

Capítulo 8

Polinomio de Taylor

8.1. Polinomio de Taylor y límites

Nomenclatura y notación:

- Polinomio de McLaurin: es el polinomio de Taylor alrededor de 0.
- Infinitésimo: decimos que una función f es un infinitésimo de orden n en un punto a si $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow a$ y además $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.
- $P_n(f, a)$: es el polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a .

1. El polinomio de McLaurin de orden 4 asociado a una cierta función f es $3 - 5x + 4x^2 - x^3 - 2x^4$. Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$.
2. Calcular el polinomio de Taylor de grado n de la función f en el punto a en los siguientes casos:

a) $f(x) = x^4 - x^3 + 2$, $a = 0$ y $a = 1$, $n = 2$ b) mismo polinomio pero $n = 4$

c) $f(x) = \sin(x)$, $a = \pi$, $n = 6$ d) $f(x) = \tan(x)$, $a = 0$, $n = 4$

e) $f(x) = e^x$, $a = 0$ y $a = 1$, $n = 4$ f) $f(x) = \log(x)$, $a = 1$ y $a = e$, $n = 4$

g) $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$, $a = 1$, $n = 4$ h) $f(x) = e^{x^2}$, $a = 0$ y $a = 2$, $n = 4$

i) $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$, $a = 1$, $n = 3$ j) $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin(t)}{t} dt$, $a = 1$, $n = 3$

3. Considere la función $f(x) = x \cos(x) - \sin(x)$.

- a) Encontrar el polinomio de McLaurin de orden 5 de f .
 b) Analiza si f presenta extremo relativo en $x = 0$.
 c) Calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + \frac{x^3}{3}}{x^5}$$

4. Calcular los siguientes límites usando polinomios de Taylor:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \operatorname{sen} x}{x^2 + 4x^3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x) - \cos(x)}{x^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^\alpha}, \alpha > 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x^2/2 + \operatorname{sen} x - 2x}{1 - \cos x - x^2/2} \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x - x^2/2}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$$

5. Calcular los siguientes límites usando polinomios de Taylor:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan(x)}{\sin^3(x)} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2} \quad e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{(\log(1+x))^2}$$

6. Determinar los valores de los parámetros (a , b , y/o c , según corresponda) para obtener un infinitésimo del mayor orden posible para $x \rightarrow 0$. Hallar la parte principal.

$$a) a(e^x - 1) - bx^2 - x \quad b) x + a \operatorname{sen} x + b \operatorname{tg} x \quad c) e^x \operatorname{sen} x - (ax + bx^2 + cx^3)$$

$$d) \log(1+x) - \frac{ax + bx^2}{1 + cx}$$

7. Sea Q un polinomio de grado n .

- a) Probar que $P_m(Q, a)(x) = Q(x)$ para todo $m \geq n$.
 b) Sea a raíz de Q de multiplicidad k . Probar que $P_m(Q, a) = 0$ si $m < k$ y a es raíz de $P_m(Q, a)$ con multiplicidad k si $m \geq k$.

8. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones n veces derivables.

Probar que

- a) $P_n(f + g, a) = P_n(f, a) + P_n(g, a)$
 b) $P_n(fg, a) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$ donde $P_n(f, a)P_n(g, a) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$
 c) $P_n(f - P_n(f, 0), 0) = 0$
 d) Si $h(x) = f(3x)$, $P_n(h, a) = \sum_{k=0}^n 3^k a_k(x-a)^k$ donde $P_n(f, 3a) = \sum_{k=0}^n a_k(x-3a)^k$
 e) Si $g(a) = 0$ entonces $P_n(f \circ g, a) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$ donde
 $P_n(f, 0) \circ P_n(g, a)(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k$

9. Hallar el desarrollo de McLaurin de orden n de las siguientes funciones:

a) $\frac{1}{2-x}$ b) $(x^2 + x)e^x$ c) $\log(1-x)$ d) $\frac{1}{x^2 - 2x + 1}$

e) $e^x - \cos(x)$ f) $\sin(x)\cos(x)$ g) $\sin^2(x)$ h) $\sqrt{1-x}$

10. a) Calcular $P_n(f, 0)$ para la función $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Sugerencia: escribir $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$ para algún par $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Calcular el $P_n(f, 0)$ para la función $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

11. Consideremos la función: $f(x) = e^x - x - 2 + \cos x - \frac{x^3}{6}$

a) Encontrar el polinomio de McLaurin de orden 4 de f .

b) Analizar si f presenta un extremo relativo en 0.

c) Calcular, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$$

12. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable, tal que existe $k < n$ para el cual $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k)}(a) = 0$ y $f^{(k+1)}(a) \neq 0$.

Probar las siguientes afirmaciones:

a) Existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, tal que $g(a) \neq 0$ y $f(x) = (x-a)^{k+1}g(x)$.

b) Si $k+1$ es impar, entonces f no tiene un extremo relativo en a .

c) Si $k+1$ es par, entonces f tiene un extremo relativo en a . Además si $f^{(k+1)}(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo, mientras que si $f^{(k+1)}(a) < 0$ tiene un máximo relativo.

8.2. Resto de Taylor y aproximaciones

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función 2 veces derivable tal que

- $f(0) = 0, f(1) = 1$
- $f'(0) = f'(1) = 0$

Probar que existe $c \in [0, 1]$ tal que $|f''(c)| \geq 4$.

2. Aproximaciones racionales

En este ejercicio basta con dar una forma de encontrar la aproximación, no es necesario hallarla explícitamente.

- a) Dar una aproximación racional del número e con un error menor a 10^{-4} .
- b) Dar una aproximación racional del número $\sin(2)$ con un error menor a 10^{-4} .
- c) Dar una aproximación racional del número $\sqrt{8}$ con un error menor a 10^{-4} .
- d) Dar una aproximación racional del número $\log(1,2)$ con un error menor a 10^{-4} .

3. Aproximaciones de integrales

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la función definida por $f(t) = e^{-t^2}$.

La idea de este ejercicio es aproximar el valor de la integral $\int_0^1 f(t) dt$

- a) Dar una partición equi-espaciada de forma que $S^*(f, P) - \int_0^1 f(t) dt \leq 10^{-6}$. Sugerencia: revisar la prueba de que una función monótona es integrable.
 - b) Dar un n tal que $\left| \int_0^1 P_n(f, 0)(t) dt - \int_0^1 f(t) dt \right| < 10^{-6}$
4.
 - a) Usando el polinomio de McLaurin de orden 3 de $\sin(x)$, hallar una aproximación de la solución no nula a la ecuación $x^2 = \sin(x)$.
 - b) Llamemos r a la aproximación de la parte anterior. Ver qué estimación da una calculadora de r^2 y $\sin(r)$.
 - c) Demostrar que:

$$|r^2 - \sin(r)| < 0,05$$

5. Acotaciones uniformes

- a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ (es decir con derivadas de todos los ordenes). Probar que si existe M tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M \forall n$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ que verifica que $|P_n(f, 0) - f(x)| \leq \epsilon$.
- b) Sea $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Probar que $P_n(\Psi, -1) = 0$ para todo n . Deducir que las derivadas de Ψ no están acotadas,

8.3. Complementarios

1. Calcule los siguientes límites

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(x) - 1)(\log(1+x) - x) - x^4}{x^5}$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\log(x+1)}{x^2} \right)$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x) + \sin(x))^{\frac{1}{x}} \quad e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$$

2. Encontrar una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable que no tenga derivada segunda en 0 y que verifique $|f(x)| \leq x^3$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 (dos veces derivable con derivada segunda continua).

Definimos la función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Probar que ϕ es de clase C^1 .

Probar que si f es de clase C^3 entonces ϕ es de clase C^2