Tarea 4

fecha de entrega: 21 de junio de 2024

1. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.

   (a) Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mu(A \triangle B) = 0$, demuestre que $\mu(A) = \mu(B)$ (donde $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$). (1 punto)

   (b) Se define la relación $A \sim B$ si $\mu(A \triangle B) = 0$. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A}$. (3 puntos)

   (c) Si $A, B \in \mathcal{A}$, se define $d \colon (\mathcal{A} / \sim) \times (\mathcal{A} / \sim) \to \mathbb{R}$, donde $\mathcal{A} / \sim$ denota el conjunto cociente de $\mathcal{A}$ bajo la relación anterior, como

   $$d(A, B) = \mu(A \triangle B) \ \text{ para todo } \ A, B \in \mathcal{A} / \sim .$$

   Demuestre que d define una métrica sobre $\mathcal{A} / \sim$. (2 puntos)

2. Sea $m_{\mathcal{L}}$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Dado $E \subseteq \mathbb{R}$ y $t, r \in \mathbb{R}$, se define la *translación* y *dilatación* de E en razón de t y r como:

   $$E + t := \{x + t \ / \ x \in E\} \qquad \text{y} \qquad rE := \{rx \ / \ x \in E\}.$$

   Si E es medible Lebesgue, demuestre que $E + t$ y rE son medibles Lebesgue, y que además

   $$m_{\mathcal{L}}(E + t) = m_{\mathcal{L}}(E) \qquad \text{y} \qquad m_{\mathcal{L}}(rE) = |r| m_{\mathcal{L}}(E).$$

   Sugerencia: Puede usar el hecho de que un conjunto es medible Lebesgue si y solamente si es la unión de un boreliano y un conjunto de medida cero. (4 puntos)