# Monte Carlo Permutación (MCP)

## Introducción

Leslie Murray

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina

Junio, 2024

Siendo $\mathsf{X}$ la variable cuya media interesa estimar e $\mathsf{Y}$ alguna otra variable del modelo, es simple probar que:

$$\mu = \mathbb{E}\{\mathsf{X}\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\mathsf{X} \mid \mathsf{Y}\}\}$$

- Luego, tanto $\mathsf{X}$ como $\mathbb{E}\{\mathsf{X} \mid \mathsf{Y}\}$ son variables cuya media es el valor de interés.
- Puedo "*llegar*" al valor de $\mu$, tanto a través de $\mathsf{X}$ como de $\mathbb{E}\{\mathsf{X} \mid \mathsf{Y}\}$.
- Si me propongo determinar $\mu$ mediante la simulación de $\mathsf{X}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{X}^{(i)} \leftarrow \text{generar valores } \mathsf{X}^{(i)},\ i = 1, \ldots, N \qquad \textbf{[1]}$$

- Si me propongo determinar $\mu$ mediante la simulación de $\mathbb{E}\{\mathsf{X} \mid \mathsf{Y}\}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{\mathsf{X} \mid \mathsf{Y}\}^{(i)} \leftarrow \text{generar valores } \mathbb{E}\{\mathsf{X} \mid \mathsf{Y}\}^{(i)},\ i = 1, \ldots, N \qquad \textbf{[2]}$$

- Es simple probar que:

$$\mathbb{V}\{\mathbb{E}\{\mathsf{X} \mid \mathsf{Y}\}\} \leq \mathbb{V}\{\mathsf{X}\}$$

Luego, en principio es más conveniente trabajar según **[2]**

¿Cuál es la forma de obtener una muestra $\mathbb{E}\{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}\}^{(i)}$?

- Sortear un valor de la variable $\mathbf{Y}$, es decir $\mathbf{Y}^{(i)}$.
- Fijar el valor de $\mathbf{Y}$ al sorteado $\mathbf{Y}^{(i)}$ y calcular $\mathbb{E}\{\mathbf{X}\}$.
- Este último cálculo resulta ser, en realidad, $\mathbb{E}\{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}^{(i)}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}\}^{(i)}$.
- En definitiva:
    - El valor de $\mathbf{Y}$ se sortea.
    - El valor de $\mathbf{X}$ se calcula.

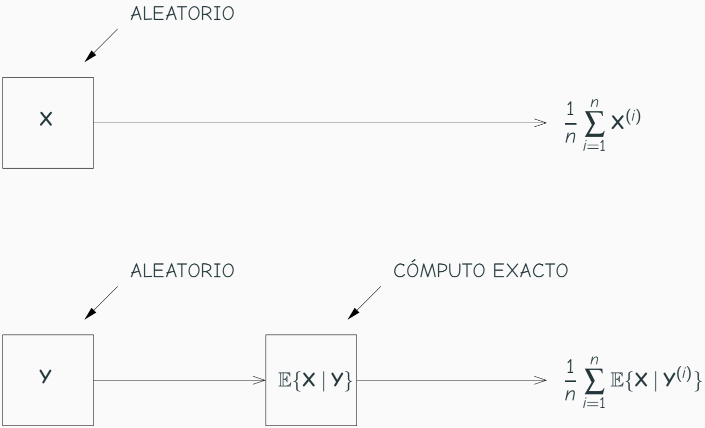
Luego, $N$ valores *i.i.d.* de la variable $\mathbf{Y}$, permiten generar $N$ valores *i.i.d.* de $\mathbb{E}\{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}\}$ $^{(*)}$

- El estimador Monte Carlo Condicional resulta entonces:

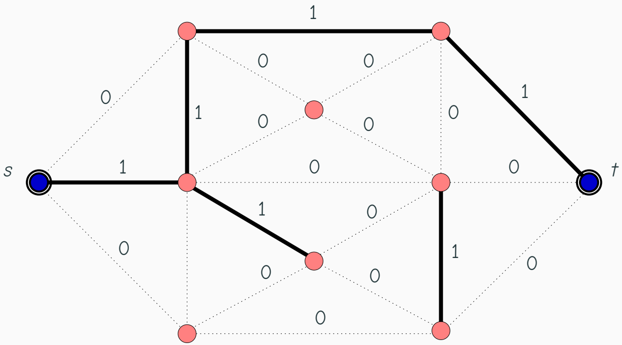
$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}\}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}^{(i)}\}$$

$^{(*)}$ Siempre y cuando $\mathbb{E}\{\mathbf{X}\}$ se pueda calcular.

# Monte Carlo Condicional – **REPASO**



$$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m) \rightarrow X_i = \begin{cases} 1 & \text{c.p. } r_i \quad\quad\quad\quad i\text{–ésimo enlace operativo} \\ 0 & \text{c.p. } q_i = 1 - r_i \quad i\text{–ésimo enlace fallado} \end{cases}$$




$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s \text{ y } t \textit{ están conectados} \\ 0 & \text{si} \quad s \text{ y } t \textit{ no están conectados} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{rl} \zeta & = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} \\ 1 - \zeta & = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 0\} \end{array}$$

# Introducción

- Asumimos entonces que $\tau_{(1)}, \tau_{(2)}, \ldots, \tau_{(c)}$, es la secuencia de instantes de reparación de enlaces:


  y que $\tau_{(c)}$ es el instante a partir del cual los nodos $s$ y $t$ quedan conectados.
- La anti–confiabilidad de la red es la probabilidad de que $\tau_{(c)}$ supere a $t = 1$:

$$1 - \zeta = \mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1\}$$

- **MCP** es apropiado para el caso en que $1 - \zeta \ll 1$.

# El Proceso de Creación / MC Crudo


La simulación MC Crudo para estimar $1-\zeta$ con este modelo consiste en:

1. Sortear $N$ secuencias independientes $\left\{\tau_{(1)}^{(i)}, \tau_{(2)}^{(i)} \cdots, \tau_{(c)}^{(i)}\right\}$, $i=1,\ldots,N$.
2. Para cada secuencia sorteada calcular el valor de la variable indicatriz $I^{(i)}$:

$$I^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_{(c)}^{(i)} > 1, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

3. Promediar los $N$ valores calculados:

$$1-\widehat{\zeta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I^{(i)} \qquad i=1,\cdots,N$$

**Es la misma estimación por MC Crudo hecha antes de introducir el PC...**

Debe mejorarse por medio de un método de reducción de varianza

# El Proceso de Creación / MC Permutación


Una forma de reducir la varianza del estimador crudo de $1-\zeta$ es la siguiente:

1. Sortear $N$ secuencias independientes $\left\{\tau_{(1)}^{(i)}, \tau_{(2)}^{(i)} \cdots, \tau_{(c)}^{(i)}\right\}$, $i=1,\ldots,N$.
2. Para cada secuencia sorteada calcular el valor de la variable $\gamma^{(i)}$:

$$\gamma^{(i)} = \mathbb{P}\{\tau_{(c)}^{(i)} > 1\}$$

3. Promediar los $N$ valores calculados:

$$1-\widehat{\zeta} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\gamma^{(i)} \qquad i=1,\cdots,N$$

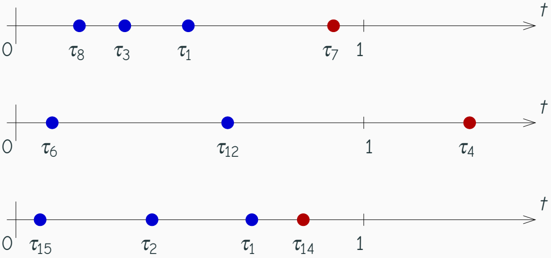
**Ahora el estimador es mucho más eficiente**

Se probará seguidamente que es sin sesgo y que tiene menor varianza que MC Crudo.

# El Proceso de Creación / MC Permutación

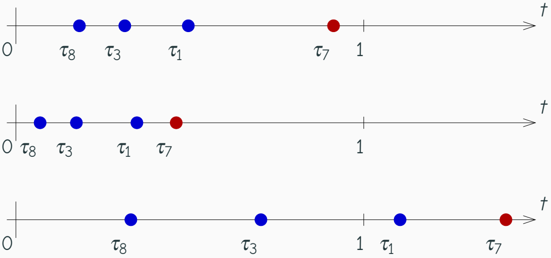

- Una trayectoria queda completamente definida por dos elementos:
  - el orden de las reparaciones (*permutación*)
  - los tiempos entre reparaciones.

EJEMPLO 1: distintas *permutaciones*.

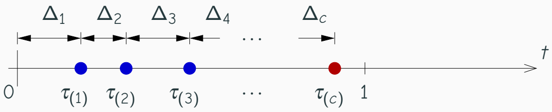



- Una trayectoria queda completamente definida por dos elementos:
    - el orden de las reparaciones (*permutación*)
    - los tiempos entre reparaciones.

EJEMPLO 2: la misma *permutación* con distintos tiempos entre reparaciones.



# El Proceso de Creación / MC Permutación

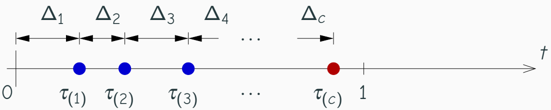



- Dada una determinada *permutación*, a partir de las distribuciones de los tiempos entre reparaciones es posible calcular $\mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1\}$. $^{(*)}$
- Suponiendo que $\Omega$ es el espacio de todas las *permutaciones* y $\omega$ una permutación determinada:

$$1 - \zeta = \underbrace{\mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1\}}_{\gamma} = \sum_{\omega} \underbrace{\mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1 \mid \Omega = \omega\}}_{\gamma(\omega)} \mathbb{P}\{\Omega = \omega\}$$

- Nótese que no hace falta sortear los tiempos $\Delta_i$, $i = 1, \ldots, c$, sino sólo la *permutación* (es decir el orden de las reparaciones) y luego calcular $\mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1 \mid \Omega = \omega\}$ donde $\omega$ es la *permutación* sorteada.

$^{(*)}$ Ver módulo La Distribución Exponencial, Definición y algunas Propiedades.




En definitiva, se trata de una simulación de tipo MC Condicional:

1. Sortear $N$ *permutaciones* independientes, $\omega^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$.
2. Por cada *permutación* sorteada calcular el valor de la variable $\gamma(\omega^{(i)})$:

$$\gamma(\omega^{(i)}) = \mathbb{P}\{\tau_{(c)}^{(i)} > 1 \mid \Omega = \omega^{(i)}\}$$

3. Promediar los $N$ valores calculados:

$$1 - \widehat{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \gamma(\omega^{(i)}) \ ^{(*)}$$

$^{(*)}$ Es el mismo estimador que antes, sólo que se explicita la *permutación*.

**Monte Carlo Crudo**:

1. Sortear $N$ secuencias independientes $\left\{\tau_{(1)}^{(i)}, \tau_{(2)}^{(i)} \cdots, \tau_{(c)}^{(i)}\right\}$, $i = 1, \ldots, N$.
2. Para cada secuencia sorteada calcular el valor de la variable indicatriz $I^{(i)}$:

$$I^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_{(c)}^{(i)} > 1, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

3. Promediar los $N$ valores calculados:

$$1 - \widehat{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I^{(i)} \qquad \leftarrow \qquad \textit{se promedian unos y ceros}$$

**Monte Carlo Permutación**:

1. Sortear $N$ *permutaciones* independientes, $\omega^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$.
2. Por cada *permutación* sorteada calcular el valor de la variable $\gamma(\omega^{(i)})$:

$$\gamma(\omega^{(i)}) = \mathbb{P}\{\tau_{(c)}^{(i)} > 1 \mid \Omega = \omega^{(i)}\}$$

3. Promediar los $N$ valores calculados:

$$1 - \widehat{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \gamma(\omega^{(i)}) \qquad \leftarrow \qquad \textit{se promedian números reales entre cero y uno}$$

## Análisis de Esperanza y Varianza

El análisis de esperanza y varianza de los estimadores (MC Crudo y MC Permutación) se hace sobre las v.a. que sirven de base a la estimación: $I$ y $\gamma(\omega)$ respectivamente.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{I\} &= \mathbb{P}\{I=1\} \qquad \leftarrow \text{v.a. de Bernoulli} \\
&= \mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1\} \\
&= \sum_{\omega} \mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1 \mid \Omega = \omega\}\,\mathbb{P}\{\Omega = \omega\} \\
&= \mathbb{E}\{\gamma(\omega)\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\{I\} = \mathbb{E}\{\gamma(\omega)\}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\{I\} &= \mathbb{E}\{I\}\,(1-\mathbb{E}\{I\}) = \mathbb{E}\{I\} - \mathbb{E}\{I\}^2 \\
&= \mathbb{E}\{\gamma(\omega)\} - \mathbb{E}\{\gamma(\omega)\}^2 \\
&= \mathbb{E}\{\gamma(\omega)\} - \mathbb{E}\{\gamma(\omega)\}^2 \pm \mathbb{E}\{\gamma(\omega)^2\} \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\{\gamma(\omega)^2\} - \mathbb{E}\{\gamma(\omega)\}^2}_{\mathbb{V}\{\gamma(\omega)\}} + \underbrace{\mathbb{E}\{\gamma(\omega)\} - \mathbb{E}\{\gamma(\omega)^2\}}_{\geq 0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}\{I\} \geq \mathbb{V}\{\gamma(\omega)\}}$$

# Comentarios

Dos observaciones de carácter intuitivo para ayudar a interpretar el incremento de eficiencia de Monte Carlo Permutación frente a Monte Carlo Crudo:

- El valor $\gamma(\omega^{(i)})$ obtenido en cada replicación de Monte Carlo Permutación podría aproximarse por medio de *muchas* replicaciones Monte Carlo Crudo, $I^{(i)}$.
- Visto como un caso particular de Monte Carlo Condicional, Monte Carlo Permutación resuelve la estimación de ***forma mixta***, parte mediante ***simulación*** y parte mediante ***cálculo exacto***.

# Bibliografía

T. Elperin, I. B. Gertsbakh, and M. Lomonosov. "Estimation of Network Reliability Using Graph Evolution Models". In: *IEEE Transactions on Reliability* 40.5 (Dec. 1991), pp. 572–581.