

**EXAMEN: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**

Nº de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

**Múltiple opción (Total: 48 puntos)**

En cada pregunta hay sólo una opción correcta.

Respuesta correcta: 12 puntos, respuesta incorrecta: -3 puntos, no respuesta: 0 punto.

Colocar las respuestas en el siguiente cuadro.

1	2	3	4

**Ejercicio 1**

Se considera  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. con distribución como la de  $X$  de la cual se sabe que tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{b^2} & \text{si } 0 < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo  $b > 0$ .

Le llamamos  $\hat{b}_{MV}$  al estimador máximo verosímil de  $b$  y  $\hat{b}_M$  al estimador de  $b$  por el método de los momentos.

Entonces

- (A)  $\hat{b}_{MV} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  y  $\hat{b}_M = 3\bar{X}_n/2$ .
- (B)  $\hat{b}_{MV} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  y  $\hat{b}_M = \bar{X}_n$ .
- (C)  $\hat{b}_{MV} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  y  $\hat{b}_M = 3\bar{X}_n/2$ .
- (D)  $\hat{b}_{MV} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  y  $\hat{b}_M = \bar{X}_n$ .
- (E)  $\hat{b}_{MV} = \bar{X}_n$  y  $\hat{b}_M = \bar{X}_n/2$ .

## Ejercicio 2

Se considera  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. con distribución como la de  $X$  de la cual se sabe que tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{a^3} & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo  $a > 0$ . Estimamos  $a$  mediante  $\hat{a} = \frac{4\bar{X}_n}{3}$ .

- (A)  $\hat{a}$  es insesgado y  $\text{ECM}(\hat{a}) = \frac{a^2}{16n}$ .
- (B)  $\hat{a}$  no es insesgado y  $\text{ECM}(\hat{a}) = \frac{a^2}{2n}$ .
- (C)  $\hat{a}$  es insesgado y  $\text{ECM}(\hat{a}) = \frac{a^2}{15n}$ .
- (D)  $\hat{a}$  no es insesgado y  $\text{ECM}(\hat{a}) = \frac{a^2}{15n}$ .
- (E)  $\hat{a}$  es insesgado y  $\text{ECM}(\hat{a}) = \frac{a+1}{16n}$ .

## Ejercicio 3

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(y+1)e^{-x} & \text{si } x > 0, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

- (A)  $X$  e  $Y$  son independientes y además  $P(Y < X) = 1/2$ .
- (B)  $X$  e  $Y$  son independientes y además  $P(Y < X) = \frac{4}{3} - 2e^{-1}$ .
- (C)  $X$  e  $Y$  son independientes y además  $P(Y < X) = \frac{4}{3} - 4e^{-1}$ .
- (D)  $X$  e  $Y$  son independientes y además  $P(Y < X) = \frac{2}{3}e^{-1/2}$ .
- (E)  $X$  e  $Y$  no son independientes y además  $P(Y < X) = 1/2$ .

Se recuerda que una primitiva de  $te^{-t}$  es  $-(t+1)e^{-t}$ .

### Ejercicio 4

Se asume que la concentración de calcio en sangre de determinado paciente responde a una distribución normal con media  $\mu$  y desvío  $\sigma = 1.5 \text{ mg/dl}$ . Se realiza una serie de 20 mediciones de la concentración de calcio en sangre en el paciente lo suficientemente espaciadas para suponer que las mismas son independientes. Se considera la prueba de hipótesis

$$\begin{aligned}H_0 & \mu = 9 \text{ mg/dl} \\H_1 & \mu > 9 \text{ mg/dl}\end{aligned}$$

al nivel  $\alpha = 0.05$ . Asumiendo que el verdadero valor de  $\mu$  es 10, entonces el error de tipo II de la prueba es igual a

- (A) 0.050.
- (B) 0.908.
- (C) 0.874.
- (D) 0.325.
- (E) 0.752.

### Ejercicio de desarrollo (Total: 52 puntos)

#### Ejercicio 1 (14 puntos)

El número de personas que pasan por las cajas de un centro comercial sigue una distribución de Poisson con media de 6 clientes por hora. Si pasan al menos 3 personas en una hora se dice que la caja está operando en “régimen”.

1. Hallar la probabilidad de que una caja funcione en “régimen”.
2. Si un centro comercial tiene 15 cajas que operan de forma independiente, hallar la probabilidad de que en una hora a lo sumo una de esas cajas no opere en “régimen”.

#### Ejercicio 2 (14 puntos)

Un examen Múltiple Opción consta de 10 problemas. Los primeros 5 problemas son del tipo Verdadero-Falso, es decir, hay una respuesta correcta entre dos posibles, mientras que los últimos 5 problemas tienen una respuesta correcta entre cuatro posibles. Se supone que un estudiante responde al azar cada uno de los problemas y que la respuesta a cada pregunta se toma de forma independiente.

1. Calcular la probabilidad de que exactamente una de las respuestas sea correcta.
2. Dado que el estudiante responde sólo un problema correctamente. ¿Cuál es la probabilidad de que ese problema corresponda a la sección Verdadero-Falso?

### Ejercicio 3 (12 puntos)

Se realiza una encuesta que incluye la siguiente pregunta: “¿Consumes drogas?” donde las posibles respuestas son SI o NO. Para evitar que ante tal pregunta los encuestados se sientan intimidados y no respondan o mientan, se implementa el siguiente procedimiento: cada encuestado retira una bolilla de una caja que contiene 4 bolillas rojas y 2 azules. Se conviene en que ante esta pregunta el encuestado dirá la verdad en caso que haya sacado una bolilla roja y mentiría en caso que haya sacado la bolilla azul (es decir que los que contestan SI son aquellos consumidores que sacaron una bolilla roja y aquellos no consumidores que sacaron una bolilla azul). Le llamamos  $q$  al porcentaje de consumidores de droga en la población.

1. Calcular, en función de  $q$ , la probabilidad de que un encuestado responda SI.
2. Sabiendo que en una muestra de 600 personas 263 respondieron SI, utilizando la parte anterior, dar una estimación puntual de  $q$ .

### Ejercicio 4 (12 puntos)

Se denotan con  $X$  e  $Y$  los tiempos de vida (medidos en horas) de dos componentes electrónicas. Se asume que esas variables son independientes y que tienen distribución exponencial de parámetros  $\lambda_X = 0.003$  y  $\lambda_Y = 0.004$  respectivamente. Las dos componentes se ponen a funcionar al mismo tiempo.

1. Hallar la probabilidad de que al cabo de 400 horas ambas componentes sigan funcionando.
2. Si se define la variable  $T = \min\{X, Y\}$ , hallar  $P(T \leq 400)$ .

Tabla de la función  $\phi(z) = F_Z(z)$ , siendo  $Z$  con distribución  $N(0,1)$ .

$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990