Introducción a la Teoría de la Información
Cuarto parcial

26 de junio de 2024

Escribir con lapicera o lápiz con buen contraste, que se lea bien. Las soluciones no son sólo cuentas; desarrolle en forma prolija y explique lo que va haciendo.

Problema 1 (5 puntos)

Considere un canal Gaussiano con restricción de potencia P, en el cual la señal toma dos caminos diferentes y las dos señales recibidas en la antena del receptor se suman, formando una única señal a la salida del canal (ver Figura 1).

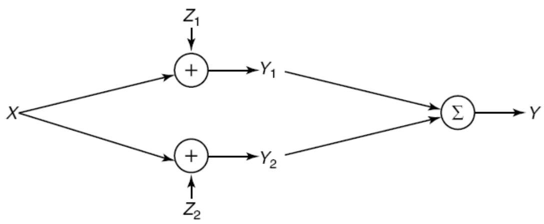

Figura 1: Canal Gaussiano de dos caminos

1. Encuentre la capacidad del canal si Z_1 y Z_2 tienen distribución conjunta normal de media cero y matriz de covarianza

$$K_Z = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

2. Calcule la capacidad para $\rho = 0$, $\rho = 1$, $\rho = -1$.

3. Interpretar los resultados.

Solución:

1. $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(Z_1 + Z_2)$ Como la varianza de $Z_1 + Z_2 = 2\sigma^2 + 2\rho\sigma^2$, $I(X;Y) = \frac{1}{2}log(2\pi e 2\sigma^2(1+\rho))$
   $H(Y)$ se maximiza si X tiene distribución normal con potencia P. En ese caso, $var[Y] = var[2X + Z_1 + Z_2] = 4P + 2\sigma^2(1+\rho)$
   $\Rightarrow C = \frac{1}{2}log(1 + \frac{2P}{\sigma^2(1+\rho)})$
2. Si $\rho = 0$, $\Rightarrow C = \frac{1}{2}log(1 + \frac{2P}{\sigma^2})$.
   Si $\rho = 1$, $\Rightarrow C = \frac{1}{2}log(1 + \frac{P}{\sigma^2})$.
   Si $\rho = -1$, $\Rightarrow C = \infty$
3. Si los ruidos no están correlacionados ($\rho = 0$) es como si se transmitiera 2 veces, o hacerlo con el doble de la potencia. Si los ruidos están perfectamente correlacionados ($\rho = 1$) es como tener el doble de ruido y transmitir con el doble de potencia, es análogo a tener un único canal y transmitir una sola vez. Si $\rho = -1$ es como si los ruidos se restaran entre ellos.

Problema 2 (5 puntos)

Sea Z una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad exponencial de parámetro $\lambda \geq 0$,

$$f_Z(z) = \begin{cases} A_e e^{-\frac{\alpha}{\lambda}} & \text{para } z \geq 0 \\ 0 & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

1. Calcular A_e para que f_Z sea una densidad de probabilidad y hallar la media en ese caso.
2. Calcular la entropía diferencial h (Z).

Sea W una variable aleatoria no negativa con función de densidad de probabilidad f_W de media λ.

3. Mostrar que la función de densidad de probabilidad exponencial maximiza la entropía diferencial para variables no negativas con una media dada demostrando que $h(W) \leq h(Z)$.

Sugerencia: Considerar $D(f_W||f_Z)$ y seguir un razonamiento análogo al usado para probar que la distribución Gaussiana maximiza la entropía diferencial para una varianza dada.

Solución:

1. $A_e = 1/\lambda$.

2. $h(X) = \mathrm{E}_g\left[-\log g(X)\right] = \log\lambda + \frac{\log e}{\lambda}\mathrm{E}_g[X] = \log\lambda + \log e$.

3.
$$\begin{aligned} D(f||g) &= -h(f) - \mathrm{E}_f\left[-\log g(X)\right] \\ &= -h(f) - \mathrm{E}_g\left[-\log g(X)\right] \\ &= -h(f) + h(g)\,, \end{aligned}$$

   donde la segunda igualdad surge de que $\mathrm{E}_g[X] = \lambda = \mathrm{E}_f[X]$.

4. La información mutua entra la entrada y la salida del canal satisface
$$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - h(Y|X) \\ &= h(Y) - h(Z) \\ &= h(Y) - \log e - \log\lambda\,. \end{aligned}$$

   Por otra parte, como $Y = X + Z$, tenemos que $\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[X] + \lambda \leq \mu + \lambda$. Por lo tanto, usando la parte 2 concluimos que
$$\begin{aligned} C &= \max_{X\geq 0, \mathrm{E}[X]\leq\mu} I(X;Y) \\ &= \max_{X\geq 0, \mathrm{E}[X]\leq\mu} h(Y) - \log e - \log\lambda \\ &\leq \log e + \log(\mu+\lambda) - \log e - \log\lambda \\ &= \log\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)\,. \end{aligned}$$

Problema 3 (5 puntos)

1. Describir el algoritmo de Lloyd generalizado.

Considere una variable aleatoria discreta, finita que puede tomar los valores {-1, 1, 4, 5, 6} de forma equiprobable.

2. Aplicar el algoritmo de Lloyd unidimensional con el codebook inicial {0, 3}.

3. Comprobar que el algoritmo converge y escribir el codebook final.

4. Dar la distorsión alcanzada.

Solución:

Ver teórico.

Se comienza con el codebook {0, 3}. Dejando el límite de las dos regiones en 1.5. Se calcula el centroide de los elementos de cada región, dando el nuevo codebook {0, 5}. Para este codebook el límite de la región queda en 2.5. El centroide de las nuevas regiones es nuevamente {0, 5}, el codebook final.
