# Redes Estocásticas de Flujo

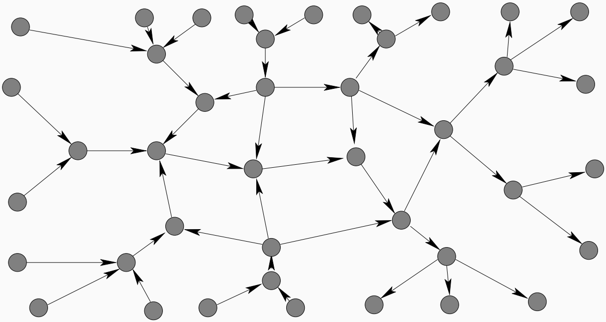
## Introducción

Leslie Murray

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina

Junio, 2024

# Modelo



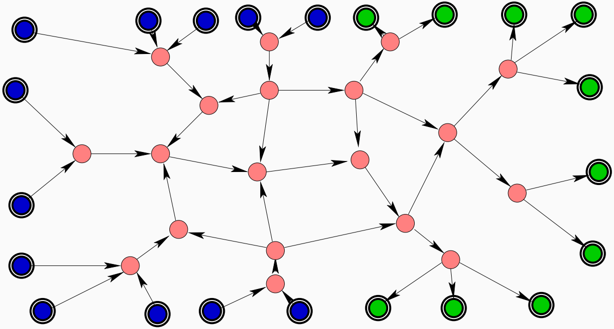
- Grafo dirigido: $G(V, A, C)$
- $V = \{\text{nodos}\}$, $A = \{\text{arcos}\}$, $C = \{\text{capacidades}\}$ $\rightarrow$ $|V| = n$, $|A| = |C| = m$

## Modelo de Red

*nodos*: algunos generan flujo de información, otros lo reciben y otros sólo le dan paso
*arcos*: transportan el flujo entre los nodos de sus extremos (única dirección)
*capacidad*: valor máximo de cantidad de flujo que puede transportar cada arco

$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) = \text{vector indicador del flujo a través de los arcos}$$

# Modelo



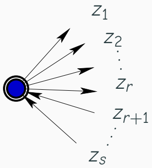
- Grafo dirigido: $G(V,A,C)$
- $V = \{\text{nodos}\}$, $A = \{\text{arcos}\}$, $C = \{\text{capacidades}\} \;\rightarrow\; |V| = n$, $|A| = |C| = m$

**Modelo de Red**

*nodos*: algunos generan flujo de información, otros lo reciben y otros sólo le dan paso
*arcos*: transportan el flujo entre los nodos de sus extremos (única dirección)
*capacidad*: valor máximo de cantidad de flujo que puede transportar cada arco

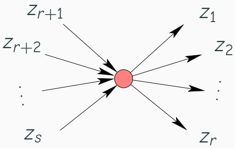
$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) = \text{vector indicador del flujo a través de los arcos}$$

Generación $\rightarrow$



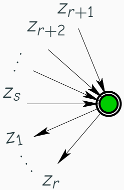

$$\sum_{i=1}^{r} z_i > \sum_{j=r+1}^{s} z_j$$

Transporte $\rightarrow$



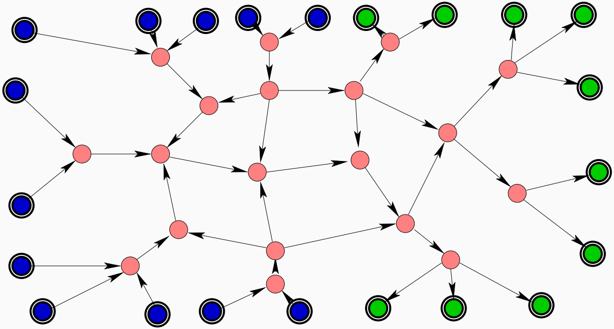

$$\sum_{i=1}^{r} z_i = \sum_{j=r+1}^{s} z_j$$

Recepción $\rightarrow$




$$\sum_{i=1}^{r} z_i < \sum_{j=r+1}^{s} z_j$$

# Objetivo



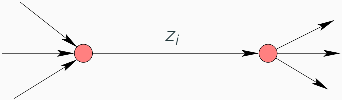
- En los nodos *azules* se genera un flujo de información.
- El flujo de información generado se “desparrama” a través de los nodos rojos.
- Los nodos *verdes* reciben el flujo de información generado en los *azules*.

**Objetivo de Red**

Transportar el máximo valor posible de flujo desde los nodos *azules* hasta los *verdes*.

# Capacidad I

El flujo $z_i$ transportado por un arco $a_i$ no puede superar un límite, $c_i$, $i=1,\ldots,m$, llamado capacidad:




$$\forall a_i \in A,\ 0 \leq z_i \leq c_i,\ i=1,\ldots,m$$

**Capacidad de un arco**

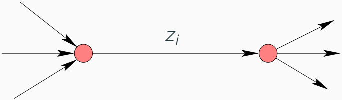
El máximo valor de flujo que puede atravesar un arco se denomina capacidad.

Se puede encontrar un valor de flujo por arco $z_i$, $i=1,\ldots,m$, resolviendo un sistema de ecuaciones $\mathscr{E}$, con las siguientes restricciones:

1. que se respete el límite de capacidad de cada arco,
2. que se garantice la conservación de flujo en cada nodo interior y
3. que se maximice el "flujo saliente de los nodos *azules*" = "flujo entrante a los nodos *verdes*".

# Capacidad II

El flujo $z_i$ transportado por un arco $a_i$ no puede superar un límite, $c_i$, $i = 1, \ldots, m$, llamado capacidad:

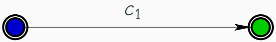



$$\forall a_i \in A,\ 0 \leq z_i \leq c_i,\ i = 1, \ldots, m$$

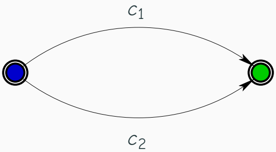
**Capacidad de un arco**

El máximo valor de flujo que puede atravesar un arco se denomina capacidad.

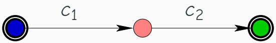
Siendo $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ la solución del sistema de ecuaciones $\mathscr{E}$, llamamos $F(Z)$ a la suma del flujo saliente de todos los nodos azules o la suma del flujo entrante a todos los nodos verdes.




$F(Z) = c_1$




$F(Z) = c_1 + c_2$




$F(Z) = \min\{c_1, c_2\}$

# Capacidad IV

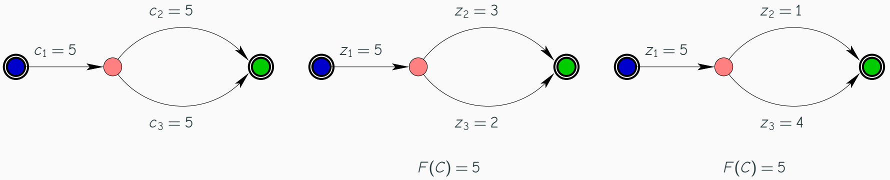
El valor de $F(Z)$ se denomina *capacidad de la red*.

## Capacidad de la Red

Dada una topología y un conjunto de capacidades, la capacidad de una red es el máximo flujo posible saliente de los nodos *azules* o entrante a los nodos *verdes*.

Algoritmos como *Ford–Fulkerson* (o similares) resuelven el sistema de ecuaciones $\mathscr{E}$. La solución $Z = (z_1, \ldots, z_m)$ no siempre es única, pero $F(Z) = F(C)^{(*)}$ sí lo es.

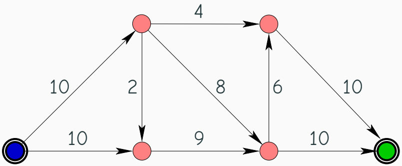
EJEMPLO 1:



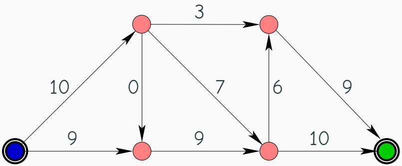

□

$^{(*)}$ Dado que las posibles soluciones, $Z$, quedan fijadas por $C$, llamaremos de aquí en más $F(C)$ a $F(Z)$.

# Capacidad – Ejemplo

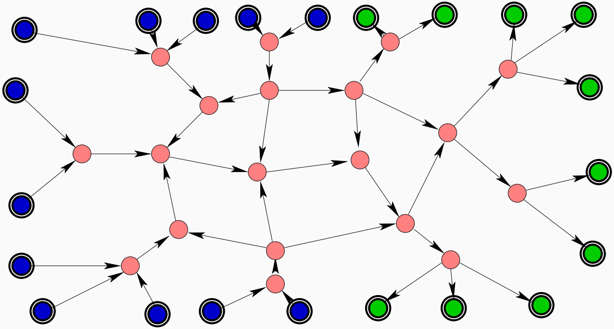



$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

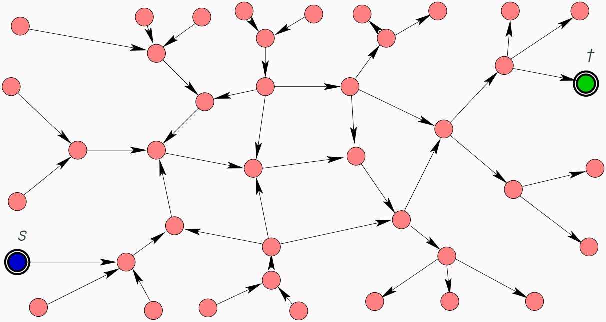



$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$$

 $F(C) = 19$ 

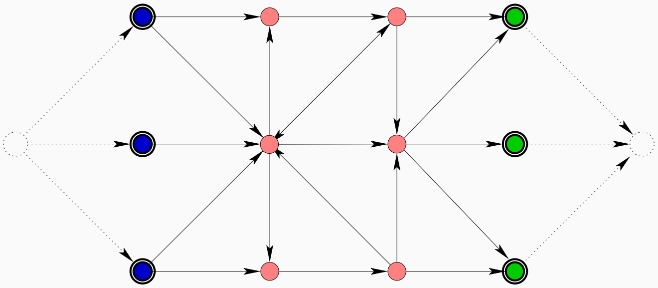


En el caso general se transmite flujo desde un conjunto de nodos (*azules*) hasta otro conjunto de nodos (*verdes*).




Al igual que en el Modelo Estático, es útil trabajar sobre un modelo simplificado, en el que sólo un nodo (*azul*), $s$, genera el flujo que la red debe transportar hasta un único nodo (*verde*), $t$.

# Múltiples Nodos Origen–Destino



- Los algoritmos como *Ford–Fulkerson* (o similares) calculan $F(C)$ sobre redes con un nodo origen y un nodo destino.
- Para resolver el problema con múltiples nodos origen y destino se agregan:
  - un nodo origen *ficticio*, ligado mediante arcos *ficticios* de capacidad infinita,
  - un nodo destino *ficticio*, ligado mediante arcos *ficticios* de capacidad infinita,

  tal como se muestra en la figura.
- Se resuelve el problema con los nodos agregados, y luego se eliminan.

# Función de Estructura

- Cada componente del vector $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$, $z_i \leq c_i$, es una variable que indica la cantidad de flujo que atraviesa el arco $a_i$.
- La red —en forma global— permite el paso de una cantidad $F(C)$ de flujo desde el nodo $s$ hasta el nodo $t$.
- $F(C)$ es una variable que indica la *capacidad de la red*.
- Las redes se diseñan con el objetivo de garantizar que su capacidad no sea inferior a un cierto mínimo, $d$, llamado *demanda*: $F(C) \geq d$.
- La *función de estructura*, $\phi(C)$, es una variable indicatriz de esta condición:

$$\phi(C) = \begin{cases} 1 & \text{si } F(C) \geq d \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

**Función de estructura**

$\phi(C)$ es la indicatriz de que la red cumple con el cometido para el cual fue diseñada.

- $G = (V, A, C)$ se transforma en $G = (V, A, \mathbf{X})$, siendo $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ un vector aleatorio en un espacio $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$.
- La capacidad del $i$–ésimo arco es una v.a. $X_i$ que toma valores aleatorios acorde a una distribución $f_{X_i}(x)$ ($i$–ésima componente de $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$).
- Para cada valor de $\mathbf{X}$ resulta un valor máximo posible de flujo transportado por la red: $F(\mathbf{X})$.
- $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ es la v.a. que determina la capacidad de la red: *estado de la red*.
- Siendo $\mathbf{X}$ y $F(\mathbf{X})$ valores aleatorios, la *función de estructura* resulta una v.a.,

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } F(\mathbf{X}) \geq d \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Basados en $\phi(\mathbf{X})$ se define $\zeta$, la confiabilidad de la red:

$$\zeta = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} = \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$$

**Confiabilidad de la red, $\zeta$**

La probabilidad de que la red cumpla con el cometido para el cual fue diseñada.

De aquí en más las v.a. $X_i$, $i = 1, \ldots, m$, se considerarán mutuamente independientes.

- $G=(V,A,C)$ se transforma en $G=(V,A,\mathbf{X})$, siendo $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_m)$ un vector aleatorio en un espacio $\Omega=(\Omega_1,\ldots,\Omega_m)$.
- La capacidad del $i$–ésimo arco es una v.a. $X_i$ que toma valores aleatorios acorde a una distribución $f_{X_i}(x)$ ($i$–ésima componente de $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$).
- Para cada valor de $\mathbf{X}$ resulta un valor máximo posible de flujo transportado por la red: $F(\mathbf{X})$.
- $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_m)$ es la v.a. que determina la capacidad de la red: *estado de la red*.
- Siendo $\mathbf{X}$ y $F(\mathbf{X})$ valores aleatorios, la *función de estructura* resulta una v.a.,

$$\phi(\mathbf{X})=\begin{cases}1 & \text{si } F(\mathbf{X})\geq d\\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

- Basados en $\phi(\mathbf{X})$ se define $1-\zeta$, la anti–confiabilidad de la red:

$$1-\zeta=\mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X})=0\}=1-\mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$$

**Anti–confiabilidad de la red, $1-\zeta$**

La probabilidad de que la red no cumpla con el cometido para el cual fue diseñada.

De aquí en más las v.a. $X_i$, $i=1,\ldots,m$, se considerarán mutuamente independientes.

Nota: en futuras discusiones se evaluará la conveniencia de trabajar con $1-\zeta$ en lugar de $\zeta$.

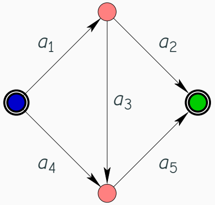
- La capacidad del $i$–ésimo arco es una v.a. $X_i$ que toma valores entre 0 y $c_i$ acorde a una distribución $f_{X_i}(x)$ ($i$–ésima componente de $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$).
- Cada $f_{X_i}(x)$ puede ser tanto discreta como continua .
  - Caso Continuo: $m$ densidades de probabilidad $f_{X_i}(x)$ en $\Omega_i = [0, c_i]$.
  - Caso Discreto: $m$ funciones de masa de probabilidad $f_{X_i}(x) = \mathbb{P}\{X_i = x\}$ en un conjunto discreto $\Omega_i$, $i = 1, \ldots, m$.

    Variante 1: $\Omega_i = \{0, c_i\}$, $c_i > 0$.

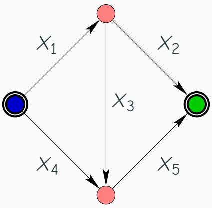
    Variante 2: $\Omega_i = \{0, c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in_i}\}$, $0 < c_{i1} < c_{i2} < \ldots < c_{in_i}$.

    Variante 3: $\Omega_i = \{0, 1, 2, \ldots, c_{in_i}\}$, $c_{in_i} > 0$.

EJEMPLO 4:




$$\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3\}$$
$$\Omega_2 = \{0, 1, 2\}$$
$$\Omega_3 = \{0, 1\}$$
$$\Omega_4 = \{0, 1\}$$
$$\Omega_5 = \{0, 1, 2\}$$

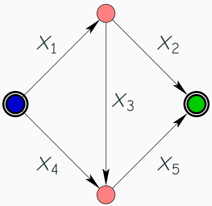



- El estado de la red es el vector de variables aleatorias, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.
- Cada componente de $\mathbf{X}$ tiene una densidad de probabilidad $f_{X_i}(x)$ (caso continuo) o a una función de masa de probabilidad $f_{X_i}(x) = \mathbb{P}\{X_i = x\}$ (caso discreto).
- La *función de estructura* es:

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } F(\mathbf{X}) \geq d \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- La anti–confiabilidad de la red es:

$$1 - \zeta = 1 - \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} = 1 - \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$$




- Las replicaciones tienen la siguiente forma:

$$\phi(\mathbf{X})^{(i)} = \phi(\mathbf{X}^{(i)}) = \phi(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, X_3^{(i)}, X_4^{(i)}, X_5^{(i)}),\ i = 1, \ldots, n$$

  - Se sortea un valor valor $\mathbf{X}^{(i)}$ (un valor de capacidad para cada arco).
  - Se arma un grafo con el valor de capacidad sorteado para cada arco.
  - Sobre el grafo resultante se aplica un algoritmo, por ejemplo *Ford–Fulkerson*, para determinar el valor de $F(\mathbf{X})$.
  - Se asigna valor, 1 o 0 a $\phi(\mathbf{X})^{(i)}$ según sea $F(\mathbf{X}) \geq d$, o no.

- El estimador estándar de $1 - \zeta = 1 - \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$ es $\rightarrow$ $1 - \widehat{\zeta} = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(\mathbf{X})^{(i)}$

- Chin-Chia Jane, Jsen-Shung Lin, and John Yuan. "Reliability evaluation of a limited-flow network in terms of minimal cutsets". In: *IEEE Transactions on Reliability* 42.3 (1993), pp. 354–368.
- Yi-Kuei Lin. "On reliability evaluation of a stochastic-flow network in terms of minimal cuts". In: *Journal of the Chinese institute of industrial engineers* 18.3 (2001). Ed. by Taylor & Francis Group, pp. 49–54.
- Peixin Zhao and Xin Zhang. "A Survey on Reliability Evaluation of Stochastic-Flow Networks in Terms of Minimal Paths". In: *Proceedings of the 2009 International Conference on Information Engineering and Computer Science*. IEEE Computer Society Press, 2009, pp. 1–4. ISBN: 978-1-4244-4994-1. DOI: `10.1109/ICIECS.2009.5365424`.

# Comentarios de Cierre

- Otras medidas de confiabilidad.

---

- Modelos con Dependencias entre Fallas.
- Modelos con Fallas en los Nodos.
- Redes de Flujo Multifuente–Multiterminal en la que coexisten distintos Flujos.

---

- Sistemas multicomponentes.
- Simulación a Eventos Discretos.
- Redes de Flujo para Transporte de Material por Unidad de Tiempo.

---

La simulación como alternativa a cálculos extremadamente complejos o imposibles.

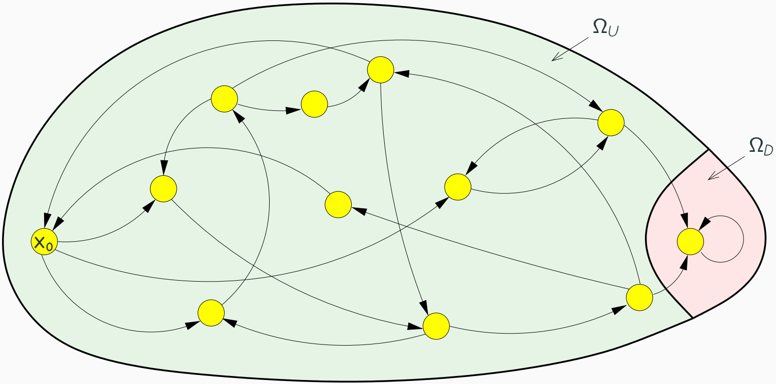
# Sistemas Multicomponentes - EJEMPLO

COMPONENTES DISPONIBLES:

- 4 Fuentes de alimentación (**F**)
- 16 Bancos de Memoria (**M**)
- 8 Discos Rígidos (**D**)
- 64 CPUs (**C**)

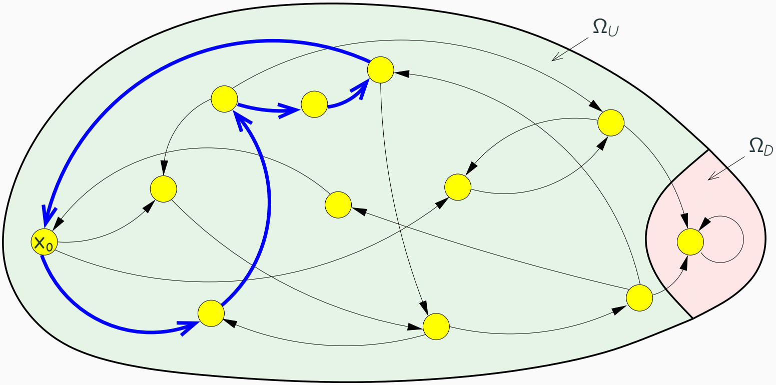
CONDICIONES DE OPERACIÓN: para estar operativo, el sistema debe verificar alguna o algunas de las siguientes condiciones,

- Contar con, al menos, 2 **F**, 8 **M**, 6 **D** y 56 **C**.
- Si **F**=3, entonces $12 \leq \mathbf{M} \leq 16$ y $\mathbf{D} > 6$.
- ...



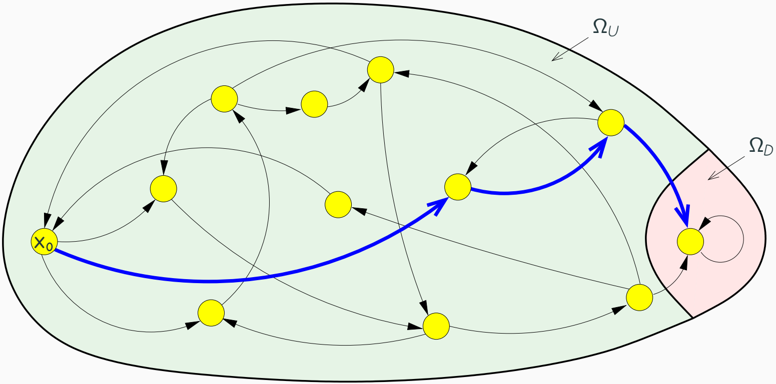

$$\mathbf{X} = (\mathbf{F},\mathbf{M},\mathbf{D},\mathbf{C}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{X}_0 = (4, 16, 8, 64)$$

$\Omega_U$: región de operación correcta (*UP*)
$\Omega_D$: región de falla (*DOWN*)



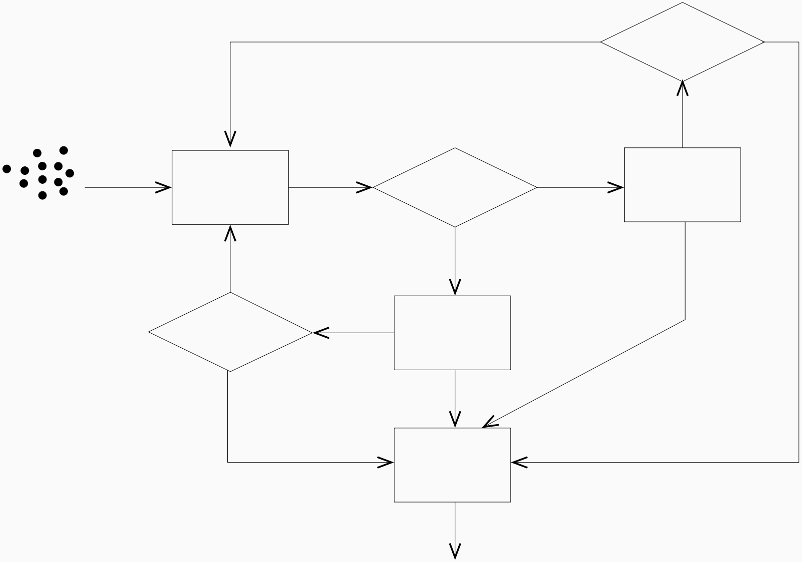

$$X = (F,M,D,C) \quad \rightarrow \quad X_0 = (4,16,8,64)$$

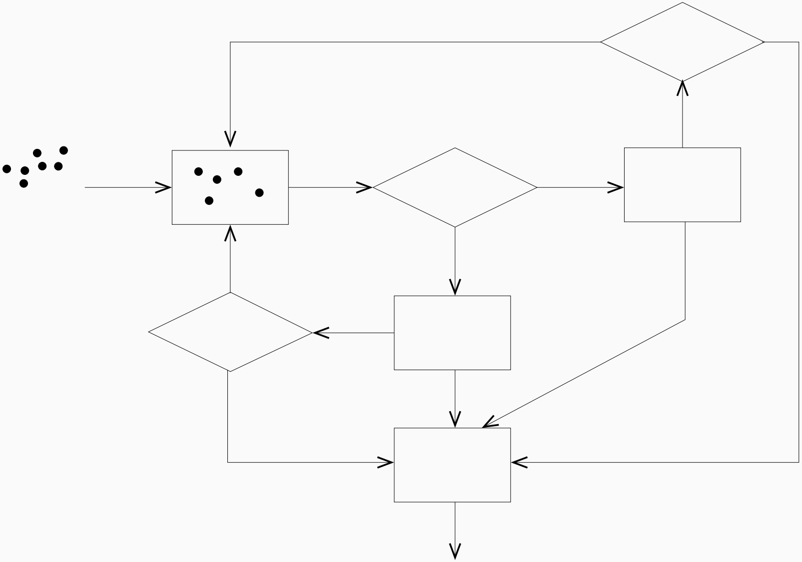
$\Omega_U$: región de operación correcta (*UP*)
$\Omega_D$: región de falla (*DOWN*)

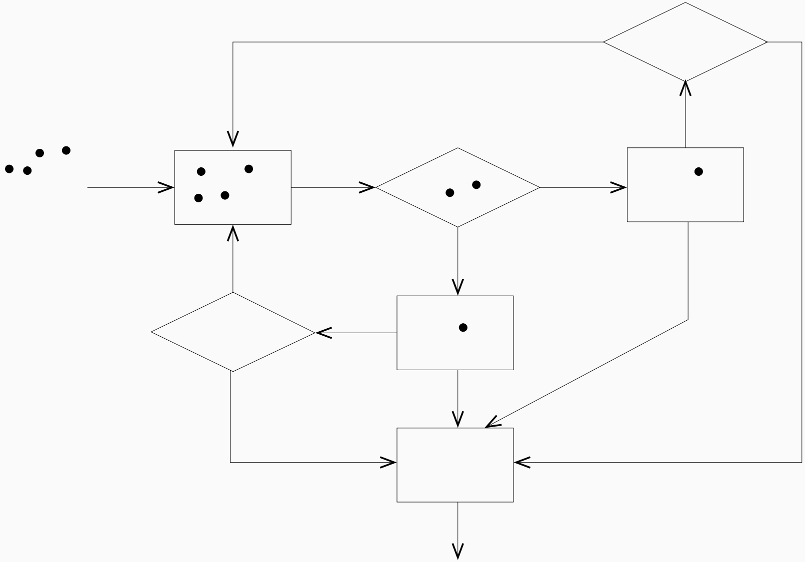


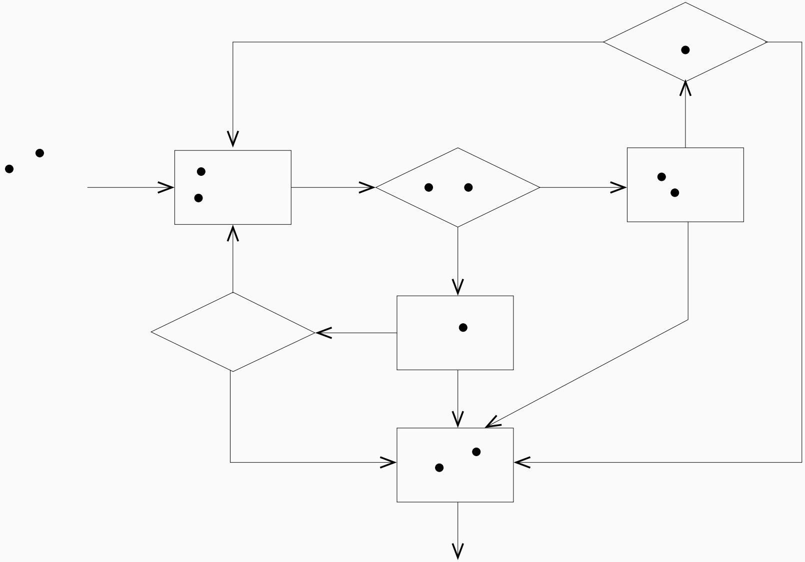

$$X = (F,M,D,C) \quad \rightarrow \quad X_0 = (4, 16, 8, 64)$$

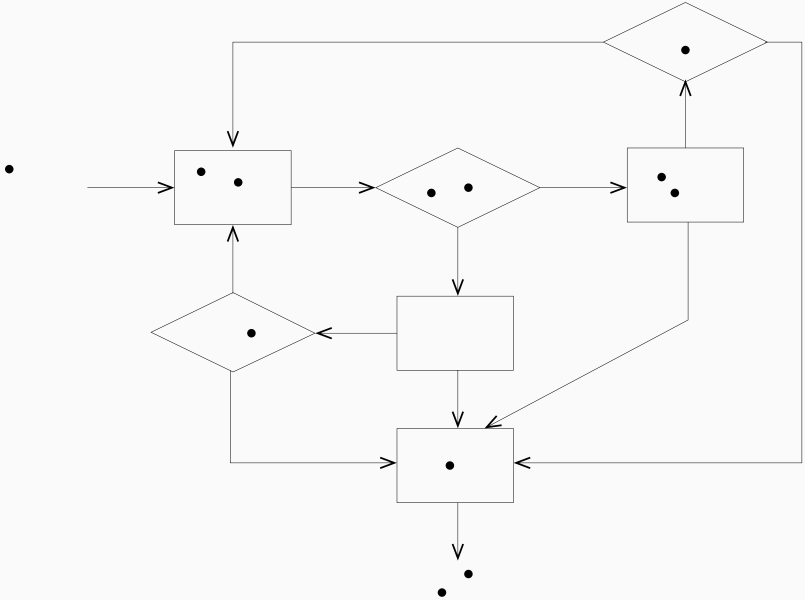
$\Omega_U$: región de operación correcta (*UP*)
$\Omega_D$: región de falla (*DOWN*)



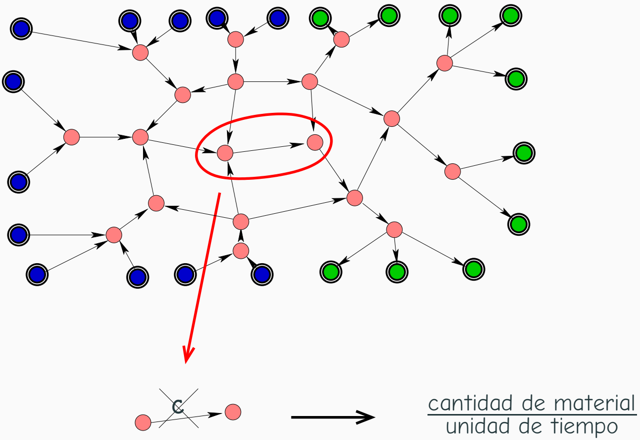








# Redes de Flujo para Transporte de Material por Unidad de Tiempo




EJEMPLOS: ¿Cuanto tarda en pasar una cantidad **M** de material depositado en los nodos azules hasta los nodos verdes?, ¿cuál es la probabilidad de que ese tiempo sea inferior a un cierto **t**?, ...