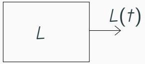
Splitting

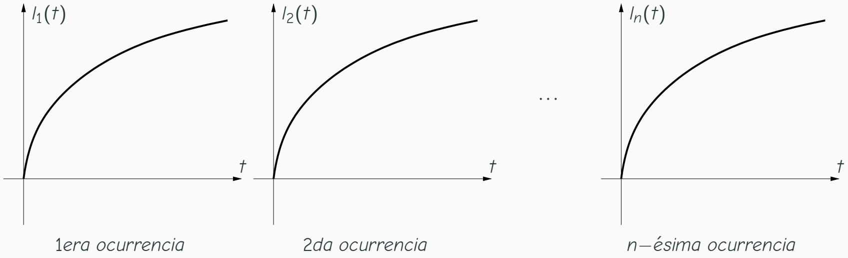
Ideas Básicas y Fundamentos

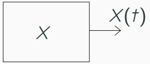
Leslie Murray

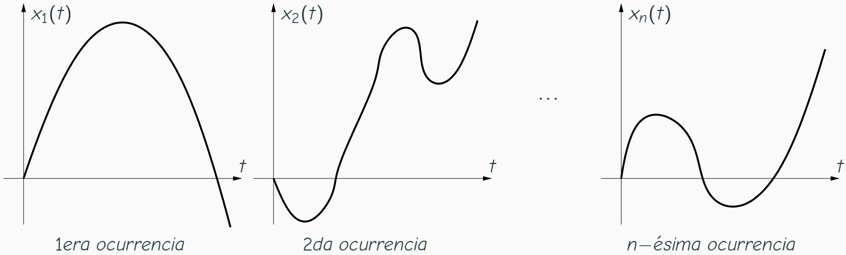
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina

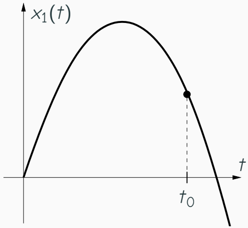
Junio, 2024


L
L(t)

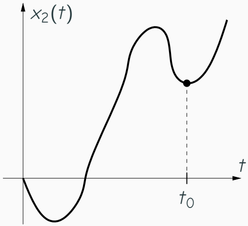

$l_1(t)$
t
1era ocurrencia
$l_2(t)$
t
2da ocurrencia
...
$l_n(t)$
t
n−ésima ocurrencia


X
$X(t)$


$x_1(t)$
t
1era ocurrencia
$x_2(t)$
t
2da ocurrencia
...
$x_n(t)$
t
n−ésima ocurrencia

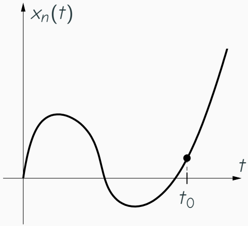


1era ocurrencia



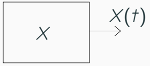
2da ocurrencia

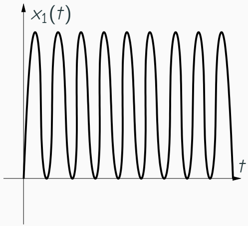
$\cdots$



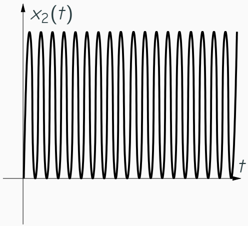
$n-$ésima ocurrencia

Proceso Aleatorio (III)



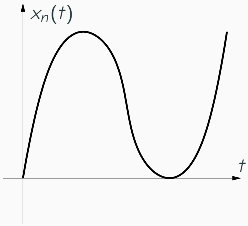


1era ocurrencia

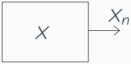


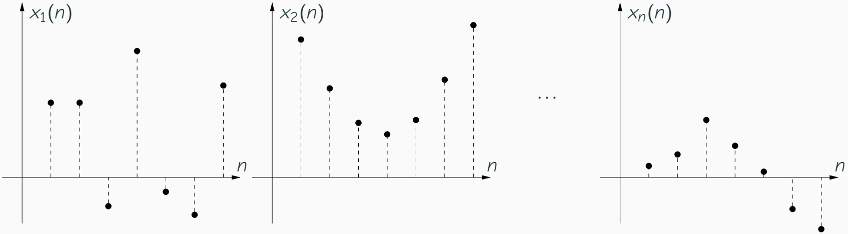
2da ocurrencia

$\cdots$



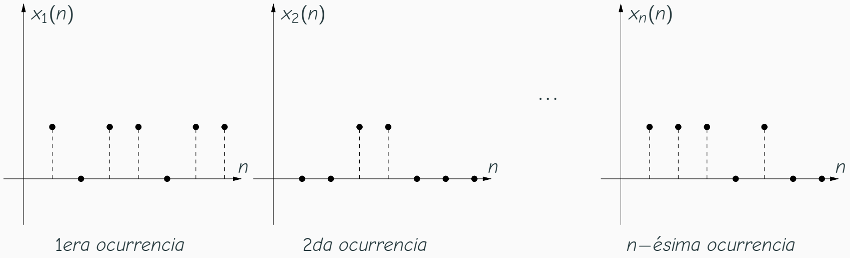
n−ésima ocurrencia

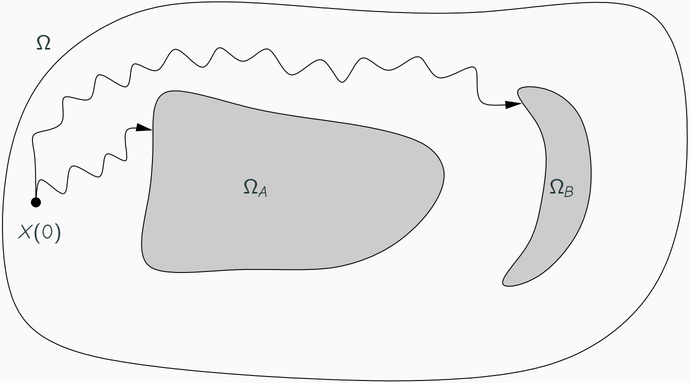




1era ocurrencia   2da ocurrencia   n−ésima ocurrencia

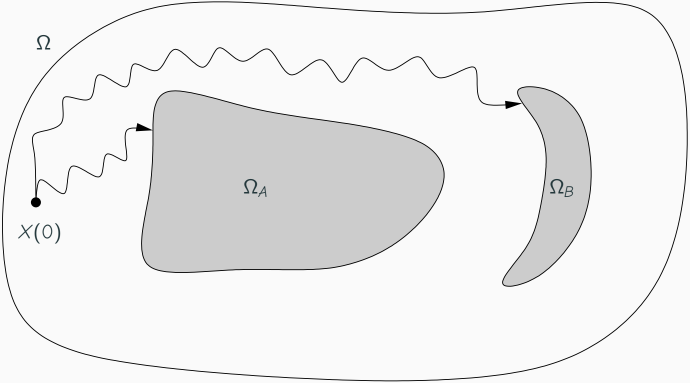

X
X_n


$x_1(n)$
n
$x_2(n)$
n
$\cdots$
$x_n(n)$
n
1era ocurrencia
2da ocurrencia
$n-$ésima ocurrencia



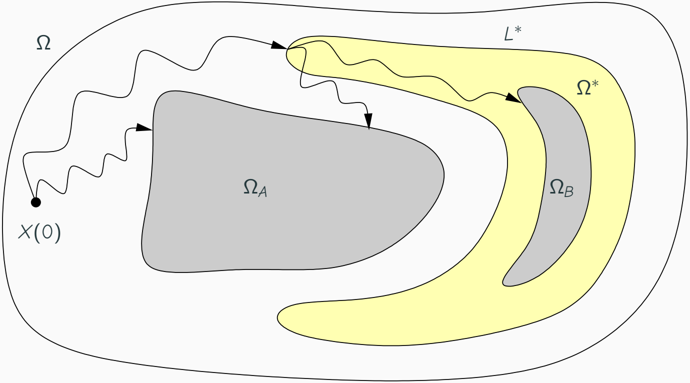
- Sea $X(t)$, $t \geq 0$, un proceso de Markov que tiende “fuertemente” a entrar en el subespacio de estados Ω_A y que “raramente” entra en el subespacio Ω_B.
- Interesa la probabilidad, “muy baja”, de que $X(t)$ entre en Ω_B antes que en Ω_A.
- El sistema es tal que, seguro para algún $t > 0$, $X(t)$ va a visitar Ω_A, Ω_B o ambos.

Introducción

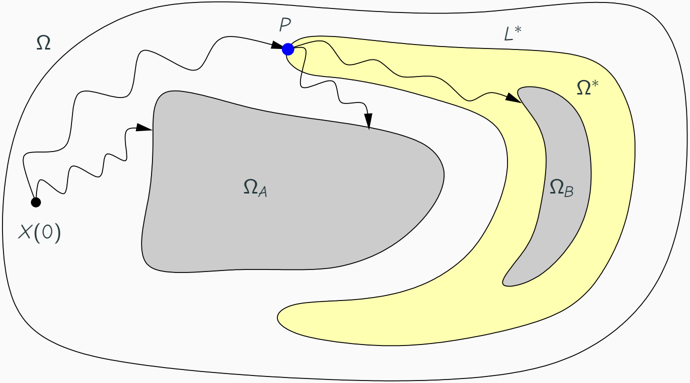


- Sea τ_A el instante en que $X(t)$ entra en Ω_A (o regresa a Ω_A si $X(0) \in \Omega_A$).
- Sea τ_B el instante en que $X(t)$ entra en Ω_B.

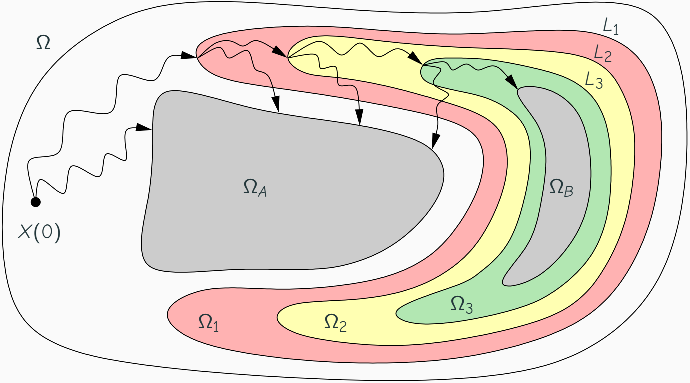
El parámetro de interés es entonces: $\zeta = \mathbb{P}\{\tau_B < \tau_A\}$.



- Splitting es una técnica que *clona* o *multiplica* trayectorias que se acercan a Ω_B al entrar a un subespacio $\Omega^* \supset \Omega_B$ (con frontera L^*), creado con esta finalidad.
- De este modo se *estimulan* las trayectorias que *se acercan* a Ω_B .

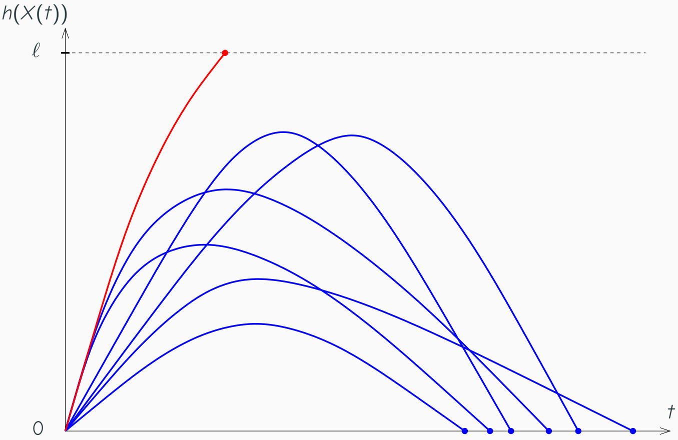


- Clonar es iniciar trayectorias nuevas a partir de un punto de cruce como P.
- Las trayectorias nuevas arrancan con el mismo estado de la original en P.
- La concatenación del tramo anterior y el posterior a P es equivalente a una única trayectoria iniciada en $X(0)$ y finalizada en Ω_A o en Ω_B.



- El procedimiento se aplica recursivamente, clonando trayectorias al cruzar las fronteras L_1, L_2, L_3 de un conjunto de subespacios como $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \Omega_3 \supset \Omega_B$.

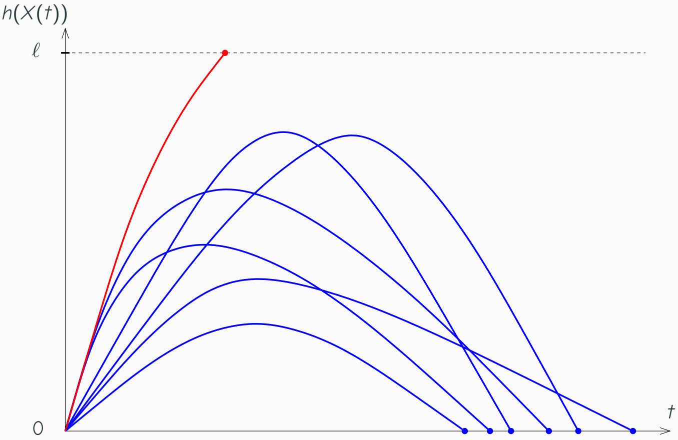
Función de Importancia



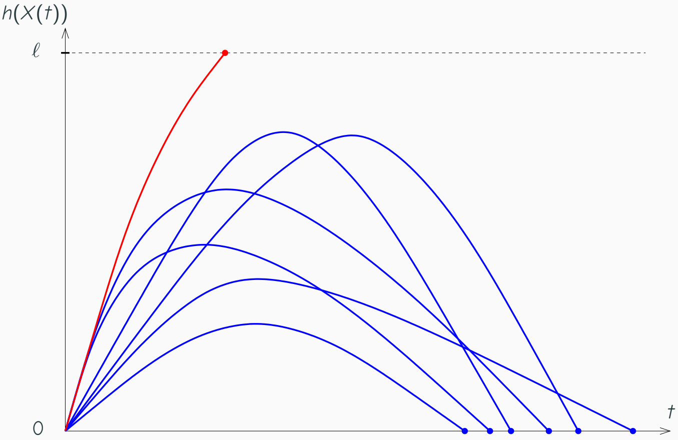
- El tratamiento matemático se simplifica si se analiza el proceso $X(t)$ a través de una *Función de Importancia*, h, de una dimensión:

$h : \Omega \to \mathbb{R}$ siendo, por ejemplo, $\Omega_A = \{x \in \Omega : h(x) \leq 0\}$ y $\Omega_B = \{x \in \Omega : h(x) \geq \ell\}$

Función de Importancia

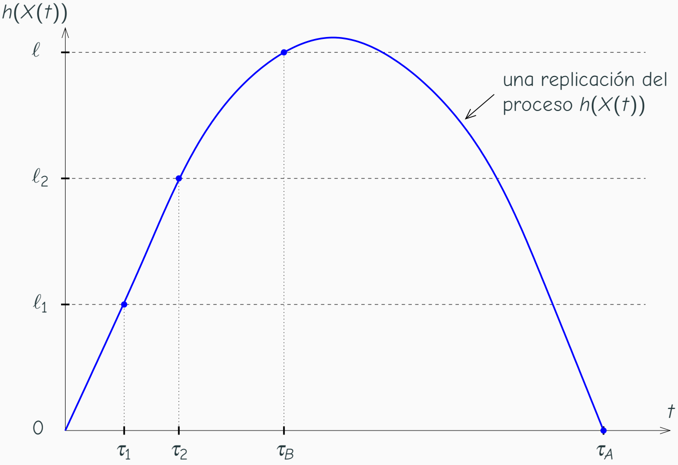


- En los modelos de interés $h(X(t))$ tenderá "fuertemente" a caer por debajo de 0 y "raramente" pasará por arriba del límite o umbral ℓ.
- El evento raro $h(X(t)) \geq \ell$ es equivalente a $X(t) \in \Omega_B$.

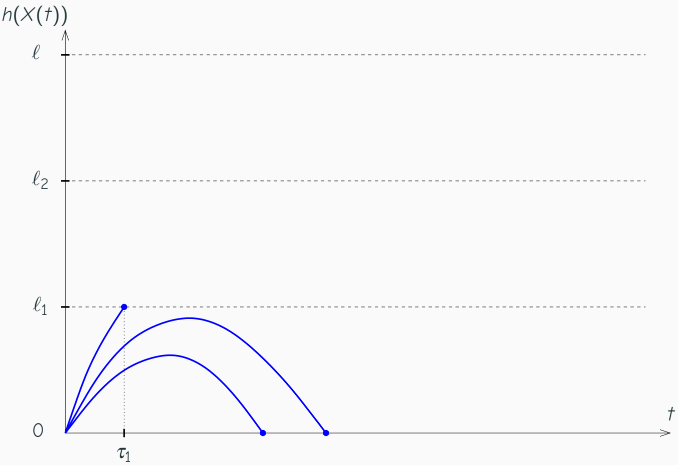


$$\zeta = \frac{1}{7}$$

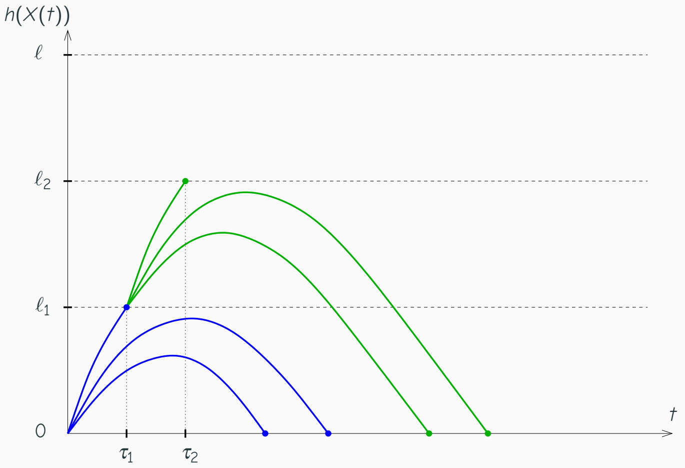
- Monte Carlo Crudo: *Nro. de trayectrorias exitosas/Nro. total de trayectrorias.*
- Si $\zeta \ll 1$, la estimación por Monte Carlo Crudo puede resultar inviable.



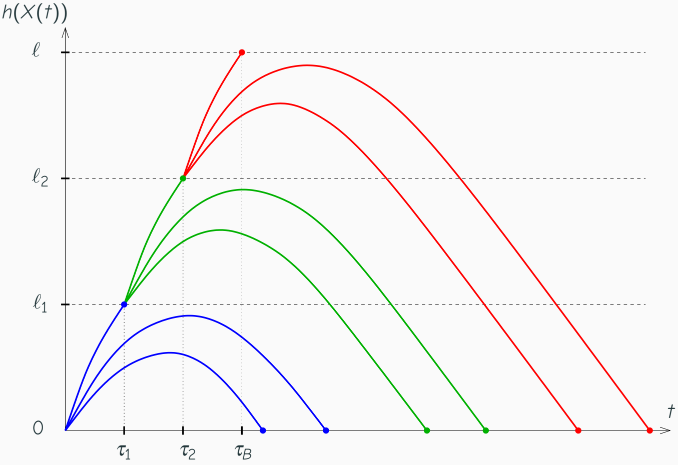
- El espacio de h se particiona mediante los umbrales $\ell_1, \ell_2, \ldots$, definiendo así un conjunto de subespacios anidados (tales como $L_1, L_2, \ldots$, sobre Ω).
- El parámetro de interés sigue siendo $\zeta = \mathbb{P}\{\tau_B < \tau_A\}$.



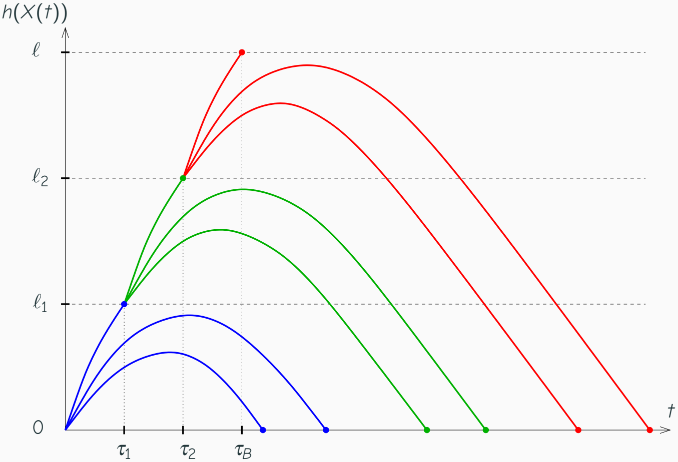
- El cruce de los umbrales $\ell_1, \ell_2, \ldots,$ equivale al cruce de las fronteras de los subespacios $L_1, L_2, \ldots,$ definidos en Ω.
- Toda vez que en una trayectoria ocurre el evento $\{\tau_i < \tau_A\}$, la misma es clonada.



- El cruce de los umbrales $\ell_1, \ell_2, \ldots,$ equivale al cruce de las fronteras de los subespacios $L_1, L_2, \ldots,$ definidos en Ω.
- Toda vez que en una trayectoria ocurre el evento $\{\tau_i < \tau_A\}$, la misma es clonada.



- El cruce de los umbrales $\ell_1, \ell_2, \ldots,$ equivale al cruce de las fronteras de los subespacios $L_1, L_2, \ldots,$ definidos en Ω.
- Toda vez que en una trayectoria ocurre el evento $\{\tau_i < \tau_A\}$, la misma es clonada.



- $D_1 = \{\tau_1 < \tau_A\}$.
- $D_2 = \{\tau_2 < \tau_A\}$. Si ocurrió D_2, también ocurrió D_1 $\rightarrow$ $D_2 \subset D_1$
- $D_k = \{\tau_k < \tau_A\}$. Si ocurrió D_k, también ocurrió D_{k-1} $\rightarrow$ $D_k \subset D_{k-1} \subset \cdots \subset D_2 \subset D_1$

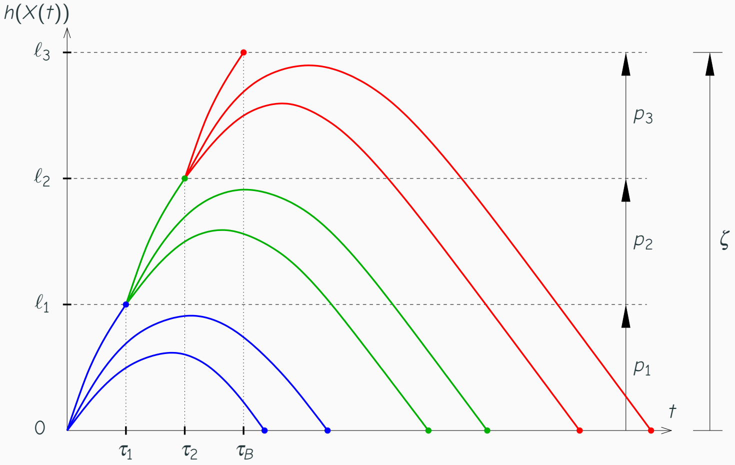
En un caso general con n umbrales, $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n = \ell$, el evento de interés es D_n.

Es simple probar que $\mathbb{P}\{D_n\} = \mathbb{P}\{D_n | D_{n-1}\} \mathbb{P}\{D_{n-1}\}$:

$$\mathbb{P}\{D_n | D_{n-1}\} \mathbb{P}\{D_{n-1}\} = \frac{\mathbb{P}\{D_n \cap D_{n-1}\}}{\mathbb{P}\{D_{n-1}\}} \mathbb{P}\{D_{n-1}\} = \mathbb{P}\{D_n \cap D_{n-1}\} = \mathbb{P}\{D_n\}$$

La fórmula puede extenderse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{D_n\} &= \mathbb{P}\{D_n | D_{n-1}\} \mathbb{P}\{D_{n-1}\} \\
&= \mathbb{P}\{D_n | D_{n-1}\} \mathbb{P}\{D_{n-1} | D_{n-2}\} \mathbb{P}\{D_{n-2}\} \\
&\vdots \\
\mathbb{P}\{D_n\} &= \underbrace{\mathbb{P}\{D_n | D_{n-1}\}}_{p_n} \underbrace{\mathbb{P}\{D_{n-1} | D_{n-2}\}}_{p_{n-1}} \cdots \underbrace{\mathbb{P}\{D_2 | D_1\}}_{p_2} \underbrace{\mathbb{P}\{D_1\}}_{p_1} = \zeta \\
&= \prod_{k=1}^{n} p_k
\end{aligned}$$



$$\zeta = p_1 p_2 p_3$$

- $p_1 = \mathbb{P}\{D_1\}$: la probabilidad de cruzar ℓ_1 antes de caer por debajo de 0.
- $p_2 = \mathbb{P}\{D_2 | D_1\}$: la probabilidad de cruzar ℓ_2 antes de caer por debajo de 0, habiéndose cruzado ℓ_1 sin haber caído por debajo de 0.

$$\zeta = \underbrace{\mathbb{P}\{D_n|D_{n-1}\}}_{p_n} \underbrace{\mathbb{P}\{D_{n-1}|D_{n-2}\}}_{p_{n-1}} \cdots \underbrace{\mathbb{P}\{D_2|D_1\}}_{p_2} \underbrace{\mathbb{P}\{D_1\}}_{p_1} = \prod_{k=1}^{n} p_k$$

"p_k es la probabilidad de que, habiéndose superado el umbral $k-1$ sin caer por debajo de 0, se supere el umbral k sin caer por debajo de 0".

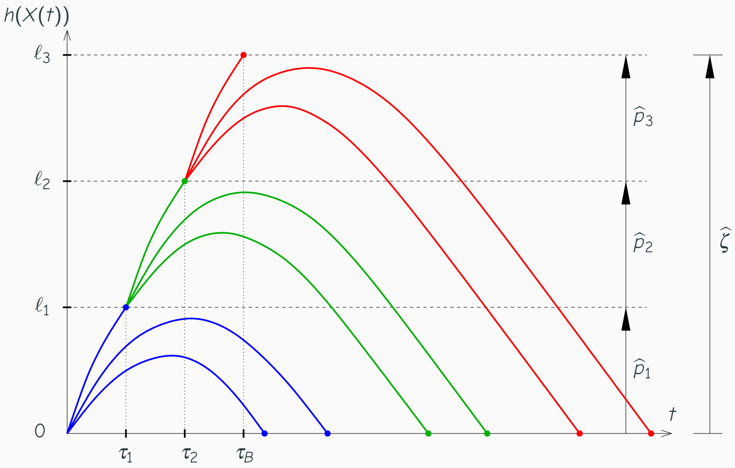
que puede leerse también como:

"p_k es la probabilidad de que, una trayectoria iniciada en el umbral $k-1$ supere el umbral k".

Es posible probar, **y esta es la base fundamental de Splitting**, que:

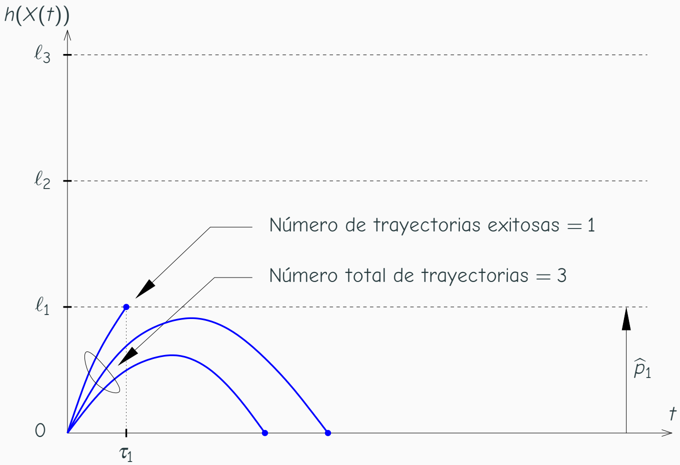
$$\widehat{\zeta} = \prod_{k=1}^{n} \widehat{p}_k \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}\{\widehat{\zeta}\} = \zeta$$

Luego, es simple construir un estimador insesgado de ζ a partir de un conjunto de estimadores por etapa, $\widehat{p}_k$, $k = 1, \ldots, n$.

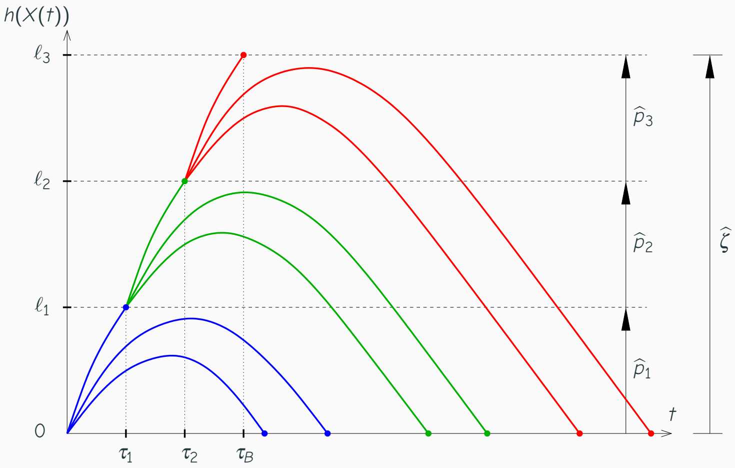


$$\widehat{\zeta} = \widehat{p}_1 \widehat{p}_2 \widehat{p}_3$$

- Es necesario obtener una estimación por cada etapa.
- Las trayectorias se aprovechan para hacer estimaciones MC crudo por etapa.

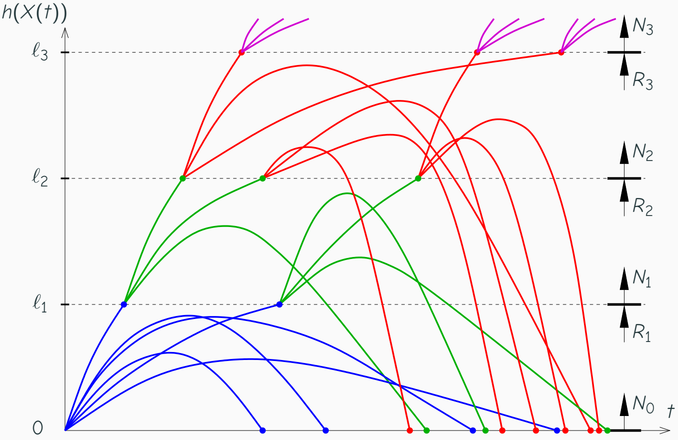


$$\widehat{p}_1 = \frac{1}{3}$$



$$\widehat{\zeta} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Estimación



$$\widehat{\zeta} = \frac{R_1}{N_0}\,\frac{R_2}{N_1}\,\frac{R_3}{N_2}\cdots\frac{R_n}{N_{n-1}}$$

Implementación

- La condición esencial de Splitting es $N_k > R_k,\ k = 1, \dots, n$. Ello garantiza la *clonación* de trayectorias en uno o más puntos de cruce por umbrales.
- Las dos variantes de implementación más conocidas son:
  - Fixed Splitting

$$\frac{N_k}{R_k} = \alpha_k > 1, \text{ eventualmente } \frac{N_k}{R_k} = \alpha > 1,\ \forall k > 1.$$

    Hay un factor de clonación por nivel, eventualmente el mismo para todos los niveles. El número de trayectorias iniciadas en cada punto de cruce es una constante.

  - Fixed Effort

$$N_k = F_k > 1, \text{ eventualmente } N_k = F > 1,\ \forall k > 1.$$

    El factor de clonación por nivel se ajusta para que el número total de trayectorias iniciadas desde cada umbral hacia el siguiente (*esfuerzo*) sea una constante.

Implementación

En cada variante se puede desarrollar la expresión de la estimación:

- Fixed Splitting

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta} &= \frac{R_1}{N_0}\,\frac{R_2}{N_1}\,\frac{R_3}{N_2}\cdots\frac{R_n}{N_{n-1}}\\ &= \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\,\frac{R_n}{N_0}\\ &= \alpha^{(n-1)}\,\frac{R_n}{N_0} \quad\leftarrow\quad \text{si el factor de clonación por nivel es el mismo}\end{aligned}$$

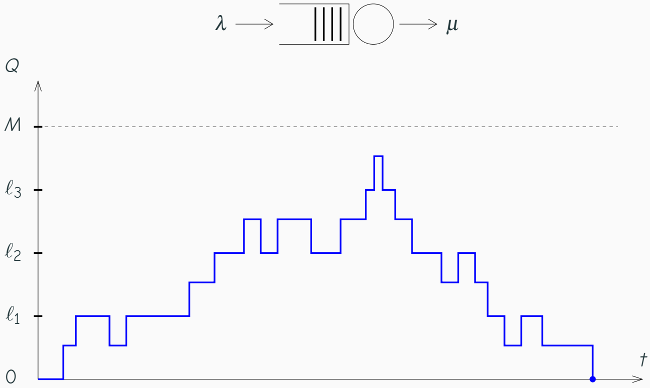
- Fixed Effort

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta} &= \frac{R_1}{N_0}\,\frac{R_2}{N_1}\,\frac{R_3}{N_2}\cdots\frac{R_n}{N_{n-1}}\\ &= \frac{R_1}{F_1}\,\frac{R_2}{F_2}\,\frac{R_3}{F_3}\,\frac{R_n}{N_0}\\ &= \frac{R_1 R_2\cdots R_{n-1}}{F^{(n-1)}}\,\frac{R_n}{N_0} \quad\leftarrow\quad \text{si el \textit{esfuerzo} por nivel es el mismo}\end{aligned}$$

Comentarios

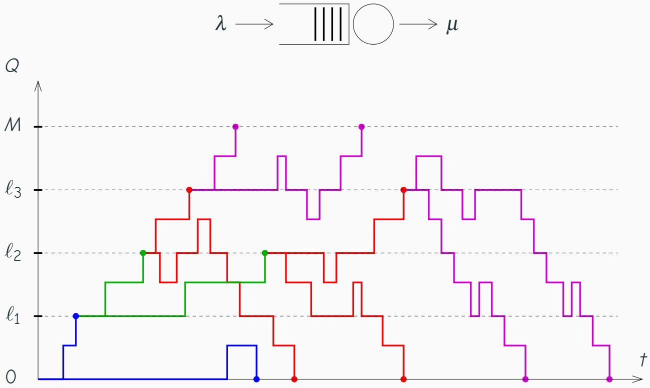
- En todos los casos el objetivo es que $R_n > 0$. Si $R_n = 0$ la estimación arroja $\widehat{\zeta} = 0$, valor muy probablemente lejano a la realidad.
- Es necesario, por lo tanto, elegir adecuadamente el número de umbrales y los factores de clonación.
- La variante Fixed Splitting tiene asociado un riesgo de explosión combinatoria en el número total de trayectorias generadas. Fixed Effort es una alternativa diseñada justamente para salvar este inconveniente.
- El cálculo de la varianza del estimador es complejo en todos los casos y depende del modelo y de los parámetros elegidos. No es posible asegurar una ventaja a favor de ninguna de las dos variantes presentadas.

Ejemplo



- Sistema: cola M/M/1, tasa de arribos λ, tasa de servicios μ.
- Q: el número de clientes en espera.
- ζ: la probabilidad de que el número de clientes en espera supere la cota M antes de que la cola vuelva a vaciarse.

Ejemplo



- Sistema: cola M/M/1, tasa de arribos λ, tasa de servicios μ.
- Q: el número de clientes en espera.
- ζ: la probabilidad de que el número de clientes en espera supere la cota M antes de que la cola vuelva a vaciarse.

Bibliografía

M. J. J. Garvels. "The Splitting Method in Rare Event Simulation". PhD thesis. Faculty of mathematical Science, University of Twente, The Netherlands, 2000.

M. J. J. Garvels, D. P. Kroese, and J.–K. C. W. Van Ommeren. "On the Importance Function in Splitting Simulation". In: *European Transactions on Telecommunications* 13.4 (2002), pp. 363–371.

P. Glasserman et al. "Splitting for Rare Event Simulation: Analysis of Simple Cases". In: *Proceedings of the 1996 Winter Simulation Conference*. San Diego, California: IEEE Computer Society Press, 1996, pp. 302–308.

P. L'Ecuyer, V. Demers, and B. Tuffin. "Rare Events, Splitting, and quasi-Monte Carlo". In: *ACM Trans. Model. Comput. Simul.* 17.2 (Apr. 2007). ISSN: 1049-3301. DOI: `10.1145/1225275.1225280`.