

PRÁCTICO 8
Relaciones de Recurrencia II

Ejercicio 1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

- (a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.
- (b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n .

Ejercicio 2. Hay n estudiantes formando una fila y cuando suena el silbato cada estudiante puede (no está obligado) intercambiar de lugar con su compañero de adelante o de atrás (en caso de que los haya). ¿De cuántas formas diferentes pueden quedar esos n estudiantes luego de haber sonado el silbato?

Ejercicio 3. Resolver las relaciones de recurrencia:

- (a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.
- (b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.
- (c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.
- (d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \in \mathbb{N}$, con $f_0 = f_1 = 1$.

Ejercicio 4. (Primer Parcial 2009)

Si a_n verifica que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$, con $a_0 = 1$, entonces:

- (a) $a_{50} = 2^{50}$; (b) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$; (c) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$; (d) $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

Ejercicio 5. (Parcial 2001)

Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n, \quad \forall n \geq 2.$$

Hallar α , β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

Ejercicio 6. (Examen Febrero 2009)

Para un campeonato de ajedrez se tiene una cantidad par de jugadores participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los participantes juegan exactamente un partido). Sea a_k la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ jugadores.

- (a) Calcular a_1, a_2, a_3 .
- (b) Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.
- (c) Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times \dots \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.