Introducción a la Teoría de la Información

Práctico 7: Rate Distortion

Año 2024

Cada ejercicio tiene un símbolo que indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: $\diamondsuit$ básica, $\star$ media, $*$ avanzada, y $\ddagger$ difícil.

$\diamondsuit$ Problema 1

Dada una variable aleatoria $X \sim p_X(x)$ unidimensional y una medida de distorsión:

$$d(x, y) = (x - y)^2,$$

Mostrar que:
los codevectors son

$$\hat{X}_i = \frac{\int_{x_i}^{x_{i+1}} x p_X(x)\, dx}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_X(x)\, dx},$$

y los límites de las regiones son

$$x_i = \frac{1}{2}(\hat{X}_i + \hat{X}_{i-1}).$$

$\diamondsuit$ Problema 2

Dada una variable aleatoria $X \sim N(0, \sigma^2)$ y la medida de distorsión como error cuadrático, sin permitir descripciones en bloque:
Muestre que los puntos de reproducción óptimos para la cuantificación de 1 bit son $\pm\sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}}$ y que la distorsión esperada para la cuantificación de 1 bit es $\frac{\pi-2}{\pi}\sigma^2$.
Compare esto con la cota de rate-distortion $D = \sigma^2 2^{-2R}$ para $R = 1$.

⋆ Problema 3

Considerar un par de canales gaussianos paralelos de forma que:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}\right),$$

y donde hay una restricción de potencia $E(X_1^2 + X_2^2) \leq 2P$. Asumir que $N_1 > N_2$.

1. Hallar la capacidad de este canal.
2. Mostrar que para P entre 0 y cierto valor P_0 que deberá ser hallado, el canal se comporta como un único canal con potencia de ruido N_2.
3. Para $P > P_0$ hallar la distribución de potencia óptima entre ambos canales.

♢ Problema 4

Considere una fuente discreta $X \in \mathcal{X} = \{1, 2, \ldots, m\}$ con distribución $p_1, p_2, \ldots, p_m$ y una medida de distorsión $d(i, j)$. Sea $R(D)$ la función de rate-distortion para esta fuente y medida de distorsión. Sea $d'(i, j) = d(i, j) - w_i$ una nueva medida de distorsión, y sea $R'(D)$ la correspondiente función de rate-distortion.
Muestre que $R'(D) = R(D + \bar{w})$, donde $\bar{w} = \sum_i p_i w_i$, y use esto para demostrar que no hay una pérdida esencial de generalidad al asumir que $\min_{\hat{x}} d(i, \hat{x}) = 0$ (es decir, para cada $x \in \mathcal{X}$, hay un símbolo $\hat{x}$ que reproduce la fuente con distorsión cero).