ECUACIONES

1. Estudiar existencia y simplificar:

(i) $\dfrac{ax-ay-x+y}{ax+ay-x-y}$ (ii) $\dfrac{x^2-a^2-b^2+2ab}{x^2+2ax+a^2-b^2}$

(iii) $\dfrac{x^4-1}{x^3-1}\cdot\left[1-\dfrac{x}{(x+1)^2}\right]\div\left(\dfrac{1}{x}+x\right)$ (iv) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4x}+\dfrac{1}{4}-x\right)$

2. Estudiar existencia y resolver las siguientes ecuaciones racionales:

(i) $\dfrac{3x-\frac{1}{4}}{2\cdot\frac{3}{4}}-\dfrac{x-\frac{1}{2}}{6}=\dfrac{4x-1}{6}$ (ii) $\dfrac{x-1}{2x^2-50}+\dfrac{4}{3x-15}-\dfrac{5}{2x+10}=\dfrac{3}{2x-10}$

(iii) $\dfrac{x^2}{x^2-4}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{2x}{2x-4}$ (iv) $\dfrac{2}{3x^2-18x+27}-\dfrac{5}{(2x-6)^2}=\dfrac{2}{5x-15}$

(v) $\dfrac{a\cdot(x-a)}{b}+\dfrac{b\cdot(x-b)}{a}=x$ (vi) $\dfrac{x+a}{a-b}+\dfrac{x-a}{a+b}=\dfrac{x+b}{a+b}+\dfrac{2\cdot(x-b)}{a-b}$

3. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

(i) $a^x-3=0$ (ii) $a^x+2=0$ (iii) $a^{2x}-a^x=0$ se supone $a>0,\ a\neq 1$

(iv) $5^{2x}-25=0$ (v) $4^{x/2}-8^x=0$ (vi) $-5.2^{x-1}+4^{x-1}+6=0$

(vii) $9^{x+2}+3=4\cdot 3^{x+2}$ (viii) $11\cdot 4^{2x}-17\cdot 2^{3x}+17\cdot 2^x-11=0$

4. Estudiar existencia y resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

(i) $(\log_b x)^2+\log_b x-6=0$ (ii) $(\log_b x)^3-\left(\log_{\frac{1}{b}} x^{\sqrt{6}}\right)^2+22\log_{b^2} x-6=0$

(iii) $\log_2(x-3)+\log_2(x-2)=1$ (iv) $-1+\log_{x-3}(2x-3)=1-\log_{x-3}(x-5)$

5. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

(i) $\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})-\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{2})=2$ (ii) $\operatorname{sen}^2 x+\dfrac{\cos x}{\operatorname{tg} x}=\operatorname{sen} x-\cos^2 x$

(iii) $3\cdot\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x-3\cdot\cos x=0$ (iv) $-\operatorname{sen}^2 x\cdot(2\cdot\cos x-3)+\cos x+5=0$

RESOLUCIÓN

Ejercicio 1

i) $$\frac{ax-ay-x+y}{ax+ay-x-y} = \frac{a(x-y)-(x-y)}{a(x+y)-(x+y)} = \frac{(a-1)(x-y)}{(a-1)(x+y)} \overset{(1)}{=} \frac{x-y}{x+y}$$

Las condiciones de existencia son: $a-1\neq 0 \wedge x+y\neq 0$

En el paso (1) se aplica la propiedad cancelativa del producto.

ii) $$\frac{x^2-a^2-b^2+2ab}{x^2+2ax+a^2-b^2} \overset{(1)}{=} \frac{x^2-(a^2+b^2-2ab)}{(x^2+2ax+a^2)-b^2} \overset{(2)}{=} \frac{x^2-(a-b)^2}{(x+a)^2-b^2} \overset{(3)}{=}$$

$$\frac{[x-(a-b)]\cdot[x+(a-b)]}{[(x+a)-b]\cdot[(x+a)+b]} \overset{(4)}{=} \frac{x-a+b}{x+a+b}$$

Existencia: $x + a - b \neq 0 \;\wedge\; x + a + b \neq 0$

Operaciones realizadas:

(1) Se ordenan los términos en forma conveniente.

(2) Se reconocen dos "cuadrados perfectos"

(3) Se reconocen dos productos conjugados o "productos notables" y se factorea la expresión, en este paso se estudia la existencia y se prepara la expresión para simplificarla.

(4) Se simplifica la expresión.

iii) $$\frac{x^4-1}{x^3-1}\cdot\left[1-\frac{x}{(x+1)^2}\right]\div\left(\frac{1}{x}+x\right) \overset{(1)}{=} \frac{(x^2-1)\cdot(x^2+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}\cdot\frac{(x+1)^2-x}{(x+1)^2}\div\frac{1+x^2}{x} \overset{(2)}{=}$$

$$\frac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}\cdot\frac{x^2+2x+1-x}{(x+1)^2}\cdot\frac{x}{x^2+1} \overset{(3)}{=} \frac{x}{x+1}$$

Existencia: $x\neq 1 \;\wedge\; x\neq -1 \;\wedge\; x\neq 0$

Operaciones:

(1) En el primer término se reconocen productos notables; en el segundo y tercero se hace denominador común.

(2) Se reconoce otro producto notable, en el segundo término es necesario desarrollar el cuadrado del binomio y el tercer término se invierte, en este caso se debe cuidar que no sea 0 numerador ni denominador.

(3) Se estudia la existencia y se simplifica.

iv) $$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot\left(\frac{3}{4x}+\frac{1}{4}-x\right)\overset{(1)}{=}\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)\cdot(1+x)}\cdot\frac{3+x-4x^2}{4x}\overset{(2)}{=}$$

$$\frac{1+2x+x^2-(1-2x+x^2)}{(1-x)\cdot(1+x)}\cdot\frac{-(4x+3)\cdot(x-1)}{4x}\overset{(3)}{=}\frac{4x\cdot(4x+3)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot 4x}\overset{(4)}{=}\frac{4x+3}{x+1}$$

Justifique los pasos (1) al (4).

Obsérvese el cambio de signo en numerador y denominador en el 3er paso.

Ejercicio 2

i) $$\frac{3x-\frac{1}{4}}{2\cdot\frac{3}{4}}-\frac{x-\frac{1}{2}}{6}=\frac{4x-1}{6}\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{24x-2}{12}-\frac{2x-1}{12}=\frac{8x-2}{12}\overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$24x-2-2x+1=8x-2\overset{(3)}{\Rightarrow}22x-8x=-1\Rightarrow 14x=-1\Rightarrow\quad x=-\frac{1}{14}$$

Existencia: $\forall\ x\in R$

Operaciones:

(1) Se realiza el denominador común 12.

(2) Se elimina el común denominador: aplicación de la propiedad cancelativa del producto, multiplicando ambos miembros de la igualdad por 12.

(3) Se despeja la incógnita aplicando la propiedad cancelativa de la suma y a continuación la del producto

ii) $\dfrac{x-1}{2x^2-50}+\dfrac{4}{3x-15}-\dfrac{5}{2x+10}=\dfrac{3}{2x-10}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x-1}{2(x-5)\cdot(x+5)}+\dfrac{4}{3(x-5)}-\dfrac{5}{2(x+5)} = \dfrac{3}{2(x-5)}$

Existencia: $x \neq \pm 5$

$\Rightarrow \quad \dfrac{3(x-1)+8(x+5)-15(x-5)}{6(x-5)(x+5)}=\dfrac{9(x+5)}{6(x-5)(x+5)}$

$\Rightarrow$ 3x – 3 + 8x +40 – 15x +75 = 9x +45 $\quad\Rightarrow\quad$ – 4x – 9x = 45 – 112

$\Rightarrow$ – 13x = – 67 $\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{67}{13}$

iii) $\dfrac{x^2}{x^2-4}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{2x}{2x-4}$

Existencia: $x \neq \pm 2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{2x}{2(x-2)} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x^2+3(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)}$

$\Rightarrow \quad x^2+3x-6=x^2+2x \quad\Rightarrow\quad$ x = 6

iv) $\dfrac{2}{3x^2-18x+27}-\dfrac{5}{(2x-6)^2}=\dfrac{2}{5x-15} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{2}{3(x-3)^2}-\dfrac{5}{4(x-3)^2}=\dfrac{2}{5(x-3)}$

Existencia $x \neq 3$

$\Rightarrow \quad \dfrac{40-75}{60(x-3)^2}=\dfrac{24(x-3)}{60(x-3)^2} \quad\Rightarrow$ 24(x – 3) = - 35 $\quad\Rightarrow\quad x-3=-\dfrac{35}{24} \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{37}{24}$

v) $\frac{a\cdot(x-a)}{b}+\frac{b\cdot(x-b)}{a}=x \quad\Rightarrow\quad \frac{a^2(x-a)+b^2(x-b)}{ab}=x \quad\Rightarrow$

$(a^2+b^2)\cdot x-(a^3+b^3)=ab\cdot x \quad\Rightarrow\quad (a^2+b^2-ab)\cdot x=(a+b)(a^2+b^2-ab)$

$\Rightarrow \qquad x = a + b$

vi) $\frac{x+a}{a-b}+\frac{x-a}{a+b}=\frac{x+b}{a+b}+\frac{2\cdot(x-b)}{a-b} \quad\Rightarrow$ Existencia: $\forall\ x\in R$

$\Rightarrow \frac{(a+b)(x+a)+(a-b)(x-a)}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a-b)(x+b)+2(a+b)(x-b)}{(a+b)(a-b)}$

$(a + b + a – b)\cdot x + (a + b – a + b)\cdot a = (a – b + 2a + 2b)\cdot x + (a – b –2a – 2b)\cdot b$

$(2a – 3a – b)\cdot x \ = \ – 2ba – ab – 3b^2 \Rightarrow – (a + b)\cdot x = – 3(a + b)\cdot b \ \Rightarrow \quad x = 3\cdot b$

Ejercicio 3

i) $a^x-3=0 \quad\Rightarrow\quad a^x=3 \quad\Rightarrow \qquad x=\log_a(3)$

ii) $a^x+2=0$ N.T.S. (No tiene solución porque $a^x>0\ \ \forall\ x\in R$)

iii) $a^{2x}-a^x=0$ se supone $a > 0,\ a \neq 1$

Para resolverla se efectúa un cambio de variable: $a^x=t\ \Rightarrow a^{2x}=(a^x)^2=t^2$

$t^2-t=0\ \Rightarrow \begin{cases} t=0\ \Rightarrow a^x=0\Rightarrow \text{N.T.S} \\ t=1\ \Rightarrow a^x=1\ \Rightarrow x=0 \end{cases} \quad\Rightarrow \qquad x = 0$

iv) $5^{2x} - 25 = 0 \;\Rightarrow\; 5^{2x} = 5^2 \;\Rightarrow\;$ $x = 1$

v) $4^{x/2} - 8^x = 0$

$\Rightarrow$ la llevamos a una base común: $2^x - 2^{3x} = 0 \;\Rightarrow\; x = 3x \;\Rightarrow\;$ $x = 0$

vi) $-5.2^{x-1} + 4^{x-1} + 6 = 0$

Primero la llevamos a una base común: $-5.2^{x-1} + 2^{2(x-1)} + 6 = 0$

Después realizamos un cambio de variable: $2^{x-1} = t \;\Rightarrow\; x - 1 = \log_2(t)$

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} t = 2 \Rightarrow x = 1 + \log_2(2) \\ t = 3 \;\Rightarrow x = 1 + \log_2(3) \end{cases} \;\Rightarrow\; x = 2 \vee x = 1 + \log_2(3)$$

vii) $9^{x+2} + 3 = 4 \cdot 3^{x+2}$

$3^{2(x+2)} - 4 \cdot 3^{x+2} + 3 = 0$

haciendo $t = 3^{x+2}$, queda: $t^2 - 4t + 3 = 0 \;\Rightarrow\; t = 1 \wedge t = 3$

$3^{x+2} = 1 \;\Rightarrow\; x+2 = 0 \;\Rightarrow\;$ $x = -2$

$3^{x+2} = 3 \;\Rightarrow\; x+2 = 1 \;\Rightarrow\;$ $x = -1$

viii) $11 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 2^{3x} + 17 \cdot 2^x - 11 = 0$

$11 \cdot 2^{4x} - 17 \cdot 2^{3x} + 17 \cdot 2^x - 11 = 0 \;\Rightarrow\; 11 t^4 - 17 t^3 + 17 t - 11 = 0$, con $t = 2^x$

Admite raíces evidentes 1 y –1, entonces aplicamos Ruffini:

	11	-17	0	17	-11
1		11	-6	-6	11
	11	-6	-6	11	0
-1		-11	17	-11	
	11	-17	11	0	

Ahora terminamos de resolver $11 \cdot t^2 - 17 \cdot t + 11 = 0$ N.T.R.R.

$2^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$2^x = -1$ N.T.S.

Ejercicio 4

i) $(\log_b x)^2 + \log_b x - 6 = 0$

Se realiza el cambio de variable $z = \log_b(x) \quad \therefore \quad x = b^z$

$z^2 + z - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2 \ , \ z = -3 \quad \Rightarrow \quad x = b^2 \ \vee \ x = b^{-3} = \dfrac{1}{b^3}$

ii) $(\log_b x)^3 - \left(\log_{\frac{1}{b}} x^{\sqrt{6}} \right)^2 + 22 \log_{b^2} x - 6 = 0$

Existencia: $x > 0$

Primero aplicamos propiedades del logaritmo:

$(\log_b x)^3 - (-\sqrt{6}\cdot\log_b x)^2 + 11\cdot\log_b x - 6 = 0$

$(\log_b x)^3 - 6\cdot(\log_b x)^2 + 11\cdot\log_b x - 6 = 0$

Luego realizamos el cambio de variable $z = \log_b x \quad \therefore \quad x = b^z$

$z^3 - 6\cdot z^2 + 11\cdot z - 6 = 0$

Admite raíz evidente z = 1, entonces aplicamos Ruffini:

	1	– 6	11	– 6
1		1	– 5	6
	1	– 5	6	0

Ahora se resuelve $z^2 - 5z + 6 = 0$, que tiene raíces z = 2 y z = 3

Deshaciendo el cambio de variable llegamos a la solución:

$$x = b \ \vee \ x = b^2 \ \vee \ x = b^3$$

iii) $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) = 1$

Existencia: x > 3

Aplicamos propiedades de los logaritmos:

$\log_2(x-3)(x-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x-2) = 2^1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Rightarrow$ x = 1 $\vee$ x = 4 $\therefore$ considerando la condición de existencia, queda: x = 4

iv) $-1+\log_{x-3}(2x-3)=1-\log_{x-3}(x-5) \Rightarrow \log_{x-3}(2x-3)+\log_{x-3}(x-5)=2$

Existencia: x > 5

Por propiedades del logaritmo:

$\log_{x-3}[(2x-3)\cdot(x-5)]=2 \quad \Rightarrow \quad (2x-3)(x-5)=(x-3)^2 \quad \Rightarrow$

$2x^2-13x+15=x^2-6x+9 \quad \Rightarrow \quad x^2-7x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \ \wedge \ x = 6$

Por la condición de existencia la solución es: $x = 6$

Ejercicio 5

i) $\mathrm{sen}(x+\frac{\pi}{2})-\mathrm{sen}(x-\frac{\pi}{2})=2$

Observando que: $\mathrm{sen}(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ y $\mathrm{sen}(x-\frac{\pi}{2}) = -\cos(x)$

queda: $2\cdot\cos(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad \cos(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi \quad \forall \ k \in Z$

ii) $\mathrm{sen}^2 x+\frac{\cos x}{\mathrm{tg}\, x}=\mathrm{sen}\, x-\cos^2 x \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \mathrm{sen}^2 x+\frac{\cos^2 x}{\mathrm{sen}\, x}=\mathrm{sen}\, x-\cos^2 x$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad 1+\frac{1-\mathrm{sen}^2(x)}{\mathrm{sen}(x)}=\mathrm{sen}(x) \quad \overset{(3)}{\Rightarrow} \quad \mathrm{sen}(x)+1-\mathrm{sen}^2(x)=\mathrm{sen}^2(x)$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow}\quad 2u^2 - u - 1 = 0 \quad \overset{(5)}{\Rightarrow} \quad u = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases} \quad \overset{(6)}{\Rightarrow}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \quad \forall \ k \in Z$$

Justificación de los pasos:

(1) se sustituye tg(x) por $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

(2) se aplica la fórmula $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

a la vez que se sustituye $\cos^2 x$ por $1 - \operatorname{sen}^2 x$

(3) se multiplica por sen(x)

(4) se realiza el cambio de variable u = sen(x)

(5) se resuelve la ecuación

(6) se deshace el cambio de variable observando que el dominio de la función

Arcsen es el intervalo [- 1 , 1]

iii) $3 \cdot \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 3 \cdot \cos x = 0 \ \overset{(1)}{\Rightarrow} \ 3\cdot\cos^2 x + (1 - \cos^2 x) - 3\cdot\cos x = 0$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \ 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \ \overset{(3)}{\Rightarrow} \ 2u^2 - 3u + 1 = 0 \ \overset{(4)}{\Rightarrow} \ u = 1 \ \wedge \ u = \frac{1}{2}$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} \ x = 2k\pi \ \wedge \ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \forall \ k \in Z$$

Se deja como ejercicio la justificación de los pasos ejecutados.

iv) $-\,\text{sen}^2 x\cdot(2\cdot\cos x-3)+\cos x+5=0$

$$-(1-\cos^2 x)(2\cos x-3)+\cos x+5=0$$

$$2\cos^3 x-3\cos^2 x-\cos x+8=0$$

con el cambio de variable u = cos(x), queda una ecuación algebraica

$2u^3-3u^2-u+8=0$ que no tiene raíces racionales.

¿Y ahora, qué hacemos?

$$|\cos(x)|\ \leq\ 1\ \Rightarrow\ |2\cos^3 x-3\cos^2 x-\cos x|\leq 6$$

de donde se concluye que la ecuación planteada N.T.S.