Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Primer Semestre 2024**

Segundo parcial - Sábado 06 de julio de 2024

Múltiple opción

Versión 1. *Sean* $V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}_1[x]$ *y...*

1	2	3	4	5	6
C	C	A	C	B	B

Versión 2. *Sean* $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$ *con...*

1	2	3	4	5	6
B	D	A	A	D	D

Ejercicios de Desarrollo

Desarrollo 1 (18 pt.)

a) Sean $(V, K, +, ., <,>_V)$, $(W, K, +, ., <,>_W)$ Espacios Vectoriales, $T : V \to W$ una T.L. Defina la adjunta de T.

Sol: Una adjunta de T es cualquier transformación $H : W \to V$ tal que

$$\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, H(w)\rangle_V \ , \forall v \in V, \forall w \in W.$$

b) Defina Operador Lineal autoadjunto y enuncie el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos.

Sol: Sea $(V, \mathbb{K}, +, .)$ un espacio vectorial con producto interno y $T : V \to V$ un operador lineal. Decimos que T es un operador autoadjunto sii es igual a su adjunto, es decir, $T = T^*$. El Teorema espectral dice que todo operador autoadjunto sobre un espacio complejo o real se diagonaliza en una base ortonormal.

c) Enuncie y demuestre el Teorema Espectral para matrices simétricas (cada resultado previo que se use debe ser claramente enunciado).

Sol: El teorema nos dice que para toda matriz real simétrica A existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Dem: Dada una matriz A, el operador $Tx = Ax$ sobre $\mathbb{R}^n$ con el producto usual tiene matriz asociada A respecto a la base canónica $\mathbb{E}$, que es ortonormal para el P.I. usual. Como A es simétrica, y $_{\mathbb{E}}(T^*)_{\mathbb{E}} = \left(_{\mathbb{E}}(T)_{\mathbb{E}}\right)^t$, entonces T es un operador autoadjunto (se usa aquí la representación del adjunto en base ortonormal, que dice que dicha matriz es la traspuesta de la matriz asociada del operador, y que si dos operadores tienen la misma matriz asociada en la misma base son el mismo).
Luego, por el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos, existe una base ortonormal $\mathbb{B}$ de V de vectores propios de T , o sea que $_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}}$ es diagonal.

Pero ${}_{\mathbb{B}}(T)_{\mathbb{B}} = {}_{\mathbb{B}}(Id)_{\mathbb{E}}\,{}_{\mathbb{E}}(T)_{\mathbb{E}}\,{}_{\mathbb{E}}(Id)_{\mathbb{B}} = P^{-1}AP$, con $P = {}_{\mathbb{E}}(Id)_{\mathbb{B}}$ que es ortogonal pues sus columnas son las coordenadas en base canónica de los vectores de la base ortonormal $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^n$, y por lo tanto coinciden con ellos.

Desarrollo 2 (12 pt.)

a) Sea $(V, \mathbb{K}, +, ., <,>_V)$ un espacio vectorial con producto interno y dimensión finita. Defina $T : V \to V$ operador lineal ortogonal en V y matriz ortogonal en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Sol.: Un operador es ortogonal ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) si es invertible y su inversa es igual a su adjunto. Es decir, $T : V \to V$ es ortogonal si existe T^{-1} y además $T^{-1} = T^*$.
Una matriz es ortogonal sii es invertible y su inversa es igual a su traspuesta. Es decir, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es ortogonal si existe A^{-1} y además $A^{-1} = A^t$.

b) i. Enuncie una condición necesaria y suficiente sobre la matriz asociada de un operador para que el operador sea ortogonal.

Sol.: Una tal condición es que sus columnas sean una BON de $\mathbb{R}^n$.

ii. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que $T(x, y, z) = \dfrac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)$. Demuestre que T es un operador ortogonal diagonalizable y encuentre una base ortonormal que diagonalice a T.

Sol.: Para $\mathbb{E}$ base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$
{}_{\mathbb{E}}(T)_{\mathbb{E}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}
$$

Cada columna tiene norma al cuadrado igual a $(1 + 4 + 4)/9 = 1$ y son ortogonales pues sus productos internos dos a dos son cero. Por lo tanto las columnas forman una BON de $\mathbb{R}^3$ y el operador es ortogonal.
Como no tenemos un Teorema Espectral para operadores ortogonales, en principio no se sabe si T es diagonalizable. Calculando los valores y vectores propios, encontramos que un vector propio es el $(1, 1, 1)$ con valor propio 1, y el complemento ortogonal de $S_1 = [(1, 1, 1)]$ es el subespacio propio S_{-1} asociado al valor propio -1. Consideramos una base ortonormal $\mathbb{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)\right\}$ de S_{-1}, tenemos que $\mathbb{B} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\right\}$ es una base ortonormal de vectores propios que diagonaliza a T.
Vale notar que como la matriz ${}_{\mathbb{E}}(T)_{\mathbb{E}}$ es simétrica, podríamos haber deducido que T además de ortogonal es autoadjunto, y por lo tanto es diagonalizable en una BON de $\mathbb{R}^3$ aplicando el Teorema Espectral para operadores autoadjuntos. El resto de los cálculos sigue igual.