

PRÁCTICO 9: CONJUNTO COCIENTE, SUBGRUPOS NORMALES Y GRUPO COCIENTE

**Ejercicio 1.** En cada caso, hallar las clases laterales por izquierda y por derecha del subgrupo  $H$  en el grupo  $G$ , y determinar si  $H$  es un subgrupo normal de  $G$ .

- $G = D_3$ , el grupo de las simetrías de un triángulo equilátero (con la operación de composición), y  $H = \langle s_1 \rangle$ , el subgrupo generado por la simetría axial del triángulo.
- El grupo aditivo  $G = \mathbb{Z}_6$ , y el subgrupo  $H = \langle \bar{3} \rangle$ , generado por la clase  $\bar{3} \in \mathbb{Z}_6$ .
- El grupo multiplicativo  $G = U_{14}$ , y el subgrupo  $H = \langle \bar{13} \rangle$ .

**Ejercicio 2.**

- Sea  $G$  un grupo conmutativo. Pruebe que todo subgrupo  $H$  de  $G$  es normal en  $G$ .
- Pruebe que  $H = 3\mathbb{Z}$  es normal en  $G = (\mathbb{Z}, +)$ . Calcule el grupo cociente  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  y su tabla de Cayley.
- Sea  $G$  un grupo cíclico. Pruebe que todo subgrupo  $H$  de  $G$  es normal en  $G$ . Sugerencia: pruebe que  $G$  es conmutativo.
- Pruebe que  $H = \{\bar{1}, \bar{8}\}$  es subgrupo normal en  $G = U(9)$ . Halle el cociente  $G/H$  y calcule  $(\bar{2}H)(\bar{4}H)$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $GL_2(\mathbb{R})$  el grupo de las matrices invertibles  $2 \times 2$  de coeficientes reales, con el producto usual de matrices. Sean

$$U = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) / A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) / A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\}.$$

- Pruebe que  $U$  es un subgrupo de  $T$ .
- Calcule las clases laterales por derecha y por izquierda de  $U$  en  $T$ .
- Pruebe que  $U$  es un subgrupo normal de  $T$ .
- Pruebe que  $U$  es un subgrupo de  $GL_2(\mathbb{R})$ , y determine si  $U$  es un subgrupo normal de  $GL_2(\mathbb{R})$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $(S_3, \circ)$  el grupo de las permutaciones del conjunto  $\{1, 2, 3\}$ .

- Considere el siguiente subgrupo de  $S_3$ :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pruebe que  $H$  no es un subgrupo normal. Sugerencia: considere  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ .

- Considere el siguiente subgrupo de  $S_3$ :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

- i) Calcule el conjunto cociente  $S_3/H$  (formado por las clases laterales por izquierda  $gH$ ).
- ii) Pruebe que  $H$  es un subgrupo normal de  $S_3$ .
- iii) Calcule la tabla de Cayley del grupo cociente. Observe que  $S_3$  no es conmutativo, y sin embargo el grupo cociente  $S_3/H$  sí es conmutativo.

**Ejercicio 5.** Sea  $H$  el subgrupo de  $S_4$  que consiste en las permutaciones  $\sigma \in S_4$ , tales que  $\sigma(4) = 4$ . Probar que  $H$  no es normal en  $S_4$ . Sugerencia: encontrar  $g \in S_4$ , tal que:  $gHg^{-1} \not\subseteq H$ .

**Ejercicio 6.** Sea  $\{H_i\}_{i \in I}$  una familia de subgrupos normales de un grupo  $G$ . Probar que  $\bigcap_{i \in I} H_i$  es un subgrupo normal en  $G$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $H$  un subgrupo con índice 2 en un grupo  $G$ . Es decir:  $H$  tiene exactamente 2 clases laterales por izquierda en  $G$ . Probar que  $H$  es un subgrupo normal de  $G$ . Sugerencia: todo grupo  $G$  se puede escribir como la unión disjunta de las clases laterales por izquierda. Lo mismo para las clases laterales por derecha.

**Ejercicio 8.** Sea  $G$  un grupo y  $H$  un subgrupo de  $G$  de orden finito.

- a. Pruebe que  $gHg^{-1}$  es un subgrupo de  $G$ , para todo  $g \in G$ .
- b. Pruebe que la conjugación preserva el orden del subgrupo. Es decir:  $|gHg^{-1}| = |H|$ ,  $\forall g \in G$ .
- c. Supongamos que  $G$  posee un único subgrupo  $H$  de orden  $d$ . Pruebe que  $H$  es normal.

## Ejercicios adicionales

**Ejercicio 9.** Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ , definido de la siguiente forma:  $H = \{g^2, g \in G\}$ .

- a. Probar que  $H$  es un subgrupo normal de  $G$ . Sugerencia: probar que  $gHg^{-1} \subseteq H$ ,  $\forall g \in G$ .
- b. Probar que  $gH = g^{-1}H$ ,  $\forall g \in G$ . Es decir:  $g \sim g^{-1}$  en  $G/H$ , para todo  $g \in G$ .
- c. Probar que  $G/H$  es un grupo conmutativo. Sugerencia: usar la parte anterior.

**Ejercicio 10.** Sea  $D_4$  el grupo de simetrías del cuadrado, y  $H = \{id, r^2\}$ ; donde  $r$  es la rotación de 90 grados respecto al origen del plano. Pruebe que  $H$  es un subgrupo normal de  $D_4$ , y que el cociente  $D_4/H$  es conmutativo. Notar que  $D_4$  no es conmutativo. Sugerencia: usar el ejercicio anterior.

**Ejercicio 11.** Sea  $S$  un subconjunto de un grupo  $G$ . Se define el normalizador de  $S$  en  $G$  como:

$$N_S = \{x \in G : xSx^{-1} = S\}.$$

- a. Probar que  $N_S$  es un subgrupo de  $G$ .
- b. Supongamos que  $S$  es un subgrupo de  $G$ . Probar que  $S$  es un subgrupo normal de  $N_S$ , y que es el subgrupo más grande de  $G$  con esta propiedad.