Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Topología y Análisis Real
Primer Semestre de 2024

Tarea 3

fecha de entrega: 5 de junio de 2024

1. Sea (M, d) un espacio métrico compacto.

   (a) Demuestre que si M es localmente conexo, entonces posee un número finito de componentes conexas. (2 puntos)

   (b) Dado $x \in M$, sea C_x su componente conexa, y

   $$\mathfrak{C}\mathrm{lopen}(x) = \bigcap \{U \,/\, U \text{ es abierto y cerrado en } M \text{ y } x \in U\}.$$

   Demuestre que $C_x = \mathfrak{C}\mathrm{lopen}(x)$. (Sugerencia: Demuestre que $\mathfrak{C}\mathrm{lopen}(x)$ es conexo, usando reducción al absurdo). (3 puntos)

2. (a) Demuestre que todo espacio métrico compacto es completo. (3 puntos)

   (b) Demuestre que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ está contenida en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Use este hecho para demostrar que $\mathbb{R}^n$ es completo. (2 puntos)