Universidad de la República | **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística | **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 10
Relaciones I

Aclaración: En todos los ejercicios:

- R^{-1} denota la relación inversa, o sea $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$;
- $\overline{R}$ la relación complementaria, o sea, $\overline{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$
- RS el producto de las relaciones R y S (denotado como $R \circ S$ en el libro de Grimaldi), o sea $RS = \{(x, z) : \exists\, y, (x, y) \in R \text{ y } (y, z) \in S\}$.

Ejercicio 1. Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

a. $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

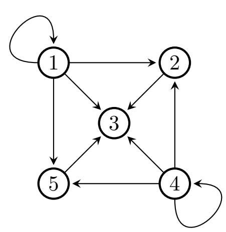
b. $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

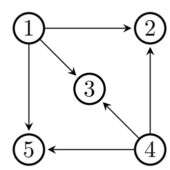
c. $R = \{(1, 3), (1, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

d. $R = \emptyset$.

e. $R = A \times A$.

Ejercicio 2. Determine si las relaciones siguientes son reflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, donde cada relación se representa en un grafo dirigido (o digrafo):

i) 

ii) 

Ejercicio 3. Considere el conjunto de propiedades $P = \{$reflexiva, simétrica, transitiva$\}$. Para cada subconjunto T de P, encuentre una relación que cumpla las propiedades de T y no cumpla las de $P \setminus T$.

Ejercicio 4. Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

a. Elabore un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la representación de la relación en grafos dirigidos.

b. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, RS, $R \cup S$, $R \cap S$?

c. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexiva, antisimétrica, asimétrica y transitiva*.

Ejercicio 5.

(a) Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

(b) Construir el diagrama de flechas (o digrafo) de alguna de estas relaciones.

Ejercicio 6. ¿Cuántas relaciones binarias

(a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas;

son definibles sobre un conjunto con n elementos?

Ejercicio 7. Sea A un conjunto con n elementos y R una relación sobre A. Considere cada una de las siguientes proposiciones. Demuéstrela en caso que sea verdadera y encuentre un contraejemplo en el caso que sea falsa.

a. Si R es reflexiva sobre A, entonces $\#R \geq n$.
b. Si $\#R \geq n^2 - k$, con $k < n$ entonces existe $a \in A$ tal que $(a, a) \in R$.

Ejercicio 8. En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir las clases de equivalencia de la relación:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 10.

(d) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$,
con $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 9. Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva, tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb, entonces R es una relación de equivalencia en A.

Ejercicio 10. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 11. Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

Ejercicio 12. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea R_n la cantidad de relaciones de equivalencia que pueden definirse en un conjunto con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n)$

Ejercicio 13. Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a. El producto de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.
b. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.
c. El producto de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea