Integral de Lebesgue para funciones no negativas

Sea $f: E \to \mathbb{R}$ una función medible donde $E \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto medible. Sabemos que f se puede aproximar por una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones simples $\varphi_n : E \to \mathbb{R}$ tal que

$$0 \le \varphi_0 \le \varphi_1 \le \cdots \le \varphi_n \le \varphi_{n+1} \le \cdots \le f$$

y $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$. Tiene sentido entonces definir lo siguiente:

Definición: Se define la integral de Lebesgue de f sobre E como

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E \varphi \;\middle/\; \begin{array}{l} \varphi \text{ es simple} \\ \text{y } \varphi \le f \end{array} \right\}.$$

Observación:

1) Equivalentemente, como las funciones acotadas y medibles se pueden aproximar por funciones simples, se tiene que

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E h \;\middle/\; \begin{array}{l} h \text{ es medible y acotada} \\ \text{y } 0 \le h \le f. \end{array} \right\}.$$

donde $m_n\{x \in E / h(x) > 0\} < \infty$

2) Puede ocurrir que $\int_E f = \infty$. En efecto, basta considerar $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ y se tiene $\int f = m_J(\mathbb{R}) = \infty$.

Propiedades de la integral de Lebesgue para funciones medibles no negativas: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible y $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles no negativas. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1) Aditividad: $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.

2) Homogeneidad: $\int_E (a \cdot f) = a \cdot \int_E f$, $\forall a \geq 0$.

3) Monotonía: Si $f \leq g$ c.t.p., entonces $\int_E f \leq \int_E g$.

4) Si $A \subseteq B \subseteq E$, A y B medibles, entonces $\int_A f \leq \int_B f$.

5) Si $f(x) = 0$, $\forall x \in E$, entonces $\int_E f = 0$.

6) Si $m_J(E) = 0$, entonces $\int_E f = 0$.

7) $\int_E f = \int f \cdot \mathbb{1}_E$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible y no negativa.

· Demostración: La prueba de 1) se hará para más adelante.

2) $\int_E (a \cdot f) = \sup \left\{ \int_E \varphi \;/\; \begin{matrix} \varphi \text{ es simple y} \\ 0 \leq \varphi \leq a \cdot f \end{matrix} \right\}$ $(a > 0)$

$= \sup \left\{ \int_E a \cdot \tilde{\varphi} \;/\; \tilde{\varphi} \text{ es simple } \right.$

$$\int_E (a\cdot f) = \sup\left\{ a\int_E \bar{\varphi} \;/\; \begin{array}{l}\bar{\varphi} \text{ es simple y} \\ 0 \leq \bar{\varphi} \leq f\end{array} \right\}$$

$$= a\cdot \sup\left\{ \int_E \bar{\varphi} \;/\; \begin{array}{l}\bar{\varphi} \text{ es simple y} \\ 0 \leq \bar{\varphi} \leq f\end{array} \right\} = a\cdot \int_E f$$

Si $a=0$, la igualdad es clara.

3) Si $\varphi: E \to \mathbb{R}$ es una función simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$, entonces $0 \leq \varphi \leq g$, de donde

$$\int_E \varphi \leq \int_E g \quad (\text{def. de supremo})$$

Luego, se sigue de nuevo por la definición de supremo que

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

4) Sea $\varphi: B \to \mathbb{R}$ una función simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$, $\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$

$$\int_A \varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot m_J(A \cap A_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_i \geq 0}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, m_J(A_i) = \int_B \varphi.$$

Luego, $\int_A \varphi \leq \int_B f \quad \forall\, \varphi: B \to \mathbb{R}$ simple y $0 \leq \varphi \leq f$.

Para toda función simple $\varphi: B \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \varphi \leq f$, se obtiene una función simple $\varphi\cdot \mathbb{1}_A: A \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, $\forall x \in A$. Recíprocamente, toda función simple $\psi: A \to \mathbb{R}$ se puede extender a una función simple

$\tilde{\varphi}: B \to \mathbb{R}$ al hacer $\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in B - A. \end{cases}$

Así, $\displaystyle\int_A f \le \sup\left\{ \int_A \varphi \;\middle/\; \begin{array}{l} \varphi: B \to \mathbb{R} \text{ es simple} \\ \text{y } 0 \le \varphi \le f \end{array} \right\} \le \int_B f$.

5) $\forall \varphi: E \to \mathbb{R}$ simple tal que $0 \le \varphi(x) \le \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(x)}\ \forall x \in E$, se tiene claramente que $\varphi = 0$.

Así, $\displaystyle\int_E f = \sup\left\{ \int_E \varphi \;\middle/\; \varphi \equiv 0 \right\} = 0$.

6) Sea $\varphi: E \to \mathbb{R}$ una función simple tal que $0 \le \varphi \le f$.

$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, $A_i \subseteq E$, $\alpha_i \geq 0$

$\displaystyle\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot m_d(A_i) = 0$ ya que $\left.\begin{array}{l} A_i \subseteq E \\ \text{y } m_d(E) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m_d(A_i) = 0$.

Así, $\displaystyle\int_E f = \sup\left\{ \int_E \varphi \;\middle/\; \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le f \text{ y} \\ \varphi \text{ es simple} \end{array} \right\}$

$\displaystyle = \sup\left\{ 0 \;\middle/\; \begin{array}{l} \varphi \text{ es simple} \\ \text{y } 0 \le \varphi \le f \end{array} \right\} = 0.$

7) $\displaystyle\int f \cdot \mathbb{1}_E = \sup\left\{ \int \varphi \;\middle/\; \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le f \cdot \mathbb{1}_E \\ \text{y } \varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ simple} \end{array} \right\}$

$0 \le \varphi \le f \cdot \mathbb{1}_E \Rightarrow \varphi(x) = 0\ \forall x \in E^c$. Luego,

$\displaystyle\int f \cdot \mathbb{1}_E = \sup\left\{ \int \varphi \cdot \mathbb{1}_E \;\middle/\; \begin{array}{l} 0 \le \varphi(x) \le f(x),\ \forall x \in E \\ \varphi \cdot \mathbb{1}_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ simple} \end{array} \right\}$

$\displaystyle = \sup\left\{ \int_E \varphi \;\middle/\; \begin{array}{l} \varphi: E \to \mathbb{R} \text{ simple} \\ \text{y } 0 \le \varphi(x) \le f(x),\ \forall x \in E \end{array} \right\}$

$\displaystyle = \int_E f.$ $\blacksquare$

Pasemos ahora a demostrar el segundo teorema que nos permite "intercambiar" integrales por límites.

<u>Teorema de la convergencia monótona</u>: Sea $(f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas tal que:

1) $0 \leq f_0(x) \leq f_1(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \cdots \ \forall x \in \mathbb{R}$,

2) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a f c.t.p.

Entonces,
$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n = \int f.$$

• <u>Demostración</u>: Como la integral de Lebesgue de funciones medibles no negativas sobre un conjunto de medida cero vale cero, podemos suponer sin pérdida de generalidad que (f_n) converge puntualmente a f. Note además que f es medible.

$$f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow \int f_n \leq \int f_{n+1}, \text{ de donde } \left(\int f_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es}$$

una sucesión monótona creciente en $[0, +\infty]$. Luego, existe $\alpha \in [0, +\infty]$ tal que $\int f_n \to \alpha$. Por otro lado, $\int f$ está bien definida por ser f medible y no negativa. Además, como $f_n \leq f$ se tiene que $\int f_n \leq \int f$. Luego,

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \int f_n \leq \int f.$$ Probemos ahora la desigualdad contraria $\alpha \geq \int f$.

Sea $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ simple tal que $0 \leq \varphi \leq f$.

Fijamos $c \in (0,1)$, y consideramos para cada $m \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$E_m = \{ x \in \mathbb{R} / f_m(x) \geq c \cdot \varphi(x) \}$$
$$= (f_m - c\varphi)^{-1}([0, +\infty)).$$

Note que E_m es medible para todo $m \in \mathbb{N}$. Veamos primero que $\int_{E_m} \varphi \to \int \varphi$.

Como (f_m) es monótona creciente, se tiene que

$$E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_m \subseteq E_{m+1} \subseteq \cdots.$$

Por otro lado, podemos notar que $\mathbb{R} = \bigcup_{m=0}^{\infty} E_m$. En efecto, sea $x \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = 0$, entonces $\varphi(x) = 0$, por lo cual $x \in E_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora supongamos que $f(x) > 0$. Como $0 < \varphi(x) \leq f(x)$ y $c \in (0,1)$, obtenemos $c \cdot \varphi(x) < f(x)$. Por otro lado, $f_m(x) \to f(x)$ y (f_m) es monótona creciente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) > f_m(x) \geq c\varphi(x)$, es decir, $x \in E_m$. Por lo tanto, $\mathbb{R} = \bigcup_{m=0}^{\infty} E_m$. y donde tal unión es una unión creciente. Lo anterior junto con el hecho de que $\varphi \geq 0$ implica que $\left(\int_{E_m} \varphi \right)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona. Luego, $\lim_{m \to \infty} \int_{E_m} \varphi = \int \varphi$. Por otro lado,

$$\int f_m \geq \int_{E_m} f_m \geq \int_{E_m} c\varphi = c \int_{E_m} \varphi, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$\alpha = \lim_{m \to \infty} \int f_m \geq c \cdot \lim_{m \to \infty} \int_{E_m} \varphi = c \cdot \int \varphi$$

Como $c \in (0,1)$ es arbitrario, se tiene que

$$\int \varphi \leq \alpha, \quad \forall\, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ simple con } 0 \leq \varphi \leq f.$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int f \leq \alpha = \lim_{n \to \infty} \int f_n.$ $\blacksquare$

A partir del teorema de aproximación por funciones simples y del Teorema de la convergencia monótona, se puede redefinir $\int f$ como se muestra a continuación.

<u>Corolario</u>: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa y $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones simples tal que:

1) $0 \leq \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \cdots \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq \cdots \leq f$.

2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Entonces, $\displaystyle\int f = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n$.

Con esta definición alternativa, es más fácil demostrar la propiedad de aditividad de la integral.

• <u>Demostración (aditividad de la integral)</u>:

Tomamos (φ_n) y (ψ_n) sucesiones crecientes de funciones simples no negativas tales que $\varphi_n \to f$ y $\psi_n \to g$ puntualmente. Luego, $(\varphi_n + \psi_n)$ es una sucesión creciente de funciones simples no negativas tal que $\varphi_n + \psi_n \to f + g$ puntualmente.

Luego, por el corolario anterior se tiene que:

$$\int (f+g) = \lim_{n\to\infty} \int (\varphi_n + \psi_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int \varphi_n + \int \psi_n \right)$$

aditividad de la integral para funciones simples

$$= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \text{, ya que } \int \varphi_n \to \int f \text{ y}$$

$$= \int f + \int g. \qquad \int \psi_n \to \int g. \qquad \blacksquare$$

En el caso en el cual se tiene una sucesión de funciones medibles no negativas $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no necesariamente converja a una función medible, podemos aún obtener resultados respecto a ciertos límites de (f_n) y de $(\int f_n)$. Uno de estos resultados se conoce como el Lema de Fatou.

<u>Lema de Fatou:</u> Sea $(f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces,

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

• <u>Demostración:</u> Recordemos que como cada f_n es medible, se tiene que la función $\liminf f_n$ dada por

$$(\liminf f_n)(x) = \sup_{n\geq 0} \left(\inf_{k\geq n} f_k(x) \right), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

es también medible.

Sea $g_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $g_n(x) = \inf\limits_{k \geq n} f_k(x)$.

Note que (g_n) es una sucesión creciente de funciones medibles, por lo cual

$$\liminf g_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} f_k(x)\right)$$

$$= \liminf f_n(x).$$

Luego, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que

$$\int \liminf f_n = \int \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n$$

Por otro lado, $g_n \leq f_n \Longrightarrow \int g_n \leq \int f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Así, $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n = \liminf \int g_n \leq \liminf \int f_n$.

Por lo tanto,

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n. \qquad \blacksquare$$

Cerramos esta sección con algunas aplicaciones del Teorema de la convergencia monótona. Concretamente, se puede extender la aditividad de la integral sobre integrandos y sobre dominios de integración a sumas infinitas.

Corolario: Si $u_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas y $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, entonces

$$\int f = \sum_{n=0}^{\infty} \int u_n.$$

· **Demostración**: Sea $f_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$. Note que (f_n) define una sucesión creciente de funciones medibles no negativas. Luego, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que

$$\int f = \int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{i=0}^{n} u_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \int u_i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int u_n. \quad \blacksquare$$

Corolario: Sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa y $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles y disjuntos dos a dos. Si $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$, entonces

$$\int_E f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} f.$$

· **Demostración**: Sea $A_n = \bigcup_{i=0}^{n} E_i$, y considere

$$\mathbb{1}_{A_n} = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{E_i} \quad (\text{ya que los } E_i \text{ son disjuntos dos-a-dos})$$

$$\left(f \cdot \mathbb{1}_{A_n}\right)_{n=0}^{\infty}$$ es una sucesión monótona creciente de funciones medibles no negativas. Por otro lado, como $\mathbb{1}_{A_n}$ converge puntualmente a $\mathbb{1}_E$, se tiene que $f \cdot \mathbb{1}_{A_n}$ converge puntualmente a $f \cdot \mathbb{1}_E$. Luego, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que:

$$\int f\cdot \mathbb{1}_E = \int \lim_{m\to\infty} f\cdot \mathbb{1}_{A_m} = \lim_{m\to\infty} \int f\cdot \mathbb{1}_{A_m}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int \left(\sum_{i=0}^{m} f\cdot \mathbb{1}_{E_i} \right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \int f\cdot \mathbb{1}_{E_i}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \int_{E_i} f = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{E_m} f .$$

$$\therefore \int_E f = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{E_m} f . \quad \blacksquare$$

Integral de Lebesgue de funciones medibles (integral general)

Dada una función medible y no negativa $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, decimos que f es integrable sobre $E \subseteq \mathbb{R}$ (medible) si

$$\int_E f < \infty .$$

(Note que $\int_E f \in [0, +\infty]$ en general).

El concepto anterior ayuda a extender el concepto de integral a funciones medibles que no son no negativas. Para tal fin, considere una función medible $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$. Se definen la parte positiva y parte negativa de f como las funciones no negativas $f^+, f^-: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dadas por:

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad y \qquad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observación: Note que $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Definición: Sea $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Diremos que f es integrable sobre un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}$ si f^+ y f^- son integrables sobre E. En tal caso, se define la integral de Lebesgue de f sobre E como

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Propiedades de la integral de Lebesgue: Las siguientes afirmaciones se cumplen para todo par de funciones f y g integrables sobre un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}$:

1) Aditividad: $f+g$ es integrable sobre E y

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$

2) Homogeneidad: Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot f$ es integrable sobre E y

$$\int_E (a \cdot f) = a \cdot \int_E f.$$

3) Monotonía: Si $f \leq g$ c.t.p., entonces

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

4) Aditividad en el dominio de integración: Si A y B son subconjuntos de E medibles y disjuntos, entonces f es integrable sobre A, B, $A \cup B$, y además

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

5) Si $f = 0$ c.t.p. entonces $\int_E f = 0$.

6) Si $m_J(E) = 0$, entonces $\int_E f = 0$.

• Demostración: Las partes 4), 5) y 6) son consecuencia inmediata de las propiedades correspondientes para integrales de funciones no negativas.

Para 3), basta con notar que $f^+ \leq g^+$ y $f^- \geq g^-$, y aplicar la propiedad de monotonía para integrales de funciones no negativas.

De manera similar, en 2) basta con notar que

$$(af)^+ = \begin{cases} a\cdot f^+ & \text{si } a \geq 0 \\ -a\cdot f^- & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad (af)^- = \begin{cases} a\cdot f^- & \text{si } a \geq 0 \\ -a\cdot f^+ & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Finalmente, probemos la parte 1):

Lo primero a demostrar es que si $f = f_1 - f_2$ donde f_1 y f_2 son funciones medibles no negativas e integrables, entonces $\int_E f = \int_E f_1 - \int_E f_2$. En efecto, como

$$f^+ - f^- = f_1 - f_2$$
$$f^+ + f_2 = f^- + f_1$$

se tiene por la aditividad de la integral de funciones no negativas que:

$$\int_E (f^+ + f_2) = \int_E (f^- + f_1)$$

$$\int_E f^+ + \int_E f_2 = \int_E f^- + \int_E f_1$$

$$\int_E f^+ - \int_E f^- = \int_E f_1 - \int_E f_2 .$$

La igualdad anterior es necesaria porque no es necesariamente cierto que $(f+g)^+ = f^+ + g^+$ y $(f+g)^- = f^- + g^-$. Por otro lado, como f^+, f^-, g^+ y g^- son integrables, se tiene que $f^+ + g^+$ y $f^- + g^-$ son integrables. Entonces, por la propiedad anterior se tiene que

$$\int_E (f+g) = \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-),$$

ya que $f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$

Así,

$$\int_E (f+g) = \int_E f^+ + \int_E g^+ - \int_E f^- - \int_E g^-$$

$$= \left(\int_E f^+ - \int_E f^- \right) + \left(\int_E g^+ - \int_E g^- \right)$$

$$= \int_E f + \int_E g . \quad \blacksquare$$

Cerramos estas notas de curso con el último teorema que nos permite intercambiar límite con integral.

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue: Sea g una función integrable sobre $E \subseteq \mathbb{R}$ medible y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in E \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $f_n \to f$ puntualmente en c.t.p. de E, entonces

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

· **Demostración:** Lo primero a notar es que f y f_n son integrables.

$0 \leq |f_n| \leq g \Rightarrow |f_n|$ es integrable

$|f_n| = f_n^+ + f_n^- \Rightarrow f_n^+$ y f_n^- son integrables

$\Rightarrow f_n$ integrable.

Tomando $n \to +\infty$, nos queda $|f| \leq g$, y por el argumento anterior se tiene que f es integrable. Así, por la propiedad de aditividad, se tiene que

$$\int_E (g - f) = \int_E g - \int_E f$$

y

$$\int_E (g - f_n) = \int_E g - \int_E f_n.$$

Escaneado con CamScanner

Por otro lado, $(g - f_n)$ define una sucesión de funciones medibles que converge puntualmente a $g - f$. Entonces, por el Lema de Fatou, se tiene que

$$\int_E g - \int_E f = \int_E (g-f) \leq \liminf \int_E (g - f_n)$$

$$= \liminf \left(\int_E g - \int_E f_n \right)$$

$$= \int_E g - \limsup \int_E f_n$$

$$\int_E f \geq \limsup \int_E f_n$$

De manera similar, si se considera la sucesión $(g + f_n)$ se obtiene la desigualdad

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n .$$

Así,

$$\limsup \int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf \int_E f_n \leq \limsup \int_E f_n .$$

Por lo tanto,

$$\liminf \int_E f_n = \limsup \int_E f_n = \int_E f \implies \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \text{ existe y}$$

$$\int_E f = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n \quad \blacksquare$$