La Distribución Exponencial

Definición y algunas Propiedades

Leslie Murray

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina

Octubre, 2023

Definición. Una v.a. continua, X, tiene una Distribución Exponencial de parámetro λ, lo que notaremos $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, si su función de densidad de probabilidad (*fdp*) es:

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0.$$

$\square$

A partir de esta definición,

- su función de distribución acumulada (*fda*) es:

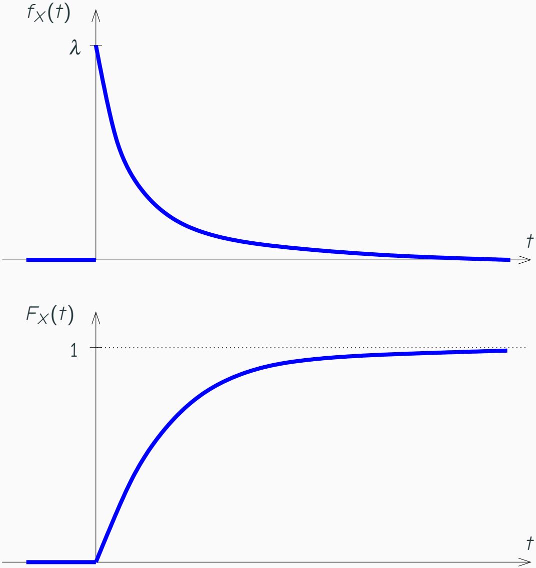
$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

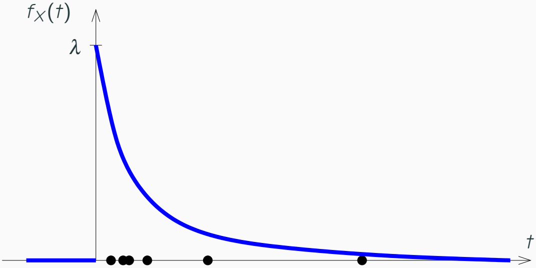
- su media

$$\mathbb{E}\{X\} = \frac{1}{\lambda},$$

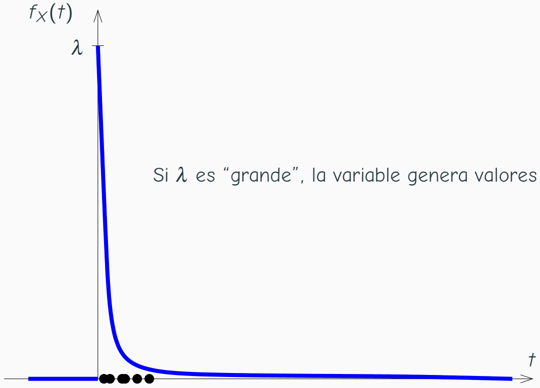
- y su varianza

$$\mathbb{V}\{X\} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

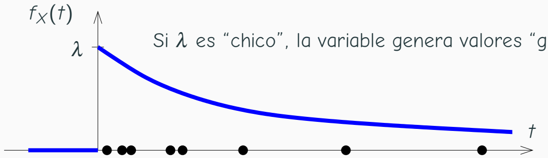

$f_X(t)$
λ
t
$F_X(t)$
1
t



- Valores aleatorios ajustados a una distribución exponencial son reales positivos.
- Los tiempos ajustados a una distribución exponencial están “mayormente” cerca de cero y “raramente” lejos o muy lejos de cero.
- Estos valores son apropiados para modelar tiempos, por ejemplo:
  - Tiempos de espera.
  - Vida útil de componentes.
  - Tiempos entre fallas.



Si λ es "grande", la variable genera valores "chicos"



Si λ es "chico", la variable genera valores "grandes"

Típicamente, una v.a. con distribución exponencial sirve para modelar el tiempo transcurrido hasta un evento que puede ocurrir **"en cualquier momento"**.

EJEMPLOS:

- El tiempo transcurrido desde el inicio del funcionamiento de un componente hasta su primera falla.
- El tiempo transcurrido hasta el arrivo de un paquete IP a un servidor de una red.

□

Se dice que un evento puede ocurrir **"en cualquier momento"** cuando, habiendo tanscurrido un tiempo sin que ocurra, las condiciones no cambian significativamente resultando, por lo tanto, tan probable que ocurra en el instante presente como en cualquier instante futuro. Y esto vale para cualquier instante de observación.

- $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ es el tiempo transcurrido hasta la falla de cierto componente.
- El componente no ha fallado hasta el tiempo t: $X > t$.
- ¿Cuál es la probabilidad de que falle entre t y $t+dt$?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{t < X < t+dt \mid X > t\} \overset{(*)}{=} & \frac{\mathbb{P}\{t < X < t+dt \wedge X > t\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} \\ = & \frac{\mathbb{P}\{t < X < t+dt\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} \\ = & \frac{f_X(t)\,dt}{1-F_X(t)} = h(t)\,dt\end{aligned}$$

Definición. La *tasa de fallas*, $h(t)$:

$$h(t) = \frac{f_X(t)}{1-F_X(t)}$$

es un parámetro útil para explicar una importante propiedad de la distribución exponencial.

$\square$

(*) Recordar que: $\mathbb{P}\{A \mid B\} = \dfrac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \dfrac{\mathbb{P}\{A \wedge B\}}{\mathbb{P}\{B\}}$

En definitiva, si

$$\mathbb{P}\{t < X < t + dt \,|\, X > t\} = h(t)\, dt$$

el parámetro $h(t)$ permite determinar la probabilidad de que un componente que ha sobrevivido hasta t, falle.

Dado que X sigue la distribución exponencial:

$$h(t) = \frac{f_X(t)}{1 - F_X(t)} = \frac{\lambda\, e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

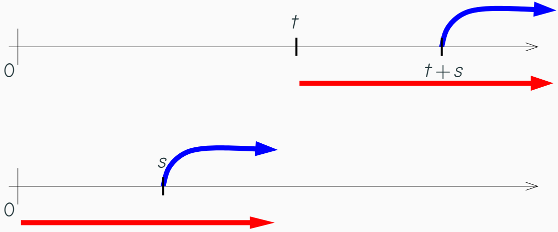
Finalmente, siendo $h(t)$ constante, la probabilidad de que un componente que ha sobrevivido hasta t, falle, es la misma cualquiera sea t.

Esta es una de las formas de poner en evidencia la ausencia de memoria de la distribución exponencial. Otra es a través de la siguiente propiedad.

Propiedad: La Distribución Exponencial no tiene memoria,

$$\mathbb{P}\{X > t + s \mid X > t\} = \mathbb{P}\{X > s\}$$

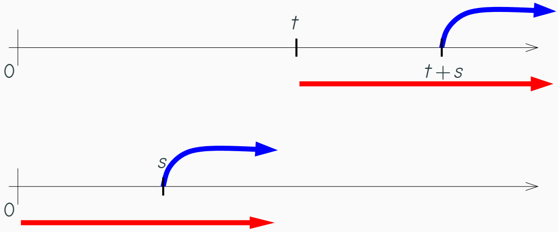
$\square$



Propiedad: La Distribución Exponencial no tiene memoria,

$$\mathbb{P}\{X > t + s \mid X > t\} = \mathbb{P}\{X > s\}$$

□



Si t modela el tiempo transcurrido desde el inicio hasta la ocurrencia de un evento:

- Cualquier instante t "*es como un cero*", siempre que el evento no haya ocurrido antes de t.
- Cualquiera sea t, la probabilidad de que un evento ocurra luego de los próximos s segundos es la misma de que ocurra luego de los primeros s segundos.

Propiedad: La Distribución Exponencial no tiene memoria,

$$\mathbb{P}\{X > t+s \,|\, X > t\} = \mathbb{P}\{X > s\}$$

$\square$

- Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia de un evento
- No habiendo ocurrido el evento hasta t, la probabilidad de que ocurra en los s segundos siguientes es igual a la probabilidad de que ocurra en los primeros s segundos.
- Si el evento es la falla de un componente, la propiedad puede leerse como: **"sano y nuevo, es lo mismo"**.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X > t+s \,|\, X > t\} &= \frac{\mathbb{P}\{X > t+s \wedge X > t\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{X > t+s\}}{\mathbb{P}\{X > t\}} \\
&= \frac{1 - F_X(t+s)}{1 - F_X(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}\{X > s\}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 1: La vida útil de una *motherboard* es, en promedio, de 10 años. ¿Cuál es la probabilidad de que una *motherboard* dure más de 15 años?

$$\mathbb{E}\{X\} = 1/\lambda = 10 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0.10$$
$$\mathbb{P}\{X > 15\} = 1 - F_X(15) = e^{-15/10} = 0.22$$

$\square$

EJEMPLO 2: Si la misma *motherboard* ha durado 10 años, ¿cuál es la probabilidad de que dure 5 más?

$$\mathbb{P}\{X > 5\} = 1 - F_X(5) = e^{-5/10} = 0.60$$

La distribución "no recuerda" que han pasado 10 años y sólo cuenta los 5 que hay por delante.

$\square$

Propiedad 1. Sean $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ y $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Si X_1 y X_2 son independientes, la v.a. $Y = \min\{X_1, X_2\}$ es exponencial de parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

$$\begin{aligned}
F_Y(t) &= 1 - \mathbb{P}\{Y > t\} \\
&= 1 - \mathbb{P}\{X_1 > t \wedge X_2 > t\} \quad \leftarrow \text{ ya que si } \min\{X_1, X_2\} > t, X_1 > t \text{ y } X_2 > t \\
&= 1 - \mathbb{P}\{X_1 > t\} \times \mathbb{P}\{X_2 > t\} \\
&= 1 - e^{-\lambda_1 t} \times e^{-\lambda_2 t} \\
&= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \quad \leftarrow \text{ que es la } \textit{fda} \text{ de una exponencial de parámetro } \lambda_1 + \lambda_2
\end{aligned}$$

$\square$

Es simple extender la propiedad al caso de n v.a.

EJEMPLO 3: Si $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n-1$ son los instantes de falla de n componentes que fallan de forma independiente, la primera de las fallas ocurrirá en un instante distribuido según una v.a. exponencial de parámetro $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$.

$\square$

Propiedad 2. Sean $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1)$ y $X_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2)$. Si X_1 y X_2 son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que $X_1 \leq X_2$?.

Siendo $Y = (X_1, X_2)$, por la independencia entre X_1 y X_2: $f_Y(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \times f_{X_2}(x_2)$. Luego, $\mathbb{P}\{X_1 \leq X_2\}$ es la integral de $f_Y(x_1, x_2)$ sobre el área $A = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq x_2\}$:

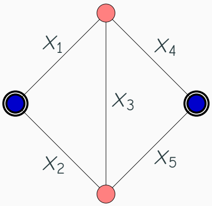
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_1 \leq X_2\} &= \int_A f_Y(y)\, dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^{x_2} f_{X_1}(x_1) \times f_{X_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int_0^\infty \int_0^{x_2} \lambda_1 e^{-\lambda_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2}\, dx_1\, dx_2 \\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}
\end{aligned}$$

□

Análogamente, $\mathbb{P}\{X_1 \leq X_2\} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Luego si, por ejemplo, X_1 y X_2 son los instantes de falla de n componentes que fallan de forma independiente, la v.a. que identifica el primer componente en fallar, tiene una función de masa de probabilidad discreta con probabilidades proporcionales a las tasas.

Es simple extender la propiedad al caso de n v.a.

EJEMPLO 4:



□

$X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, 5$, son los tiempos hasta la primera falla de cada enlace.

¿Cuándo fallará el primer enlace?

- La primer falla ocurrirá en un instante distribuido exponencialmente con tasa $S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5$.

¿Cuál será el enlace que fallará en ese instante?

- Cada enlace tiene una probabilidad λ_i / S, $i = 1, \ldots, 5$, de ser el primero en fallar.

El criterio se mantiene para las fallas sucesivas.

Suma de Exponenciales

Dado un conjunto de v.a. de distribución conocida, aún si son idependientes, no es trivial la determinación de la *fdp* de la suma de todas las v.a. del conjunto.

- La suma de n v.a. independientes con distribución normal también sigue una distribución normal.
- La suma de n v.a. independientes con cualquier distribución sigue una distribución "aproximadamente" normal (se convierte en normal si $n \to \infty$).
- La *fdp* de la suma de n v.a. independientes con cualquier distribución es la convolución entre las *fdp* de las n v.a. sumadas.
- La *fdp* de la suma de n v.a. independientes con distribución exponencial, $f_{X_i} = \lambda_i e^{-\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$, con $\lambda_j \neq \lambda_k \, \forall j, k$, tiene la siguiente forma:

$$f_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_j x}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\lambda_k - \lambda_j)}$$

Nota: Éste resultado será de gran utilidad en algunas secciones siguientes.

Resumen

- Una v.a. con Distribución Exponencial sirve para modelar períodos de tiempo que pueden concluir "en cualquier momento".
- La Distribución Exponencial no tiene memoria $\rightarrow$ la probabilidad de que un período de tiempo modelado mediante una distribucuión exponencial dure s segundos luego de transcurrido *un tiempo cualquiera*, es la misma que la probabilidad de que dure s segundos al comienzo.
- Siendo $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i),\ i = 1, \ldots, n$ los instantes de falla de n componentes que fallan de forma independiente, entonces:
  - el primer componente en fallar lo hará al cabo de un tiempo con distribución exponencial de parámetro $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
  - cada componente tiene una probabilidad $\lambda_i / \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ de ser el primero en fallar.

Bibliografía

- Ilya B. Gertsbakh and Yoseph Shpungin. *Models of Network Reliability: Analysis, Combinatorics, and Monte Carlo*. 1st ed. CRC Press, Inc., 2009. ISBN: 1439817413, 9781439817414.
- S.M. Ross. *Introduction to probability models*. 6th ed. Academic Press, 1985. ISBN: 9780125984638.