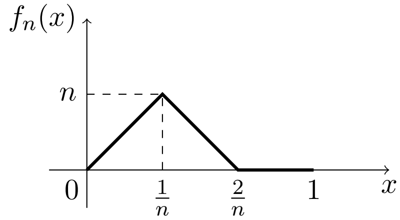
2. Sabemos que la solución es $X(t) = e^{At} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto:

$$X(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(at) & \operatorname{sen}(at) \\ -\operatorname{sen}(at) & \cos(at) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \left(x_0 \cos(at) + y_0 \operatorname{sen}(at) \right) \\ e^{-t} \left(-x_0 \operatorname{sen}(at) + y_0 \cos(at) \right) \end{pmatrix}$$

3. Sabemos que la matriz A tiene valores propios $\lambda = -1 \pm ai$. Por lo tanto, las órbitas de la solución serán espirales que tienden al origen, girando en sentido horario (una forma de ver el sentido de giro es observar que si $X = (1, 0)$ entonces $\dot{X} = (-1, -a)$). Entonces, un bosquejo del diagrama de fase es:



Ejercicio 2. Para $n \geq 2$ se define la función $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como en la figura:



1. Estudiar convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$. (9 puntos)
2. Probar que $\lim_n \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim_n f_n$. (8 puntos)
3. Estudiar convergencia uniforme de $\{f_n\}$. (8 puntos)

Solución.

1. Fijado $x \in [0, 1]$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $2/n < x$. Luego, por definición de $\{f_n\}$ se tiene que $f_n(x) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Lo que implica que $f_n \to 0$ puntualmente.
2. Por un lado, como $f_n \to 0$ entonces $\int_0^1 \lim f_n = \int_0^1 0 = 0$.

   Por otro lado $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1$ (área bajo la curva). Lo que implica que $\lim \int_0^1 f_n = 1$.
3. Si hay convergencia uniforme en $[0, 1]$, entonces se tiene que cumplir que $\lim \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim f_n$. Luego, por la parte 2), no hay convergencia uniforme.

Ejercicio 3. Enunciar y demostar el segundo teorema de Liapunov (Liapunov 2).

Solución. Ver notas del curso.

Ejercicio 4.
Sea $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continua y de clase C^2 en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$ que verifica:

- $u_t = u_{xx} + u$, en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$.
- $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad \forall t \in [0, +\infty)$.
- $u(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$, $\forall x \in [0, \pi]$.

1. Usando el método de separación de variables, hallar un candidato a solución que sea de la forma $u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x)$.
2. Probar que $\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t, x)$. Enunciar los resultados que se utilicen.

Solución:

1. Busquemos soluciones de la forma:

$$u(t,x) = T(t)X(x). \tag{1}$$

   a) $u_t = u_{xx} + u \Rightarrow T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + T(t)X(x) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)+X(x)}{X(x)}\cdot$ En esta última igualdad tenemos una función que depende del tiempo igualada a una función que depende de la posición. De modo que:

$$\frac{d}{dx}\frac{T'}{T}(t) = \frac{d}{dt}\frac{X''+X}{X}(x) = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T}(t) = \frac{X''+X}{X}(x) = \lambda \text{ (cte)}.$$

   Por lo tanto, podemos obtener el siguiente problema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias en vez de una ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{cases} X'' + (1-\lambda)X = 0 \\ T' - \lambda T = 0. \end{cases}$$

   b) Como $u(t,0) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow T(t) = 0$ o $X(0) = 0$. Si $T(t)$ fuese la función nula tendríamos que $u(t,x) = 0$, que no verifica la condición inicial $u(0,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\cdot$ Por lo tanto la opción que nos sirve es $X(0) = 0$.

   c) $u(t,\pi) = T(t)X(\pi) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0$. Descartamos la opción $T(t) = 0$ por la misma razón que en el caso anterior.

En resumen:

$$\begin{cases} X''(x) + (1-\lambda)X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

Por comodidad llamaremos $\lambda' = \lambda - 1$. Por lo tanto la ecuación $X''(x) + (1-\lambda)X(x) = 0$ se transforma en $X''(x) - \lambda' X(x) = 0$. Las posibles soluciones de esa ecuación dependen del signo de λ':

- Caso (a): $\lambda' > 0$.
  Si $\lambda' > 0$ existe un $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda' = \alpha^2$.

$$\lambda' = \alpha^2 \Rightarrow X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$

  Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

$$\begin{cases} X(0) = A + B = 0 \\ X(\pi) = Ae^{\alpha\pi} + Be^{-\alpha\pi} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } A = B = 0$$

  La primera condición no es válida ya que supusimos $\lambda' = \alpha^2 > 0$. La segunda tampoco es válida ya que obtendríamos $X(x) = 0$ lo que resultaría nuevamente en la función $u(t,x) = 0$. Por ende, λ' no podrá ser mayor a cero.

- Caso (b): $\lambda' = 0$.
  $\lambda' = 0$ implica que $X'' = 0$, integrando dos veces, obtenemos que

  $$X(x) = Ax + B$$

  Nuevamente, imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

  $$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = B = 0 \\ X(\pi) = A\pi + B \end{array} \right. \Rightarrow A = B = 0$$

  Nuevamente se obtendría la solución trivial la cual no es válida. Por lo tanto, λ' tampoco podrá ser cero.

- Caso(c): $\lambda' < 0$. Si λ' es negativo, existe algún $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lambda' = -\alpha^2$.

  $$\lambda' = -\alpha^2 \Rightarrow X(x) = A\cos(\alpha x) + B\operatorname{sen}(\alpha x)$$

  Imponiendo las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$ se obtiene:

  $$\left\{ \begin{array}{l} X(0) = A = 0 \\ X(\pi) = B\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \;\Rightarrow B = 0 \text{ o } \operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \end{array} \right.$$

  Si consideramos la primera opción, obtenemos la solución trivial. Si se verifica la segunda opción:

  $$\operatorname{sen}(\alpha\pi) = 0 \Rightarrow \alpha\pi = n\pi \Rightarrow \alpha = n,\ n \in \mathbb{Z}.$$
  $$\Rightarrow X(x) = B_n \operatorname{sen}(nx).$$

  Como $\alpha = n$ entonces $\lambda' = -n^2$ y por lo tanto $\lambda = 1 - n^2$.

Volviendo a la ecuación $T' - \lambda T = 0$ tenemos que $T(t) = C_n e^{(1-n^2)t}$. Así, nuestra solución al problema sería de la forma:

$$u_n(t,x) = X(x)T(t) = A_n \operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t},\ \text{donde } A_n = B_n C_n.$$

Falta imponer la condición $u(0,x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$. Como

$$u(0,x) = A_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}.$$

no es posible hallar una única constante A_n que verifique la condición anterior. Como la ecuación $u_t = u_{xx} + u$ es lineal, cualquier combinación lineal finita de soluciones será solución. Esto sugiere buscar un candidato a solución de la forma:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t}.$$

Así:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \text{ y tomamos } A_n = \frac{1}{n^2}.$$

Luego, nuestro candidato a solución es:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t}}{n^2}.$$

2. Vamos a utilizar los siguientes resultados:

   Proposición 0.1
   Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : X \to \mathbb{R}$ que verifica:

   - $|u_n(t,x)| \leq M_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $(t,x) \in X$,
   - *la serie* $\sum M_n$ *es convergente*

   Entonces existe $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $\sum u_n$ converge uniformemente a u en X.

   Proposición 0.2 (Derivada respecto de t)

   Sea $S_n(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k(t,x)$. *Si:*

   - $S_n(t,x)$ *converge uniformemente a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x)$ *en* X.
   - $S_{n_t}(t,x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt} U_k(t,x)$ *converge uniformemente a* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t,x)$ *en* X.

   Entonces:

   $$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d}{dt} U_k(t,x) \text{ para todo } (t,x) \in X.$$

   Observación: Basta con pedir que $S_n(t_0,x_0)$ converja en algún punto $(t_0,x_0) \in X$. No es necesario pedir que $S_n(t,x)$ converja uniformemente.

   Sea $u_n(t,x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t}}{n^2}$. Entonces

   $$|u_n(t,x)| = \left| \frac{\operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

   ya que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$ para todo x y $e^{(1-n^2)t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$. Luego, por la proposición 0.1 , se tiene que $\sum u_n$ converge uniformemente a una función u.
   Sea $\delta > 0$ y t tal que $t > \delta$. Entonces se tiene que $(1-n^2)t < (1-n^2)\delta$ y por lo tanto $e^{(1-n^2)t} < e^{(1-n^2)\delta}$. Entonces:

   $$\left| \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x) \right| = \left| (1-n^2) \frac{\operatorname{sen}(nx)e^{(1-n^2)t}}{n^2} \right| \leq e^{(1-n^2)\delta} \text{ para todo } (t,x) \in (\delta, +\infty) \times (0,\pi).$$

   Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{(1-n^2)\delta}$ converge, por la proposición 0.1 la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x)$ converge uniformemente en $(\delta,+\infty)\times(0,\pi)$. Luego, aplicando la proposición 0.2, se cumple que $\dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t,x) =$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t,x)$ para todo $(t,x) \in (\delta,+\infty) \times (0,\pi)$. Como este razonamiento vale para todo $\delta > 0$, se concluye esa igualdad que vale para todo $(t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi)$.