Monte Carlo Estándar

Definición, Intervalo de Confianza, Error Relativo

Leslie Murray

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina

Mayo, 2024

Ley Débil de los Grandes Números

- Sea X una v.a. en el espacio Ω
  - con *fdp* $f_X(x), \forall x \in \Omega$, si X es continua,
  - con densidad de masa $\mathbb{P}\{X = x_i\} = p_i,\ \forall x_i \in \Omega$, si X es discreta.
- Sea $\mu = \mathbb{E}\{X\}$.
- Sea $\sigma^2 = \mathbb{V}\{X\} = \mathbb{E}\{(X-\mu)^2\} = \mathbb{E}\{X^2\} - \mu^2$
- Sea $\{X^{(i)}\}_{i=1}^n$ una sucesión de lecturas u observaciones independientes de X.
- Cada $X^{(i)}$ es una v.a. aleatoria en si misma llamada *copia* o *replicación* de X.
- $\{X^{(i)}\}_{i=1}^n$ es, por lo tanto, una sucesión de v.a. *i.i.d.*
- Llamamos $S_n = \sum_{i=1}^n X^{(i)}$.
- De acuerdo a la Ley Débil de los Grandes Números:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Ley Débil de los Grandes Números – Consecuencias

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

- Si n es "suficientemente grande", se puede aceptar que:

$$\frac{S_n}{n} \approx \mu$$

- ¿Qué tan grande tiene que ser n para que $\frac{S_n}{n}$ esté cerca de μ?
- ¿Cuál sería un indicador de cercanía (distancia) entre $\frac{S_n}{n}$ y μ?
- ¿Cuanto debe valer n para que se garantice una distancia entre $\frac{S_n}{n}$ y μ?
- O, a la inversa, dado un valor de n, ¿a qué distancia quedan $\frac{S_n}{n}$ y μ?

Estimador

Definición. $\widehat{\mu} = \dfrac{S_n}{n}$ es el *estimador estándar* (o *crudo*) de μ.

$\square$

- $\widehat{\mu}$ es una v.a. en si misma.
- $\mathbb{E}\{\widehat{\mu}\} = \mathbb{E}\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\} = \dfrac{1}{n}\mathbb{E}\{S_n\} = \dfrac{1}{n} n\mu = \mu \;\leftarrow\; \widehat{\mu}$ es un estimador sin sesgo de μ
- $\mathbb{V}\{\widehat{\mu}\} = \mathbb{V}\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\} = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}\{S_n\} = \dfrac{1}{n^2} n\mathbb{V}\{X\} = \dfrac{\sigma^2}{n} \;\leftarrow\; \widehat{\mu}$ es tanto menos disperso cuanto menos lo es X y cuanto mayor es n.

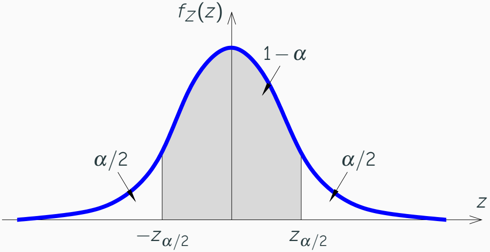
Teorema Central del Límite – Estimador

De acuerdo al Teorema Central del Límite (en cualquiera de las siguientes dos formas equivalentes):

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2}dy$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{\widehat{\mu} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} < z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2}dy$$

Esto significa que $\dfrac{\widehat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$, o lo que es lo mismo, $\widehat{\mu} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$.



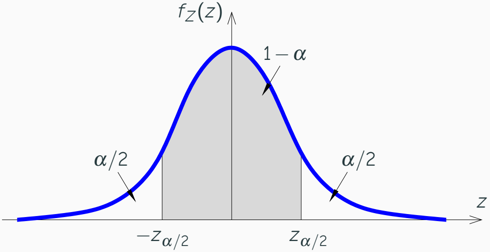
$$z = \frac{\widehat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$$\mathbb{P}\left\{-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}\left\{-z_{\alpha/2} \leq \frac{\widehat{\mu}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}\left\{-z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \leq \widehat{\mu}-\mu \leq z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\right\} = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}\left\{\widehat{\mu}-z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \widehat{\mu}+z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$



$$z = \frac{\widehat{\mu} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

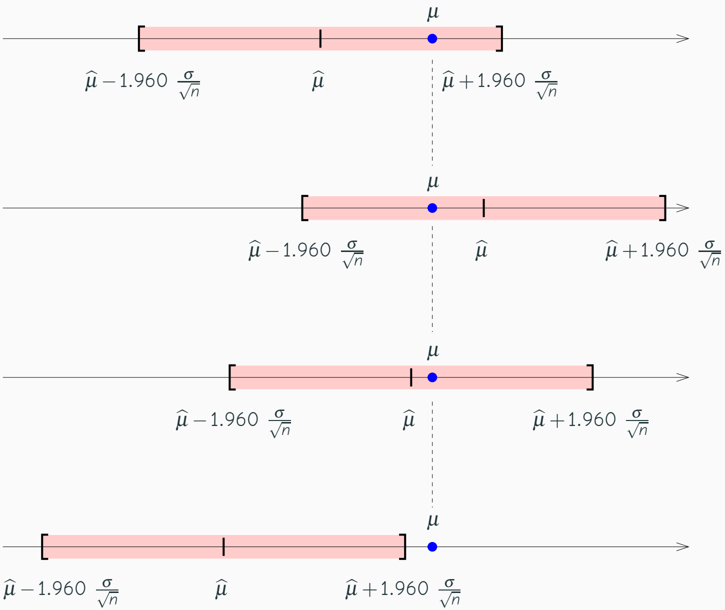
$$\mathbb{P}\left\{\widehat{\mu} - 2.576\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \widehat{\mu} + 2.576\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \ 99.00\%$$

$$\mathbb{P}\left\{\widehat{\mu} - 1.960\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \widehat{\mu} + 1.960\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \ 95.00\%$$

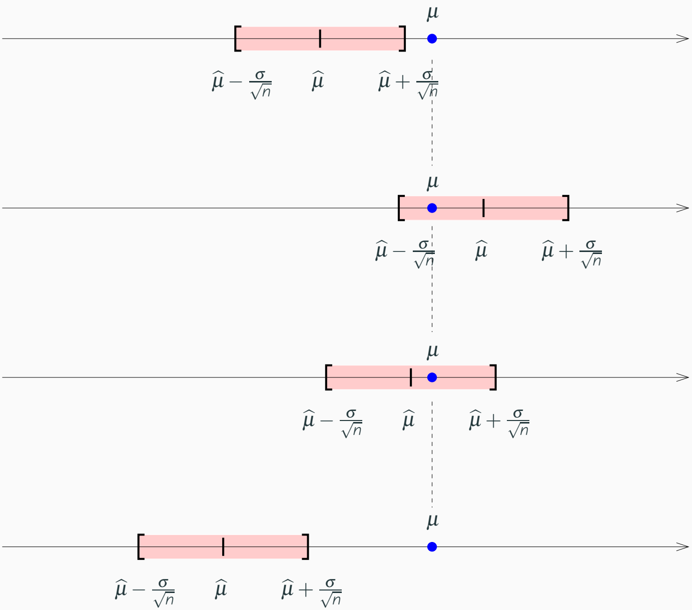
$$\mathbb{P}\left\{\widehat{\mu} - 1.645\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \widehat{\mu} + 1.645\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \ 90.00\%$$

$$\mathbb{P}\left\{\widehat{\mu} - 1.000\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \widehat{\mu} + 1.000\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \ 68.26\%$$

Ejemplo – Intervalo de Confianza 95%



Ejemplo – Intervalo de Confianza 68.26%



Intervalo de Confianza – Resumen

Si se quiere estimar la esperanza μ de una variable X con distribución conocida:

1. Sortear n valores, $X^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$, de la distribución de X.
2. Calcular la suma $S_n = \sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$.
3. Determinar el valor del estimador $\widehat{\mu} = \dfrac{S_n}{n}$

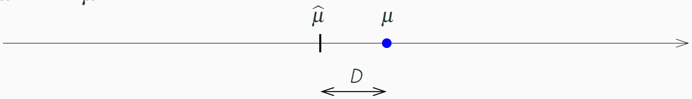
Luego es posible asegurar, por ejemplo, que:

- μ está en el intervalo $\left[\widehat{\mu} - 2.576\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \widehat{\mu} + 2.576\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ con probabilidad 99.00%
- μ está en el intervalo $\left[\widehat{\mu} - 1.960\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \widehat{\mu} + 1.960\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ con probabilidad 95.00%
- μ está en el intervalo $\left[\widehat{\mu} - 1.645\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \widehat{\mu} + 1.645\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ con probabilidad 90.00%
- μ está en el intervalo $\left[\widehat{\mu} - 1.000\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \widehat{\mu} + 1.000\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ con probabilidad 68.26%

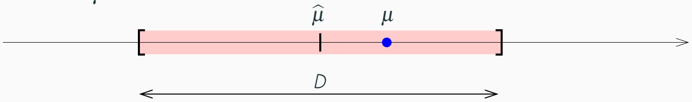
El ancho total de cualquier Intervalo de Confianza es proporcional a $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Intervalo de Confianza – Error Relativo

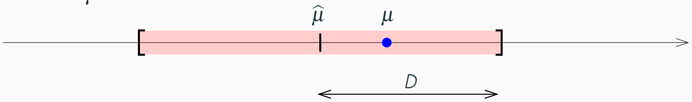
- $ER_c = \dfrac{D}{\mu} = \dfrac{|\,\mu - \widehat{\mu}\,|}{\mu} \quad \leftarrow$ Error Relativo clásico



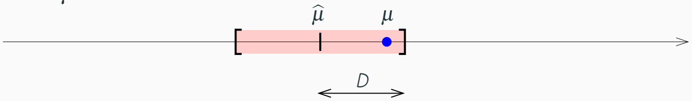
- $\mathrm{ER} = \dfrac{D}{\mu} = \dfrac{2 z_{\alpha/2}\, \sigma / \sqrt{n}}{\mu} \quad \leftarrow$ Intervalo de Confianza Relativo, Nivel $1 - \alpha\%$



- $\mathrm{ER} = \dfrac{D}{\mu} = \dfrac{z_{\alpha/2}\, \sigma / \sqrt{n}}{\mu} \quad \leftarrow$ Medio Intervalo de Confianza Relativo, Nivel $1 - \alpha\%$



- $\mathrm{ER} = \dfrac{D}{\mu} = \dfrac{\sigma / \sqrt{n}}{\mu} \quad \leftarrow$ Medio Intervalo de Confianza Relativo, Nivel 68.26%



La relación entre medio ancho del intervalo de confianza de nivel 68.26% y el valor estimado, es una medida que expresa una forma de Error Relativo:

$$\mathrm{ER} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{\mu} = \frac{\sqrt{\mathbb{V}\{\widehat{\mu}\}}}{\mathbb{E}\{\widehat{\mu}\}} = \frac{\sqrt{\mathbb{V}\{X\}}}{\sqrt{n}\ \mathbb{E}\{X\}}$$

Tenemos entonces dos formas de indicar la calidad del estimador $\widehat{\mu}$:

- μ está dentro del intervalo $[I_1, I_2]$ con probabilidad $1-\alpha$,
    - $I_1 = \widehat{\mu} - z_{\alpha/2}\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
    - $I_2 = \widehat{\mu} + z_{\alpha/2}\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- El Error Relativo del estimador $\widehat{\mu}$ es del orden de ER (o de $100 \times$ER%),
    - $\mathrm{ER} = \dfrac{\sigma/\sqrt{n}}{\mu}$

La relación entre medio ancho del intervalo de confianza de nivel 68.26% y el valor estimado, es una medida que expresa una forma de Error Relativo:

$$\text{ER} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{\mu} = \frac{\sqrt{\mathbb{V}\{\widehat{\mu}\}}}{\mathbb{E}\{\widehat{\mu}\}} = \frac{\sqrt{\mathbb{V}\{X\}}}{\sqrt{n}\ \mathbb{E}\{X\}}$$

Tenemos entonces dos formas de indicar la calidad del estimador $\widehat{\mu}$:

- μ está dentro del intervalo $[I_1, I_2]$ con probabilidad $1-\alpha$,
    - $I_1 = \widehat{\mu} - z_{\alpha/2}\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
    - $I_2 = \widehat{\mu} + z_{\alpha/2}\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- El Error Relativo del estimador $\widehat{\mu}$ es del orden de ER (o de $100\times$ER%),
    - $\text{ER} = \dfrac{\sigma/\sqrt{n}}{\mu}$ $\longleftarrow$ VAMOS A TRABAJAR CON ESTE ERROR RELATIVO

En general la simulación tiene por objetivo estimar los parámetros de una v.a. X cuya distribución se desconoce $\rightarrow$ **será necesario reemplazar σ y μ por estimadores**.

Reemplazando $\boldsymbol{\sigma}^2$ por s^2 y $\boldsymbol{\mu}$ por $\widehat{\mu}$, resulta:

$$\text{ER} \approx \frac{s/\sqrt{n}}{\widehat{\mu}}$$

donde,

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^{(i)} \qquad\qquad s^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X^{(i)} - \widehat{\mu})^2$$

son, respectivamente, estimadores sin sesgo de $\boldsymbol{\mu}$ y de $\boldsymbol{\sigma}^2$.

Trabajando un poco la expresión de s^2 se llega a la siguiente forma equivalente:

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X^{(i)}\right)^2 - \frac{n}{(n-1)}\widehat{\mu}^2$$

útil para evitar guardar todos los valores $\{X^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ hasta el final de la simulación.

Supóngase que X es una v.a. de Bernoulli:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } q = 1 - p \end{cases}$$

- $\mu = \mathbb{E}\{X\} = 1 \times p + 0 \times q = p$
  El estimador estándar sigue siendo $\widehat{\mu} = \dfrac{S_n}{n}$, donde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$, siendo cada $X^{(i)}$, 0 o 1.

- $\sigma^2 = \mathbb{V}\{X\} = \mathbb{E}\{X^2\} - \mathbb{E}\{X\}^2 = p - p^2 = p(1-p)$

  Es simple probar que

$$\frac{S_n/n(1 - S_n/n)}{n-1}$$

  es un estimador sin sesgo de $\dfrac{\sigma^2}{n}$, es decir, un estimador sin sesgo de la varianza de $\widehat{\mu}$.

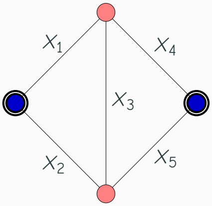
Estimación tipo Monte Carlo estándar de la media, μ, de una v.a. X c/distribución f_X.

Entradas:
n: el número de replicaciones
$G(f_X)$: un generador de números aleatorios con distribución f_X
Salidas:
M: media, $\widehat{\mu}$
V: varianza, s^2/n

Algoritmo:

1. $M = 0$
2. $V = 0$
3. **hacer** n **veces**
4. **sortear** X **de** $G(f_X)$
5. $M \leftarrow M + X$
6. $V \leftarrow V + X^2$
7. $M \leftarrow M/n$
8. $V \leftarrow V/n(n-1) - M^2/(n-1)$

El error relativo de la estimación es: $ER = \dfrac{\sqrt{V}}{M}$.



- El estado de la red es el vector de v.a. de Bernoulli, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.
- La función de masa de probabilidad de $\mathbf{X}$ es:

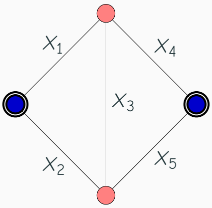
$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{P}\{X_i = 1\} = r_i & \text{confiabilidad del } i\text{–ésimo enlace,} \\ \mathbb{P}\{X_i = 0\} = q_i & \text{anti–confiabilidad del } i\text{–ésimo enlace,} \end{array} \right. \qquad i = 1, \ldots, 5$$

- La *función de estructura* es:

$$\phi(\mathbf{X}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \mathbf{X} \text{ garantiza la conexión entre los nodos terminales,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{array} \right.$$

- La confiabilidad de la red es:

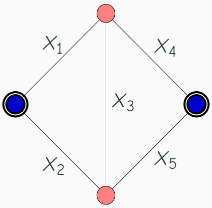
$$\zeta = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} = \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$$



- El estimador estándar de $\zeta = \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$ es $\rightarrow$ $\widehat{\zeta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(\mathbf{X})^{(i)}$
- Las replicaciones tienen la siguiente forma:

$$\phi(\mathbf{X})^{(i)} = \phi(\mathbf{X}^{(i)}) = \phi(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, X_3^{(i)}, X_4^{(i)}, X_5^{(i)}), \; i = 1, \ldots, n$$

  - Se sortea un valor valor $\mathbf{X}^{(i)}$: un juego de valores 1 o 0 para cada enlace.
  - Se eliminan del grafo los enlaces para los que resulte un valor 0.
  - Sobre el grafo resultante se aplica un algoritmo, por ejemplo DFS (*Depth First Search*), para determinar si $\phi(\mathbf{X})^{(i)} = 1$, o $\phi(\mathbf{X})^{(i)} = 0$.



- El estado de la red es el vector de v.a. de Bernoulli, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.
- La función de masa de probabilidad de $\mathbf{X}$ es:

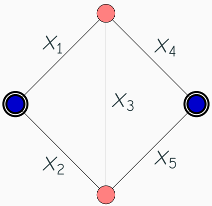
$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{P}\{X_i = 1\} = r_i & \text{confiabilidad del } i\text{–ésimo enlace,} \\ \mathbb{P}\{X_i = 0\} = q_i & \text{anti–confiabilidad del } i\text{–ésimo enlace,} \end{array} \right. \qquad i = 1, \ldots, 5$$

- La *función de estructura* es:

$$\phi(\mathbf{X}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \mathbf{X} \text{ garantiza la conexión entre los nodos terminales,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{array} \right.$$

- La anti–confiabilidad de la red es:

$$1 - \zeta = 1 - \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} = 1 - \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$$



- El estimador estándar de $1-\zeta = 1-\mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$ es $\rightarrow$ $1-\widehat{\zeta} = 1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(\mathbf{X})^{(i)}$
- Las replicaciones tienen la siguiente forma:

$$\phi(\mathbf{X})^{(i)} = \phi(\mathbf{X}^{(i)}) = \phi(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, X_3^{(i)}, X_4^{(i)}, X_5^{(i)}),\ i = 1, \ldots, n$$

  - Se sortea un valor valor $\mathbf{X}^{(i)}$: un juego de valores 1 o 0 para cada enlace.
  - Se eliminan del grafo los enlaces para los que resulte un valor 0.
  - Sobre el grafo resultante se aplica un algoritmo, por ejemplo DFS (*Depth First Search*), para determinar si $\phi(\mathbf{X})^{(i)} = 1$, o $\phi(\mathbf{X})^{(i)} = 0$.

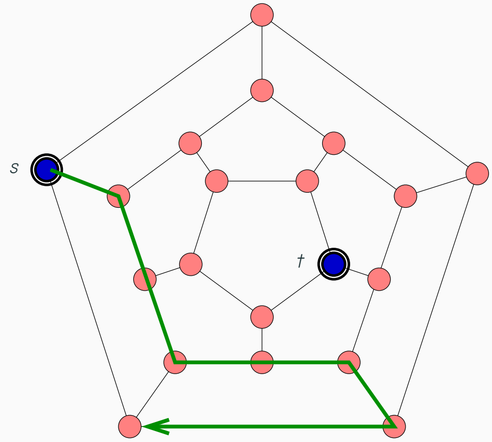
Algoritmo de Búsqueda en Profundidad (DFS)

MODELO: estático de red.

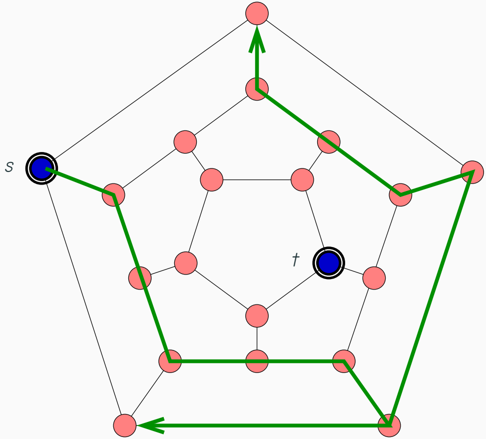
OBJETIVO: determinar si existe o no conexión entre dos nodos s y t, dada la topología del grafo.

MÉTODO:

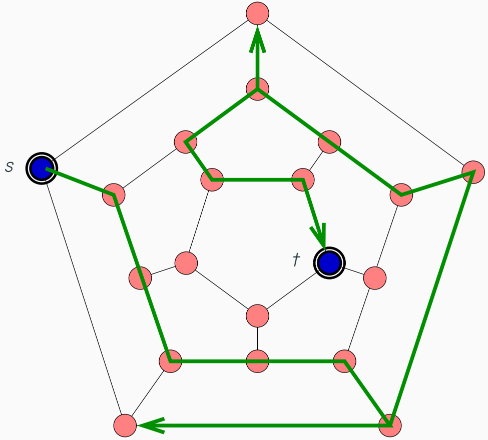
1. Arrancar desde s y avanzar por algún camino, visitando los nodos no visitados del mismo, hasta llegar a algún nodo que no tenga vecinos para visitar.
2. Volver hacia atrás (*back–track*) por el camino recorrido hasta algún nodo con vecinos para visitar y avanzar por un nuevo camino hasta algún nodo que no tenga vecinos para visitar.
3. Repetir el proceso hasta visitar t, en cuyo caso concluir que s y t están conectados y terminar, o hasta que ya no queden nodos con vecinos por visitar (no habiendo sido visitado t) en cuyo caso concluir que s y t no están conectados y terminar.

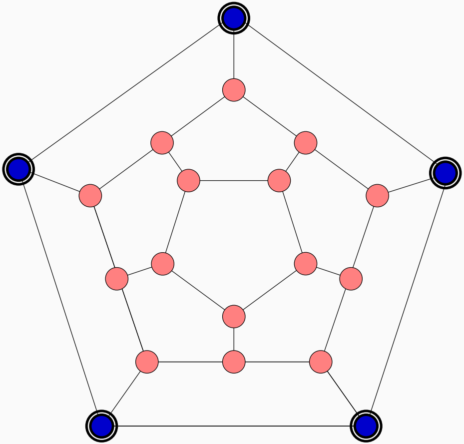

s
t

Algoritmo de Búsqueda en Profundidad (DFS) – Ejemplo



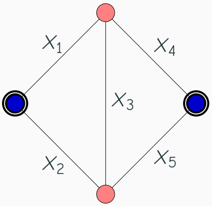
Algoritmo de Búsqueda en Profundidad (DFS) – Ejemplo





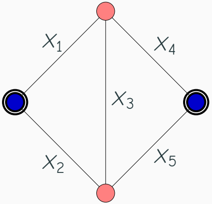
Cada ejecución del DFS arrancará desde algún nodo terminal e intentará "tocar" todos los demás, para cada configuración sorteada de la red.

EJEMPLO:



$r_i = r,\ i = 1\ldots,5$

n	r	$1-\zeta$	$1-\widehat{\zeta}$	$\mathbb{V}\{1-\widehat{\zeta}\}$	ER
1E+08	0.9	2.1520E−02	2.1514E−02	2.11E−10	0.07%
1E+08	0.99	2.0195E−04	2.0214E−04	2.02E−12	0.70%
1E+08	0.999	2.0020E−06	2.0200E−06	2.00E−14	7.07%
1E+08	0.9999	2.0002E−08	3.0000E−08	2.00E−16	70.71%
1E+08	0.99999	2.0000E−10	—	2.00E−18	707.10%



$r_i = r,\ i = 1\ldots,5$

n	r	$1-\zeta$	$1-\widehat{\zeta}$	$\mathbb{V}\{1-\widehat{\zeta}\}$	$I_1(99\%)$	$I_2(99\%)$
1E+08	0.9	2.1520E−02	2.1514E−02	2.11E−10	2.1503026E−02	2.1503034E−02
1E+08	0.99	2.0195E−04	2.0214E−04	2.02E−12	2.0095963E−04	2.0096037E−04
1E+08	0.999	2.0020E−06	2.0200E−06	2.00E−14	2.0399636E−06	2.0400364E−06
1E+08	0.9999	2.0002E−08	3.0000E−08	2.00E−16	1.9996357E−08	2.0003643E−08
1E+08	0.99999	2.0000E−10	—	2.00E−18	—	—

□

Confiabilidad $\widehat{\zeta}$ vs. Anti–confiabilidad $1-\widehat{\zeta}$

- La confiabilidad de una red, ζ, es la probabilidad de que la misma cumpla con un objetivo (satisfaga un criterio de conectividad).
- La anti–confiabilidad, $1-\zeta$, es el complemento de esa probabilidad, en definitiva la probabilidad de falla de la red.
- Si la red es altamente confiable, $\zeta \approx 1$ y, consecuentemente, $1-\zeta \approx 0$.

Si la red es de gran tamaño	$\longrightarrow$	simulación en lugar de cálculo exacto,
si además es altamente confiable	$\longrightarrow$	métodos de reducción de varianza.

- Asumiendo que vamos a hacer estimaciones y no cálculos exactos,

¿Conviene estimar ζ o $1-\zeta$?

Confiabilidad $\widehat{\zeta}$ vs. Anti–confiabilidad $1-\widehat{\zeta}$

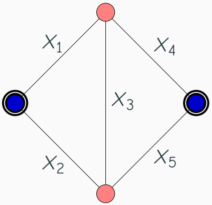
$$ER(\widehat{\zeta}) = \frac{\sqrt{\mathbb{V}\{\widehat{\zeta}\}}}{\zeta} = \frac{\sqrt{\zeta(1-\zeta)/n}}{\zeta} = \sqrt{\frac{1-\zeta}{n\zeta}}$$

$$ER(1-\widehat{\zeta}) = \frac{\sqrt{\mathbb{V}\{1-\widehat{\zeta}\}}}{1-\zeta} = \frac{\sqrt{(1-\zeta)\zeta/n}}{1-\zeta} = \sqrt{\frac{\zeta}{n(1-\zeta)}}$$

$$ER(1-\widehat{\zeta}) = ER(\widehat{\zeta})\frac{\zeta}{1-\zeta} \qquad \longrightarrow \qquad ER(1-\widehat{\zeta}) \gg ER(\widehat{\zeta})$$

Conclusión

Si mediante un método de simulación se determina $1-\widehat{\zeta}$ con una cierta precisión, entonces quedará automáticamente determinado $\widehat{\zeta}$ con una precisión mucho mayor.



$r_i = r,\ i = 1\ldots,5$

n	r	ζ	$\widehat{\zeta}$	$\mathbb{V}\{\widehat{\zeta}\}$	ER
1E+08	0.9	0.9784800000	0.9784969700	2.11E−10	0.00148301%
1E+08	0.99	0.9997980498	0.9997990400	2.02E−12	0.00014212%
1E+08	0.999	0.9999979980	0.9999979600	2.00E−14	0.00001415%
1E+08	0.9999	0.9999999800	0.9999999800	2.00E−16	0.00000141%
1E+08	0.99999	0.9999999998	1.0000000000	2.00E−18	0.00000014%

n	r	$1-\zeta$	$1-\widehat{\zeta}$	$\mathbb{V}\{1-\widehat{\zeta}\}$	ER
1E+08	0.9	2.152000E−02	2.150303E−02	2.11E−10	0.07%
1E+08	0.99	2.019502E−04	2.009600E−04	2.02E−12	0.70%
1E+08	0.999	2.001995E−06	2.040000E−06	2.00E−14	7.07%
1E+08	0.9999	2.000200E−08	3.000000E−08	2.00E−16	70.71%
1E+08	0.99999	2.000020E−10	—	2.00E−18	707.10%

Conclusión

- Los estimadores de ζ y de $1-\zeta$ están, ambos, a la misma distancia del valor real.
- Si el objetivo es conocer la confiabilidad en forma aproximada, da lo mismo estimar ζ o $1-\zeta$ y, luego, calcular el complementario.
- Pero si el objetivo es **evaluar la calidad de un método de estimación**, lo más apropiado (y lo más cómodo) es:
  - trabajar sobre $1-\zeta$,
  - ajustar el método hasta obtener un error relativo satisfactorio,
  - saber que el error relativo sobre el ζ resultante será **muchísimo** menor.

Todos los trabajos científicos publicados se concentran en desarrollar y mejorar los métodos de simulación para estimar $1-\zeta$ con un error relativo lo más bajo posible.

Bibliografía

G. S. Fishman. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer Series in Operations Research. New York: Springer–Verlag, 1996.