Los Procesos de Creación y Destrucción

Introducción y Definiciones

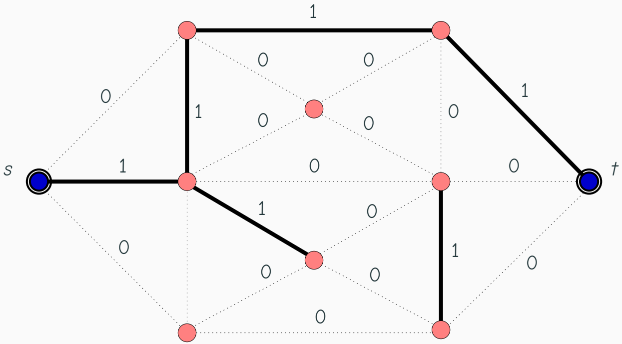
Leslie Murray

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina

Junio, 2024

Modelo Estático de Red

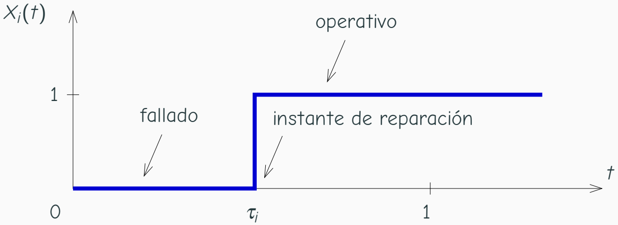
$$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_m) \rightarrow X_i = \begin{cases} 1 & \text{c.p. } r_i & i\text{–ésimo enlace operativo} \\ 0 & \text{c.p. } q_i = 1 - r_i & i\text{–ésimo enlace fallado} \end{cases}$$



$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \textit{s y t están conectados} \\ 0 & \text{si} \quad \textit{s y t no están conectados} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{rl} \zeta & = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} \\ 1 - \zeta & = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 0\} \end{array}$$

Consideremos una evolución temporal ***muy particular*** de las variables de modelo:

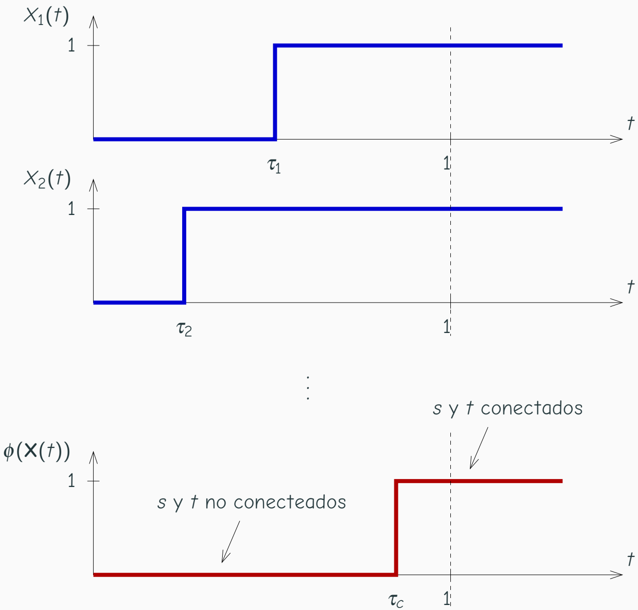
$$\mathbf{X} \quad \rightarrow \quad \mathbf{X}(t) = (X_1(t), \cdots, X_m(t))$$



Idea Central

Si los enlaces se reparan en tiempos proporcionales a su confiabilidad individual, s y t se van a conectar en un tiempo proporcional a la confiabilidad de la red

El Proceso de Creación (PC)



El Proceso de Creación (PC)

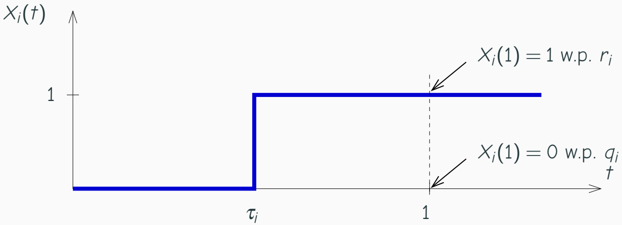
Si:

- $\tau_i \sim \text{Exp}(\lambda_i),\ i = 1, \ldots, m$
- $\lambda_i = -\ln(q_i)$

entonces:

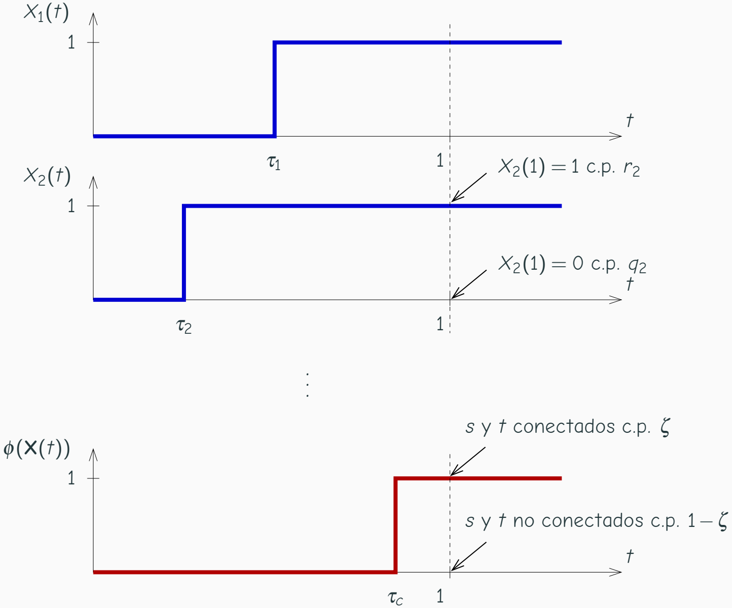
$$\mathbb{P}\{X_i(1) = 1\} = \mathbb{P}\{\tau_i \leq 1\} = 1 - e^{-\lambda_i} = 1 - e^{\ln(q_i)} = 1 - q_i = r_i$$

$$\mathbb{P}\{X_i(1) = 0\} = \mathbb{P}\{\tau_i > 1\} = e^{-\lambda_i} = e^{\ln(q_i)} = q_i$$

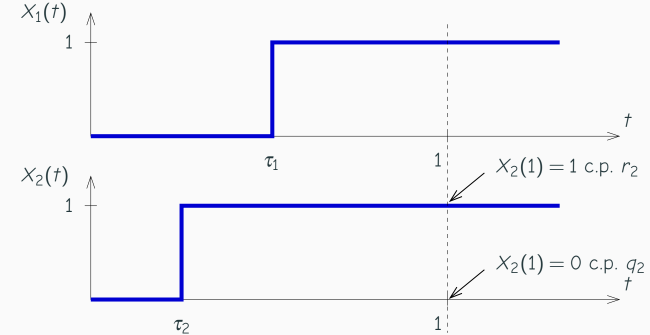


Finalmente,

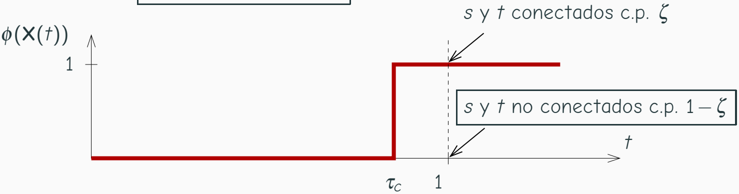
$$\text{si} \left\{ \begin{array}{ll} \forall i \ \ \mathbb{P}\{X_i(1) = 1\} & = r_i \\ \forall i \ \ \mathbb{P}\{X_i(1) = 0\} & = q_i \end{array} \right. \quad \text{entonces, } \phi(\mathbf{X}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}(1) = 1)\} & = \zeta \\ \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}(1) = 0)\} & = 1 - \zeta \end{array} \right.$$

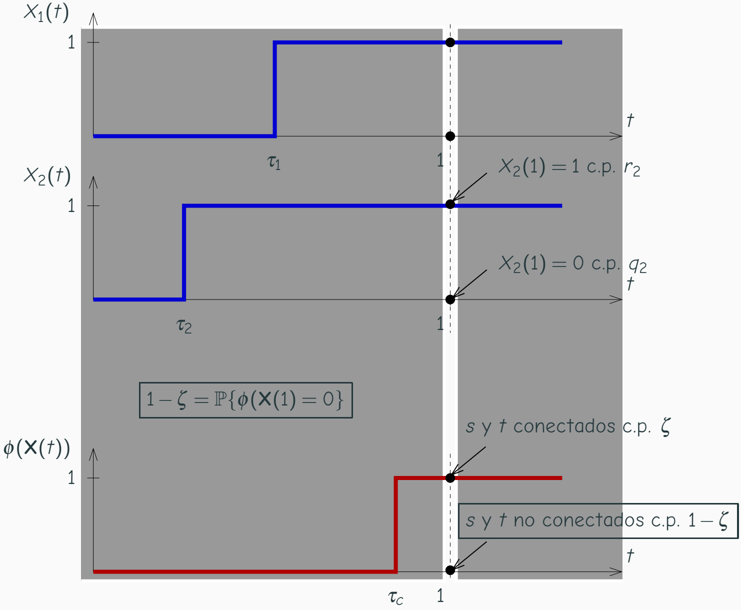

$X_1(t)$
1
t
τ_1
1
$X_2(t)$
1
$X_2(1) = 1$ c.p. r_2
$X_2(1) = 0$ c.p. q_2
t
τ_2
1
⋮
$\phi(\mathbf{X}(t))$
1
s y t conectados c.p. ζ
s y t no conectados c.p. $1-\zeta$
t
τ_c
1

El Proceso de Creación (PC)



$$\boxed{1 - \zeta = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}(1) = 0\}}$$

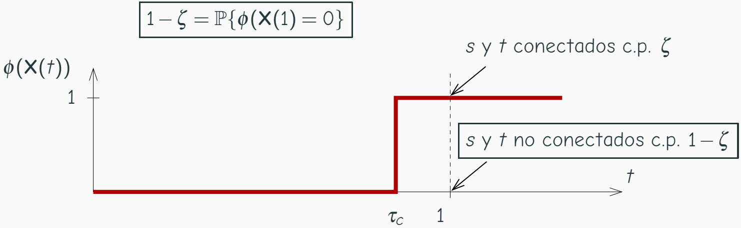



$X_1(t)$
1
t
τ_1
1
$X_2(t)$
1
$X_2(1) = 1$ c.p. r_2
$X_2(1) = 0$ c.p. q_2
t
τ_2
1
$1 - \zeta = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}(1) = 0\}$
$\phi(\mathbf{X}(t))$
1
s y t conectados c.p. ζ
s y t no conectados c.p. $1 - \zeta$
t
τ_c
1

Equivalencia con el Modelo Estático

Las probabilidades de encontrar los enlaces operativos (reparados) o fallados en el instante $t = 1$, son las mismas del modelo estático.

Observar el **PC** en $t = 1$ equivale a observar el modelo estático.



- Los tiempos de reparación se suceden uno tras otro en forma de secuencia.
- Para construir una secuencia de tiempos es necesario:

sortear los tiempos y luego **ordenarlos**.

$\tau_{(1)}$ es el instante en que se repara el primer enlace.
$\tau_{(2)}$ es el instante en que se repara el segundo enlace.

$\vdots$

$\tau_{(c)}$ es el instante en que se repara el enlace que asegura la conexión entre s y t.

$\vdots$

- $\{\tau_{(1)}, \tau_{(2)}, \ldots, \tau_{(m)}\}$ es la *estadística de orden* del conjunto $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m\}$ (si $\tau_{(i)}$ es el tiempo de reparación del j–ésimo enlace, no necesariamente $i = j$).

Construcción de Secuencias (PC)

Pero hay una forma alternativa de construir secuencias que, para lo que sigue, resulta más apropiada que **sortear** y luego **ordenar**.

- La idea es sortear los tiempos de reparación "en orden", uno tras otro.
- Esto es posible gracias a algunas propiedades de la distribución exponencial $^{(*)}$.
- Estas propiedades permiten ir sorteando uno a uno:
  - los tiempos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots,$ (que también son exponenciales) y
  - los enlaces que se reparan en cada instante,

  basándose en las tasas $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$.

$^{(*)}$ Ver módulo La Distribución Exponencial, Definición y algunas Propiedades.

Cuando todavía no se ha reparado ningún enlace:

- $\Delta_1 \sim$ exponencial con tasa $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$,
- el enlace reparado en $t = \tau_{(1)}$ sigue una distribución discreta donde la probabilidad de cada uno es:

$$\frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}, \; j = 1, \ldots, m$$

Suponiendo que en $t = \tau_{(1)}$ se ha reparado el enlace cuya tasa es λ_x:

- $\Delta_2 \sim$ exponencial con tasa $\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) - \lambda_x$
- el enlace reparado en $t = \tau_{(2)}$ sigue una distribución discreta donde la probabilidad de cada uno es:

$$\frac{\lambda_j}{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) - \lambda_x}, \; j = 1, \ldots, m, \; j \neq x$$

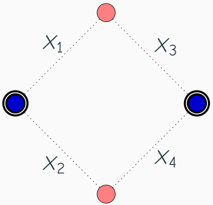
Construcción de Secuencias (PC)

Suponiendo que en $t = \tau_{(2)}$ se ha reparado el enlace cuya tasa es λ_y:

- $\Delta_3 \sim$ exponencial con tasa $\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) - \lambda_x - \lambda_y$
- el enlace reparado en $t = \tau_{(3)}$ sigue una distribución discreta donde la probabilidad de cada uno es:

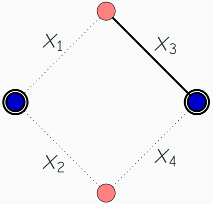
$$\frac{\lambda_j}{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) - \lambda_x - \lambda_y}, \; j = 1, \ldots, m, \; j \neq x, y$$

El mecanismo continúa, quitando los enlaces sorteados, uno a uno, de $\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)$.



- $\Delta_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$,
- el enlace reparado en $t = \tau_{(1)}$ es, X_1, X_2, X_3 o X_4, con probabilidades:

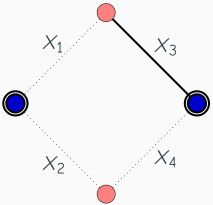
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}\,,\quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}\,,\quad \frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}\ \text{o}\ \frac{\lambda_4}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$$



- $\Delta_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$,
- el enlace reparado en $t = \tau_{(2)}$ es, X_1, X_2, X_3 o X_4, con probabilidades:

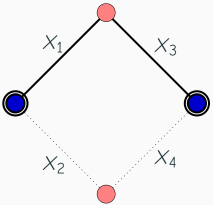
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} \quad \text{o} \quad \frac{\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}$$

Supongamos que el enlace sorteado en $\tau_{(1)}$ es X_3.



- $\Delta_2 \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4)$,
- el enlace reparado en $t = \tau_{(2)}$ es, X_1, X_2 o X_4, con probabilidades:

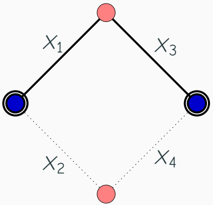
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4} \quad \text{o} \quad \frac{\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4}$$

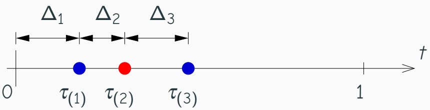


- $\Delta_2 \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4)$,
- el enlace reparado en $t = \tau_{(2)}$ es, X_1, X_2 o X_4, con probabilidades:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4} \;,\; \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4} \;\text{o}\; \frac{\lambda_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4}$$

Supongamos que el enlace sorteado en $\tau_{(2)}$ es X_1.





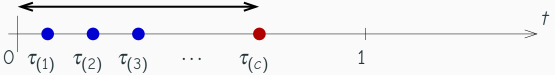
- $\Delta_3 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2 + \lambda_4)$,
- el enlace reparado en $t = \tau_{(3)}$ es, X_2 o X_4, con probabilidades:

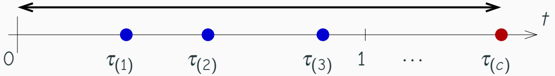
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_4} \text{ o } \frac{\lambda_4}{\lambda_2 + \lambda_4}$$

Y así sucesivamente ...

Mecanismo de Estimación (PC)

Sólo es de utilidad sortear tiempos hasta $\tau_{(c)}$.





Mecanismo

Sortear secuencias $\{\tau_{(1)}, \tau_{(2)} \cdots, \tau_{(c)}\}$, verlas como trayectorias en un espacio uni–dimensional y reducir el problema a evaluar $1 - \zeta = \mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1\}$

MC Crudo sobre el El Proceso de Creación

La simulación MC Crudo para estimar $1-\zeta$ sobre el **PC** consiste en:

1. Sortear N secuencias independientes $\left\{\tau_{(1)}^{(i)}, \tau_{(2)}^{(i)} \cdots, \tau_{(c)}^{(i)}\right\}$, $i = 1, \ldots, N$.
2. Para cada secuencia sorteada calcular el valor de la variable indicatriz $I^{(i)}$:

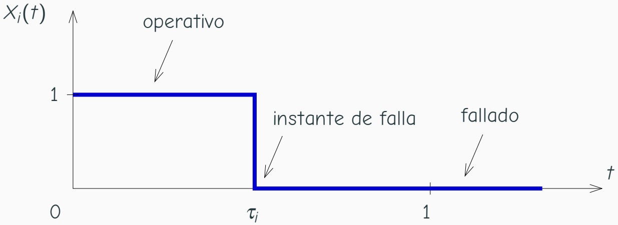
$$I^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_{(c)}^{(i)} > 1, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

3. Promediar los N valores calculados:

$$1 - \widehat{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I^{(i)}$$

Consideremos una evolución temporal ***muy particular*** de las variables de modelo:

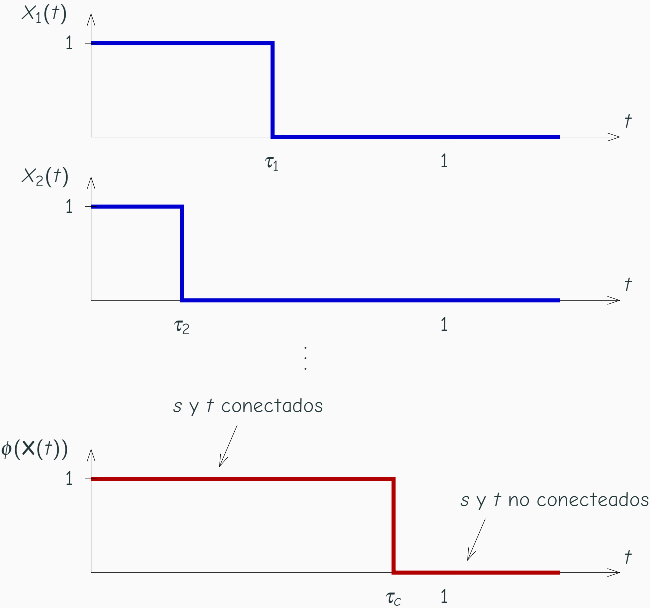
$$\mathbf{X} \quad \to \quad \mathbf{X}(t) = (X_1(t), \cdots, X_m(t))$$



Idea Central

Si los enlaces fallan en tiempos proporcionales a su anti–confiabilidad individual, s y t se van a desconectar en un tiempo proporcional a la anti–confiabilidad de la red

El Proceso de Destrucción (PD)



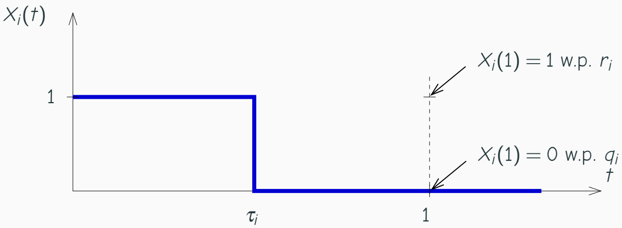
El Proceso de Destrucción (PD)

Si:

- $\tau_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), \; i = 1, \ldots, m$
- $\lambda_i = -\ln(r_i)$

entonces:

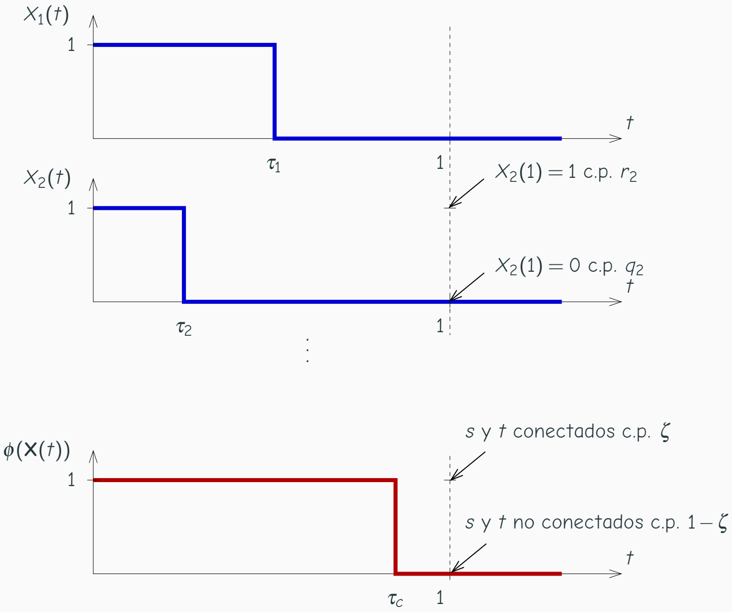
$$\mathbb{P}\{X_i(1) = 1\} = \mathbb{P}\{\tau_i \geq 1\} = e^{-\lambda_i} = e^{\ln(r_i)} = r_i$$
$$\mathbb{P}\{X_i(1) = 0\} = \mathbb{P}\{\tau_i < 1\} = 1 - e^{-\lambda_i} = 1 - e^{\ln(r_i)} = q_i$$



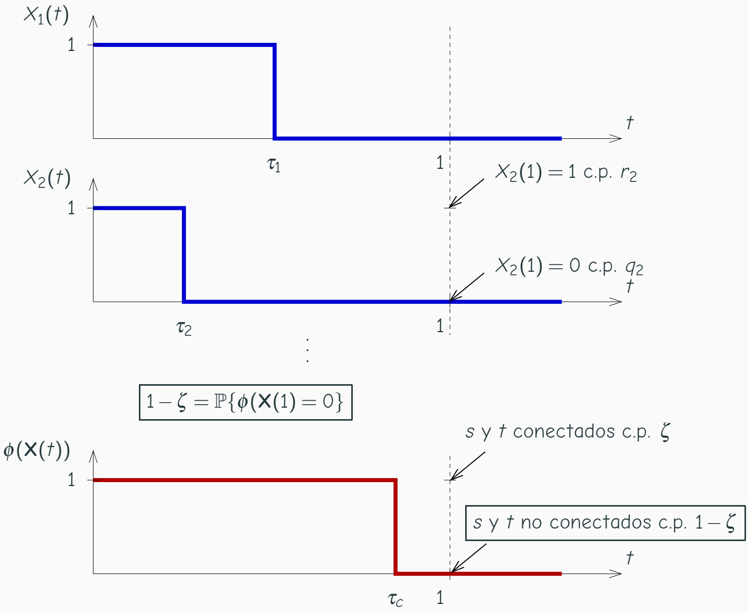
Finalmente,

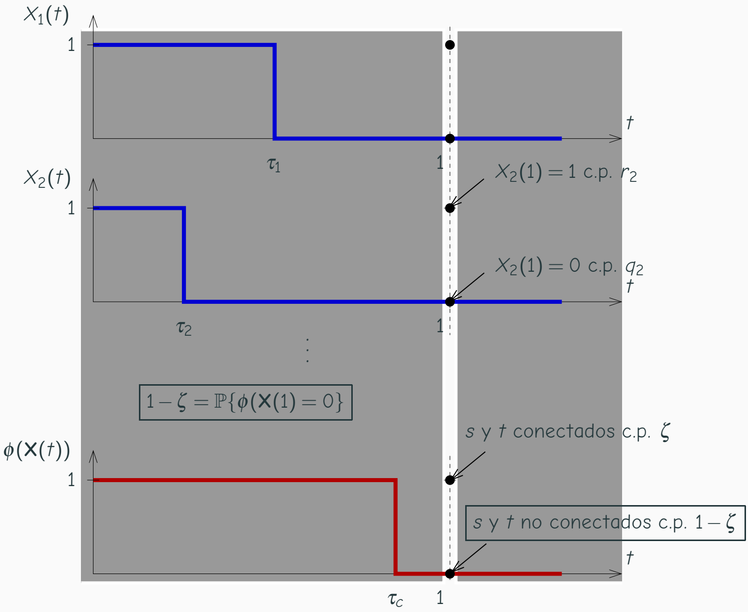
$$\text{si} \begin{cases} \forall i \;\; \mathbb{P}\{X_i(1) = 1\} & = r_i \\ \forall i \;\; \mathbb{P}\{X_i(1) = 0\} & = q_i \end{cases} \quad \text{entonces, } \phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}(1) = 1)\} & = \zeta \\ \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}(1) = 0)\} & = 1 - \zeta \end{cases}$$

El Proceso de Destrucción (PD)



El Proceso de Destrucción (PD)

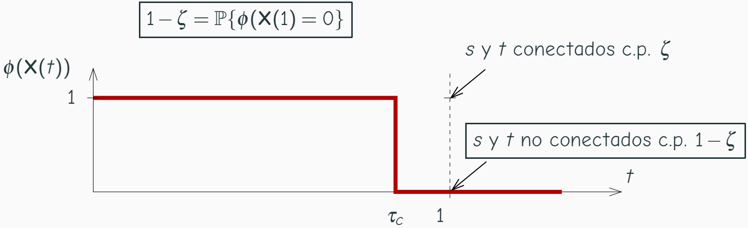




$X_1(t)$
1
t
τ_1
1
$X_2(t)$
1
$X_2(1) = 1$ c.p. r_2
$X_2(1) = 0$ c.p. q_2
t
τ_2
1
$1 - \zeta = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}(1) = 0\}$
s y t conectados c.p. ζ
$\phi(\mathbf{X}(t))$
1
s y t no conectados c.p. $1 - \zeta$
t
τ_c
1

Las probabilidades de encontrar los enlaces operativos (reparados) o fallados en el instante $t=1$, son las mismas del modelo estático.

Observar el **PD** en $t=1$ equivale a observar el modelo estático.



Comparación PC/PD

Tanto el **PC** como el **PD** permiten construir secuencias de un modo similar,

sólo hay que elegir adecuadamente las tasas:

- en el **PC**:
  - $\lambda_i = -\ln(q_i)$
  - $1-\zeta = \mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1\}$
- en el **PD**:
  - $\lambda_i = -\ln(r_i)$
  - $1-\zeta = \mathbb{P}\{\tau_{(c)} < 1\}$.

La simulación de tipo Monte Carlo Crudo puede hacerse indistintamente sobre ambos.

1. Sortear N secuencias independientes $\left\{\tau_{(1)}^{(i)}, \tau_{(2)}^{(i)} \cdots, \tau_{(c)}^{(i)}\right\}$, $i = 1, \dots, N$ $^{(*)}$.
2. Para cada secuencia sorteada calcular el valor de la variable indicatriz $I^{(i)}$:

$$\mathbf{PC} \;\rightarrow\; I^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_{(c)}^{(i)} > 1, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \qquad \mathbf{PD} \;\rightarrow\; I^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau_{(c)}^{(i)} < 1, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

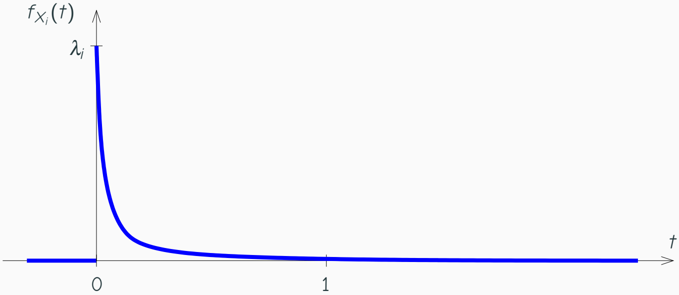
3. Promediar los N valores calculados:

$$1 - \widehat{\zeta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I^{(i)}$$

$^{(*)}$ basadas en los parámetros que correspondan, según se trate del **PC** o del **PD**.

PC sobre una Red altamente confiable

- Enlaces altamente confiables $\rightarrow$ valores q_i, $i = 1, \ldots, m$, **muy pequeños**.
- Tasas $\lambda_i = -\ln(q_i)$ **muy altas**.

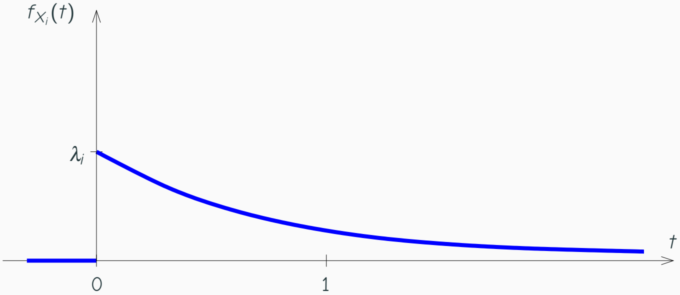


- Tiempos entre reparaciones: **muy bajos**.

- $\{\tau_{(c)} > 1\}$ = evento raro $\rightarrow$ $1 - \zeta = \mathbb{P}\{\tau_{(c)} > 1\} \ll 1$

PD sobre una Red altamente confiable

- Enlaces altamente confiables $\rightarrow$ valores r_i, $i = 1, \ldots, m$, **muy grandes**.
- Tasas $\lambda_i = -\ln(r_i)$ **muy pequeñas**.



- Tiempos entre fallas: **muy grandes**.

- $\{\tau_{(c)} < 1\}$ = evento raro $\rightarrow$ $1 - \zeta = \mathbb{P}\{\tau_{(c)} < 1\} \ll 1$

T. Elperin, I. B. Gertsbakh, and M. Lomonosov. "Estimation of Network Reliability Using Graph Evolution Models". In: *IEEE Transactions on Reliability* 40.5 (Dec. 1991), pp. 572–581.