Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

EXAMEN – 24 DE JULIO DE 2024. DURACIÓN: 3:00 HS.

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

- El puntaje total del examen es de 100 puntos. El mínimo para aprobar es 60 puntos.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- Todos los razonamientos y/o resultados a los que llegue deben ser justificados. Resultados correctos sin justificación tendrán 0 puntos.

PARA USO DOCENTE				
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	**Total**

Ejercicio 1. (25 puntos)

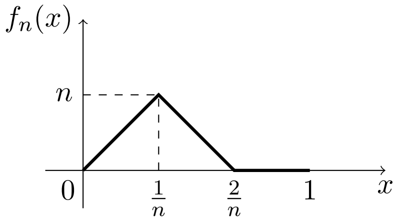
Se considera la ecuación $\dot{X} = AX$ para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -a & -1 \end{pmatrix} \text{ con } a > 0.$$

1. Hallar e^{At}. (9 puntos)
2. Resolver la ecuación para una condición inicial arbitraria $X(0) = (x_0, y_0)$. (8 puntos)
3. Bosquejar el diagrama de fase del sistema. (8 puntos)

Ejercicio 2. (25 puntos)

Para $n \geq 2$ se define la función $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ como en la figura:



1. Estudiar convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$. (9 puntos)
2. Probar que $\lim_n \int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim_n f_n$. (8 puntos)
3. Estudiar convergencia uniforme de $\{f_n\}$. (8 puntos)

Ejercicio 3. (25 puntos)

Enunciar y demostrar el segundo teorema de Liapunov (Liapunov 2).

Ejercicio 4. (25 puntos)

Sea $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continua y de clase C^2 en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$ que verifica:

- $u_t = u_{xx} + u$, en $(0, +\infty) \times (0, \pi)$.
- $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad \forall t \in [0, +\infty)$.
- $u(0, x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}, \ \forall x \in [0, \pi]$.

1. Usando el método de separación de variables, hallar un candidato a solución que sea de la forma $u(t, x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x)$. (15 puntos)
2. Probar que $\displaystyle\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_n(t, x)$. Enunciar los resultados que se utilicen. (10 puntos)