

PRÁCTICO 8
RELACIONES II (SECCIONES 7.3 Y 7.4)

Ejercicio 1. Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ si y es múltiplo de x).
- (b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Ejercicio 2. Hallar la cantidad de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ tales que $3 < 2$ y $2 < 1$.

Ejercicio 3. Sea $A = \{a, b, c\}$, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre A .

Ejercicio 4. Un orden parcial $(A, \leq)$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

- (a) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un buen orden entonces es un orden total.
- (b) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un orden total entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.
- (c) Concluir que si un orden parcial $(A, \leq)$ tiene dos elementos maximales distintos o dos minimales distintos entonces no es un buen orden.

Ejercicio 5. Demostrar que en un conjunto con 61 personas hay al menos 13 personas cada una de las cuales descende de la siguiente o hay un al menos 6 personas tales que ninguna de ellas descende de otra.

Ejercicio 6. Hallar el número de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2); (3, 4)\}$.

Ejercicio 7. Sea $A = \{1, 2, \dots, 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A ?

Ejercicio 8. Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas $P_0, P_1, \dots, P_9$ que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_7, P_2 < P_9$; $P_6 < P_7$; $P_4 < P_6$; $P_8, P_5 < P_2$; $P_3, P_0 < P_5$; $P_3, P_4 < P_8$; $P_1 < P_3, P_4, P_0$; donde, por ejemplo, $P_i < P_j$ significa que el programa P_i debe realizarse antes que el programa P_j . Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

Ejercicio 9. Determinar cuáles de los órdenes del Ejercicio 1 representa un retículo.

Ejercicio 10. ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 1 representa un retículo?

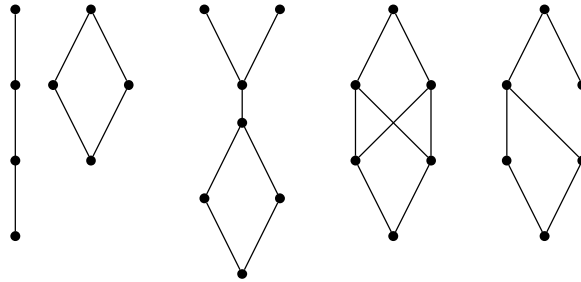


Figura 1

Ejercicio 11. Sea $(A, \leq)$ una relación de orden parcial, donde A es un conjunto finito y no vacío.

- Demostrar que la relación $(A, \leq)$ tiene al menos un elemento que es maximal.
- Demostrar que la relación inversa $(A, \geq)$ es también de orden parcial.
- Utilizando las partes anteriores, demostrar que $(A, \leq)$ tiene al menos un elemento que es minimal.
- Estudiar si son ciertas las afirmaciones anteriores si A es un conjunto infinito. En cada una de las afirmaciones anteriores, probar o dar un contraejemplo.