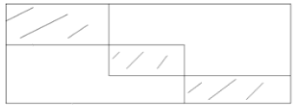
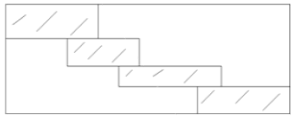
TÉCNICAS DE DESCOMPOSICIÓN EN PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Dr. Víctor M. Albornoz
Departamento de Industrias.
Campus Santiago Vitacura, Chile.
Universidad Técnica Federico Santa María

Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, UdelaR.
Montevideo, lunes 20 al viernes 24 de Mayo de 2024

CONTENIDOS





1.- Introducción a los Métodos de Descomposición

Existe una amplia variedad de problemas en diversas disciplinas que dan origen a modelos de optimización estructurados de gran tamaño, donde, por ejemplo, se combinan restricciones simples con otras más complejas.

Un Método de Descomposición es una técnica numérica de optimización que resulta muy apropiada ante problemas de esta naturaleza.

En efecto, hay problemas con restricciones lineales (Ax=b), cuya matriz resulta ser una matriz con muchísimas más columnas que ecuaciones o poco densa, con un claro patrón de sus elementos no-nulos.

Por ejemplo, A podría ser una matriz bloque angular:

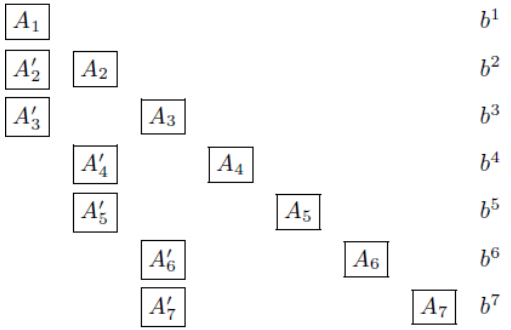
$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_q \\ D_1 & & & & \\ & D_2 & & & \\ & & D_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_q \end{bmatrix}$$

tener una estructura dual bloque angular:

$$\begin{bmatrix} D_1 & & & & F_1 \\ & D_2 & & & F_2 \\ & & D_3 & & F_3 \\ & & & \ddots & \\ & & & D_q & F_q \end{bmatrix}$$

o bien ser una matriz con forma de escalera:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Un modelo lineal de Optimización Estocástica con recurso de dos-etapas (en el caso finito) corresponde por ejemplo a:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & cx + p_1 q^1 y^1 + p_2 q^2 y^2 + \cdots + p_S q^S y^S \\
\text{s.a.} \quad & \\
& Ax = b \\
& T^1 x + W y^1 = h^1 \\
& T^2 x + W y^2 = h^2 \\
& \cdots \\
& T^S x + W y^S = h^S \\
& x \geq 0, \; y^1 \geq 0, \; y^2 \geq 0, \; \ldots, \; y^S \geq 0.
\end{aligned}
$$

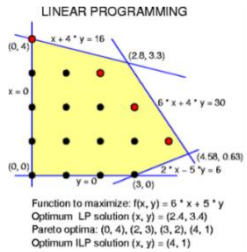
Existen problemas de optimización de gran tamaño altamente estructurados que contribuyen en la toma de decisiones.

Los trabajos seminales en la literatura de métodos de descomposición que explotan este tipo de estructuras surgieron varias décadas atrás:

Dantzig & Wolfe Decomposition (1960).

Column Generation (Gilmore and Gomory, 1961)

Benders Decomposition (1962).

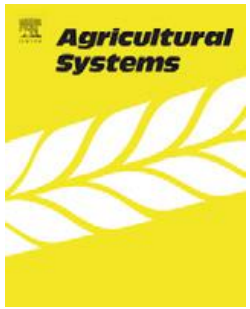


Sus extensiones y aplicaciones hasta hoy son muy variadas y permanentes.

En Albornoz et al. (2004) se abordó un problema de expansión de capacidad de un sistema de potencia eléctrica térmico, que ante incertidumbre en la disponibilidad de las unidades de generación existentes se resolvió con el Método de Descomposición de Benders.

Pérez Canto (2008) formula y resuelve un problema de operación y mantenimiento de unidades de generación en un sistema de potencia eléctrica empleando igualmente el *Método de Benders*.

Ahumada et al. (2012) aplicaron el Método de Benders para la búsqueda de un plan óptimo de cultivo y distribución de productos frescos ante rendimientos y demandas bajo incertidumbre.



En Bagger et al. (2018) se resuelve la programación de horarios de asignaturas mediante el Método de Descomposición de Benders.

European Journal of Operational Research 259 (2017) 801–817

Contents lists available at ScienceDirect

European Journal of Operational Research

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ejor

Invited Review

The Benders decomposition algorithm: A literature review

Ragheb Rahmaniani[a,c], Teodor Gabriel Crainic[a,b,*], Michel Gendreau[a,c], Walter Rei[a,b]

[a] CIRRELT - Interuniversity Research Centre on Enterprise Networks, Logistics and Transportation, Université de Montréal, P.O. Box 6128, Station Centre-Ville, Montréal H3C 3J7, Canada
[b] School of Management, Université du Québec à Montréal, P.O. Box 8888, Station Centre-Ville, Montréal H3C 3P8, Canada
[c] Department of Mathematics and Industrial Engineering, École Polytechnique de Montréal, P.O. Box 6079, Station Centre-ville, Montréal H3C 3A7, Canada

ARTICLE INFO

Article history:
Received 21 June 2016
Accepted 1 December 2016
Available online 9 December 2016

Keywords:
Combinatorial optimization
Benders decomposition
Acceleration techniques
Literature review

ABSTRACT

The Benders decomposition algorithm has been successfully applied to a wide range of difficult optimization problems. This paper presents a state-of-the-art survey of this algorithm, emphasizing its use in combinatorial optimization. We discuss the classical algorithm, the impact of the problem formulation on its convergence, and the relationship to other decomposition methods. We introduce a taxonomy of algorithmic enhancements and acceleration strategies based on the main components of the algorithm. The taxonomy provides the framework to synthesize the literature, and to identify shortcomings, trends and potential research directions. We also discuss the use of the Benders Decomposition to develop efficient (meta-)heuristics, describe the limitations of the classical algorithm, and present extensions enabling its application to a broader range of problems.

Computers and Operations Research 91 (2018) 178–189

Contents lists available at ScienceDirect

Computers and Operations Research

journal homepage: www.elsevier.com/locate/cor

Benders' decomposition for curriculum-based course timetabling

Niels-Christian F. Bagger[a,b,1,2,*], Matias Sørensen[a,b,2], Thomas R. Stidsen[a,2]

[a] mORsime Research Group, Management Science, Department of Management Engineering, Technical University of Denmark, Produktionstorvet, Building 426B, DK-2800 Kgs. Lyngby, Denmark
[b] MaCom A/S, Vesterbrogade 48, 1., DK-1620 København V, Denmark

ARTICLE INFO

Article history:
Received 26 January 2017
Revised 17 October 2017
Accepted 18 October 2017
Available online 20 October 2017

Keywords:
University course timetabling
Integer programming
Benders' decomposition
Maximum flow
Minimum cut

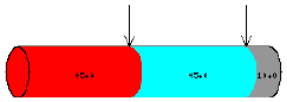
ABSTRACT

In this paper we applied Benders' decomposition to the Curriculum-Based Course Timetabling (CBCT) problem. The objective of the CBCT problem is to assign a set of lectures to time slots and rooms. Our approach was based on segmenting the problem into time scheduling and room allocation problems. The Benders' algorithm was then employed to generate cuts that connected the time schedule and room allocation. We generated only feasibility cuts, meaning that most of the solutions we obtained from a mixed integer programming solver were infeasible, therefore, we also provided a heuristic in order to regain feasibility.

We compared our algorithm with other approaches from the literature for a total of 32 data instances. We obtained a lower bound on 23 of the instances, which were at least as good as the lower bounds obtained by the state-of-the-art, and on eight of these, our lower bounds were higher. On two of the instances, our lower bound was an improvement of the currently best-known. Lastly, we compared our decomposition to the model without the decomposition on an additional six instances, which are much larger than the other 32. To our knowledge, this was the first time that lower bounds were calculated for these six instances.

Una primera aplicación del Método de Generación de Columnas es el trabajo de Gilmore y Gomory (1961,1963) quienes lo aplicaron al problema de corte de piezas.

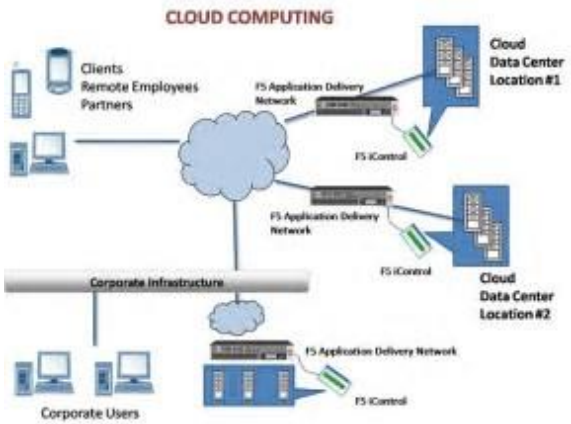
The Cutting-Stock Problem:
An Application of Integer Linear Programming



Con posterioridad son numerosos los métodos que extienden y se crean para descomponer un modelo y explotar su estructura.

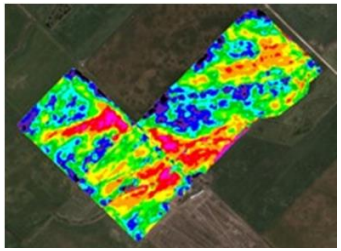
Reinertsen y Vossen (2010) abordaron una extensión del problema de corte de piezas, problema clásico en este contexto, incluyendo ahora fechas de entrega y lo resolvieron empleando también el *Método de Generación de Columnas*.

Kramer et al. (2012) emplearon el *Método de Generación de Columnas* para optimizar el consumo energético de servidores en una plataforma de cloud computing.

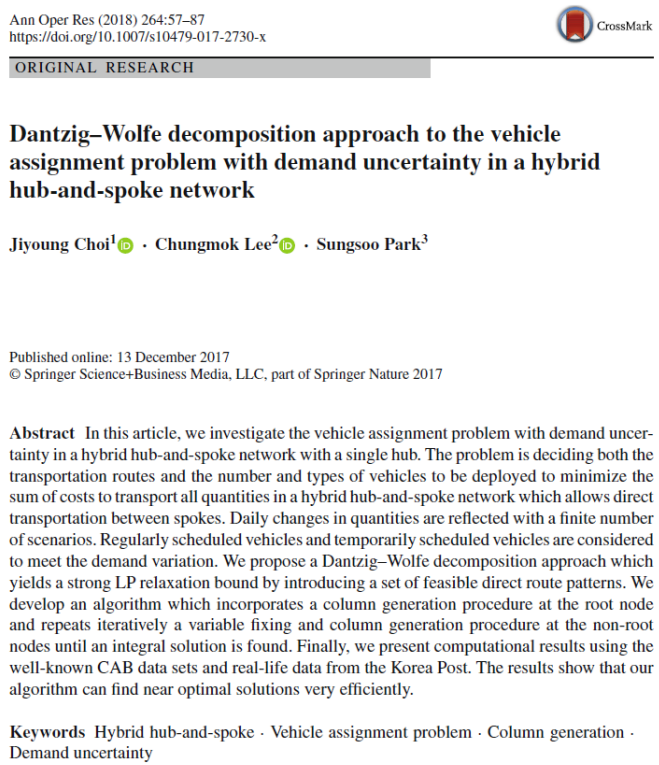


Costa et al. (2014) aplicaron el método de G*eneración de Columnas* para hallar rotaciones óptimas de cultivo de modo de satisfacer demandas por diferentes productos agrícolas.

En Albornoz y Ñanco (2016) se abordó un problema de partición en zonas homogéneas de un terreno agrícola, basado en información geo-referenciada de propiedades del suelo, mediante un *Método de Generación de Columnas* ante la gran cantidad de variables del modelo.



En Choi et al (2018) se resolvió un problema de asignación de vehículos a una red compleja de transporte conocida como hybrid hub-and-spoke network mediante el Método de *Generación de Columnas*.



Ann Oper Res (2018) 264:57–87
https://doi.org/10.1007/s10479-017-2730-x

CrossMark

ORIGINAL RESEARCH

Dantzig–Wolfe decomposition approach to the vehicle assignment problem with demand uncertainty in a hybrid hub-and-spoke network

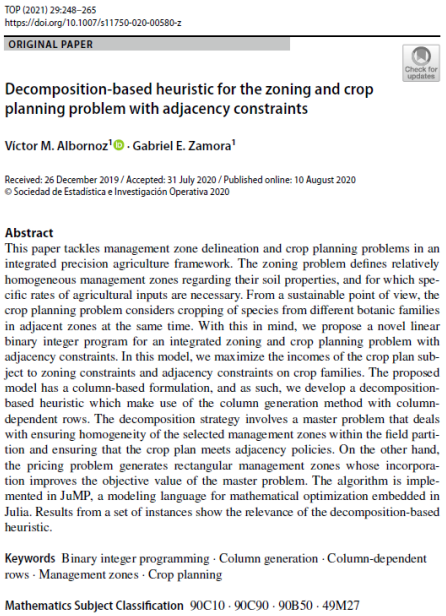
Jiyoung Choi[1] · Chungmok Lee[2] · Sungsoo Park[3]

Published online: 13 December 2017

Abstract In this article, we investigate the vehicle assignment problem with demand uncertainty in a hybrid hub-and-spoke network with a single hub. The problem is deciding both the transportation routes and the number and types of vehicles to be deployed to minimize the sum of costs to transport all quantities in a hybrid hub-and-spoke network which allows direct transportation between spokes. Daily changes in quantities are reflected with a finite number of scenarios. Regularly scheduled vehicles and temporarily scheduled vehicles are considered to meet the demand variation. We propose a Dantzig–Wolfe decomposition approach which yields a strong LP relaxation bound by introducing a set of feasible direct route patterns. We develop an algorithm which incorporates a column generation procedure at the root node and repeats iteratively a variable fixing and column generation procedure at the non-root nodes until an integral solution is found. Finally, we present computational results using the well-known CAB data sets and real-life data from the Korea Post. The results show that our algorithm can find near optimal solutions very efficiently.

Keywords Hybrid hub-and-spoke · Vehicle assignment problem · Column generation · Demand uncertainty

En Albornoz y Zamora (2021) se abordó un problema de definición de zonas de manejo agrícola, basada en información de propiedades del suelo, para la asignación de cultivos orgánicos con restricciones de adyacencia. Para su resolución se empleó *Generación de Columnas* (y filas dependientes).



TOP (2021) 29:248–265
https://doi.org/10.1007/s11750-020-00580-z

ORIGINAL PAPER

Decomposition-based heuristic for the zoning and crop planning problem with adjacency constraints

Víctor M. Albornoz[1] · Gabriel E. Zamora[1]

Received: 26 December 2019 / Accepted: 31 July 2020 / Published online: 10 August 2020

Abstract
This paper tackles management zone delineation and crop planning problems in an integrated precision agriculture framework. The zoning problem defines relatively homogeneous management zones regarding their soil properties, and for which specific rates of agricultural inputs are necessary. From a sustainable point of view, the crop planning problem considers cropping of species from different botanic families in adjacent zones at the same time. With this in mind, we propose a novel linear binary integer program for an integrated zoning and crop planning problem with adjacency constraints. In this model, we maximize the incomes of the crop plan subject to zoning constraints and adjacency constraints on crop families. The proposed model has a column-based formulation, and as such, we develop a decomposition-based heuristic which make use of the column generation method with column-dependent rows. The decomposition strategy involves a master problem that deals with ensuring homogeneity of the selected management zones within the field partition and ensuring that the crop plan meets adjacency policies. On the other hand, the pricing problem generates rectangular management zones whose incorporation improves the objective value of the master problem. The algorithm is implemented in JuMP, a modeling language for mathematical optimization embedded in Julia. Results from a set of instances show the relevance of the decomposition-based heuristic.

Keywords Binary integer programming · Column generation · Column-dependent rows · Management zones · Crop planning

Mathematics Subject Classification 90C10 · 90C90 · 90B50 · 49M27

Existen numerosos problemas de gran tamaño altamente estructurados que contribuyen a la toma de buenas decisiones y cuya resolución plantea desafíos algorítmicos por su complejidad.

La presencia de tal estructura puede y (debe) ser empleada en métodos eficientes para la resolución de tales tipos de problema (ante instancias de gran tamaño).

Para abordar computacionalmente un problema complejo mediante el uso de un Método de Descomposición la idea básica consiste en:

descomponer o simplificar la resolución del problema original resolviendo separadamente un Problema Maestro (*Reducido*) *y un Subproblema, este último usualmente con un subconjunto de las restricciones originales que poseen una estructura especial o de más fácil resolución.*

Para llevar a cabo esta idea en un contexto algorítmico, la estrategia consiste en enviar información tales como *precios sombra* y soluciones factibles entre el *Problema Maestro* (*Reducido*) *y el Subproblema* hasta alcanzar la solución óptima o una aproximación a la misma en un número finito de iteraciones.

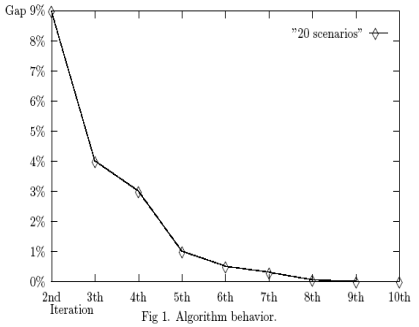


Fig 1. Algorithm behavior.

En Albornoz et al. (2004) se considera el Método de Descomposición de Benders donde:

Problema Maestro: plan de inversiones sobre todo el horizonte de planificación de largo plazo.

Subproblemas: operación óptima del sistema en cada mes y escenario de disponibilidad de unidades.

En Pérez Canto (2008) se considera el Método de Descomposición de Benders donde:

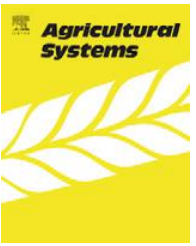
Problema Maestro: plan de mantenimiento sobre todo el horizonte de planificación.

Subproblema: operación óptima del sistema en cada periodo de acuerdo a la disponibilidad de unidades.

Ahumada et al. (2012) aplicaron el Método de Benders, donde:

Problema Maestro. Encuentra un plan óptimo de cultivos de productos frescos.

Subproblemas. maximiza los ingresos esperados ante la realización de posibles escenarios de los parámetros inciertos (rendimientos y demandas futuras).



Costa et al. (2014) aplicaron Generación de Columnas, donde:

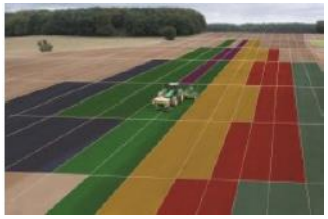
Problema Maestro. Encuentra un plan óptimo de rotación de cultivos que permita satisfacer demandas sobre un conjunto de tierras de cultivo.

Subproblema. Provee una nueva potencial rotación de cultivo para un terreno.

En Albornoz y Ñanco (2016) se considera el *Método de Generación de Columnas* donde:

Problema Maestro: Partición óptima del terreno para un conjunto dado (generado) de potenciales zonas de manejo agrícola.

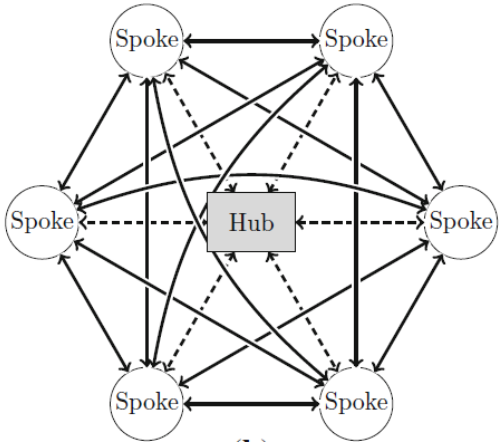
Subproblema: determina una nueva potencial zona rectangular para el terreno.



En Choi et al. (2018) se considera un:

Problema Maestro: reformulación del problema en término de (todas) las rutas posibles para los distintos vehículos empleados.

Subproblema: determina una nueva ruta factible.



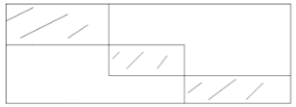
Albornoz y Zamora (2021) aplicaron Generación de *Columnas* a un problema de agricultura orgánica, donde:

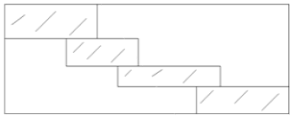
Problema Maestro. Encuentra una partición óptima de un terreno en zonas de manejo, asigna cultivos de vegetales e impone restricciones de adyacencia (entre familias botánicas).

Subproblema. Provee una nueva zona de manejo (rectangular).

CONTENIDOS

0. Clase Bienvenida.
1. Introducción a los Métodos de Descomposición.
2. Formulación y resolución de modelos en AMPL.
3. Método de Benders.
4. Generación de Columnas.
5. Método de Dantzig & Wolfe.
6. Conclusiones, Extensiones y palabras finales.

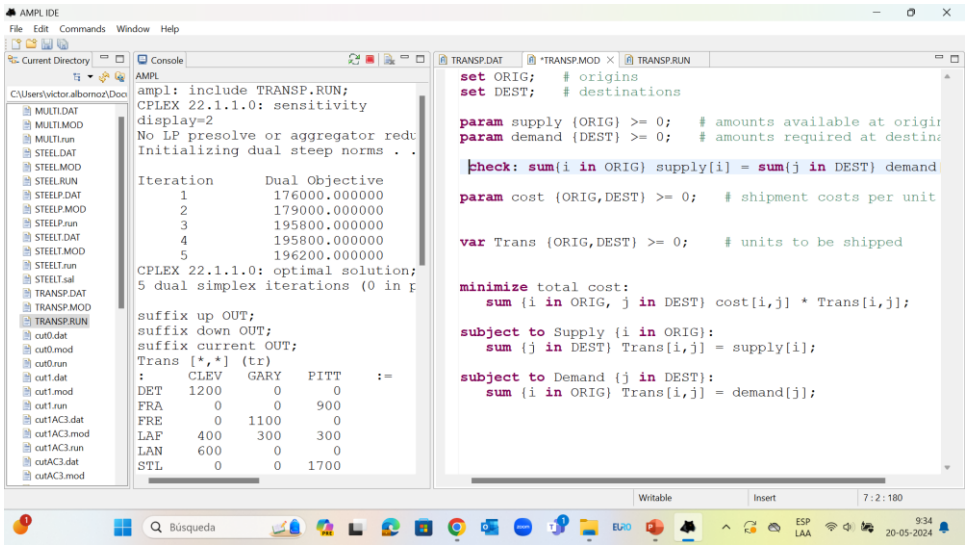




2.- Formulación y resolución de modelos en AMPL

Los modelos de optimización pueden ser representados en AMPL mediante expresiones algebraicas en lo que concierne a sus variables de decisión, función objetivo y diferentes restricciones (ecuaciones e inecuaciones), expresadas con la ayuda de conjuntos y parámetros, todos en términos algebraicos.

Toda la información contempla diferentes archivos con las extensiones: **.mod** (para el modelo), **.dat** (para los datos del modelo) y **.run** (para la ejecución del modelo).



En lo concerniente a la representación del modelo, el archivo **.mod**, presenta una estructura con los siguientes elementos:

Conjuntos (set),

Parámetros (param),

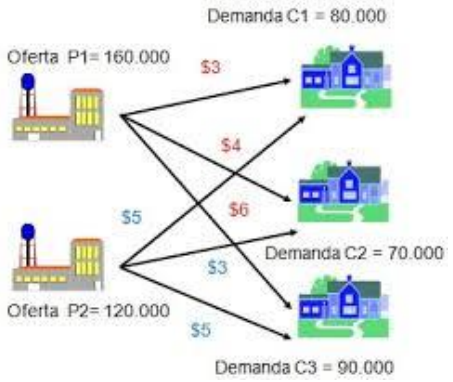
Variables de decisión (var),

Función objetivo (minimize o maximize) y

Restricciones (subject to)

Problema de Transporte.

Un problema muy interesante en la logística de las operaciones consiste en decidir cuántas unidades trasladar desde ciertos puntos de origen (plantas, ciudades, etc.) a ciertos puntos de destino (centros de distribución, ciudades, etc..) de modo de minimizar los costos de transporte, dada la oferta y demanda en dichos puntos.



Variables de decisión.

$T_{i,j}$: unidades transportadas desde el origen i al destino j

Modelo

Min $\sum_i \sum_j c_{i,j} T_{i,j}$

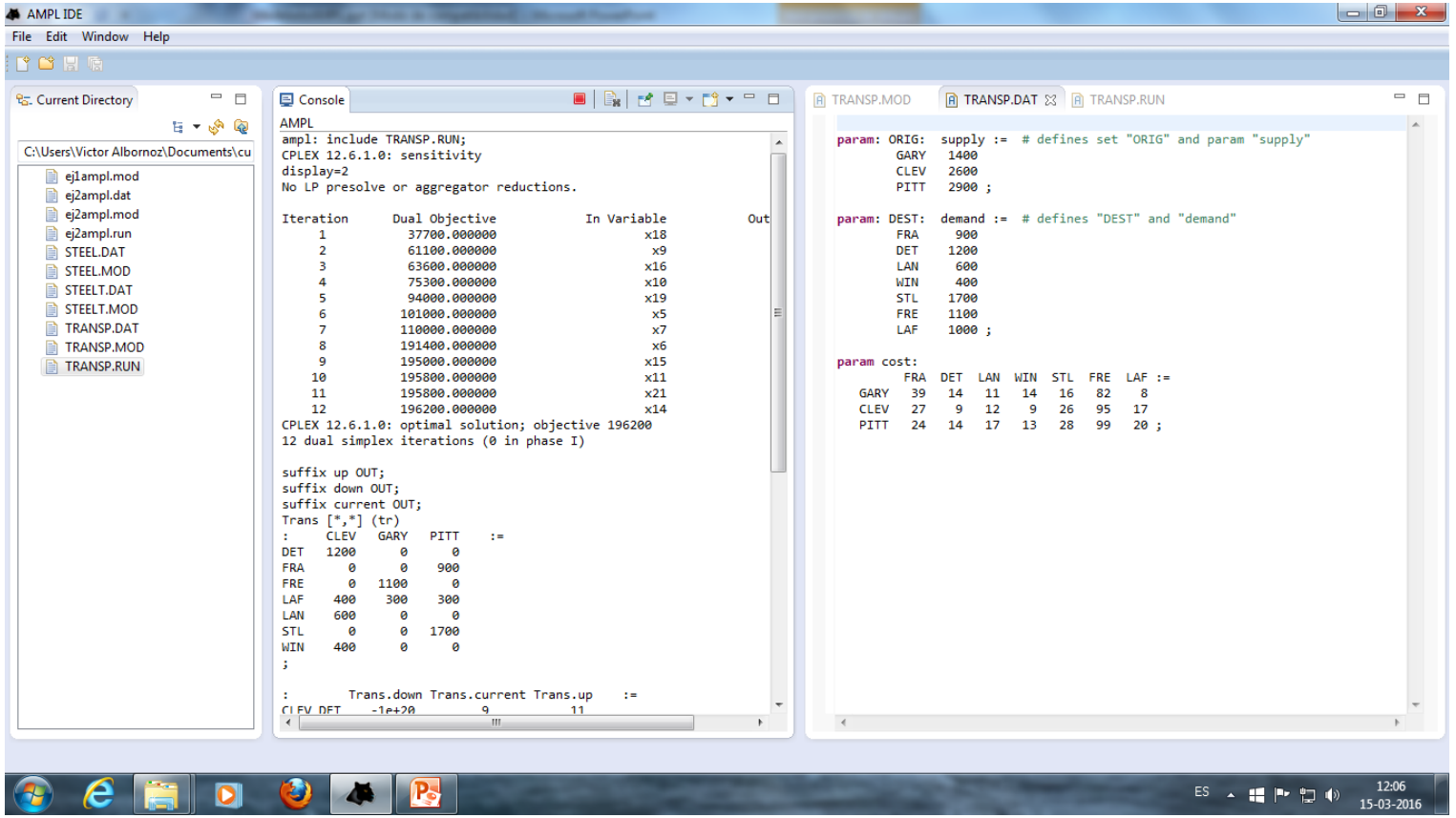
s.a.

$\sum_j T_{i,j} \leq \text{oferta}_i$ para todo origen i=1,…,m

$\sum_i T_{i,j} = \textit{demanda}_j$ para todo destino j=1,…,n

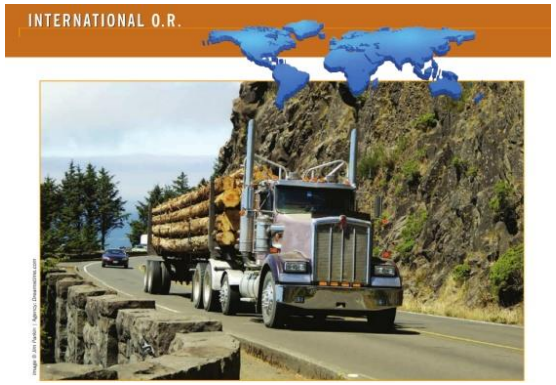
$T_{i,j} \geq 0 \quad i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n$

Se presenta un modelo correspondiente a un problema de transporte como el del ejemplo asociado a los archivos TRANSP.MOD y TRANSP.DAT:

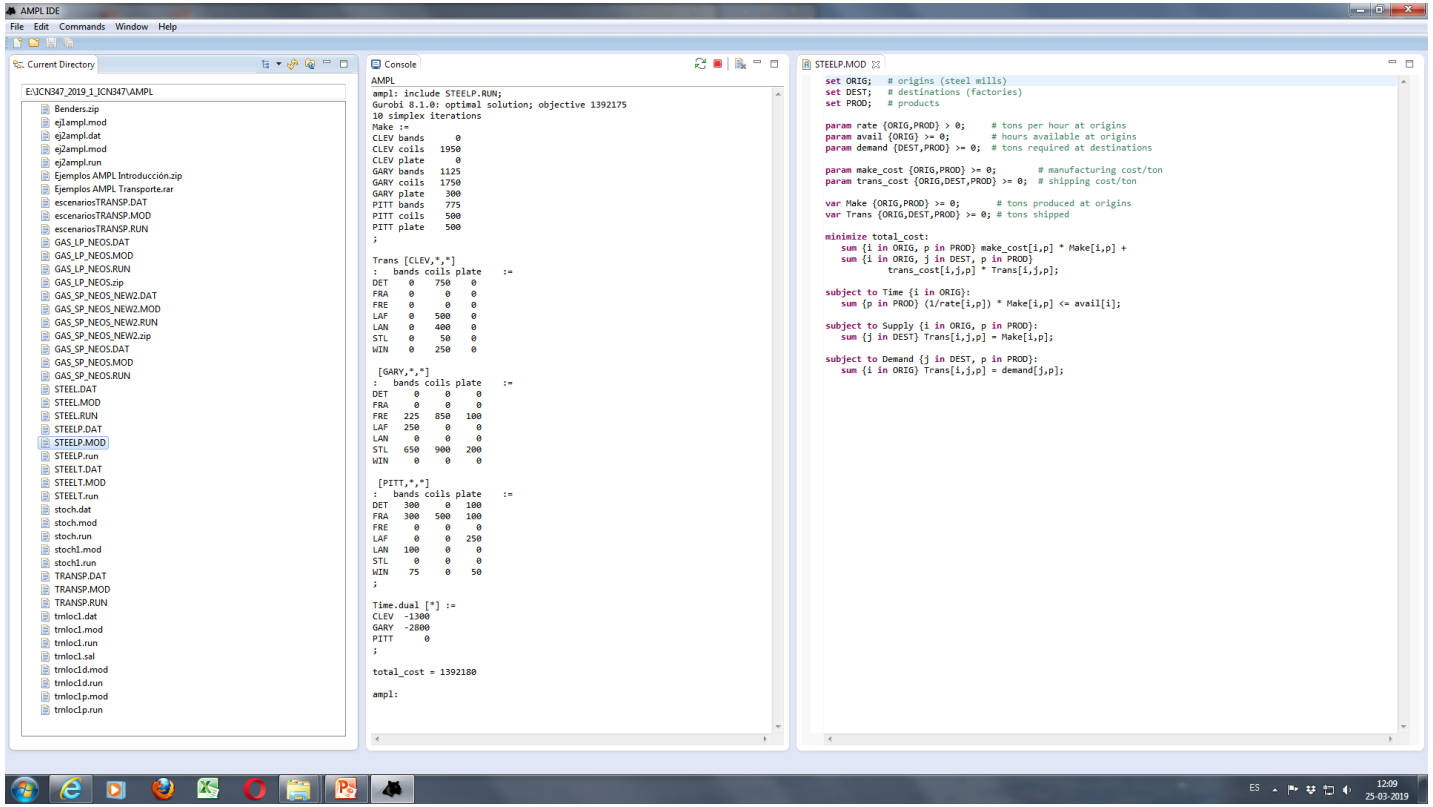


Problema de producción y transporte.

Dado un conjunto de múltiples plantas (orígenes) donde se elaboran múltiples productos, el problema consiste en definir niveles óptimos de producción y despacho para satisfacer la demanda de cada cliente (destino) minimizando el costo total de producción y transporte.



Se presenta a continuación un modelo que representa el problema de producción y transporte en AMPL asociado a los archivos STEELP.MOD y STEELP.DAT.



Problema de localización y transporte.

Asuma que se tiene un conjunto de n clientes, de los cuales el cliente j demanda d_j unidades de un producto determinado. Una compañía desea satisfacer esas demandas desde un cierto conjunto de bodegas elegidas de entre m potenciales lugares donde se instalarán.

Denotamos por c_i los costos fijos asociados a la instalación de la planta i, y t_{ij} el costo de transporte de una unidad desde la bodega i al cliente j.

El problema consiste en decidir cuáles plantas habilitar de modo de satisfacer las demandas (estimadas) al mínimo costo.

Variables de decisión:

y_i = variable binaria que toma el valor 1 si se elabora en la planta i y 0 en caso contrario, con i=1,....,m.

x_{ij} = el número de unidades elaboradas en la planta i para satisfacer el cliente j, con i=1,....,m y j=1,...,n.

Función objetivo:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{m} c_i y_i \quad + \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}$$

Costo de Instalación

Costo de Transporte

Restricciones:

Demanda cliente j=1,…,n: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$

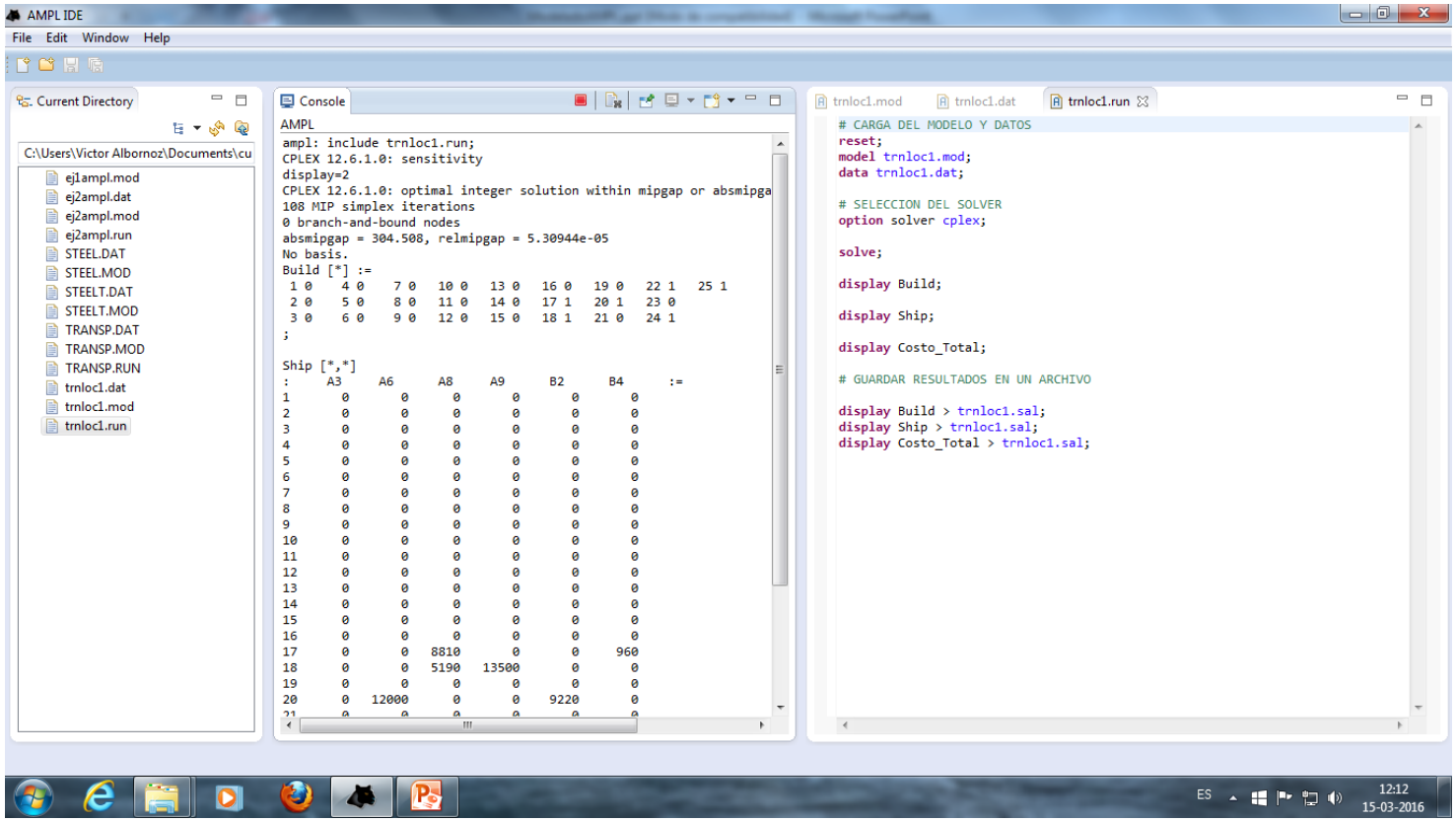
Relacionar variables transporte con las asociadas a la apertura de cada planta i=1,…,m:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq M_i \, y_i$$

donde M_i es una constante suficientemente grande.

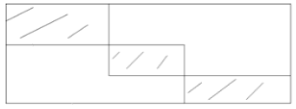
Las variables además satisfacen: $x_{ij} \geq 0$ e $y_j \in \{0,1\}$.

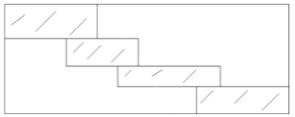
Si discute a continuación un modelo en AMPL correspondiente al problema descrito de localización y transporte detallado en los archivos trnloc1.mod y trnloc1.dat.



CONTENIDOS

0. Clase Bienvenida.
1. Introducción a los Métodos de Descomposición.
2. Formulación y resolución de modelos en AMPL.
3. Método de Benders.
4. Generación de Columnas.
5. Método de Dantzig & Wolfe.
6. Conclusiones, Extensiones y palabras finales.





3. Método de Benders.

El Método de Benders se publicó el año 1962 como método aplicado a problemas con determinada estructura, dando origen a la resolución de un *problema maestro* y otro con las restricciones con estructura especial, cuya resolución generalmente da origen a uno o varios *subproblemas*.

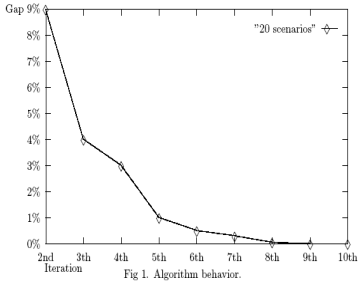


Fig 1. Algorithm behavior.

A continuación se presenta los principales detalles del método dado el siguiente modelo de Programación Lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & cx + dy \\
\text{s.a.} \quad & Ax = b \\
& Tx + Wy \leq h \\
& x \geq 0, \; y \geq 0.
\end{aligned}
$$

El modelo anterior puede ser representado (por proyección) de manera equivalente como:

$$\text{Min } cx + \text{Min } \{dy / Wy \leq h - Tx,\ y \geq 0\}$$

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

siempre que para cada $x \geq 0$ y $Ax = b$, se cumpla que el *problema* $\text{Min } \{dy / Wy \leq h - Tx,\ y \geq 0\}$ posea solución óptima.

Problema Dual. Dado el problema primal con la estructura mostrada a la izquierda (derecha), su respectivo problema dual se muestra a la derecha (izquierda). Notación: a_i es una fila de la matriz de restricciones y A_j una columna de la misma:

$$\begin{aligned}
\text{Min } & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\text{s.a. } & \mathbf{a}_i\mathbf{x} \geq b_i \quad i \in \mathbf{M}_1 \\
& \mathbf{a}_i\mathbf{x} \leq b_i \quad i \in \mathbf{M}_2 \\
& \mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \quad i \in \mathbf{M}_3 \\
& x_j \geq 0 \quad j \in \mathbf{N}_1 \\
& x_j \leq 0 \quad j \in \mathbf{N}_2 \\
& x_j \in \Re \quad j \in \mathbf{N}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Max } & \mathbf{b}^T\pi \\
\text{s.a. } & \pi_i \geq 0 \quad i \in \mathbf{M}_1 \\
& \pi_i \leq 0 \quad i \in \mathbf{M}_2 \\
& \pi_i \in \Re \quad i \in \mathbf{M}_3 \\
& \mathbf{A}_j^T\pi \leq c_j \quad j \in \mathbf{N}_1 \\
& \mathbf{A}_j^T\pi \geq c_j \quad j \in \mathbf{N}_2 \\
& \mathbf{A}_j^T\pi = c_j \quad j \in \mathbf{N}_3
\end{aligned}$$

Por teoría de dualidad en Programación Lineal formulamos el dual del problema proyectado y por lo tanto el problema inicial también equivale a resolver:

$$\text{Min } cx + \text{Max } \{(h - Tx)u \,/\, W^T u \leq d,\ u \leq 0\}$$

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

Dado que el problema dual posee solución óptima, esta se alcanza en un vértice del poliedro $\{u / W^T u \leq d, u \leq 0\}$.

Denotando por u^i, para $i=1,\ldots l$, dichos vértices, el problema equivale igualmente a resolver:

$$\text{Min } cx + \max_{i=1\ldots,l}\{(h - Tx)u^i\}$$

$$\text{s.a. } Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

Empleando una reformulación en términos de un modelo lineal (agregando la variable z), el problema anterior es equivalente al siguiente modelo, llamado *Problema Maestro*:

$$
\begin{aligned}
\text{(PM)}\quad \text{Min}\quad & cx + z \\
\text{s.a.}\quad & z \geq (h - Tx)u^i \qquad i=1,\ldots,l \\
& Ax = b \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

La estrategia de resolución consiste entonces en resolver un *Problema Maestro Reducido* (PMR) que contiene solo aquellas restricciones que el propio método genera iteración a iteración (a partir de los respectivos vértices generados), digamos:

$$
\begin{aligned}
\text{(PMR)}\quad & \text{Min } cx + z \\
& \text{s.a. } z \geq (h - Tx)u^i \qquad i=1,\ldots,k-1 \qquad (\, k << l \,) \\
& \qquad Ax = b \\
& \qquad x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Denotando por $(\bar{x}, \bar{z})$ la solución óptima del Maestro Reducido (PMR), esta también será la solución óptima del Problema Maestro (PM) si y solo si:

$$\bar{z} \geq (h - T\bar{x})u^i \qquad i = 1,\ldots,l$$

¿Cómo verificar estas relaciones si al cabo de la *k-ésima* iteración del método sólo conocemos $k-1$ de las l restricciones?

Lo anterior es posible de verificar resolviendo el siguiente Subproblema:

$$\begin{aligned} &\text{Max } (h - T\bar{x})u \\ &\text{s.a} \quad W^T u \leq d, \\ &\qquad u \leq 0. \end{aligned}$$

En efecto, denotando por u^k el vértice y solución óptima del Subproblema, la condición de optimalidad del (PM) se verifica ssi: $\bar{z} \geq (h - T\bar{x})u^k$

Si lo anterior no se cumple, esto quiere decir que hemos encontrado un nuevo vértice del poliedro $\{u / W^T u \leq d, u \leq 0\}$.

Dado lo anterior, se agrega al problema Maestro Reducido (PMR) la nueva restricción: $z \geq (h - Tx)u^k$

El método termina en un número finito de pasos pues la cantidad de vértices de un poliedro es finita.

Ejemplo. Resolveremos mediante Benders:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & -2x_1 + x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 - 4x_3 \le 2 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\
& x_1 \le 2 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

El problema es equivalentemente a resolver:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & -2x_1 \\
\text{s. a.} \quad & 0 \le x_1 \le 2
\end{aligned}
\qquad + \qquad
\begin{aligned}
&\text{Min} && x_2 \\
&\text{s. a.} && x_2 - 4x_3 \le 2 - 2x_1 \quad (\lambda_1) \\
& && x_2 - x_3 \ge 1 - x_1 \quad (\lambda_2) \\
& && x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

Por Teoría de Dualidad, el problema anterior es equivalente a resolver:

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & -2x_1 + & \text{Max} \quad (2-2x_1)\lambda_1 + (1-x_1)\lambda_2 \\ \text{s. a.} & & \text{s. a.} \quad \lambda_1 + \lambda_2 \le 1 \qquad (x_2) \\ & 0 \le x_1 \le 2 & \quad -4\lambda_1 - \lambda_2 \le 0 \qquad (x_3) \\ & & \quad \lambda_1 \le 0,\ \lambda_2 \ge 0 \end{array}$$

Notar que el poliedro

$$D=\{(\lambda_1,\lambda_2) / \ \lambda_1+\lambda_2 \le 1, -4\lambda_1-\lambda_2 \le 0, \ \lambda_1 \le 0, \ \lambda_2 \ge 0\}$$

es un conjunto cerrado y acotado.

Denotaremos ahora los vértices del conjunto D por $(\lambda_1^{(i)},\lambda_2^{(i)})$ para $i=1,\ldots,I$, con lo cual el problema es equivalente a resolver:

$$\text{Min} \quad -2x_1 + \max_{i=1,\ldots,I} \{(2-2x_1)\lambda_1^{(i)} + (1-x_1)\lambda_2^{(i)}\}$$
$$\text{s. a.} \quad 0 \leq x_1 \leq 2$$

O bien equivalente al Problema Maestro:

$$\text{(PM)} \quad \text{Min} \quad -2x_1 + z$$
$$\text{s. a.} \quad z \geq (2-2x_1)\lambda_1^{(i)} + (1-x_1)\lambda_2^{(i)} \quad i=1,\ldots,I,$$
$$0 \leq x_1 \leq 2$$

En la k-ésima iteración, el método de Benders considera un Problema Maestro Reducido con parte de las I restricciones de optimalidad, digamos el problema:

$$
\begin{aligned}
\text{(PMR)}\quad \text{Min}\quad & -2x_1 + z \\
\text{s. a.}\quad & z \geq (2 - 2x_1)\lambda_1^{(i)} + (1 - x_1)\lambda_2^{(i)} \quad i=1,\ldots,k\text{-}1, \\
& 0 \leq x_1 \leq 2
\end{aligned}
$$

Suponga que el (PMR) tiene por solución óptima $(\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}}, \mathbf{z}^{\mathbf{k}})$, por lo tanto esta también será óptima para el Problema Maestro (PM) en la medida que cumpla:

$$\mathbf{z}^{\mathbf{k}} \geq (2 - 2\,\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}})\lambda_1^{(i)} + (1 - \boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}})\lambda_2^{(i)} \quad \text{para todo} \quad i=1,\ldots,I \ \mathbf{(*)}$$

Lo anterior es posible de verificar resolviendo el siguiente **Subproblema** (dual):

$$
\begin{aligned}
(\text{SP}) \quad \text{Max} \quad & (2 - 2\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}})\lambda_1 + (1 - \boldsymbol{x_1}^{\mathbf{k}})\lambda_2 & \\
\text{s. a.} \quad & \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 & (x_2) \\
& -4\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 & (x_3) \\
& \lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

En efecto, si $(\lambda_1^{(k)},\lambda_2^{(k)})$ denota la solución óptima de (SP), la condición **(*)** es equivalente a verificar que la satisface el valor óptimo de (SP), esto es si:

$$z^k \geq (2 - 2\,x_1^k)\lambda_1^{(k)} + (1 - x_1^k)\lambda_2^{(k)}$$

Que de cumplirse, el algoritmo termina con (x_1^k, z^k) como solución óptima del (PM).

En caso que esto no se cumpla, se agrega al (PMR) la (nueva) restricción:

$$z \geq (2 - 2x_1)\lambda_1^{(k)} + (1 - x_1)\lambda_2^{(k)}$$

Primera Iteración (k=1)

Resolvemos (PMR) sin la variable z y sin restricciones de optimalidad. Se fija $\mathbf{z^1=-\infty}$

Solución óptima: $\boldsymbol{x_1}^{\mathbf{1}} = 2$

Alternativa, dar cualquier solución factible $(0 \leq x_1 \leq 2)$

Resolvemos el (SP), obteniendo: $(\boldsymbol{\lambda}_1^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}_2^{(1)}) = (0,0)$

La condición (*) no se cumple. Se agrega al (PMR) la (primera) restricción de optimalidad: $z \geq 0$

Segunda Iteración (k=2)

Resolvemos (PMR) con la primera restricción de optimalidad

Solución óptima: $\boldsymbol{x_1^2}=2$ y $\mathbf{z^2}=0$

Resolvemos el (SP), obteniendo: $(\boldsymbol{\lambda}_1^{(1)},\boldsymbol{\lambda}_2^{(1)})=(0,0)$

La condición (*) ahora se cumple pues equivale a $0\geq 0$ y se ha alcanzado la solución óptima del (PM).

La solución óptima en las variables originales equivale entonces a:

$$x_1=2,\ x_2=0,\ x_3=x_3\ (1/2\leq x_3\leq 1)$$