Splitting sobre el Modelo Estático de Redes

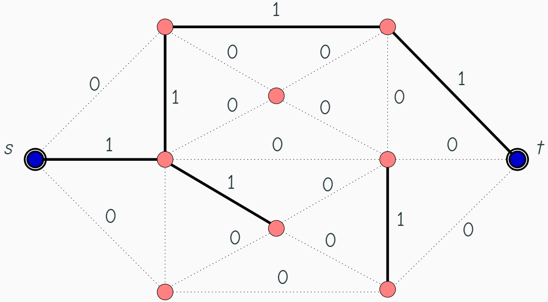
Ideas Básicas y Fundamentos

Leslie Murray

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina

Junio, 2024

$$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m) \rightarrow X_i = \begin{cases} 1 & \text{c.p. } r_i & i\text{–ésimo enlace operativo} \\ 0 & \text{c.p. } q_i = 1 - r_i & i\text{–ésimo enlace fallado} \end{cases}$$



$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s \text{ y } t \textit{ están conectados} \\ 0 & \text{si} \quad s \text{ y } t \textit{ no están conectados} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{cl} \zeta & = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} \\ 1 - \zeta & = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 0\} \end{array}$$

- El método que vamos a introducir se basa en el Proceso de Creación (**PC**).
- Asumimos entonces que $\tau_{(1)}, \tau_{(2)}, \ldots, \tau_{(c)}$, es la secuencia de instantes de reparación de enlaces:

  y que $\tau_{(c)}$ es el instante a partir del cual los nodos s y t quedan conectados.
- La anti–confiabilidad de la red es la probabilidad de que $\tau_{(c)}$ supere a $t = 1$:

$$1 - \zeta = \mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1\}$$

- El método que vamos a introducir es apropiado para el caso en que $1 - \zeta \ll 1$.

El Proceso de Creación / MC Crudo

La simulación MC Crudo para estimar $1-\zeta$ con este modelo consiste en:

1. Sortear N secuencias independientes $\{\tau_{(1)}^{(i)}, \tau_{(2)}^{(i)} \cdots, \tau_{(c)}^{(i)}\}$, $i = 1, \ldots, N$.
2. Para cada secuencia sorteada calcular el valor de la variable indicatriz $I^{(i)}$:

$$I^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_{(c)}^{(i)} > 1, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

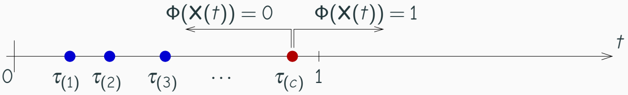
3. Promediar los N valores calculados:

$$1 - \widehat{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I^{(i)} \quad i = 1, \cdots, N$$

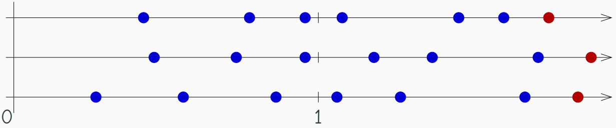
Es la misma estimación por MC Crudo hecha antes de introducir el PC...

Debe mejorarse por medio de un método de reducción de varianza

El **PC** sobre redes de distinta Confiabilidad

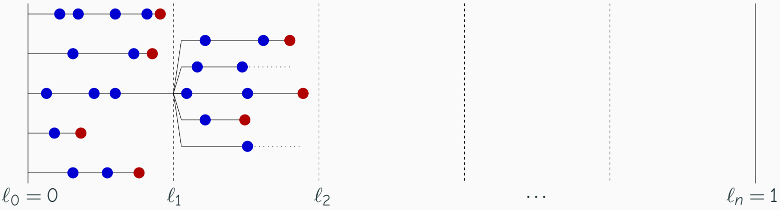


- Tres replicaciones (red muy poco confiable):

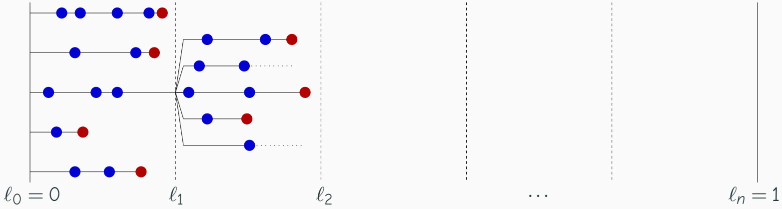


- Tres replicaciones (red altamente confiable):

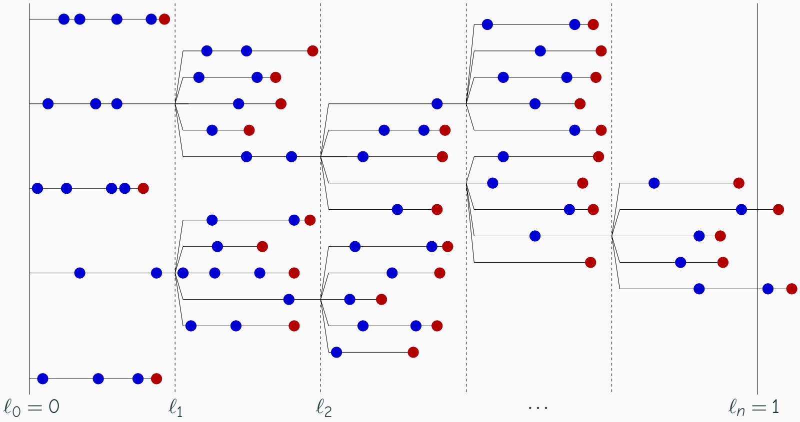
Se aplicará Splitting para estimular las trayectorias candidatas a que $\tau_{(c)} > 1$.

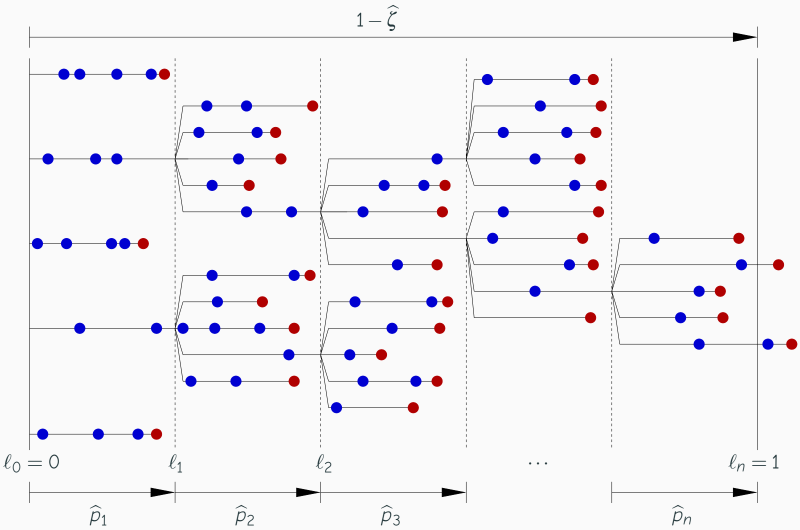


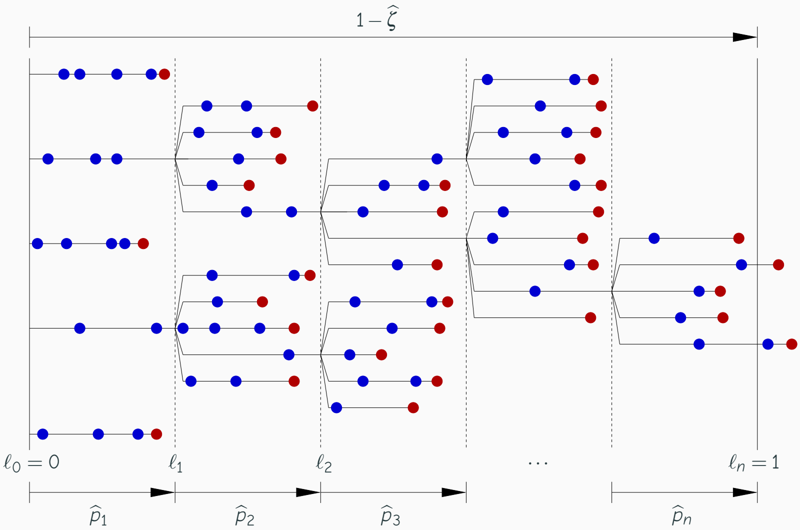
Para ello se van a clonar todas aquellas para las cuales $\tau_{(c)} > \ell_i$, $i = 1, \ldots, n-1$.



Splitting sobre el **CP**

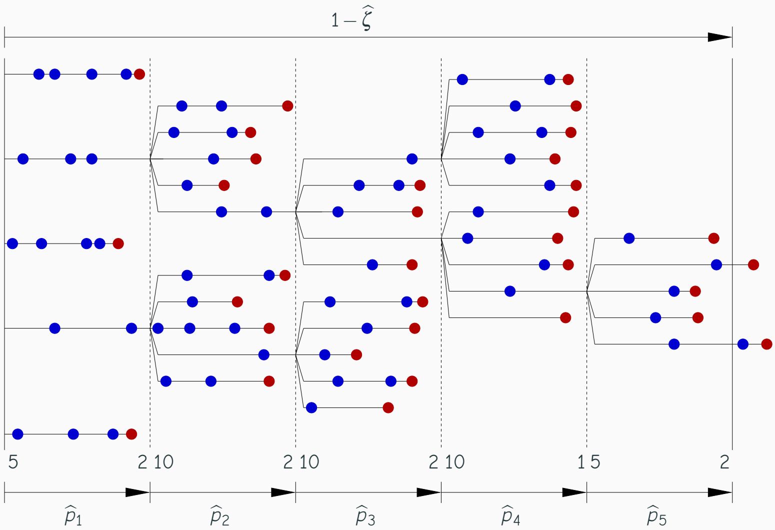



$1-\widehat{\zeta}$
$\ell_0 = 0$
ℓ_1
ℓ_2
$\cdots$
$\ell_n = 1$
$\widehat{p}_1$
$\widehat{p}_2$
$\widehat{p}_3$
$\widehat{p}_n$

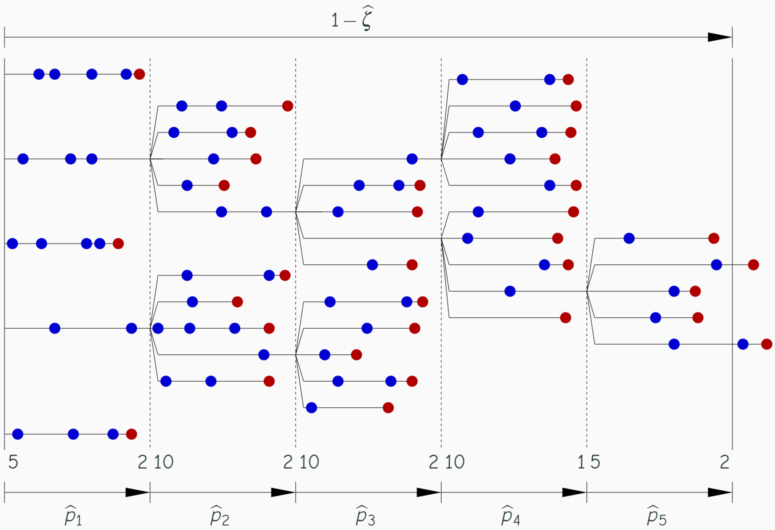


Estimaciones (MC Crudo) por etapa: **(nro. tray. exitosas/nro. total trayectorias)**

Splitting sobre el **CP**

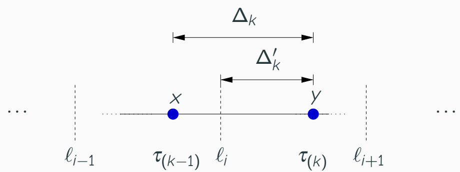


$$1-\widehat{\zeta} = \widehat{p}_1\ \widehat{p}_2\ \widehat{p}_3\ \widehat{p}_4\ \widehat{p}_5 = \frac{2}{5}\ \frac{2}{10}\ \frac{2}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{2}{5} = 0.00064$$



$0.00064 \approx \dfrac{1}{1500}$ → MC Crudo requeriría **no menos de** 15,000 replicaciones.

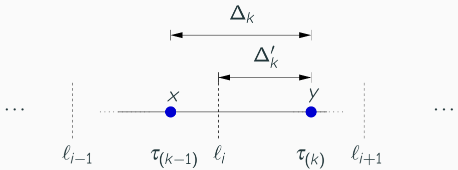
¿Cómo clonar las Trayectorias?



- Supóngase que en $\tau_{(k-1)}$ se repara el enlace x. Luego se sortea un valor de Δ_k para fijar en en $\tau_{(k)}$ el instante de reparación del enlace y.
- En el instante ℓ_i el estado de la trayectoria dibujada podría definirse como: "en proceso de reparación del enlace y", o "reparándose el enlace y" (∗).
- Deberían sortearse múltiples replicaciones de la trayectoria que se inicien en el punto de cruce por ℓ_i, en el estado "reparándose el enlace y".
- Sortear nuevos tiempos Δ_k y contar, cada vez, Δ_k segundos a partir de $\tau_{(k-1)}$ para ubicar los nuevos $\tau_{(k)}$, podría dar lugar a valores $\tau_{(k)} < \ell_i$. No sirve.
- Es necesario sortear los nuevos Δ_k condicionados al hecho de que superen ℓ_i.

(∗) En realidad el enlace y es una referencia a un enlace genérico cualquiera porque, de hecho, en el instante ℓ_i están "en proceso de reparación" todos los enlaces no reparados hasta ese momento.

¿Cómo clonar las Trayectorias?



- Dada la *falta de memoria* de la distribución exponencial, sortear Δ_k y ubicar $\tau_{(k)}$ como:

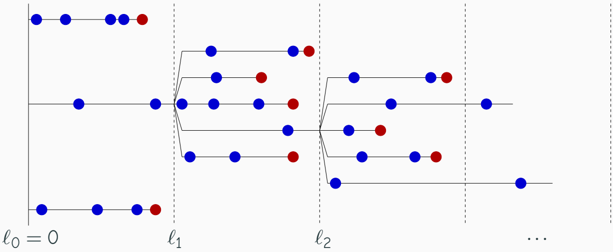
$$\tau_{(k)} = \tau_{(k-1)} + \Delta_k$$

si $\tau_{(k)}$ ha resultado mayor que ℓ_i, es estadísticamente equivalente a sortear Δ'_k, con la misma tasa que fue sorteado Δ_k, y ubicar $\tau_{(k)}$ como:

$$\tau_{(k)} = \ell_i + \Delta'_k$$

- Podrán sortearse entonces tantos valores de Δ'_k como trayectorias nuevas se quieran iniciar en el punto de cruce por ℓ_i.
- El enlace y elegido (sorteado) sobre cada nueva trayectoria no tiene por qué ser el mismo.
- La trayectoria que primero cruzó ℓ_i, se puede conservar.

Propiedad del Método



- En la aplicaciones estándar de Splitting, antes de completarse una trayectoria fallida, el proceso puede exhibir una secuencia de *subidas* y *bajadas* que no es más que una pérdida de tiempo de simulación $^{(*)}$.
- Las *subidas* y *bajadas* previas al evento de fin de una trayectoria son un problema crítico para algunas aplicaciones estándar de Splitting, por lo tanto una importante cualidad del método propuesto.
- En la presente aplicación las trayectorias *mueren instantáneamente* cuando se repara el enlace crítico (instantes $\tau_{(c)} =$ puntos rojos), sin *subidas* ni *bajadas*.

$^{(*)}$ Ver módulo Splitting, Ideas Básicas y Fundamentos, ejemplo de la Cola M/M/1.

Bibliografía

T. Elperin, I. B. Gertsbakh, and M. Lomonosov. "Estimation of Network Reliability Using Graph Evolution Models". In: *IEEE Transactions on Reliability* 40.5 (Dec. 1991), pp. 572–581.

Leslie Murray, Héctor Cancela, and Gerardo Rubino. "A splitting algorithm for network reliability estimation". In: *IIE Transactions* 45.2 (2013), pp. 177–189. DOI: `10.1080/0740817X.2012.677574`.