Introducción a la Teoría de la Información
Tercer parcial

29 de mayo de 2024

Problema 1 - Canales en con repetición (5 puntos)

(a) Escriba la definición de tasa de transmisión R para un código de canal de parámetros (M, n).

Considere el siguiente sistema de transmisión por repetición binario. Los mensajes posibles son $W \in \{0, 1\}$ y el tamaño de bloque n es impar. Para transmitir un bit w, el codificador de este sistema envía por el canal un bloque de largo n donde todos los bits $X_1, \ldots, X_n$ valen w. El decodificador decide el mensaje enviado por mayoría, es decir, mira los n símbolos recibidos y decide que el mensaje transmitido fue el símbolo más frecuente (como n es impar, nunca hay empates).

(b) Calcule la tasa R para el canal con repetición para $n = 3$.

(c) Calcule el límite de R para el canal con repetición para $n \to \infty$.

(d) Indique si esta forma de codificar alcanza la capacidad del canal o no. Justifique.

(e) Considere que el canal de transmisión es un canal binario simétrico con probabilidad de error $\pi = 1/4$. Cuál es la probabilidad de que ocurra un error de transmisión de $w = 1$? Y la de $w = 0$?

Solución:

(a) $R = \frac{\log_2 M}{n}$

(b) Son $M = 2$ mensajes y se usa el canal $n = 3$ veces, o sea que

$$R = \frac{\log_2 2}{3} = 1/3$$

.

(c) $\lim_{n \to \infty} R = 0$

(d) No la alcanza, a menos que la capacidad del canal sea 0. (Esto último no es necesario aclararlo para dar por buena la respuesta, de hecho al formular la pregunta no nos dimos cuenta que nunca dijimos que $C > 0$, pero esa era la idea).

(e) El canal es simétrico así que $P(\hat{w} = 1|w = 0) = P(\hat{w} = 0|w = 1)$. En ambos casos eso ocurre cuando hay dos o más (3) errores:

$$P(\hat{w} = 1|w = 0) = P(011)+P(101)+P(110)+P(111) = 3\pi^2(1-\pi)+\pi^3 = 5/32$$

Problema 2 - Segundo Teo. de Shannon (5 puntos)

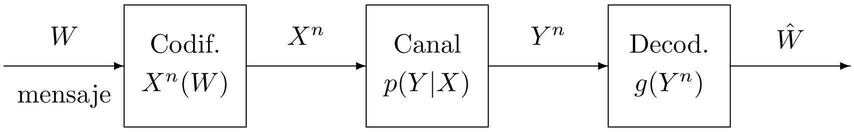

Figura 1: Notación. Se tiene $X_i \in \mathcal{X}$, $Y_i \in \mathcal{Y}$, $i = 1, \ldots, n$. $W \in J = \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$, donde R es la tasa de transmisión.

(a) Para cada uno de los siguientes requerimientos, indique si son o no parte de las hipótesis de la parte directa del segundo teorema de Shannon (capacidad de canal).

- El canal no tiene ruido.
- El alfabeto de entrada $\mathcal{X}$ y el de la salida $\mathcal{Y}$ del canal son del mismo tamaño.
- Los alfabetos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son conjuntos finitos.
- El canal no tiene memoria.
- El diccionario de codewords, $\{X^n(W), W \in J\}$, es generado aleatoriamente.
- La tasa R es menor que la capacidad del canal C.

(b) De acuerdo a las hipótesis del teorema, qué efecto tiene sobre la capacidad del canal el uso de realimentación (feedback)?

Solución:

(a) Las hipótesis del teorema son 3:

- Los alfabetos son conjuntos finitos
- El canal no tiene memoria
- La tasa es mejor que la capacidad del canal.

Cabe mencionar que la generación aleatoria del código *no* es una hipótesis del teorema, pero sí es una hipótesis de trabajo en la *demostración* del teorema que utilizamos en el curso. Esa pregunta es engañosa y su respuesta no es considerada en el puntaje.

(b) Bajo las hipótesis del teorema, la realimentación no aumenta la capacidad.

Problema 3 - Canal BSC con memoria (5 puntos)

Consideremos el siguiente canal binario y simétrico (BSC) *con memoria* cuya entrada en tiempo i es X_i y la salida es Y_i: al transmitir una cadena x^n (supongamos n par) los errores ocurren de a pares, es decir, si se comete un error en el tiempo $i = 2k, k \geq 0$, entonces también se comete un error en el tiempo $i = 2k + 1$. La probabilidad de error es π.

(a) Cuál es la capacidad C_{SM} de este canal si suponemos que *no* tiene memoria?

Considere un esquema de codificación en el que los símbolos se transmiten y se reciben de a pares, es decir, en el tiempo k se transmite $U_k = (X_{2k}, X_{2k+1})$ y se recibe $V_k = (Y_{2k}, Y_{2k+1})$

(b) Modele el canal resultante y calcule su capacidad, C_P

(c) En base a lo anterior, indique si la capacidad del canal *con memoria* descrito, C_{CM}, cumple $C_{CM} > C_{SM}$

Solución:

(a) $C_{SM} = 1 - h(\pi)$ donde $h(\pi)$ es la función de entropía binaria.

(b) En este caso hay $M = 4$ mensajes: $W \in \{00, 01, 10, 11\}$ y también $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}| = 4$ palabras de entrada y salida del canal. El canal resultante no tiene memoria y tiene la siguiente matriz de transición:

$(X_{2k}, X_{2k+1})/(Y_{2k}, Y_{2k+1})$	00	01	10	11
00	$1-\pi$	0	0	π
01	0	$1-\pi$	π	0
10	0	π	$1-\pi$	0
11	π	0	0	$1-\pi$

De acuerdo a la fórmula de capacidad para canales simétricos, la capacidad de este canal es $C_{CM} = \log_2 |\mathcal{Y}| - h(r)$, donde $h(r)$ es la entropía de una fila de la matriz anterior, que es $h(\pi)$, o sea que

$$C_{CM} = 2 - \log_2 \pi.$$

Notar que según este modelo de canal, el propio alfabeto del canal tiene 4 símbolos, no importa que sean *pares* en el modelo original, por lo que $n = 1$!

(c) Efectivamente $C_{CM} = 2 - h(\pi) > 1 - h(\pi) = C_{SM}$. Esto es lógico porque hay mucha redundancia en el error y puede ser aprovechada.
