TEMA 10: MÉTODOS DE RELEVAMIENTO PLANIMETRICO

INTRODUCCIÓN

Se entiende por métodos topográficos a las distintas técnicas que se utilizan en la toma de medidas distanciométricas y angulares, así como al tratamiento de estos datos, para la realización de un trabajo topográfico, tanto por lo que concierne a la planimetría como a su altimetría.

Todo trabajo topográfico deberá contemplar en general los siguientes aspectos:

- Determinación de los errores máximos a esperar (tolerancias).
- Elección del instrumental y metodologías a emplear.
- Planificación de las tareas.
- Determinación de costos.

En primer lugar, deberá realizarse un preanálisis de los errores máximos admisibles de acuerdo con las exigencias del trabajo y a las tolerancias establecidas.

De acuerdo con lo anterior se determinará el instrumental y la metodología a aplicar, de manera de asegurar que el resultado cumpla lo especificado, permitiendo además el control de las tareas a realizar.

Deberá realizarse además una planificación de las tareas, optimizando básicamente los recursos tiempo y dinero, sin desmedro de la calidad del trabajo.

La determinación de los costos es también un aspecto importante a tener en cuenta, estrechamente vinculado con el punto anterior. Una exigencia innecesaria en cuanto a la precisión del trabajo puede reflejarse en un aumento considerable en el tiempo de ejecución y en los costos de este.

Los métodos topográficos se pueden clasificar en:

- Métodos Planimétricos
- Métodos Altimétricos
- Métodos plan-Altimétricos

PLANIMETRÍA

La planimetría es la parte de la topografía que estudia el conjunto de métodos y procedimientos que tienden a conseguir la representación a escala de todos los detalles interesantes del terreno sobre una superficie plana (plano geometría), prescindiendo de su relieve y se representa en una proyección horizontal.

Los métodos topográficos planimétricos se pueden clasificar en:

- Radiación
- Abscisas y ordenadas
- Intersección directa
- Intersección inversa
- Triangulación
- Trilateración
- Poligonación

MÉTODO DE RADIACIÓN

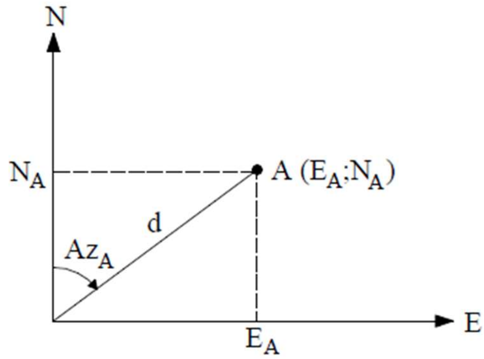
Este método es empleado cuando el área de trabajo está comprendida dentro del alcance del instrumental. Consiste en, desde un sólo punto estación, medir el ángulo a partir de una dirección origen, y la distancia desde ésta al punto considerado.

El instrumento se dice que está orientado, cuando el origen angular se define según una dirección conocida.

La distancia desde el punto de estación y el punto a relevar se obtiene mediante mediciones con cinta o electrónicamente (medida directa).

Cada punto queda así definido mediante coordenadas polares, pudiendo transformarse a coordenadas rectangulares mediante:

$$E_A = d_A * \text{sen}\, Az_A$$
$$N_A = d_A * \cos Az_A$$



El mayor inconveniente que tiene el método es precisamente su falta de homogeneidad en cuanto a la precisión, pues ésta decrece a medida que aumenta la distancia del punto a la estación.

Propagación de errores – método de radiación

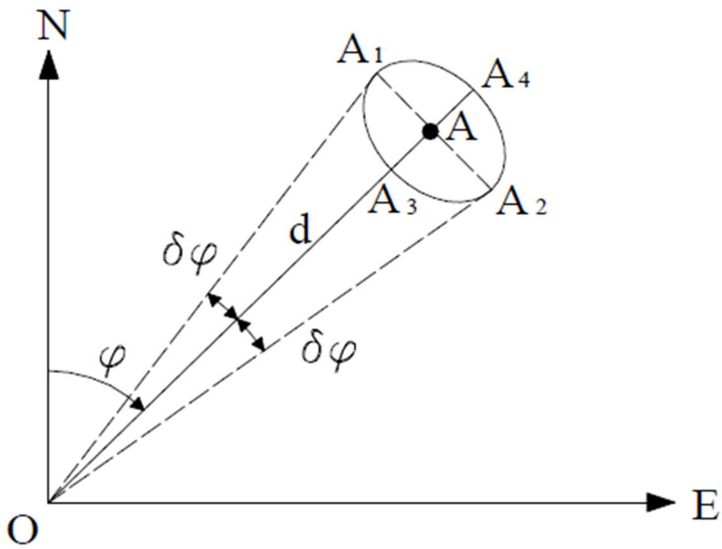
$$X_a = X_b + d_{ab} \times \sin Az_{ab}$$
$$Y_a = Y_b + d_{ab} \times \cos Az_{ab}$$

$$\partial Xa^2 = \left(\frac{\partial_{Xa}}{\partial_d}\right)^2 \times \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial_{Xa}}{\partial_\varphi}\right)^2 \times \sigma_\varphi^2$$

$$\partial Ya^2 = \left(\frac{\partial_{Ya}}{\partial_d}\right)^2 \times \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial_{Ya}}{\partial_\varphi}\right)^2 \times \sigma_\varphi^2$$

$$\partial_{Xa}^2 = \left(\sin Az_{ab} \times \sigma_d\ \right)^2 + \left(d \times \cos Az_{ab} \times \sigma_\varphi\right)^2$$

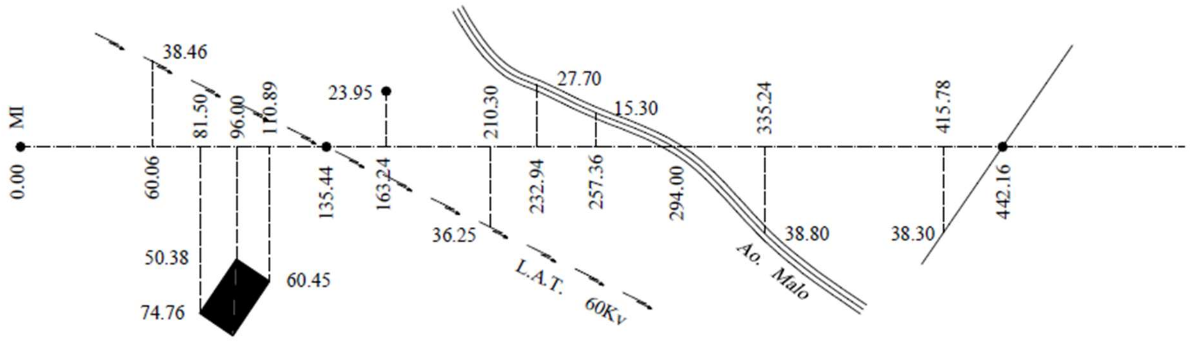
$$\partial_{Ya}^2 = \left(\cos Az_{ab} \times \sigma_d\ \right)^2 + \left(-d \times \sin Az_{ab} \times \sigma_\varphi\right)^2$$



MÉTODO DE ABSCISAS Y ORDENADAS

Se emplea este método en general cuando la zona en cuestión abarca una gran extensión en un sentido y muy pequeña en la dirección normal a ésta. Por ejemplo, líneas de alta tensión, líneas férreas, construcción de infraestructura vial, líneas de bombeo o saneamiento, etc.

Para ello se determina una alineación base sobre la cual se miden las distancias acumuladas (progresivas) a partir de un punto tomado como origen, y luego se miden los apartamientos (ordenadas) de los puntos de interés a dicha alineación.



Es un método muy utilizado en obra, ya que a partir de los ejes de esta (materializados por el Ing. Agrimensor) pueden replantearse elementos a construirse por parte los obreros de la construcción, simplemente midiendo las distancias progresivas y los apartamientos al eje.

Para levantar las líneas perpendiculares con cinta, pueden ser de utilidad el método del radio, así como el método del triángulo rectángulo (o método 3,4,5).

MÉTODO DE INTERSECCIÓN DIRECTA

Es un procedimiento muy usado en mediciones geodésicas y operaciones topográficas.

Se basa en la determinación de una base DI cuya longitud y acimut son conocidos, se estaciona luego el teodolito en los extremos y se miden los ángulos que forman con la base las visuales al punto V cuyos datos se quieren obtener.

En el triángulo VDI se conocerán pues un lado (la base) y los dos ángulos adyacentes por lo que el mismo queda perfectamente definido.

$$\hat{V} = 180° - \alpha - \beta$$

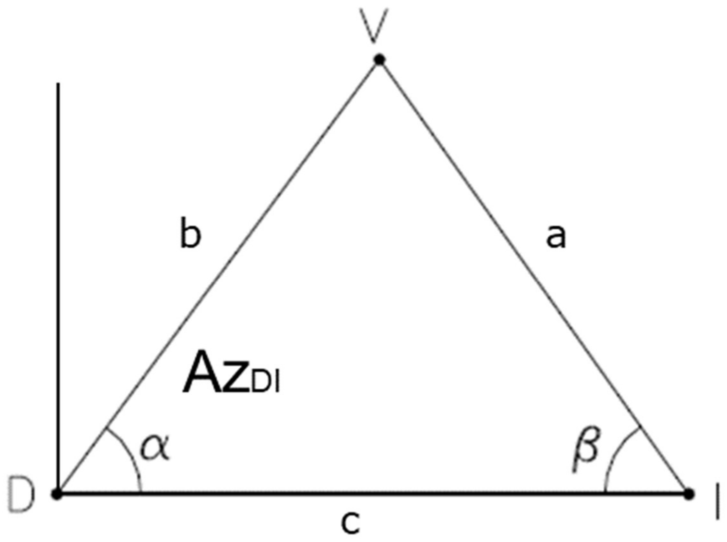
$$\frac{a}{\sin D} = \frac{b}{\sin I} = \frac{c}{\sin V}$$

$$a = \frac{c \times \sin D}{\sin V}$$

$$b = \frac{c \times \sin I}{\sin V}$$

$$X_V = X_D + b \times \sin(Az_{DI} - \alpha)$$

$$Y_V = Y_D + b \times \cos(Az_{DI} - \alpha)$$



Propagación de errores – método de intersección inversa

$$X_V = X_D + b \times \sin(Az_{DI} - \alpha)$$

$$Y_V = Y_D + b \times \cos(Az_{DI} - \alpha)$$

$$X_V = X_D + \frac{c \times \sin\beta}{\sin\gamma} \times \sin(Az_{DI} - \alpha)$$

$$Y_V = Y_D + \frac{c \times \sin\beta}{\sin\gamma} \times \cos(Az_{DI} - \alpha)$$

$$\sin\gamma = \sin(180° - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial X_V^2 = \left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_\alpha}\right)^2 \times \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_\beta}\right)^2 \times \sigma_\beta^2 + \left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_{AZ}}\right)^2 \times \sigma_{AZ}^2 \\ \partial Y_V^2 = \left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_\alpha}\right)^2 \times \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_\beta}\right)^2 \times \sigma_\beta^2 + \left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_{Az}}\right)^2 \times \sigma_{AZ}^2 \end{array} \right\}$$

Para X:

$$\left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_c}\right) = \frac{\sin\beta\sin(Az-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_{Az}}\right) = \frac{\mathrm{c}\times\sin\beta\ \mathrm{c}\quad(Az-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_\alpha}\right) = -\left[\frac{c\times sin\beta\times(\cos(\alpha-Az)\times\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-Az)\times\cos(\alpha+\beta)}{sin^2_{(\alpha+\beta)}}\right]$$

$$\left(\frac{\partial_{Xv}}{\partial_\beta}\right) = \frac{c\times\sin(Az-\alpha)\times(\cos\beta\times\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\times\cos(\alpha+\beta))}{sin^2_{(\alpha+\beta)}}$$

Para Y:

$$\left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_c}\right) = \frac{\sin\beta\ .\ \cos(Az-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_{Az}}\right) = -\ \frac{\mathrm{c}\times\sin\beta\sin(Az-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_\alpha}\right) = -\frac{c\times\sin\beta\times(\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-Az)+\cos(\alpha-Az)\cos(\alpha+\beta))}{sin^2_{(\alpha+\beta)}}$$

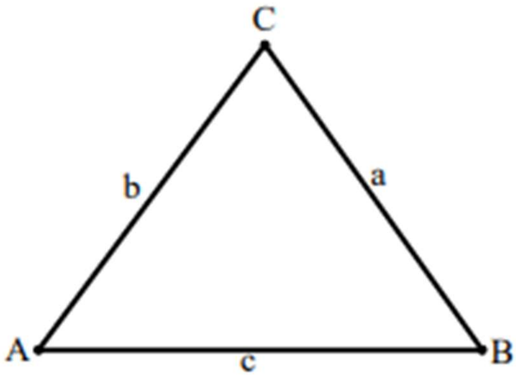
$$\left(\frac{\partial_{Yv}}{\partial_\beta}\right) = \frac{c\times\cos(Az-\alpha)\times(\cos\beta\times\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\times\cos(\alpha+\beta))}{sin^2_{(\alpha+\beta)}}$$

Realizar el cálculo para el triángulo optimo:

MÉTODO DE TRILATERACIÓN

El empleo de este método se ha incentivado y ha tenido gran impulso a partir del surgimiento de los instrumentos electrónicos de medidas de distancias, que permiten medir grandes longitudes en un breve lapso de tiempo y con gran precisión.

Consiste como lo dice su nombre, en medir los 3 lados de un triángulo, con lo que el problema queda resuelto, aplicando luego las fórmulas de la trigonometría:



Por la ley del coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

O También:

$$tg\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$tg\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

donde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Es un método útil, por ejemplo, para el levantamiento de planos de mensura de fraccionamientos en propiedad horizontal, ya que pueden ser relevadas las distintas unidades empleando este método.

Para determinar los ángulos de la unidad de la figura, basta con medir los lados que comparten el ángulo y su diagonal. En la imagen se puede apreciar como determinar el ángulo “A” y el ángulo “B”. La dificultad para emplear el método radica en la precisión de la toma de datos, la existencia paredes internas, y la correcta determinación de los vértices del triángulo que se quiere relevar.

Propagación de errores – método de trilateración

Partiendo de coordenadas (Xa,Ya) del punto A conocidas, se puede obtener las coordenadas del punto C (Xc,Yc) siempre y cuando conozcamos el Az(AC).

$$X_C = X_A + b \times \sin Az_{AC} \qquad X_B = X_A + c \times \sin Az_{AB}$$

$$Y_C = Y_A + b \times \mathrm{Cos}\, Az_{AC} \qquad Y_B = Y_A + c \times \mathrm{Cos}\, Az_{AB}$$

$$Az_{AB} = Az_{AC} + \hat{A}$$

$$\hat{A} = Arc\cos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

Si consideramos la dirección AC como origen angular, el Az(AC) = 0 (simplificación para el cálculo de error). Entonces el error en la determinación de las coordenadas del punto B será en función del error en la medición de los 3 lados del triángulo (a,b,c).

$$\partial X_B^2 = \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_b}\right)^2 \times \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2 + \boxed{\cancelto{0}{\left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_{AZ}}\right)^2 \times \sigma_{AZ}^2}}$$

$$\partial Y_B^2 = \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_b}\right)^2 \times \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2 + \boxed{\cancel{\left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_{Az}}\right)^2 \times \sigma_{AZ}^2}}$$

$$\partial X_B^2 = \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_b}\right)^2 \times \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial_{XB}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2$$

$$\partial Y_B^2 = \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_a}\right)^2 \times \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_b}\right)^2 \times \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial_{YB}}{\partial_c}\right)^2 \times \sigma_c^2$$

$$\frac{\partial_{XB}}{\partial b} = -\left(\frac{b^4 - c^4 + 2a^2c^2 - a^4}{4cb^3\sqrt{1 - \left(\frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}\right)}}\right)$$

$$\frac{\partial_{XB}}{\partial a} = \frac{a(-a^2 + c^2 + b^2)}{2b^2c\sqrt{1 - \frac{(-a^2 + c^2 + b^2)^2}{4b^2c^2}}}$$

$$\frac{\partial_{XB}}{\partial c} = -\frac{c^2 - b^2 - a^2}{2b^2\sqrt{1 - \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}}}$$

$$\frac{\partial_{YB}}{\partial b} = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b^2}$$

$$\frac{\partial_{YB}}{\partial a} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{\partial_{YB}}{\partial c} = \frac{c}{b}$$

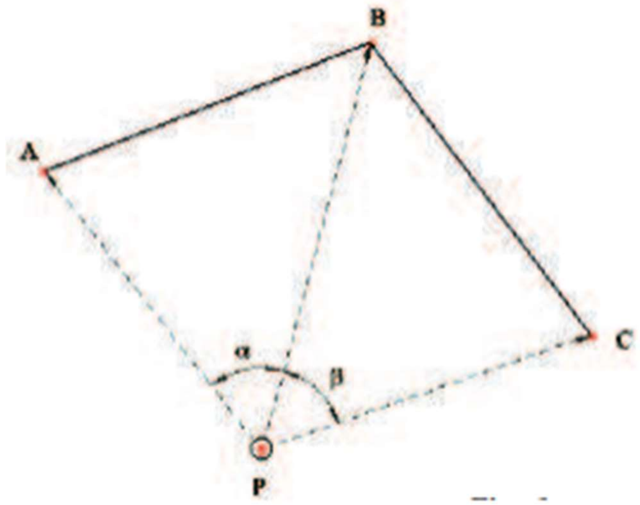
MÉTODO DE INTERSECCIÓN INVERSA

El Método consiste en la determinación de la posición planimétrica de puntos, mediante observaciones angulares hechas desde éstos y dirigidas a otros puntos de coordenadas conocidas.

Es necesario realizar al menos visuales a tres puntos de posición conocida.

La obtención de las coordenadas X e Y que definan la posición planimétrica de los puntos, puede hacerse por métodos gráficos o por métodos analíticos.

El caso más general, es el que se observa en la Figura. Se tienen tres puntos A, B, C, de posición planimétrica conocida y se pretende calcular la posición de un punto P, estacionando en él con un Teodolito o Estación Total y midiendo exclusivamente los ángulos α y β.



El problema tendrá solución siempre que el punto P no se encuentre en la llamada **"circunferencia peligrosa"** que determinan los puntos A, B y C, ya que los tres arcos capaces se confundirían en uno solo.

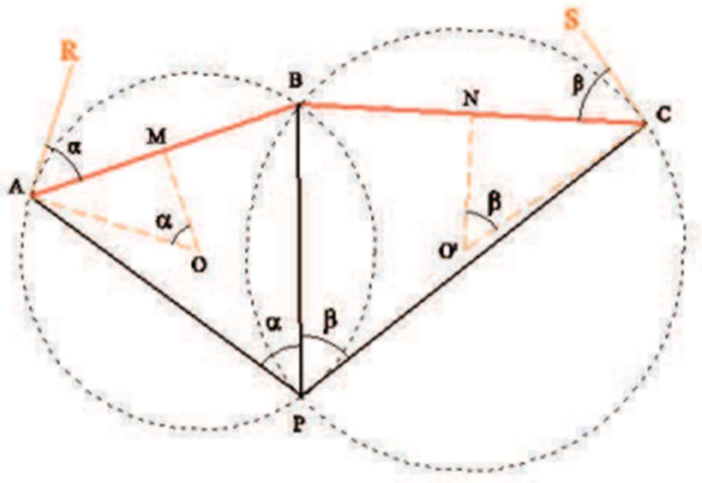
Cuando el punto P está en esta circunferencia, el cuadrilátero PABC es inscrito y se cumple que: **B + α + β = 180°**. En todo cuadrilátero inscrito, los ángulos opuestos son suplementarios.

SOLUCIÓN GEOMÉTRICA (Intersección de Arcos Capaces)

El método consiste en la construcción del arco capaz de segmento AB y ángulo α y el arco capaz de segmento BC y ángulo β. La intersección de estos será el punto P a determinar.

Para esto es necesario obtener los centros de las circunferencias que pasan por los puntos A,B,P y B,C,P. Para ello trazaremos las mediatrices de los lados AB (M) y BC (N).

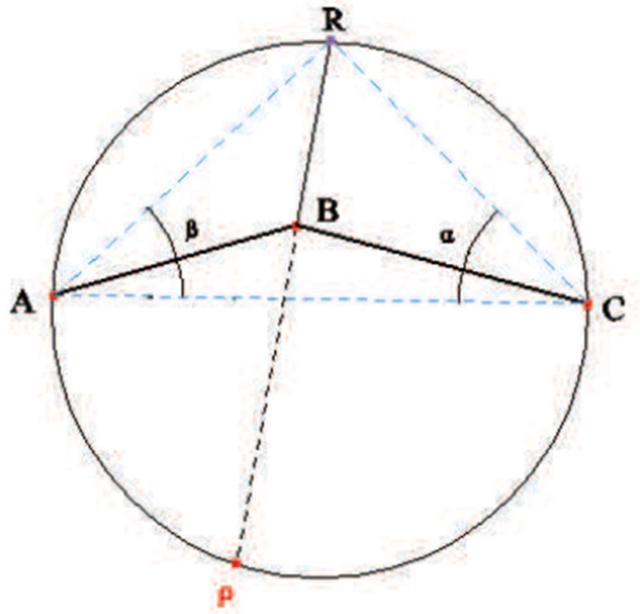
Trazaremos la recta AR que forma el ángulo α con el lado AB, y una perpendicular a AR que pasaría por O para obtener el centro del círculo por intersección. Haremos lo mismo con el lado BC. Obtenemos los centros O y O’, y trazando los círculos de radios OA y O’C, pasarán por B y P, siendo P la solución buscada.



El arco capaz es el lugar geométrico de los vértices P de los ángulos APB que tienen la misma amplitud. El arco capaz de ángulo γ de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos P tales que $\widehat{APB} = \gamma$ y son exclusivamente dos arcos de circunferencia, uno a cada lado del segmento AB, ambos puntos se incluyen uniendo dichos arcos.

SOLUCIÓN GEOMÉTRICA (Método de Collins)

Sean A, B y C los tres vértices de coordenadas conocidas y P el punto que queremos determinar por Intersección Inversa. Medimos **α** y **β** desde P. Llevando **α** sobre la base CA y **β** sobre la AC como se indica en la Figura, la intersección nos da un punto **R** (*punto auxiliar de Collins*).



Se traza la circunferencia que pasa por los puntos A, R y C. Uniendo el punto R con el vértice B y prolongando hasta cortar a la circunferencia, se obtiene el punto P buscado.

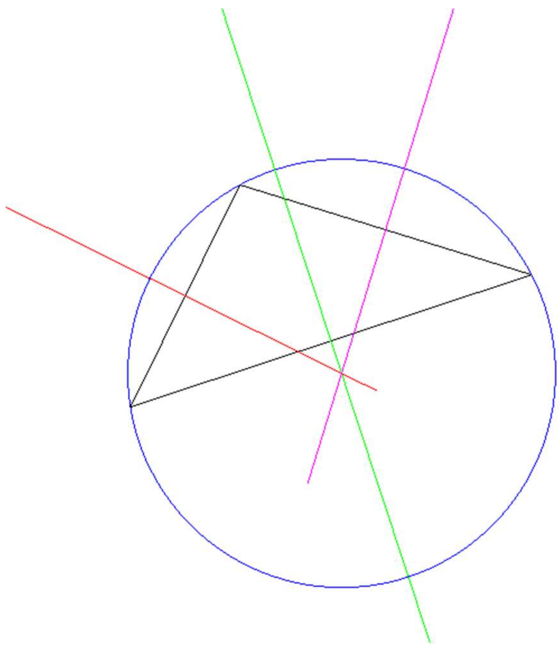
La justificación del método se fundamenta en que desde el vértice **R** se mira a la base **AC** con un ángulo **180 - (α + β)**, Por tanto, desde **P** se verá con un ángulo **α + β**. (*propiedad de ángulos suplementarios en cuadriláteros inscriptibles*).

Además, si desde **C** miramos a **AR** con un ángulo **α** también lo miraremos desde **P**, porque son ángulos inscritos sobre la misma cuerda. También desde **P** miramos a **RC** con un ángulo **β,** al igual que desde **A.**

Por todo ello, el punto **P** es pues la solución que buscábamos. El mismo resultado hubiésemos obtenido si en vez de basar toda la construcción sobre la base **AC** lo hubiésemos hecho sobre cualquiera de las otros dos bases.

Un problema sería hallar la circunferencia que al que pertenecen los puntos A, C,R y P. O en su defecto A,C,R.

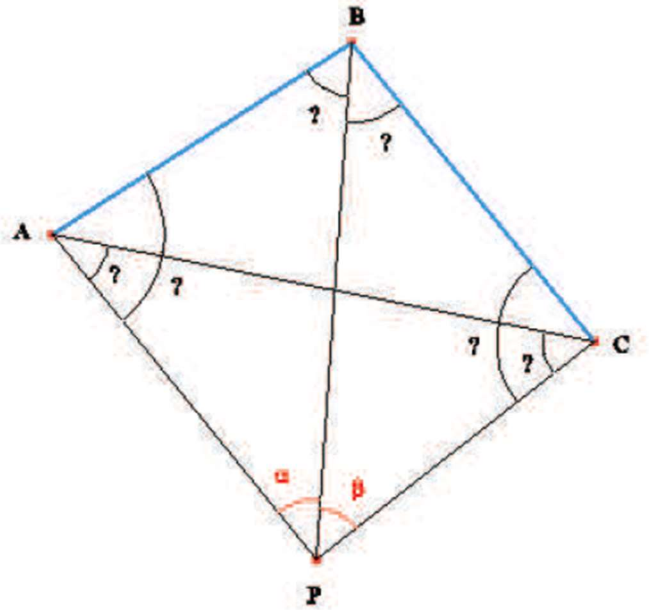
Para eso es necesario trazar las mediatrices de los segmentos AC, AR y RC. El punto en el que se intersectan las 3 mediatrices será el centro de la circunferencia.



SOLUCIÓN ANALITICA (Método de Pothenot)

Dada la figura, se observa que el problema analítico para la determinación de la posición del punto P radica en que en ninguno de los tres triángulos que se forman, con vértice en P, se conocen dos de sus ángulos.

Sólo se conoce un ángulo y su lado opuesto. Por tanto, no podemos aplicar el teorema del seno en ellos, para deducir sus lados y ángulos. Llamemos "a" y "b" a las distancias AB y BC conocidas, por ser A,B y C puntos de coordenadas también conocidas.



Los dos triángulos considerados, tienen una diagonal común PB y el valor de su distancia en cada uno de ellos es:

Triangulo APB $\quad \dfrac{PB}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{AB}{\operatorname{sen} \alpha} \longrightarrow PB = a\dfrac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} \alpha}$

Triangulo BPC $\quad \dfrac{PB}{\operatorname{sen} C} = \dfrac{BC}{\operatorname{sen} \beta} \longrightarrow PB = b\dfrac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} \beta}$

$$\longrightarrow \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{a}{b}\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} = constante,$$

a y b son distancias conocidas,
α y β se miden en campo

$$\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = k$$

A+C = Z (valor conocido) Luego C = Z - A.

$$\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen}(Z - A)}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} Z \cos A - \cos Z \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} A} = \operatorname{sen} Z \cot A - \cos Z = K(conocido)$$

$$\cot A = \frac{K + \cos Z}{\operatorname{sen} Z}$$

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{arctg}\left(\frac{\mathbf{senZ}}{\mathbf{K} + \mathbf{cosZ}}\right) \qquad \mathbf{C} = \mathbf{Z} - \mathbf{A}}$$

Conocidos A y C, el problema está resuelto. En efecto, del triángulo APB se deduce:

$$\left.\begin{aligned} \theta_A^P &= \theta_A^B + \hat{A} \\ AP &= a\frac{\operatorname{sen}(A+\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} X_P &= X_A + AP \operatorname{sen} \theta_A^P \\ Y_P &= Y_A + AP \cos \theta_A^P \end{aligned}\right\}$$

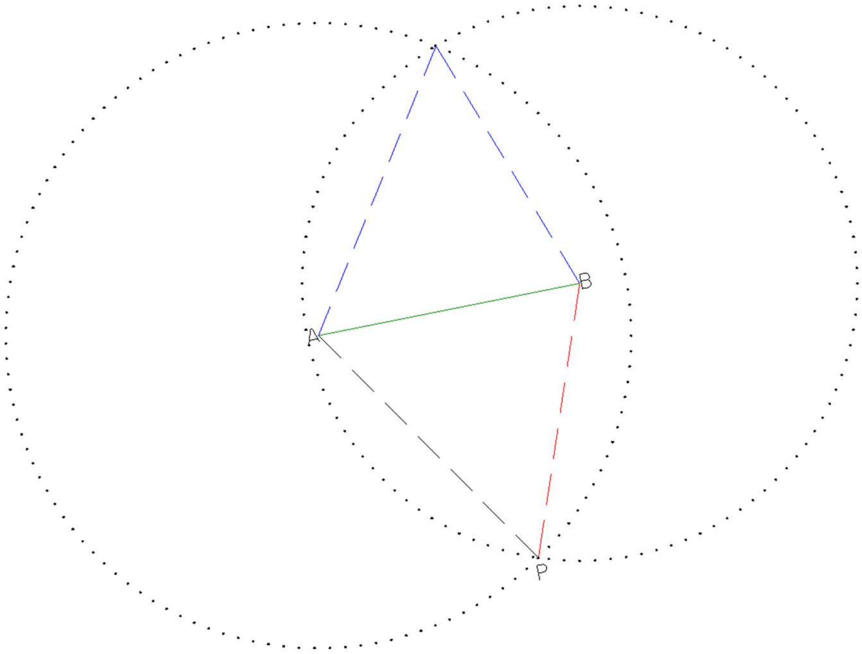
Estación Libre o Trisección

La aplicación o método consiste en determinar las coordenadas del punto P conociendo al menos 2 puntos con coordenadas conocidas.

Para ello es necesario medir las distancias PA, PB y las lecturas angulares en ambas direcciones.

Las coordenadas de P se obtienen mediante la intersección de 2 circunferencias de centro A y radio PA y de centro B y radio PB. Dicha intersección da 2 soluciones posibles, la ambigüedad se resuelve con la lectura angular de los puntos.

El punto P puede estar de un lado u el otro según la lectura angular del limbo graduado.



El error en la determinación de P viene dado en función del error de la medición de distancias PA y PB.

Resolución analítica para el método de “estación libre”

Supongamos 3 puntos, de los cuales se conocen sus coordenadas (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3) y se miden la distancias (d_1, d_2, d_3) entre estos 3 puntos y un punto p de coordenadas (x_p,y_p) desconocidas.

Se desea conocer las coordenadas del punto p, conociendo las coordenadas de estos 3 puntos.

El lugar geométrico de todos los puntos que distan d_1 del punto (a_1, b_1) es la circunferencia de centro (a_1, b_1) y radio d_1. Entonces planteando las 3 ecuaciones de circunferencia:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$$

$$(x-a_3)^2+(y-b_3)^2=r_3^2$$

<u>Desarrollando cada ecuación</u>

(1) $x^2+a_1^2-2a_1x+y^2-2b_1y+b_1^2=r_1^2$

(2) $x^2+a_2^2-2a_2x+y^2-2b_2y+b_2^2=r_2^2$

(3) $x^2+a_3^2-2a_3x+y^2-2b_3y+b_3^2=r_3^2$

<u>Igualando (1) y (2)</u>

$$x^2+a_1^2-2a_1x+y^2-2b_1y+b_1^2-r_1^2= \; x^2+a_2^2-2a_2x+y^2-2b_2y+b_2^2-r_2^2$$

$$2x(a_2-a_1)+2y(b_2-b_1)=r_1^2-r_2^2+a_2^2-a_1^2+b_2^2-b_1^2$$

Simplificando notación:

- $A = 2(a_2 - a_1)$
- $B = 2(b_2 - b_1)$
- $C = r_1^2 - r_2^2 + a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2$

$$Ax + By = C \qquad (4)$$

Igualando (1) y (3):

$$x^2 + a_1^2 - 2a_1x + y^2 - 2b_1y + b_1^2 - r_1^2 = x^2 + a_3^2 - 2a_3x + y^2 - 2b_3y + b_3^2 - r_3^2$$

$$2x(a_3 - a_1) + 2y(b_3 - b_1) = r_1^2 - r_3^2 + a_3^2 - a_1^2 + b_3^2 - b_1^2$$

Simplificando notación:

- $D = 2(a_3 - a_1)$
- $E = 2(b_3 - b_1)$
- $F = r_1^2 - r_3^2 + a_3^2 - a_1^2 + b_3^2 - b_1^2$

$$Dx + Ey = F \qquad (5)$$

Despejamos C en la ecuación (4):

$$\boxed{y = \frac{C - Ax}{B}} \qquad (6)$$

Sustituimos (6) en (5):

$$Dx + E\left(\frac{C - Ax}{B}\right) = F \qquad (7)$$

Multiplicando todos los términos en (7) por B; y despejando x:

$$BDx + E(C - Ax) = BF$$

$$BDx + EC - EAx = BF \rightarrow x(BD - EA) = BF - EC \rightarrow \boxed{x = \frac{BF - EC}{BD - EA}}$$

Propagación de errores

Consideramos las coordenadas de los puntos conocidos (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3) libres de error, por ser puntos fijos de antemano (ver luego el caso de que no sean libres de error). Las distancias d_1, d_2, d_3, serán coincidentes con los radios de las circunferencias r_1, r_2, r_3 y su error estará asociado a la distancia y a la puntería.

Las coordenadas del punto p son:

$$x_p = \frac{BF - EC}{BD - EA} = \frac{B.(r_1^2 - r_3^2 + a_3^2 - a_1^2 + b_3^2 - b_1^2) - E.(r_1^2 - r_2^2 + a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2)}{B.D - E.A}$$

$$y_p = \frac{C - Ax_p}{B} = \frac{DC - AF}{BD - EA} = \frac{D.(r_1^2 - r_2^2 + a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2) - A.(r_1^2 - r_3^2 + a_3^2 - a_1^2 + b_3^2 - b_1^2)}{B.D - E.A}$$

$$\partial X_p^2 = \left(\frac{\partial x_p}{\partial_{r1}}\right)^2 \times \sigma_{r1}^2 + \left(\frac{\partial x_p}{\partial_{r2}}\right)^2 \times \sigma_{r2}^2 + \left(\frac{\partial x_p}{\partial_{r3}}\right)^2 \times \sigma_{r3}^2$$

$$\partial Y_p^2 = \left(\frac{\partial_{yp}}{\partial_{r1}}\right)^2 \times \sigma_{r1}^2 + \left(\frac{\partial_{yp}}{\partial_{r2}}\right)^2 \times \sigma_{r2}^2 + \left(\frac{\partial_{yp}}{\partial_{r3}}\right)^2 \times \sigma_{r3}^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial_{Xp}}{\partial_{r1}} = \dfrac{-2r_1(B+E)}{B.D-E.A} \\[2ex] \dfrac{\partial_{Xp}}{\partial_{r2}} = \dfrac{2r_2.E}{B.D-E.A} \\[2ex] \dfrac{\partial_{Xp}}{\partial_{r3}} = \dfrac{2r_3.B}{B.D-E.A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial_{yp}}{\partial_{r1}} = \dfrac{2.r_1.(D-A)}{B.D-E.A} \\[2ex] \dfrac{\partial_{yp}}{\partial_{r2}} = \dfrac{-2.r_2.D}{B.D-E.A} \\[2ex] \dfrac{\partial_{yp}}{\partial_{r3}} = \dfrac{-2.r_3}{B.D-E.A} \end{cases}$$

BIBLIOGRAFÍA

- Tratado de topografía, Teoría de errores e instrumentación – Manuel Chueca Pazos, José Herráez Boquera, José Luis Berné Valero – Paraninfo, ISBN 84-283-2308-9.
- Tratado general de Topografía – W. Jordan – Gustavo Gili SA, ISBN 968-6085-43-2
- Topografía general y aplicada – Francisco Dominguez, Gracia Tejero – Dossat – ISBN 84-237-0086-0.