Universidad de la República | **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería
Instituto de Matemática y Estadística | **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 9
Funciones Generatrices

Ejercicio 1. Demuestre que la función generatriz $f(x) = 1 - x$ es invertible y encuentre su inversa (si ya fue visto en Teórico, repase la demostración y escríbala).

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes sucesiones exprese la correspondiente función generatriz como cociente de polinomios o como suma finita de estos.

Como ejemplo si la sucesión es $(1, 1, 1, \ldots)$ la respuesta válida es $\frac{1}{1-x}$ y no es $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, ni tampoco es $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$.

- **a**. $(C_0^6, C_1^6, C_2^6, \ldots, C_6^6, 0, 0, \ldots)$
- **b**. $(C_1^6, 2C_2^6, \ldots, 6C_6^6, 0, 0, \ldots)$
- **c**. $(1, -1, 1, -1, \ldots)$
- **d**. $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$
- **e**. $(0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots)$
- **f**. $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$
- **g**. $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$
- **h**. $(0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots)$
- **i**. $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots)$
- **j**. $(0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, \ldots)$

Ejercicio 3. Determine la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

- **a**. $f(x) = (2x - 3)^3$
- **b**. $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$
- **c**. $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$
- **d**. $f(x) = \frac{1}{1+3x}$
- **e**. $f(x) = \frac{1}{2-x}$
- **f**. $f(x) = \frac{3x^6-9x+1}{1-x}$

Ejercicio 4. (Examen febrero 2010)
La función generatriz asociada a la sucesión $(0, 0, a, 1, 0, a^2, 2, 0, a^3, 3, 0, a^4, 4, 0, a^5, ...)$ es:

- **a**. $f(x) = \dfrac{a}{1 + ax^3} - \dfrac{x}{(1 + x^6)}$.
- **b**. $f(x) = \dfrac{a}{1 + ax^3} - \dfrac{x}{(1 + x^3)^2}$.
- **c**. $f(x) = \dfrac{ax^2}{1 - ax^3} + \dfrac{x^3}{(1 - x^3)^2}$.
- **d**. $f(x) = \dfrac{a}{1 + ax^3} \cdot \dfrac{x}{(1 + x^3)^2}$.

Ejercicio 5.

(a) Hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^{10}$.

(b) Para cada n natural, hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^n$.

(c) Para cada natural n encontrar los coeficientes de x^5, x^8 y en general de x^r en $(1 + x + x^2)(1 + x)^n$ para $0 \le r \le n + 2$, $r \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6. Hallar el coeficiente de x^{15} en las funciones:

- $x^3(1 - 2x)^{10}$.
- $\frac{x^3-5x}{(1-x)^3}$.
- $\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$.

Ejercicio 7. Verifique que $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

Ejercicio 8. Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar n pesos. Los cajeros sólo poseen billetes de 500, 1000 y 2000 pesos.

Ejercicio 9. Halle las funciones generatrices de $(0^3, 1^3, 2^3, 3^3, \ldots)$ y de $s_n = \sum_{i=0}^{n} i^3$, y deduzca la fórmula

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Ejercicio 10. Halle la función generatriz asociada la sucesión dada por: $a_n = d_n/n!$ donde d_n denota los desórdenes de tamaño n. *Sugerimos utilizar la función generatriz exp*$(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ejercicio 11. (Examen Diciembre 2009)
Resolver el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 12. (Primer parcial 2009)
Sea a_n, $n \geq 0$, la cantidad de palabras de n letras A o B, tales que después de una A no puede venir una B (suponemos que $a_0 = 1$). Entonces, la función generatriz asociada a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es:

a. $\dfrac{1}{1-x}$ **b**. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. **c**. $\dfrac{x}{(1-x)^2}$. **d**. $\dfrac{x}{1-x}$.

Ejercicio 13. Halle la función generatriz de:

$$(0 \cdot (-1),\ 1 \cdot 0,\ 2 \cdot 1,\ 3 \cdot 2,\ \ldots, i(i-1),\ \ldots),$$

y una fórmula para:

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

Ejercicio 14.

a. Encuentre los primeros tres términos de la convolución $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} * (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de los siguientes pares de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

i) $a_n = 1, b_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
ii) $a_n = 1, b_n = 2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
iii) $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 3; a_n = 0,\ \forall n \geq 4, b_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

b. En cada caso halle c_n para todo n.