F – Monte Carlo

Métodos Polinomiales

Leslie Murray

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina

Mayo, 2024

- Sea $\Omega = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{2^m}\}$, el conjunto de todos los estados de la red.
- Los eventos $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2^m$ son mutuamente excluyentes, por lo que:

$$\sum_{i=1}^{2^m} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}_i\} = 1$$

- Siendo $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^0$, donde:

$$\begin{cases} \Omega^1 = \{\text{estados que garantizan la conectividad entre terminales}\} \\ \Omega^0 = \{\text{los restantes}\} \end{cases}$$

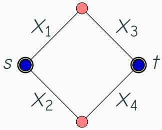
la Confiabilidad y la Anti–Confiabilidad se definen como:

$$\zeta = \sum_{\mathbf{x}_i \in \Omega^1} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}_i\} \qquad 1 - \zeta = \sum_{\mathbf{x}_i \in \Omega^0} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}_i\}$$

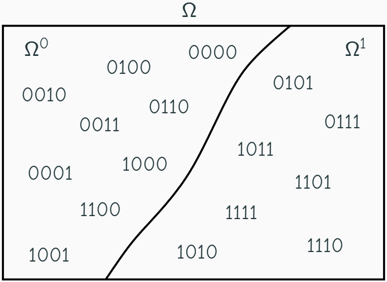
La probabilidad de ocurrencia de una configuración, $\mathbf{x}_i$, se calcula a partir de la probabilidad de que cada componente esté en el valor correspondiente:

$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}_i\} = \mathbb{P}\{X_1 = x_{i1}\} \times \mathbb{P}\{X_2 = x_{i2}\} \times \quad \cdots \quad \mathbb{P}\{X_m = x_{im}\}$$

EJEMPLO:

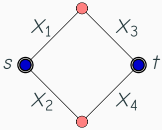


$$\mathbf{X} = X_1 X_2 X_3 X_4$$

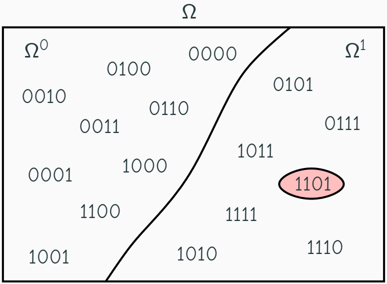


ζ es la suma de las probabilidades de todas las configuraciones de Ω^1.
$1-\zeta$ es la suma de las probabilidades de todas las configuraciones de Ω^0.

EJEMPLO:

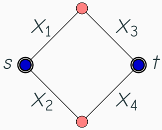


$$\mathbf{X} = X_1X_2X_3X_4$$

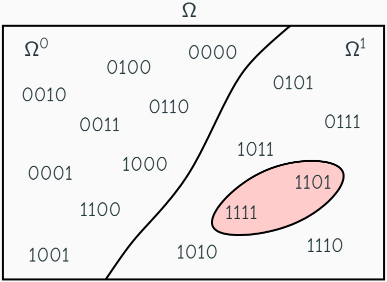


$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\mathbf{X} = 1101\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\} \times \mathbb{P}\{X_2 = 1\} \times \mathbb{P}\{X_3 = 0\} \times \mathbb{P}\{X_4 = 1\} \\ &= \quad r_1 \quad \times \quad r_2 \quad \times \quad q_3 \quad \times \quad r_4\end{aligned}$$

EJEMPLO:

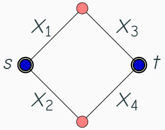


$$\mathbf{X} = X_1X_2X_3X_4$$

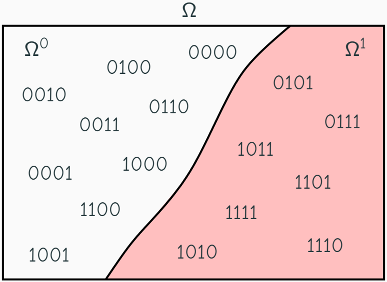


$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\mathbf{X}=1101 \text{ o } \mathbf{X}=1111\} &= \mathbb{P}\{\mathbf{X}=1101\}+\mathbb{P}\{\mathbf{X}=1111\}\\ &= \quad r_1r_2q_3r_4 \quad + \quad r_1r_2r_3r_4\end{aligned}$$

EJEMPLO:



$$\mathbf{X} = X_1 X_2 X_3 X_4$$



$$\begin{aligned}\zeta &= \mathbb{P}\{\mathbf{X} \in \Omega^1\} \\ &= q_1 r_2 q_3 r_4 + q_1 r_2 r_3 r_4 + r_1 q_2 r_3 r_4 + r_1 r_2 q_3 r_4 + r_1 r_2 r_3 r_4 + r_1 r_2 r_3 q_4 + r_1 q_2 r_3 q_4\end{aligned}$$

- Sea $\mathbf{X}_k$ un estado de $\Omega^1 \quad \leftarrow \quad \phi(\mathbf{X}_k) = 1.$
- Sea $C_k = \{i : X_i = 1 \wedge X_i \in \mathbf{X}_k\} \quad \leftarrow \quad$ la lista de índices de las coordenadas de $\mathbf{X}_k$ que valen 1.
- La probabilidad de que el estado de la red sea $\mathbf{X}_k$ es:

$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{X}_k\} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \in C_k}}^{m} r_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin C_k}}^{m} (1 - r_j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \in C_k}}^{m} r_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin C_k}}^{m} q_j$$

- Recordando que $\Omega^1 = \{\mathbf{X} : \phi(\mathbf{X}) = 1\}$ y que ζ es la suma de las probabilidades todos los estados que pertenecen a Ω^1:

$$\zeta = \mathbb{P}\{\mathbf{X} \in \Omega^1\} = \sum_{k : \mathbf{X}_k \in \Omega^1} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{X}_k\} = \sum_{k : \mathbf{X}_k \in \Omega^1} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \in C_k}}^{m} r_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin C_k}}^{m} q_j \right)$$

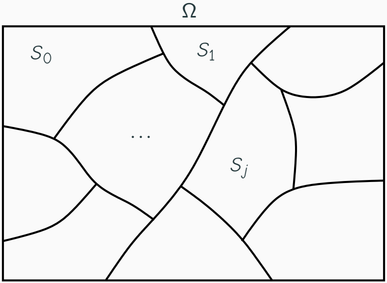
- Supongamos que la distribución de probabilidad de todos los enlaces es la misma:

$$\begin{cases} r_i = r \\ q_i = q = 1 - r \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m$$

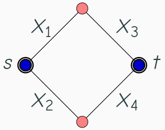
- Vamos a hacer una partición de Ω basada en los subconjuntos S_j, $j = 0, \ldots, m$:

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m) \qquad \rightarrow \qquad S_j = \left\{ \mathbf{X} \in \Omega \ : \ \sum_{i=1}^{m} X_i = j \right\}$$

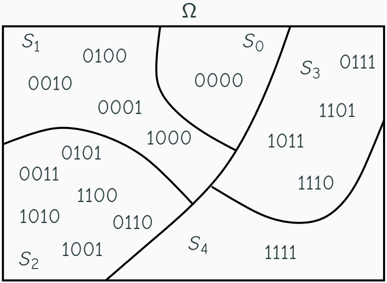
cada S_j contiene todos los estados formados por j unos y $m - j$ ceros.



Sistema Homogéneo – EJEMPLO



$S_0 = \{$ **ningún enlace sano**, cuatro fallados $\}$
$S_1 = \{$ **un enlace sano** y tres fallados $\}$
$S_2 = \{$ **dos enlaces sanos** y dos fallados $\}$
$S_3 = \{$ **tres enlaces sanos** y uno fallado $\}$
$S_4 = \{$ **cuatro enlaces sanos** y ninguno fallado $\}$



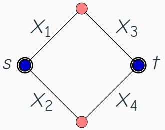
¿Cuántos elementos hay dentro del subconjunto S_j?

- Cada $\mathbf{X} \in S_j$ contiene $j \leq m$ unos distribuidos entre sus m posiciones.
- Cada $\mathbf{X} \in S_j$ es el resultado de ***combinar*** $j \leq m$ unos en m posiciones.
- La cantidad de formas diferentes de ***combinar*** $j \leq m$ unos entre m posiciones es:

$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!\,(m-j)!}$$

"combinaciones de un conjunto de m elementos tomados en grupos de j"

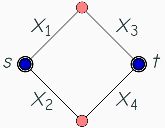
EJEMPLO:



- El número de elementos en S_3 es: $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4\times 3\times 2\times 1}{3\times 2\times 1 \quad 1} = 4$

- $S_3 = \{0111, 1011, 1101, 1110\} \quad \leftarrow \quad |S_3| = 4$ ✓.

EJEMPLO:

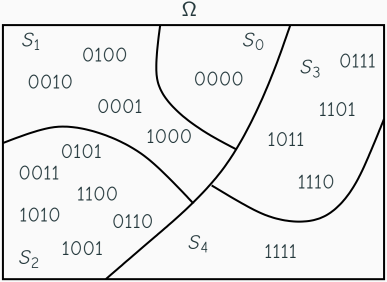


$$S_0 = \{\ \textbf{ningún enlace sano},\ \text{cuatro fallados}\ \}$$

$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} \in S_0\} = \binom{4}{0} r^0 q^4 = 1\, r^0 q^4$$

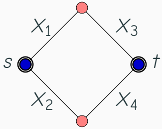
número de elementos en S_0

probabilidad de que $\mathbf{X}$ contenga 0 unos



Sistema Homogéneo – Masa de Probabilidad del Subconjunto S_1

EJEMPLO:

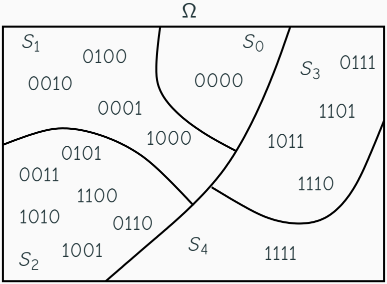


$$S_1 = \{\ \textbf{un enlace sano},\ \text{tres fallados}\ \}$$

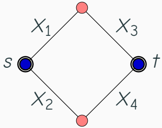
$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} \in S_1\} = \binom{4}{1} r^1 q^3 = 4\, r^1 q^3$$

número de elementos en S_1

probabilidad de que $\mathbf{X}$ contenga 1 uno



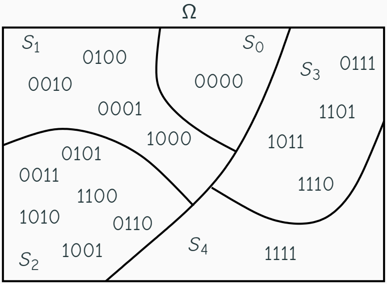
EJEMPLO:



$S_2 = \{$ **dos enlaces sanos**, dos fallados $\}$

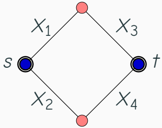
$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} \in S_2\} = \binom{4}{2} r^2 q^2 = 6\, r^2 q^2$$

número de elementos en S_2 ↗ ↖ probabilidad de que $\mathbf{X}$ contenga 2 unos



Sistema Homogéneo – Masa de Probabilidad del Subconjunto S_3

EJEMPLO:

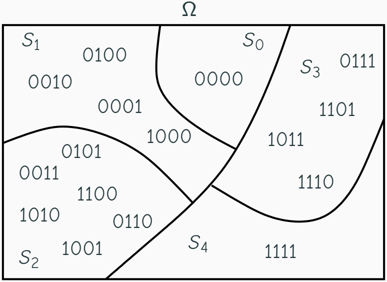


$$S_3 = \{\ \textbf{tres enlaces sanos},\ \text{uno fallado1}\ \}$$

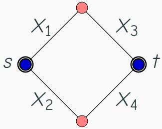
$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} \in S_3\} = \binom{4}{3} r^3 q^1 = 4\, r^3 q^1$$

número de elementos en S_3

probabilidad de que $\mathbf{X}$ contenga 3 unos



EJEMPLO:

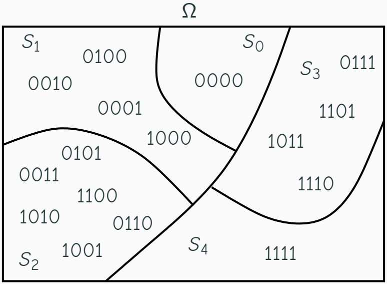


$S_4 = \{$ **cuatro enlaces sanos**, ninguno fallado $\}$

$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} \in S_4\} = \binom{4}{4} r^4 q^0 = 1\, r^4 q^0$$

número de elementos en S_4

probabilidad de que $\mathbf{X}$ contenga 4 unos



Confiabilidad

- Claramente, la suma de las probabilidades de **todas** las posibles configuraciones de la red debe dar **uno**:

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j q^{m-j} = 1$$

- Recordemos que: la confiabilidad, ζ, es la suma de las probabilidades de todas las configuraciones para las que $\phi(\mathbf{X}) = 1$.
- Cada conjunto S_j contiene $\binom{m}{j}$ configuraciones, de las cuales una fracción $\alpha_j \leq 1$ verifica la condición $\phi(\mathbf{X}) = 1$. Luego:

$$\zeta = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \binom{m}{j} p^j q^{m-j}$$

$$\zeta = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \binom{m}{j} p^j q^{m-j}$$

- Todos los términos de esta suma son conocidos, salvo α_j, $j = 0, \ldots, m$.
- Para conocer el **valor exacto** de los coeficientes α_j hace falta:
  - identificar todos los elementos de cada conjunto S_j.
  - determinar la proporción exacta de aquellos para los que $\phi(\mathbf{X}) = 1$.
  - esa proporción es, exactamente, el valor de cada α_j.

  Es un trabajo tan complejo como la determinación exacta de la confiabilidad en cualquiera de sus formas.

SUPONGAMOS QUE PODEMOS HACER ESTIMACIONES DE CADA α_j

- Reemplazando cada α_j por un estimador $\widehat{\alpha}_j$, la expresión de arriba se transforma en un estimador de ζ:

$$\widehat{\zeta} = \sum_{j=0}^{m} \widehat{\alpha}_j \binom{m}{j} p^j q^{m-j}$$

¿COMO HACER LAS ESTIMACIONES DE LOS COEFICIENTES α_j?

Las estimaciones se pueden hacer por Monte Carlo Estándar dentro de cada conjunto S_j procediendo de la siguiente forma:

- Reemplazar las distribuciones originales de cada enlace por una Uniforme, esto es: $\mathbb{P}\{X_i = 0\} = \mathbb{P}\{X_i = 1\} = 0.5, \ \forall i.$ (*)
- Generar $n_j < \binom{m}{j}$ o $n_j \ll \binom{m}{j}$ configuraciones con j unos y $m - j$ ceros.
- Dado que $n_j = n_j^0 + n_j^1$, donde:

$$\begin{cases} n_j^0 \text{ es el número de configuraciones, para las que } \phi(\mathbf{X}) = 0 \\ n_j^1 \text{ es el número de configuraciones, para las que } \phi(\mathbf{X}) = 1 \end{cases}$$

es posible crear los estimadores: $\widehat{\alpha}_j = \dfrac{n_j^1}{n_j}, \ j = 1, \ldots, m$

NOTA: $\alpha_0 = 0$ no necesita estimación, ya que hay una única configuración con todos los enlaces fallados, en la cual necesariamente $\phi(\mathbf{X}) = 0$. Basado en un razonamiento similar, $\alpha_m = 1 \quad \rightarrow \quad$ no hace falta estimar ni α_0 ni α_m.

(*) Esto hace que las configuraciones de todos los subconjuntos S_i, se generen con la misma probabilidad.

Algoritmo Estimación de Coeficientes α_j

El siguiente es un posible algoritmo para crear configuraciones equi–probables con j unos y $m-j$ ceros.

1. Se ponen los m enlaces de la red en 0
2. Se elijen j de los m enlaces, con distribución uniforme, y se ponen en 1.
3. Se repiten 1 y 2 para cada valor de j

El punto 2 puede resolverse mediante el mecanismo que se explica en las siguientes transparencias.

X_1	X_2	X_3	$\cdots$	$\cdots$	X_k	$\cdots$	$\cdots$	X_{m-1}	X_m	$\longleftarrow$

Se guarda en cada posición de un array de dimensión m una identificación de cada enlace, por ejemplo, su número:

1	2	3	$\cdots$	$\cdots$	k	$\cdots$	$\cdots$	$m-1$	m	$\longleftarrow$

Se asume que, al comienzo, todas las posiciones estarán en 0 y que las posiciones sorteadas, se irán pasando a 1.

Algoritmo Estimación de Coeficientes α_j

X_1	X_2	X_3	$\cdots$	$\cdots$	X_k	$\cdots$	$\cdots$	X_{m-1}	X_m

X_1	X_2	X_3	$\cdots$	$\cdots$	X_k	$\cdots$	$\cdots$	X_{m-1}	X_m

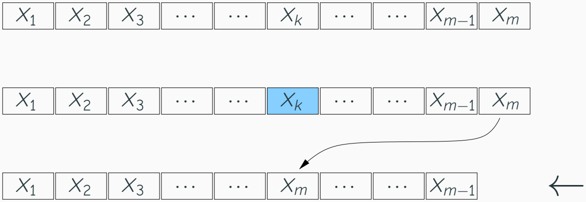
Se sortea una de las m posiciones del array mediante la operación:

$$(U_I \bmod m) + 1 \;\rightarrow\; k$$

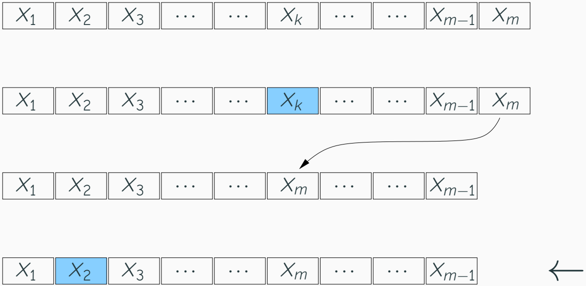
En este caso la posición sorteada es la k–ésima.

NOTA:
U_I es un entero aleatorio con distribución uniforme entre 0 y un valor "grande", luego k será un entero aleatorio con distribución uniforme entre 1 y m.

(El valor entre paréntesis es aleatorio entre 0 y $m-1$).



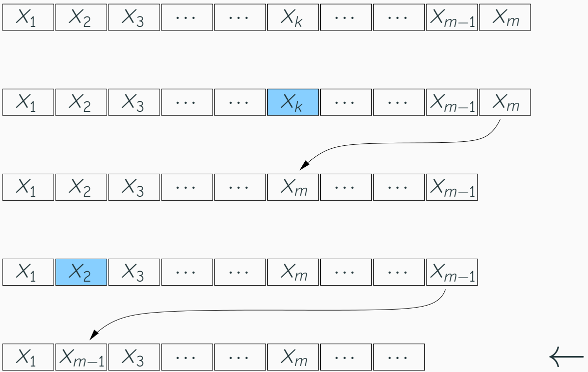
Se reemplaza la posición sorteada (X_k) por la última posición ocupada y se reduce en uno la dimensión del array.



Se sortea una de las $m-1$ posiciones del array mediante la operación:

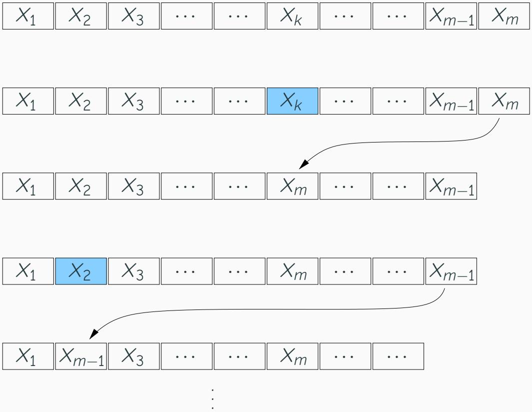
$$(U_I \ \mathbf{mod}\ m-1)+1 \ \rightarrow \ 2$$

En este caso la posición sorteada es la segunda.



Se reemplaza el enlace de la posición sorteada (X_2) por la última posición ocupada y se reduce en uno la dimensión del array.

Algoritmo Estimación de Coeficientes α_j



El proceso se repite j veces, luego de la cual j posiciones del array habrán sido sorteadas uniformemente. Esas posiciones pasarán a 1, quedando las restantes en 0.

Factoriales

$1! = 1$
$3! = 6$
$5! = 120$
$7! = 5040$
$9! = 362880$
$11! = 39916800$
$13! = 6227020800$
$15! = 1307674368000$
$17! = 355687428096000$
$19! = 121645100408832000$
$21! = 51090942171709440000$
$23! = 25852016738884976640000$
$25! = 15511210043330985984000000$
$27! = 10888869450418352160768000000$
$29! = 8841761993739701954543616000000$
$31! = 8222838654177922817725562880000000$
$33! = 8683317618811886495518194401280000000$
$35! = 10333147966386144929666651337523200000000$
$37! = 13763753091226345046315979581580902400000000$
$39! = 20397882081197443358640281739902897356800000000$
$41! = 33452526613163807108170062053440751665152000000000$
$43! = 60415263063373835637355132068513997507264512000000000$
$45! = 119622220865480194561963161495657715064383733760000000000$
$47! = 258623241511168180642964355153611979969197632389120000000000$
$49! = 608281864034267560872252163321295376887552831379210240000000000$
$51! = 1551118753287382280224243016469303211063259720016986112000000000000$
$53! = 4274883284060025564298013753389399649690343788366813724672000000000000$
$55! = 12696403353658275925965100847566516959580321051449436762275840000000000000$
$57! = 40526919504877216755680601905432322134980384796226602145184481280000000000000$
$59! = 138683118545689835737939019720389406345902876772687432540821294940160000000000000$

Tamaño de los Números Involucrados

$$\widehat{\zeta} = \sum_{j=0}^{m} \widehat{\alpha}_j \binom{m}{j} p^j q^{m-j}$$

EJEMPLO: red con $m = 60$ y $q = 10^{-5}$. Analizamos el caso correspondiente a $j = 15$.

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha_{15}} \binom{60}{15} p^{15} q^{45} &= \widehat{\alpha_{15}} \frac{60!}{15!\ 45!}\ 0.99999^{15} 0.00001^{45} \\
&\approx \widehat{\alpha_{15}} \frac{8.3210 \times 10^{81}}{1.3077 \times 10^{12}\ 1.1962 \times 10^{56}}\ 1.0000 \times 10^{-225} \\
&\approx \widehat{\alpha_{15}}\ 5.3194 \times 10^{13}\ 1.0000 \times 10^{-225} \\
&\approx \widehat{\alpha_{15}}\ 5.3194 \times 10^{-212}
\end{aligned}$$

El método es extremadamente eficiente pero tiene dos limitaciones importantes:

1. Sólo opera sobre sistemas homogéneos.
2. El manejo de los números que haga el lenguaje de programación elegido es extremadamente crítico, hay que conocerlo muy bien y lleva a restringirse a redes *no muy grandes*.

Tamaño de los Distintos Tipos de Dato en C

Type	Typical Size in Bits	Minimal Range	Format Specifier
`char`	8	-127 to 127	`%c`
`unsigned char`	8	0 to 255	`%c`
`signed char`	8	-127 to 127	`%c`
`int`	16 or 32	-32,767 to 32,767	`%d`, `%i`
`unsigned int`	16 or 32	0 to 65,535	`%u`
`signed int`	16 or 32	Same as int	`%d`, `%i`
`short int`	16	-32,767 to 32,767	`%hd`
`unsigned short int`	16	0 to 65,535	`%hu`
`signed short int`	16	Same as short int	`%hd`
`long int`	32	-2,147,483,647 to 2,147,483,647	`%ld`, `%li`
`long long int`	64	$-(2^{63} - 1)$ to $2^{63} - 1$ (Added by C99 standard)	`%lld`, `%lli`
`signed long int`	32	Same as long int	`%ld`, `%li`
`unsigned long int`	32	0 to 4,294,967,295	`%lu`
`unsigned long long int`	64	$2^{64} - 1$ (Added by C99 standard)	`%llu`
`float`	32	1E-37 to 1E+37 with six digits of precision	`%f`
`double`	64	1E-37 to 1E+37 with ten digits of precision	`%lf`
`long double`	80	1E-37 to 1E+37 with ten digits of precision	`%Lf`