Caracterización de compactos en $\mathbb{R}^n$

Sabemos que todo subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado. Veamos que el recíproco de esta afirmación es cierto en el espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual. Para llegar a esto, lo principal es probar que todo intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es compacto.

Teorema: El intervalo $I = [0,1]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

· **Demostración:** Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto de $I = [0,1]$,

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda.$$

Consideremos el conjunto S formado por los puntos $x \in [0,1]$ tales que $[0,x]$ es cubierto por un subcubrimiento finito de $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

- $S \neq \emptyset$ ya que $0 \in S$.
- S está acotado superiormente (por 1).

Por el axioma de completitud, podemos definir

$$x_0 = \sup(S) \in [0,1].$$

Para concluir la prueba, basta con probar que $x_0 = 1 \in S$.

Supongamos que $0 \leq x_0 < 1$. Notamos primero que $0 < x_0$. En efecto, como $0 \in S$, podemos hallar U_{λ_0} tal que $0 \in U_{\lambda_0}$. Por otro lado, al ser U_{λ_0} abierto, existe $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $[0,\varepsilon] \subseteq U_{\lambda_0}$. Así, $\varepsilon \in S$ y $0 < \varepsilon \leq x_0$.

Suponiendo entonces $0 < x_0 < 1$, sea $U_{\lambda_{x_0}}$ tal que $x_0 \in U_{\lambda_{x_0}}$. Al ser $U_{\lambda_{x_0}}$ abierto, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq U_{\lambda_{x_0}}$ y

$$0 \leq x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \leq 1.$$

Luego, como $x_0 - \varepsilon$ no es una cota superior de S, existe $x_1 \in S$ tal que

$$x_0 - \varepsilon \leq x_1 \leq x_0.$$

Por otro lado, $[0, x_1]$ puede ser cubierto con un subcubrimiento finito de $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, digamos

$$[0, x_1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda^i_{x_1}}.$$

Luego,

$$[0, x_0 + \varepsilon] = [0, x_1] \cup [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$
$$\subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda^i_{x_1}}\right) \cup U_{\lambda_{x_0}}.$$

De esto se sigue que $x_0 + \varepsilon \in S$, lo que contradice el hecho de que $x_0 = \sup(S)$. Por lo tanto, $x_0 = 1$. Y usando el argumento anterior, se puede probar además que $x_0 = 1 \in S$. Así, $[0, 1]$ puede ser cubierto con un subcubrimiento finito de $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, por lo cual $[0, 1]$ es compacto. ■

Como cualquier intervalo de la forma $[a, b]$ es homeomorfo a $[0, 1]$, y la compacidad es un invariante topológico, se sigue que:

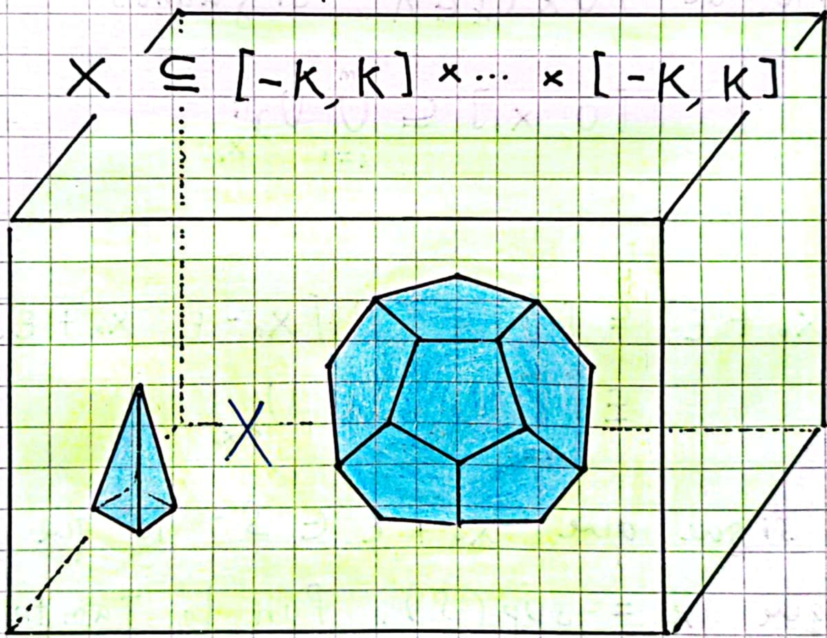
Corolario: $[a, b]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Podemos aplicar el resultado anterior y otras propiedades de la compacidad para probar el siguiente resultado central:

Teorema (Heine-Borel): Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solamente si es cerrado y acotado.

· **Demostración:** La implicación directa ya es conocida. Ahora supongamos que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado. Luego, existe $K > 0$ tal que

$$X \subseteq [-K, K] \times \cdots \times [-K, K] \quad (n \text{ veces}).$$



Por un lado, al ser cada $[-K, K]$ compacto en $\mathbb{R}$, se tiene por el teorema de Tychonoff que $[-K, K] \times \cdots \times [-K, K]$ es compacto en $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, al ser X cerrado en $\mathbb{R}^n$ y $X \subseteq [-K, K] \times \cdots \times [-K, K]$, se tiene que X es cerrado en $[-K, K] \times \cdots \times [-K, K]$. Así, X es un subconjunto cerrado del compacto $[-K, K] \times \cdots \times [-K, K]$, por lo cual X es compacto. ■

Continuidad uniforme:

En esta sección demostraremos el teorema de valores extremos y el teorema de continuidad uniforme como aplicación de las propiedades de la compacidad a la teoría de funciones continuas.

Teorema de valores extremos: Sea $f:(M,d)\to\mathbb{R}$ una función continua tal que (M,d) es compacto. Entonces, existen $x_0, y_0 \in M$ tales que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0), \quad \forall x \in M.$$

Los valores $f(x_0)$ y $f(y_0)$ se conocen como mínimo y máximo absoluto de f.

• **Demostración:** Al ser f continua y M compacto, se tiene que $f(M)$ es compacto en $\mathbb{R}$. En particular, $f(M)$ es cerrado y acotado. Así, sean

$$m = \inf(f(M)) \quad y \quad M = \sup(f(M)),$$

los cuales existen por ser $f(M)$ acotado. Por otro lado, al ser m y M puntos de adherencia de $f(M)$, y $f(M)$ cerrado, se tiene que $m, M \in f(M)$. Entonces, existen $x_0, y_0 \in M$ tales que $m = f(x_0)$ y $M = f(y_0)$. ∎

La continuidad uniforme es un tipo de continuidad más fuerte que la habitual. Informalmente hablando, el delta que se halla a partir del epsilon no depende del punto del dominio de la función donde se estudia la continuidad. Formalmente se define como:

Definición: Sea $f:(M,d)\to(N,\rho)$ una función. Diremos que f es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \ / \ d(x,y)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

Ejemplos:

1) Cualquier función afín $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b \quad (a,b\in\mathbb{R})$
es uniformemente continua.

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es uniformemente continua.
$f(x)=|x|$

3) Cualquier función Lipschitziana es uniformemente continua.

4) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ es uniformemente continua.
$f(x)=\sqrt{x}$

5) Cualquier función no acotada $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con dominio D acotado no es uniformemente continua.
Por ejemplo, $\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$.

6) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$ no es uniformemente continua.

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ no es uniformemente continua.
$f(x)=e^x$

Observación: Se sigue de la definición que toda función uniformemente continua es continua. Por otro lado, los ejemplos 5), 6) y 7) muestran funciones continuas que no son uniformemente continuas. Por un teorema próximo a probar, toda función continua con dominio compacto sí es uniformemente continua. Para poder probar este teorema, necesitamos conocer una propiedad de los espacios compactos conocida como el número de Lebesgue.

En lo que sigue, dado un espacio métrico (M, d), $X \subseteq M$ y $x_0 \in M$, recuerde que:

$$d(x_0, X) = \inf \{ d(x_0, x) \,/\, x \in X \}.$$

$$\operatorname{diam}(X) = \sup \{ d(x, x') \,/\, x, x' \in X \}.$$

Lema del número de Lebesgue: Sea (M, d) un espacio métrico compacto y $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de M. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para cada $X \subseteq M$ con $\operatorname{diam}(X) < \delta$, existe un elemento de $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ que contiene a X. A tal δ se le conoce como un número de Lebesgue del cubrimiento $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

- **Demostración:**

i) $M \in \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: En este caso, claramente cualquier $\delta > 0$ es un número de Lebesgue de $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

ii) $M \notin \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: Al ser M compacto, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$ tales que

$$M = U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_m}.$$

- Construcción de δ:

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, considere $M - U_{\lambda_i}$ (el cual es $\neq \emptyset$ ya que $M \notin \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.)

Sea $f : M \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} d(x, M - U_{\lambda_i}), \quad \forall x \in M.$$

Al ser f continua y M compacto, se tiene por el teorema de los valores extremos que f posee mínimo absoluto, al cual llamaremos δ.

Para ver que $\delta > 0$, note que $f(x) > 0$ $\forall x \in M$. De lo contrario, de existir $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = 0$, se tendría que

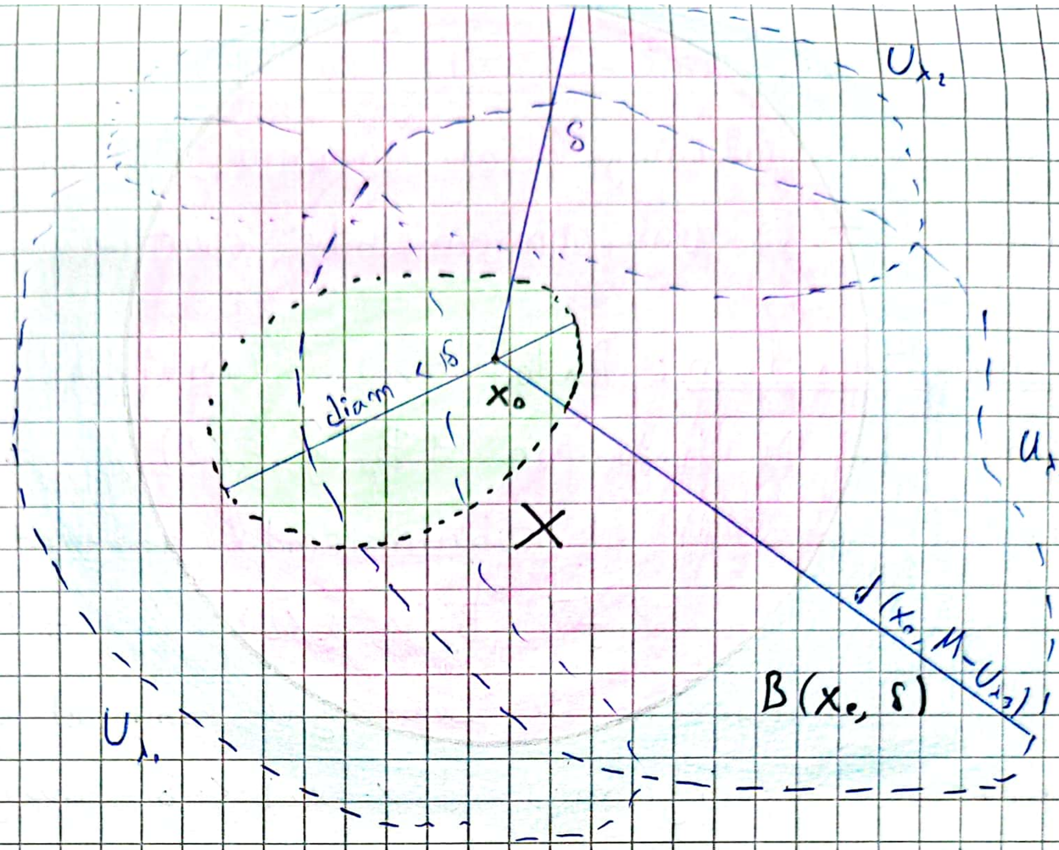
$$d(x_0, M - U_{\lambda_i}) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Luego, $x_0 \in \overline{M - U_{\lambda_i}} = M - U_{\lambda_i}$ $\forall i = 1, \ldots, m.$, es decir, $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i} = M$ (lo cual es una contradicción).

- $\forall X \subseteq M \,/\, \operatorname{diam}(X) < \delta \Rightarrow \exists\, i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $X \subseteq U_{\lambda_i}$.

Sea $x_0 \in X$. Note que $X \subseteq B(x_0, \delta)$. Por otro lado, sea $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$d(x_0, M - U_{\lambda_j}) = \max_{i=1,\ldots,m} \{ d(x_0, M - U_{\lambda_i}) \}.$$



Para tal j tenemos

$$d(x_0, M-U_{\lambda_j}) \geq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} d(x_0, M-U_{\lambda_i}) = f(x_0) \geq \delta .$$

Entonces, $X \subseteq B(x_0,\delta) \subseteq U_{\lambda_j}$. En efecto, sea $x \in B(x_0,\delta)$. Para ver que $x \in U_{\lambda_j}$, hay que mostrar que $d(x, M-U_{\lambda_j}) > 0$.

$$\underbrace{d(x_0, M-U_{\lambda_j})}_{\geq \delta} - d(x, M-U_{\lambda_j}) \leq |d(x_0, M-U_{\lambda_j}) - d(x, M-U_{\lambda_j})|$$
$$\leq d(x_0, x) < \delta$$

$$\delta - d(x, M-U_{\lambda_j}) \leq d(x_0, M-U_{\lambda_j}) - d(x, M-U_{\lambda_j}) \leq d(x_0,x) < \delta$$
$$\delta - d(x, M-U_{\lambda_j}) < \delta$$
$$0 < d(x, M-U_{\lambda_j}).$$

$\therefore x \in U_{\lambda_j}$ ∎

Escaneado con CamScanner

Teorema de continuidad uniforme: Sea $f:(M,d)\to(N,\rho)$ una función continua con dominio (M,d) compacto. Entonces, f es uniformemente continua.

• **Demostración:** Dado $\varepsilon>0$, considere el cubrimiento abierto de N dado por $\{B_\rho(y,\varepsilon/2) \,/\, y\in N\}$. Podemos formar para M el cubrimiento abierto

$$\{f^{-1}(B_\rho(y,\varepsilon/2)) \,/\, y\in N\}.$$

Sea $\delta>0$ un número de Lebesgue para el cubrimiento anterior. Supongamos $d(x_1,x_2)<\delta$. Luego, como $\operatorname{diam}(\{x_1,x_2\})<\delta$, se tiene que existe $y\in N$ tal que

$$\{x_1,x_2\}\subseteq f^{-1}(B_\rho(y,\varepsilon/2)).$$

Entonces, $f(x_1)\in B_\rho(y,\varepsilon/2)$ y $f(x_2)\in B_\rho(y,\varepsilon/2)$, y usando la desigualdad triangular, tenemos que

$$\rho(f(x_1),f(x_2))\leq\rho(f(x_1),y)+\rho(f(x_2),y)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$\therefore$ f es uniformemente continua. ■