

TÉCNICAS DE DESCOMPOSICIÓN EN PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Dr. Víctor M. Albornoz
Departamento de Industrias.
Campus Santiago Vitacura, Chile.
Universidad Técnica Federico Santa María

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, UdelaR.
Montevideo, lunes 20 al viernes 24 de Mayo de 2024

CONTENIDOS

0. Clase Bienvenida.

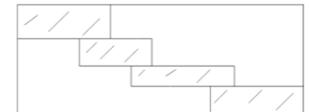
1. Introducción a los Métodos de Descomposición.

2. Formulación y resolución de modelos en AMPL.

3. Método de Benders.



4. Generación de Columnas.



5. Método de Dantzig & Wolfe.



6. Conclusiones, Extensiones y palabras finales.

Ampliaremos la discusión del Método de Benders al caso en que el Subproblema propuesto no tenga solución para todos los valores de las variables originales del problema maestro en la descomposición propuesta.

Consideramos nuevamente el problema:

$$\begin{aligned} & \text{Max } cx + qy \\ & \text{s.a. } Ax \leq b \\ & \quad Tx + Wy \leq h \\ & \quad x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

El modelo anterior puede ser reformulado equivalentemente como:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & cx \quad + \quad \text{Max} \quad qy \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \quad \quad \quad \text{s.a.} \quad Wy \leq h - Tx \\ & x \geq 0 \quad \quad \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

siempre que para cada $x \geq 0$, con $Ax \leq b$, el *problema interior*:

$$\begin{array}{l} \text{Max} \quad qy \\ \text{s.a.} \quad Wy \leq h - Tx \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array}$$

posea solución óptima.

Si lo anterior ocurre, ya hicimos la deducción del método obteniendo el Problema Maestro y el Subproblema a que da origen este método de descomposición.

¿Qué ocurre sino?

El caso de interés ocurre cuando el problema proyectado es infactible.

Si fuese un problema no-acotado también lo sería el problema original.

Si el dual del problema proyectado es un problema no-acotado, por teoría de dualidad en PL el problema será infactible.

El dual del problema interior corresponde a:

$$\begin{aligned} \text{Min } & (h - T\mathbf{x}) \mathbf{u} \\ \text{s.a. } & \mathbf{W}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{q} \\ & \mathbf{u} \geq 0, \end{aligned}$$

y si es un problema no-acotado, el conjunto de soluciones factibles $\{\mathbf{u} / \mathbf{W}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{q}, \mathbf{u} \geq 0\}$ es un conjunto no-acotado y su valor óptimo $-\infty$ (para un \mathbf{x} dado).

Un conjunto no-acotado está caracterizado no solo por sus vértices $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \dots, \mathbf{u}^I$ sino que también por sus direcciones extremas $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2, \dots, \mathbf{d}^L$.

Para el caso del conjunto $\{\mathbf{u} / \mathbf{W}^T \mathbf{u} \geq q, \mathbf{u} \geq 0\}$, sus direcciones extremas son todos aquellos vectores \mathbf{d} tales que $\mathbf{W}^T \mathbf{d} \geq 0$ y $\mathbf{d} \geq 0$.

La existencia de direcciones extremas permite que cada elemento de un poliedro se escriba en términos de sus vértices y direcciones extremas.

Así, para todo elemento de $\{u / W^T u \geq q, u \geq 0\}$

$$u = \alpha_1 \mathbf{u}^1 + \alpha_2 \mathbf{u}^2 + \dots + \alpha_t \mathbf{u}^t + \mu_1 \mathbf{d}^1 + \mu_2 \mathbf{d}^2 + \dots + \mu_\ell \mathbf{d}^\ell$$

con escalares $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_t \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \dots, \mu_\ell \geq 0$
tales que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_t = 1$.

Volvamos al problema interior y su dual:

$$\begin{array}{ll} \text{(SPP)} \quad \text{Max } qy & \text{(SPD)} \quad \text{Min } (h - Tx)u \\ \text{s.a. } Wy \leq h - Tx & \text{s.a. } W^T u \geq q \\ y \geq 0 & u \geq 0 \end{array}$$

Así entonces, el problema (SPP) tendrá solución siempre que se cumpla: $0 \leq (h - Tx)d^\ell$ para cada dirección extrema d^ℓ del poliedro dual, con $\ell=1,2,\dots,L$ (Lema de Farkas-Minkowski).

Definiendo el conjunto:

$$K = \{ x / 0 \leq (h - Tx)d^\ell, \ell=1,2,\dots,L \}$$

se cumpliría entonces que el problema:

$$\begin{aligned} & \text{Max } cx + qy \\ & \text{s.a. } Ax \leq b \\ & \quad Tx + Wy \leq h \\ & \quad x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \text{Max } cx + \text{Max } qy \\ & \text{s.a. } Ax \leq b \quad \text{s.a. } Wy \leq h - Tx \\ & \quad x \in K \quad y \geq 0 \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

y también equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } cx & + \quad \text{Min } (h - Tx)u \\ \text{s.a. } Ax \leq b & \quad \text{s.a. } W^T u \geq q \\ \quad \mathbf{x} \in K & \quad u \geq 0 \\ \quad x \geq 0 & \end{array}$$

que con la notación ya introducida, equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } cx & + \quad \min_{i=1, \dots, I} \{ (h - Tx)u^i \} \\ \text{s.a. } Ax \leq b & \\ \quad \mathbf{x} \in K & \\ \quad x \geq 0 & \end{array}$$

Empleando como antes una reformulación en términos de un modelo lineal, agregando la variable z , el problema anterior da origen al siguiente *Problema Maestro*:

$$\begin{aligned} \text{(PM)} \quad & \text{Max} \quad \mathbf{c}\mathbf{x} + z \\ & \text{s.a.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \quad \quad z \leq (\mathbf{h}-\mathbf{T}\mathbf{x})\mathbf{u}^i \quad i=1,\dots,I \\ & \quad \quad 0 \leq (\mathbf{h}-\mathbf{T}\mathbf{x})\mathbf{d}^\ell \quad \ell=1,\dots,L \\ & \quad \quad \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

La estrategia de resolución consiste entonces en resolver un *Problema Maestro Reducido* (PMR) que contiene solo aquellas restricciones de optimalidad y factibilidad que el propio método genera iteración tras iteración, digamos:

$$\begin{aligned} \text{(PMR)} \quad & \text{Max} \quad \mathbf{c}\mathbf{x} + z \\ & \text{s.a.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & z \leq (\mathbf{h}-\mathbf{T}\mathbf{x})\mathbf{u}^i \quad i=1,\dots,t \quad (t \ll I) \\ & 0 \leq (\mathbf{h}-\mathbf{T}\mathbf{x})\mathbf{d}^\ell \quad \ell=1,\dots,r \quad (r \ll L) \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Denotando por (\bar{x}, \bar{z}) la solución óptima de (PMR), esta también será la solución óptima del problema maestro si y solo si cumple con todas las restricciones de optimalidad del mismo, esto es siempre que:

$$\bar{z} \leq (h - T\bar{x})u^i \quad i = 1, \dots, I$$

Lo anterior es posible de verificar resolviendo el siguiente Subproblema (dual):

$$\begin{aligned} \text{(SP) Min } & (h - T\bar{x})u \\ \text{s.a } & W^T u \geq d \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

Si el problema tiene solución, denotando por \mathbf{u}^{t+1} el vértice y solución óptima de (SP), la condición de optimalidad del (PM) se verifica si y solo si:

$$\bar{z} \leq (h - T\bar{x}) \mathbf{u}^{t+1}$$

Si lo anterior no se cumple, hemos encontrado un nuevo vértice del poliedro $\{u / W^T u \geq d, u \geq 0\}$ que no verifica la condición de optimalidad.

Dado lo anterior, se agrega al problema maestro reducido (PMR) la nueva restricción:

$$z \leq (h - T x) u^{t+1}$$

pasando a la siguiente iteración del método.

Por otra parte, si el Subproblema (dual):

$$\begin{aligned} \text{(SP) Min } & (h - T\bar{x})u \\ \text{s.a } & W^T u \geq d \\ & u \geq 0. \end{aligned}$$

no tiene solución, se genera una dirección extrema \mathbf{d}^{r+1} , agregando al problema maestro reducido la siguiente restricción:

$$0 \leq (h - T\mathbf{x})\mathbf{d}^{r+1}$$

pasando a la siguiente iteración del método.

¿Qué ocurre en la implementación del Método de Benders si no disponemos de la variable de demanda insatisfecha en el problema de localización y transporte?

Modelo:

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in O} f_i B_i + \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} v_{ij} S_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j \in D} S_{ij} \leq o_i B_i \quad i \in O$$

$$\sum_{i \in O} S_{ij} = d_j \quad j \in D$$

$$S_{ij} \geq 0, B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O, j \in D$$

El modelo anterior puede ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{i \in O} f_i B_i \quad + \quad \text{Min} \quad \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} v_{ij} S_{ij} \\
 & \text{s.a.} \quad B_i \in \{0,1\} \quad i \in O \quad \text{s.a.} \quad \sum_{j \in D} S_{ij} \leq o_i B_i \quad i \in O \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{B} \in \mathbf{K} \quad \quad \quad \sum_{i \in O} S_{ij} = d_j \quad j \in D \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad S_{ij} \geq 0, \quad i \in O, j \in D
 \end{aligned}$$

Por dualidad el problema también equivale a:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{i \in O} f_i B_i \quad + \quad \text{Max} \quad \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i + \sum_{j \in D} d_j \pi_j \\
 & \text{s.a.} \quad B_i \in \{0,1\} \quad i \in O \quad \text{s.a.} \quad \lambda_i + \pi_j \leq v_{ij} \quad i \in O \quad j \in D \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{B} \in \mathbf{K} \quad \quad \quad \lambda_i \leq 0, \quad \pi_j \in \mathfrak{R} \quad i \in O, j \in D
 \end{aligned}$$

Sean $(\lambda, \pi)^{(1)}, \dots, (\lambda, \pi)^{(I)}$ los puntos extremos del conjunto de soluciones factibles del subproblema dual, así el problema original equivale a:

$$\text{Min } \sum_{i \in O} f_i B_i + \max_{p=1, \dots, I} \{ \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \}$$

s.a. $B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O$

$$B \in K$$

Lo anterior define el siguiente problema equivalente

$$\text{Min } \sum_{i \in O} f_i B_i + z$$

s.a. $z \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \quad p=1, \dots, I$

$$B \in K$$

$$B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O$$

Si $(\lambda, \pi)^{(I+1)}, \dots, (\lambda, \pi)^{(I+L)}$ son las direcciones extremas del conjunto de soluciones factibles del Subproblema dual, ello define entonces el siguiente

PROBLEMA MAESTRO

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i \in O} f_i B_i + z \\ \text{s.a.} \quad & z \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \quad p=1, \dots, I \\ & 0 \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(\ell)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(\ell)} \quad \ell=I+1, \dots, I+L \\ & B_i \in \{0, 1\} \quad i \in O \end{aligned}$$

Si $(\mathbf{B}^k, \mathbf{z}^k)$ es la solución óptima del Problema Maestro Reducido, esta también lo será para el Problema Maestro en la medida que cumpla con:

$$\mathbf{z}^k \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i^k) \lambda_i^{(p)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(p)} \quad p=1, \dots, I$$

Para ello se resuelve el siguiente Subproblema:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{i \in O} (o_i B_i^k) \lambda_i + \sum_{j \in D} d_j \pi_j \\ \text{s.a. } & \lambda_i + \pi_j \leq v_{ij} \quad i \in O, j \in D \\ & \lambda_i \leq 0, \pi_j \in \Re \quad i \in O, j \in D \end{aligned}$$

Si el Subproblema tiene solución óptima esta se alcanza en un punto extremo (λ^k, π^k) y el método concluye al comprobar:

$$z^k \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i^k) \lambda_i^{(k)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(k)}$$

En caso de no cumplirse, se agrega al Maestro Reducido la (nueva) restricción:

$$z \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(k)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(k)}$$

Si el Subproblema resulta no-acotado, es posible obtener una dirección extrema (λ^k, π^k) y se agrega al Maestro Reducido la (nueva) restricción:

$$0 \geq \sum_{i \in O} (o_i B_i) \lambda_i^{(k)} + \sum_{j \in D} d_j \pi_j^{(k)}$$

Los detalle de la implementación del método considera los archivos trnloc1d.mod, trnloc1d.run y trnloc1.dat:

The screenshot shows the AMPL IDE interface with three main panes:

- Current Directory:** Shows the file structure in `C:\Users\Victor Albornoz\Documents\cu`, including files like `ej1ampl.mod`, `ej2ampl.dat`, `STEEL.DAT`, `TRANSP.DAT`, `trnloc1.dat`, `trnloc1.mod`, and `trnloc1.run`.
- Console:** Displays the AMPL execution output:

```
AMPL
ampl: include trnloc1.run;
CPLEX 12.6.1.0: sensitivity
display=2
CPLEX 12.6.1.0: optimal integer solution within mippgap or absmipgap
108 MIP simplex iterations
0 branch-and-bound nodes
absmipgap = 304.508, relmipgap = 5.30944e-05
No basis.
Build [*] :=
1 0 4 0 7 0 10 0 13 0 16 0 19 0 22 1 25 1
2 0 5 0 8 0 11 0 14 0 17 1 20 1 23 0
3 0 6 0 9 0 12 0 15 0 18 1 21 0 24 1
;

Ship [*,*]
: A3 A6 A8 A9 B2 B4 :=
1 0 0 0 0 0 0
2 0 0 0 0 0 0
3 0 0 0 0 0 0
4 0 0 0 0 0 0
5 0 0 0 0 0 0
6 0 0 0 0 0 0
7 0 0 0 0 0 0
8 0 0 0 0 0 0
9 0 0 0 0 0 0
10 0 0 0 0 0 0
11 0 0 0 0 0 0
12 0 0 0 0 0 0
13 0 0 0 0 0 0
14 0 0 0 0 0 0
15 0 0 0 0 0 0
16 0 0 0 0 0 0
17 0 0 8810 0 0 960
18 0 0 5190 13500 0 0
19 0 0 0 0 0 0
20 0 12000 0 0 9220 0
21 0 0 0 0 0 0
```
- Source Code:** Shows the code for `trnloc1.mod` and `trnloc1.run`.

```
# CARGA DEL MODELO Y DATOS
reset;
model trnloc1.mod;
data trnloc1.dat;

# SELECCION DEL SOLVER
option solver cplex;

solve;

display Build;

display Ship;

display Costo_Total;

# GUARDAR RESULTADOS EN UN ARCHIVO
display Build > trnloc1.sal;
display Ship > trnloc1.sal;
display Costo_Total > trnloc1.sal;
```

CONTENIDOS

0. Clase Bienvenida.

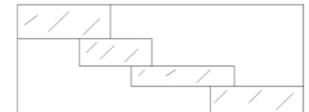
1. Introducción a los Métodos de Descomposición.

2. Formulación y resolución de modelos en AMPL.

3. Método de Benders.



4. Generación de Columnas.



5. Método de Dantzig & Wolfe.

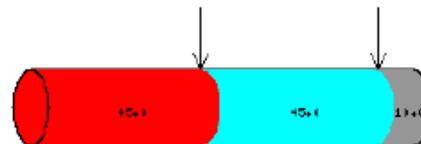


6. Conclusiones, Extensiones y palabras finales.

4.- Generación de Columnas.

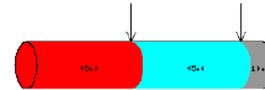
Como ya se señaló en la introducción, una primera aplicación de un Método de Descomposición corresponde al uso del método de Generación de Columnas para el problema de corte de piezas, ver [NEOS](#)

**The Cutting-Stock Problem:
An Application of Integer Linear Programming**



Notación.

The Cutting-Stock Problem: An Application of Integer Linear Programming



W = ancho de las piezas a cortar

w_i = ancho del trozo demandado $i=1, \dots, m$

b_i = demanda de trozos de ancho **w_i** con $i=1, \dots, m$

a_{ij} = número de veces que aparece el trozo de tamaño **w_i** en el patrón de corte **j**, con $i=1, \dots, m$ $j=1, \dots, n$

A=(**a_{ij}**) $_{i=1, \dots, m}$ $_{j=1, \dots, n}$ matriz que reúne todos los patrones de corte.

a^j = **j**-ésima columna de **A**, correspondiente al patrón de corte $j=1, \dots, n$.

Notar que un patrón de corte j es factible en la medida que verifique: $a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m \leq W$

Si x_j representa el número de veces que se emplea el patrón de corte j , un modelo que minimiza el número total de piezas a cortar corresponde a:

$$\begin{aligned} \text{Min } & x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \text{s.a. } & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \quad i=1, \dots, m \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \text{ enteros,} \end{aligned}$$

Al emplear el *Método de Generación de Columnas* los patrones se van generando iteración tras iteración al aplicar el método *Simplex Revisado* a la relajación continua del modelo anterior.