Queda entonces demostrado el teorema de Carathéodory, lo que nos pone en condiciones para definir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Primero, algo de notación.

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ y $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$.

$I_{\vec{a},\vec{b}} = \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, a_i < x_i < b_i,\ \forall i = 1, \dots, n \}$

(cubo abierto de n dimensiones)

Ejemplos:

1) Para $n = 1$: $I_{a,b} = (a, b)$

2) Para $n = 2$: si $\vec{a} = (-1, 1)$ y $\vec{b} = (0, 2)$, entonces

$$I_{(-1,1),(0,2)} = (-1, 0) \times (1, 2).$$

Para un cubo n dimensional $I_{\vec{a},\vec{b}}$, definimos su "longitud" como

$$\ell(I_{\vec{a},\vec{b}}) = \prod_{i=1}^{n} \ell(a_i, b_i) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Ejemplo: $\ell(I_{(-1,1),(0,2)}) = (0 - (-1)) \cdot (2 - 1) = 1.$

Definición: La medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, $m_{\mathcal{L}}^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$, se define como

$$m_{\mathcal{L}}^*(A) := \inf \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_{\vec{a}_m,\vec{b}_m}) \,/\, \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{\vec{a}_m,\vec{b}_m} \supseteq A \right\}.$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Observación: Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, existe al menos una colección numerable de cubos abiertos n dimensionales que cubre a A. En efecto, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{(-1,\dots,-1),(1,\dots,1)}.$$

Teorema: $m_{\mathcal{L}}^{*}$ es una medida exterior.

· **Demostración:** $m_{\mathcal{L}}^{*} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$.

(i) $\underline{m_{\mathcal{L}}^{*}(\emptyset) = 0}$:

Por definición de $m_{\mathcal{L}}^{*}$, es claro que $m_{\mathcal{L}}^{*}(\emptyset) \geq 0$.

Por otro lado, sea $\varepsilon > 0$ y considere

$$I_{(0,\dots,0),(\varepsilon,\dots,\varepsilon)} = (0,\varepsilon)^n = (0,\varepsilon)\times\cdots\times(0,\varepsilon)$$

(n veces)

Como $\emptyset \subseteq (0,\varepsilon)^n$, se tiene que

$$m_{\mathcal{L}}^{*}(\emptyset) = \inf\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \ell\left(I_{\vec{a}_m,\vec{b}_m}\right) \,/\, \emptyset \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{\vec{a}_m,\vec{b}_m} \right\}$$

$$\leq \ell\left((0,\varepsilon)^n\right) = \varepsilon^n.$$

Tomando $\varepsilon \to 0$, tenemos $0 \leq m_{\mathcal{L}}^{*}(\emptyset) \leq 0$, es decir,

$$m_{\mathcal{L}}^{*}(\emptyset) = 0.$$

(ii) $\underline{A \subseteq B \implies m_{\mathcal{L}}^{*}(A) \leq m_{\mathcal{L}}^{*}(B)}$:

Si $B \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{\vec{a}_m,\vec{b}_m}$ entonces $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{\vec{a}_m,\vec{b}_m}$.

Luego,

$$\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \ell\left(I_{\vec{a}_m,\vec{b}_m}\right) \,/\, A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{\vec{a}_m,\vec{b}_m} \right\} \supseteq \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \ell\left(I_{\vec{a}_m,\vec{b}_m}\right) \,/\, B \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{\vec{a}_m,\vec{b}_m} \right\}$$

De donde

$$\inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_{\vec{a_m},\vec{b_m}}) \,/\, A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{\vec{a_m},\vec{b_m}}\right\} \le \inf\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_{\vec{a_m},\vec{b_m}}) \,/\, B \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{\vec{a_m},\vec{b_m}}\right\}.$$

Es decir, $m_J^*(A) \le m_J^*(B)$.

(iii) $\underline{(A_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow m_J^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} m_J^*(A_k)}$:

Para cada $n \geq 1$ y $\varepsilon > 0$ por definición de ínfimo, existe una familia de cubos abiertos n-dimensionales $\{I_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) \le m_J^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (*)$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) - \frac{\varepsilon}{2^n} \le m_J^*(A_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}).$$

Por otro lado, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{nk} = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} I_{n,k}$, y usando la definición de m_J^* y lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} m_J^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &\le \sum_{n,k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k})\right) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(m_J^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \quad \text{por } (*) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m_J^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m_J^*(A_n) + \varepsilon \end{aligned}$$

Entonces, $m_J^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m_J^*(A_n) + \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Tomando $\varepsilon \to 0$, obtenemos $m_J^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} m_J^*(A_n)$. ∎

Definición: Si $\mathcal{M}_1$ denota al conjunto de los $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que E es medible respecto a m_1^* (también llamado medible Lebesgue), entonces por el teorema de Carathéodory, $\mathcal{M}_1$ es una σ-álgebra y $m_1 = m_1^*|\mathcal{M}_1$ es una medida, llamada medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

La medida de Lebesgue tiene una propiedad de completitud, a saber, todo subconjunto de un conjunto medible Lebesgue de medida cero es medible Lebesgue.

Definición: Dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ y una medida $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, diremos que μ es completa si para todo $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) = 0$, se tiene que

$$E' \subseteq E \Rightarrow E' \in \mathcal{A}.$$

Proposición: La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es completa.

- **Demostración:** Sea $E \in \mathcal{M}_1$ con $m_1(E) = 0$, y $E' \subseteq E$.

$E' \subseteq E \Rightarrow m_1^*(E') \leq m_1^*(E) = m_1(E) = 0$, y como $m_1^*(E') \geq 0$ se tiene que $m_1^*(E') = 0$. Veamos que $E' \in \mathcal{M}_1$.

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, tenemos

$$\begin{aligned} m_1^*(A \cap E') + m_1^*(A - E') &\leq m_1^*(E') + m_1^*(A) \\ &= 0 + m_1^*(A) \\ &= m_1^*(A) \end{aligned}$$

ya que $A \cap E' \subseteq E'$ y $A - E' \subseteq A$

Lo anterior implica que $E' \in \mathcal{M}_1$. ■

Nos centraremos a partir de ahora en el caso $n = 1$. Vamos a ver algunos de los conjuntos que conforman $\mathcal{M}_1$. En particular, veremos que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_1$. Como

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\{(a,b) \,/\, a<b\}),$$

bastaría con demostrar que $(a,b) \in \mathcal{M}_1$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a<b$.

Proposición: (a,b) es medible Lebesgue.

• **Demostración:** Veamos que

$$m_1^*(A \cap (a,b)) + m_1^*(A - (a,b)) \le m_1^*(A), \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de ínfimo, existe una familia de intervalos abiertos $\{(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} l(a_n, b_n) \le m_1^*(A) + \varepsilon.$$

La idea será probar que

$$m_1^*(A \cap (a,b)) + m_1^*(A - (a,b)) \le \sum_{n=0}^{\infty} l(a_n, b_n) + \varepsilon$$

Estimemos $m_1^*(A \cap (a,b))$:

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \Rightarrow A \cap (a,b) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \cap (a,b)$$

donde $(a_n, b_n) \cap (a,b)$ es un intervalo abierto y acotado, denotado por $(\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$ (descartamos aquellos n para los cuales $(a_n, b_n) \cap (a,b) = \emptyset$).

$$A \cap (a,b) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n) \Rightarrow m_1^*(A \cap (a,b)) \le \sum_{n=0}^{\infty} m_1^*(\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} l(\tilde{a}_n, \tilde{b}_n).$$

Escaneado con CamScanner

Estimemos $m_2^*(A-(a,b))$:

$$A-(a,b) \subseteq \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n,b_n)\right)-(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left((a_n,b_n)-(a,b)\right)$$

donde $(a_n,b_n)-(a,b)$ es un intervalo acotado o la unión de dos.

$$(a_n,b_n)-(a,b) \subseteq (\tilde{a}_n',\tilde{b}_n') \cup (\tilde{a}_n'',\tilde{b}_n'')$$

Luego,

$$m_2^*(A-(a,b)) \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(m_2^*(\tilde{a}_n',\tilde{b}_n') + m_2^*(\tilde{a}_n'',\tilde{b}_n'')\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(l(\tilde{a}_n',\tilde{b}_n') + l(\tilde{a}_n'',\tilde{b}_n'')\right)$$

Podemos elegir $(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n)$, $(\tilde{a}_n',\tilde{b}_n')$ y $(\tilde{a}_n'',\tilde{b}_n'')$ tales que

$$l(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n) + l(\tilde{a}_n',\tilde{b}_n') + l(\tilde{a}_n'',\tilde{b}_n'') \leq l(a_n,b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Entonces,

$$m_2^*(A\cap(a,b)) + m_2^*(A-(a,b))$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(l(\tilde{a}_n,\tilde{b}_n) + l(\tilde{a}_n',\tilde{b}_n') + l(\tilde{a}_n'',\tilde{b}_n'')\right)$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(l(a_n,b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} l(a_n,b_n) + \varepsilon$$
$$\leq m_2^*(A) + 2\varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon \to 0$, obtenemos

$$m_2^*(A\cap(a,b)) + m_2^*(A-(a,b)) \leq m_2^*(A). \blacksquare$$

Ejemplo (medida del conjunto de Cantor): Sea C el conjunto de Cantor. Note que C es medible ya que $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Sea U la unión de todos los intervalos abiertos extraídos en la construcción de C. Note que también $U \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Al ser m_λ una medida y $m_\lambda([0,1]) = 1 < \infty$, se tiene que

$$m_\lambda(C) = m_\lambda([0,1] - U) = m_\lambda([0,1]) - m_\lambda(U) = 1 - 1 = 0.$$

Observación: Existen conjuntos medibles Lebesgue que no sean borelianos, los cuales se construyen a partir de la función de Cantor.

$$c : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

- Si $x \in C$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$ con $a_n \in \{0,1\}$, se define

$$c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

- Si $x \notin C$, se define

$$c(x) = \sup\{c(y) \,/\, y \leq x \text{ e } y \in C\}.$$

Si se considera la función $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,2]$ dada por

$$\varphi(x) = c(x) + x, \quad \forall x \in [0,1],$$

se sabe que φ es una biyección continua y creciente. Se sabe además que φ y φ^{-1} envían borelianos en borelianos. Considere $\varphi(C)$ y sea $D \subseteq \varphi(C)$ un subconjunto no boreliano. Luego, $\varphi^{-1}(D) \subseteq C$. Como $m_\lambda(C) = 0$ y m_λ es

completa, se tiene que $\varphi^{-1}(D)$ es medible Lebesgue.
Por otro lado, $\varphi^{-1}(D)$ no es boreliano, ya que de lo contrario $D = \varphi(\varphi^{-1}(D))$ sería boreliano. Así, $\varphi^{-1}(D) \in \mathfrak{M}_1 - \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Antes de cerrar estas notas con un ejemplo de conjunto que no es medible Lebesgue, mencionamos que $\mathfrak{M}_1$ es invariante por traslaciones y dilataciones (o contracciones). Específicamente, tenemos el siguiente resultado, cuya prueba dejamos como ejercicio.

Proposición: Dado $E \subseteq \mathbb{R}$ y $s, r \in \mathbb{R}$, se definen la traslación y dilatación de E como

$$E + s = \{x + s \,/\, x \in E\} \quad \text{y} \quad rE = \{rx \,/\, x \in E\}.$$

Si $E \in \mathfrak{M}_1$, entonces $E + s, rE \in \mathfrak{M}_1$ y además

$$m_1(E+s) = m(E) \quad \text{y} \quad m_1(rE) = |r|\, m_1(E).$$

Ejemplo (conjunto no medible Lebesgue): Considere el intervalo $[0,1)$ con la siguiente operación:

$$\forall\, x, y \in [0,1), \qquad \begin{aligned} x \oplus y &= x + y \quad \text{si } x + y < 1 \\ x \oplus y &= x + y - 1 \quad \text{si } x + y \geq 1 \end{aligned}$$

- $\oplus$ es commutativa y asociativa.

Por otro lado, se define en $[0,1)$ la relación

$$x \sim y \quad \text{si} \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Por el axioma de elección, existe un conjunto P que contiene exactamente un elemento de cada una de las clases de equivalencia definidas por la relación anterior. Veremos que P no es medible Lebesgue.

Note que $[0,1) \cap \mathbb{Q} = \{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ con $r_0 = 0$.

Sea $P_i = \{x \oplus r_i \,/\, x \in P\} = P \oplus r_i$.

Vemos que: • $P_i \cap P_j = \emptyset$ si $i \neq j$

• $[0,1) = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$.

Si suponemos que P es medible, entonces

$$m_\ell(P) = m_\ell(P_i)$$

y

$$m_\ell([0,1)) = \sum_{i=1}^{\infty} m_\ell(P_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m_\ell(P).$$

Si $m_\ell(P) = 0$, entonces $m_\ell([0,1)) = 0$, lo cual es una contradicción. Si $m_\ell(P) > 0$, entonces $m_\ell([0,1)) = \infty$, que también es una contradicción. Por lo tanto, P no es medible.