Proposición (caracterización de puntos de adherencia de un conjunto): Sea X un subconjunto de un espacio métrico (M, d). Entonces, $a \in \overline{X}$ si y solamente si a es el límite de una sucesión en X.

· **Demostración:**

($\Rightarrow$) Sea $a \in \overline{X}$. Si $a \in X$, entonces basta tomar $x_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se tiene claramente que (x_n) es una sucesión en X tal que $x_n \to a$.

Supongamos ahora que $a \in \overline{X} - X$. Como $a \in \overline{X}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$ se tiene que $B(a, 1/n) \cap X \neq \emptyset$. Luego, existe $x_n \in X$ tal que $d(x_n, a) < 1/n$. Se puede ven que $x_n \to a$ (de nuevo, usan la propiedad arquimediana).

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $a \in M$ es tal que existe una sucesión (x_n) en X con $x_n \to a$. Sea $\varepsilon > 0$.
Como $x_n \to a$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

En particular, $x_N \in B(a, \varepsilon)$. Como $x_N \in X$, tenemos entonces que $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$.
$\therefore$ $a \in \overline{X}$. ■

<u>Proposición (caracterización de puntos de frontera de un conjunto)</u>: Sea X un subconjunto de un espacio métrico (M, d). Entonces $a \in \partial X$ si y solamente si a es el límite de una sucesión de puntos en X y el límite de una sucesión de puntos en $M - X$.

• <u>Demostración</u>: Basta con notar que

$$\partial X = \overline{X} \cap \overline{M - X}.$$ ■

<u>Proposición (caracterización de subconjuntos densos)</u>: Sea X un subconjunto de un espacio métrico (M, d). Entonces X es denso en M si y solamente si todo punto de M es el límite de una sucesión de puntos de X.

• <u>Demostración</u>: Se sigue de la igualdad $M = \overline{X}$. ■

Proposición (caracterización de conjuntos cerrados):
Sea F un subconjunto de un espacio métrico (M, d). Entonces, F es cerrado en M si y solamente si para toda sucesión (x_n) en F convergente se tiene que $\lim x_n \in F$.

• **Demostración:**
$(\Rightarrow)$ Supongamos que F es cerrado $(F = \overline{F})$ y sea (x_n) una sucesión en F tal que $x_n \to a$. Por la caracterización probada de $\overline{F}$, se tiene que $a \in \overline{F} = F$.
$(\Leftarrow)$ Sea $a \in \overline{F}$. Por la caracterización mencionada de $\overline{F}$, podemos encontrar una sucesión (x_n) en F tal que $x_n \to a$. Por la hipótesis, se tiene que $a = \lim x_n \in F$. $\therefore \overline{F} = F$. ■

Proposición (caracterización de conjuntos abiertos):
Sea U un subconjunto de un espacio métrico (M, d). Entonces, U es abierto en M si y solamente si para toda sucesión (x_n) en M tal que $x_n \to a \in U$ se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ con $x_n \in U$ para todo $n \geq N$.

• **Demostración:**
$(\Rightarrow)$ Supongamos que U es abierto en M, y sea (x_n) una sucesión en M tal que (x_n) converge a un punto $a \in U$. Luego,
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ n \geq N \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$.

Como U es abierto, existe $r > 0$ tal que

$$B(a, r) \subseteq U.$$

Para el r anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(x_n, a) < r \quad (x_n \in B(a, r)).$$

Así, $n \geq N \Rightarrow x_n \in B(a, r) \subseteq U$.

($\Leftarrow$) Veamos que $M - U$ es cerrado. Sea (x_n) una sucesión en $M - U$ convergente con $\lim x_n = a$. Si $a \in U$, entonces $x_n \in U$ a partir de cierto $N \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a \in M - U$ y así $M - U$ es cerrado en M. ■

<u>**Proposición (caracterización de puntos de acumulación de un conjunto):**</u> Sea X un subconjunto de un espacio métrico (M, d). Entonces, $a \in X'$ si y solamente si a es el límite de una sucesión de puntos distintos de X.

• <u>Demostración:</u>

($\Rightarrow$) Sea $a \in X'$. Luego,

$$\forall \varepsilon > 0, \; B(a, \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset.$$

En particular,

- Para $\varepsilon = 1$, $B(a, 1) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.
  Sea entonces $x_1 \neq a$ en $B(a, 1) \cap X$.
- Para $\varepsilon = \min\{1/2, d(x_1, a)\}$, $B(a, \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$, de donde existe $x_2 \neq a, x_1$ tal que $x_2 \in B(a, \varepsilon) \cap X$

Continuando inductivamente el procedimiento anterior, podemos construir una sucesión (x_n) de puntos distintos en X tal que $x_n \to a$.

($\Leftarrow$) Sea $a \in M$ tal que existe en X una sucesión (x_n) de puntos distintos tal que $x_n \to a$. Luego,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ n \geq N \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

$$(x_n \in B(a, \varepsilon)).$$

Note que debe existir $n \geq N$ tal que $x_n \neq a$, ya que de lo contrario (x_n) no sería una sucesión de puntos distintos. Por lo tanto,

$$B(a, \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset,$$

es decir, $a \in X'$. ∎

Ejemplos:

A estas alturas podemos encontrar al menos dos maneras de probar que dadas dos funciones continuas $f, g : M \to N$ entre espacios métricos (M, d) y (N, ρ), entonces el conjunto

$$F = \{x \in M \ / \ f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en M. Por un lado, $F = h^{-1}(0)$ donde $h : M \to \mathbb{R}$ es la función continua dada por

$$h(x) = \rho(f(x), g(x)).$$

Por otro lado, si (x_n) es una sucesión de puntos en F con límite $a = \lim x_n$, al ser f y g continuas tenemos que:

$$f(a) = f(\lim x_n) \underset{f \text{ continua en } a}{=} \lim f(x_n) \underset{x_n \in F}{=} \lim g(x_n) \underset{g \text{ continua en } a}{=} g(\lim x_n) = g(a)$$

$\therefore$ $a \in F$, y así F es cerrado en M por un resultado anterior.

De lo anterior se sigue que si $X \subseteq M$ es un subconjunto donde $f|_X = g|_X$, entonces $f|_{\overline{X}} = g|_{\overline{X}}$. En particular, si f y g coinciden en un subconjunto denso de M, entonces coinciden en todo M (es decir, $f = g$).

Convergencia en espacios de funciones.

Sucesiones de funciones.

Dado un conjunto X y un espacio métrico (M, d), consideraremos en esta sección funciones $f: X \to M$ (no necesariamente acotadas). Estudiaremos dos tipos de convergencia en el conjunto de funciones de X a M, a saber, la convergencia puntual y la convergencia uniforme.

Si denotamos por $\mathcal{F}(X, M)$ el conjunto de funciones de X en M, por una sucesión de funciones nos referiremos a una función $\mathbb{N} \to \mathcal{F}(X, M)$.

Observación: En $\mathcal{F}(X, M)$ no necesariamente tenemos la métrica del supremo (también llamada métrica de la convergencia uniforme).

Denotaremos a las sucesiones de funciones por (f_n), donde para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f_n : X \to M$.

Ejemplo: $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Observación: Para cada $x \in X$, se tiene una sucesión en M dada por $(f_n(x))$, de la cual se puede estudiar su convergencia.

Podemos proponer entonces la siguiente definición.

Definición: Sea (f_n) una sucesión de funciones $f_n : X \to M$. Diremos que (f_n) converge puntualmente en $x \in X$ a una función $f : X \to M$ si:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ (el cual puede depender de x.) tal que

$$n \geq N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Ejemplo: Veamos que $f_n(x) = \dfrac{x^2 + nx}{n}$, con $x \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$ converge puntualmente a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Fijamos $x \in \mathbb{R}$. Notamos que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{x^2 + nx}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{x^2}{n} + x \right) = x$$

ya que $\dfrac{x^2}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Vemos que $|f_n(x) - f(x)| = \left| \left(\dfrac{x^2 + nx}{n} \right) - x \right| = \dfrac{x^2}{n}$. Tomemos $N = \left\lfloor \dfrac{x^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ (parte entera de x^2/ε más 1), el cual depende de x, y supongamos que

$m > N$. Luego,

$$m > N \Rightarrow m > \left\lfloor \frac{x^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \Rightarrow m > \frac{x^2}{\varepsilon},$$

de donde

$$|f_m(x) - f(x)| = \frac{x^2}{m} < \varepsilon .$$

$\therefore f_m(x) \to f_m(x)$.

Existe otro tipo de convergencia que se puede considerar para sucesiones de funciones (f_m).

Definición: Sea (f_m) una sucesión de funciones y $f: X \to M$ una función. Diremos que (f_m) converge uniformemente a f si:

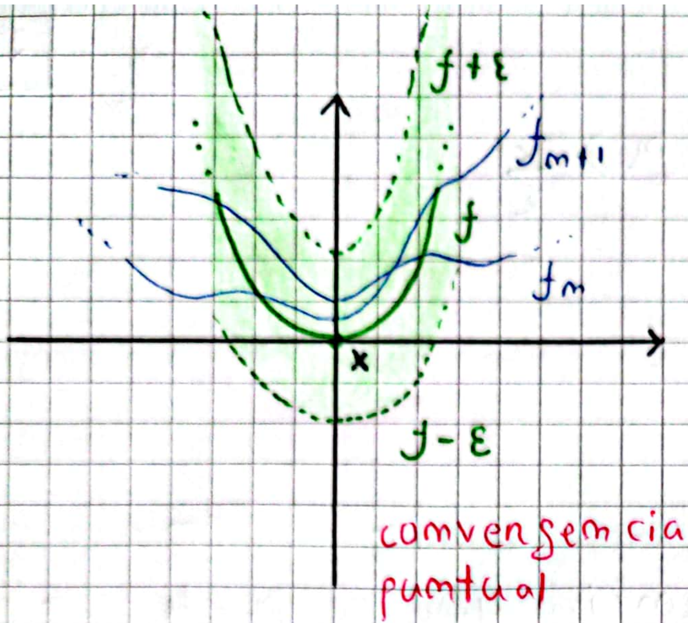
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \;/\; m \geq N \Rightarrow d(f_m(x), f(x)) < \varepsilon$$
para todo $x \in X$.

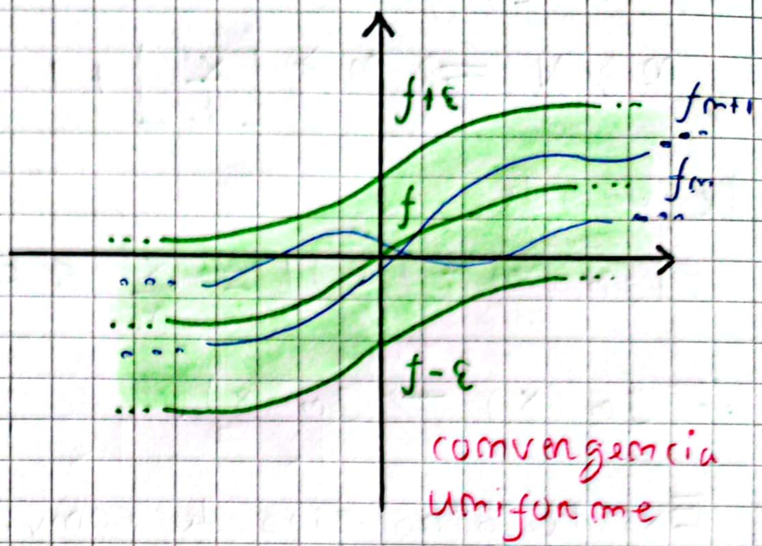
Ejemplo: $X = [0, 1)$, $M = \mathbb{R}$, $f_m(x) = (1/2)^{x+m}$ y $f(x) = 0$. Veamos que f_m converge uniformemente a f.

Sea $\varepsilon > 0$. Vemos que $|f_m(x) - f(x)| = \frac{1}{2^{x+m}}$. Luego,

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^{x+m}} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^{x+m} > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\Leftrightarrow x + m > \log_2(1/\varepsilon) = -\log_2(\varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow m > -\log_2(\varepsilon) - x .$$

Como $x \geq 0$, sirve tomar N como el menor entero mayor que $-\log_2(\varepsilon)$ (no depende de x).





Observaciones:

1) Es claro que convergencia uniforme implica convergencia puntual, pero la afirmación recíproca no es cierta.

$f_n(x) = \dfrac{x^2+nx}{n}$ no converge uniformemente a ninguna función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. De hacerlo, tendría que ser a la función identidad $f(x) = x$ (ya que f_n sí converge puntualmente a f). En este caso, la condición $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ no se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto, si dado $\varepsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

estaríamos diciendo que $\dfrac{x^2}{n} < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $n \geq N$. En particular, $x^2 < N$ $\forall x \in \mathbb{R}$, lo cual es una contradicción (la función $x \longmapsto x^2$ no es acotada en $\mathbb{R}$).

2) Considere la implicación
$$n \geq N \Longrightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \forall x \in X.$$
Vemos que el conjunto de valores $d(f_n(x), f(x))$ es no vacío y está acotado superiormente, por lo cual posee supremo
$$\sup_{x \in X} \{d(f_n(x), f(x))\}.$$
Haciendo un ligero abuso de notación, escribimos
$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in X} \{d(f_n(x), f(x))\}.$$

Es decir, estamos "tomando prestada" la notación de la métrica del supremo en $\mathcal{B}(X, M)$ (espacio de funciones $X \to M$ que son acotadas), aunque las funciones f_n y f no tienen por qué ser acotadas. De hecho, dada una función no acotada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se puede construir una sucesión de funciones no acotadas (f_n) que converja uniformemente a f (simplemente definimos $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Proposición (convergencia uniforme de funciones acotadas): Sea (f_n) una sucesión en $\mathcal{B}(X, M)$ la cual converge uniformemente a una función $f: X \to M$. Entonces, $f \in \mathcal{B}(X, M)$.

• **Demostración:** Consideramos $\varepsilon = 1$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies d(f_n(x), f(x)) < 1, \ \forall x \in X.$$

En particular,

$$d(f_N(x), f(x)) < 1, \ \forall x \in X.$$

Por otro lado, como f_N es acotada, se tiene que existe $K > 0$ tal que

$$d(f_N(x), f_N(y)) \leq K, \ \forall x, y \in X.$$

Así,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f(y)) \\ &\leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(y)) \\ &\quad + d(f_N(y), f(y)) \\ &< 2 + K \end{aligned}$$

$\therefore$ f es acotada. $\blacksquare$

Observación:

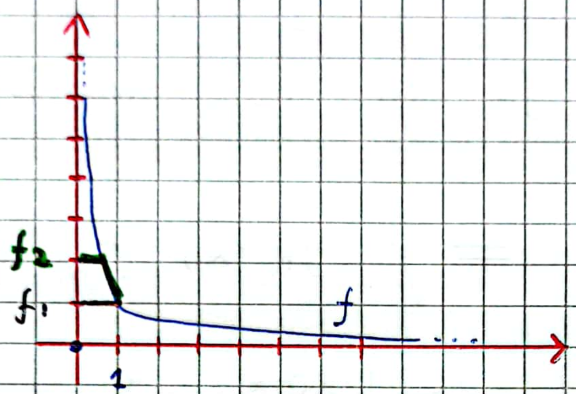
1) Si (f_n) es una sucesión en $\mathcal{B}(X, M)$, entonces convergencia uniforme significa convergencia en el espacio métrico $(\mathcal{B}(X, M), d_\infty)$. Por tal razón, a d_∞ se le conoce como **métrica de la convergencia uniforme**.

2) Si reemplazamos convergencia uniforme por convergencia puntual en la proposición anterior, el resultado deja de ser cierto (es decir, la función límite puede no ser acotada).

Como contraejemplo, considere para $X=[0,1]$ y $M=\mathbb{R}$ los siguientes funciones:

$$f_n(x)=\begin{cases}\min\left(n,\frac{1}{x}\right) & \text{si } 0<x\leq 1,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1/x & \text{si } 0<x\leq 1,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$



- Vemos que $|f_n(x)|\leq n$ $\forall x\in[0,1]$ $(f_n\in\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}))$.
- Claramente, f no es acotada en $[0,1]$.
- Ejercicio: Probar que (f_n) converge puntualmente a f.

Veamos qué ocurre con ambos tipos de convergencia respecto a la continuidad.

Proposición (convergencia uniforme de funciones continuas): Sean (M,d) y (N,ρ) espacios métricos y (f_n) una sucesión de funciones $f_n: M\to N$ que son continuas en $a\in M$. Si (f_n) converge uniformemente a $f: M\to N$, entonces f es continua en el punto a.

• <u>Demostración:</u> Hay que probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Sea entonces $\varepsilon > 0$. Por un lado, como (f_n) converge uniformemente a f, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in X. \quad (*)$$

Por otro lado, al ser f_N continua en $a \in M$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Longrightarrow \rho(f_N(x), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (**)$$

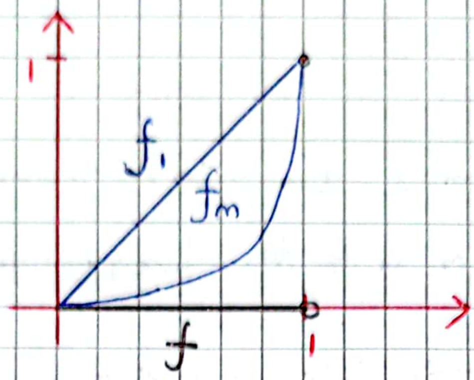
Combinando $(*)$ y $(**)$, se tiene que si $d(x,a) < \delta$, entonces:

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f(a)) &\leq \rho(f(x), f_N(x)) + \rho(f_N(x), f(a)) \\ &\leq \rho(f(x), f_N(x)) + \rho(f_N(x), f_N(a)) \\ &\quad + \rho(f_N(a), f(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

<u>Observación:</u> Al sustituir convergencia uniforme por convergencia puntual en la proposición anterior, el resultado deja de ser cierto (es decir, la función límite puede no ser continua en a).

Considere $X = [0,1]$, $M = [0,1]$, y las siguientes funciones:

$f_n(x) = x^n$ y $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.
$\forall x \in [0,1]$.



· f_n es continua en $x = 1$, pero f no.

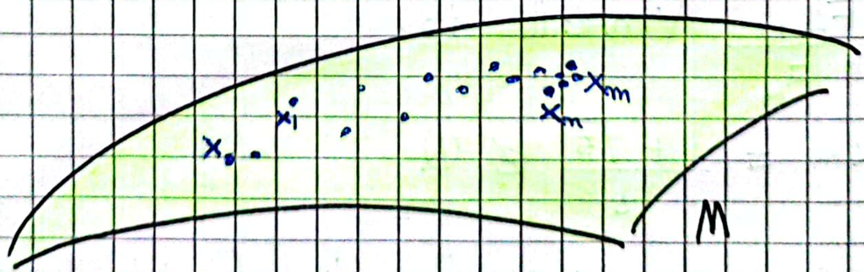
· Ejercicio: Probar que (f_n) converge puntualmente a f.

Sucesiones de Cauchy

La convergencia del siguiente tipo de sucesiones define la completitud.

Definición: Una sucesión (x_n) es de Cauchy si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Informalmente hablando, (x_n) es una sucesión de Cauchy si sus términos se van haciendo más próximos entre sí a medida que n crece.



Toda sucesión convergente representa un ejemplo de sucesión de Cauchy.

Proposición: Toda sucesión convergente es de Cauchy.

· Demostración: Supongamos que (x_n) es una sucesión tal que $x_n \to a$ para algún $a \in M$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $m, n \geq N$, entonces por la desigualdad triangular tenemos que:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

El recíproco de la proposición anterior no necesariamente es cierto.

Ejemplo:

1) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

$\lim x_n = e$, por lo cual x_n no converge en $\mathbb{Q}$.

2) $F_n = n$-ésimo número de Fibonacci.

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

$$\lim x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$$

(x_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no converge.

Cualquier sucesión no acotada representa un ejemplo de sucesión que no es de Cauchy.

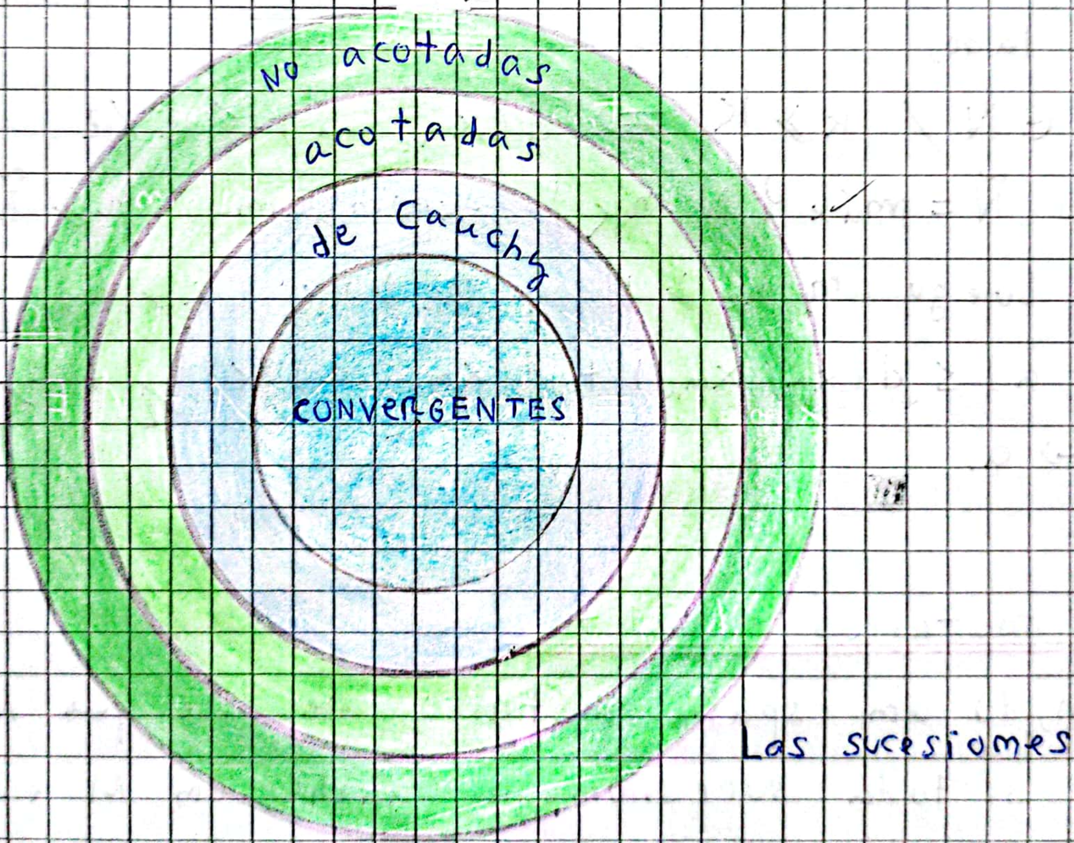
Proposición: Toda sucesión de Cauchy es acotada.

· **Demostración:** Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en M.
Para $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < 1 \quad \forall n, m \geq N.$$

Sea $D = \text{máx}\{d(x_k, x_N) \ / \ k = 0, 1, \dots, N-1\}$.

Luego, se puede ver que $K = \text{máx}\{2D, 1+D\}$ es una cota superior de (x_n). $\blacksquare$



Ejemplo: No toda sucesión acotada es de Cauchy, como por ejemplo $x_n = (-1)^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

Damos a continuación una condición suficiente para que una sucesión de Cauchy sea convergente.

Proposición: Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en M que posee una subsucesión convergente. Entonces, (x_n) converge.

· Demostración: Sea (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n) tal que $x_{n_k} \to a$. Veamos que $x_n \to a$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por un lado,

$$\exists N \in \mathbb{N} \,/\, n, m \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon/2.$$

Por otro lado,

$$\exists K \in \mathbb{N} \,/\, k \geq K \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2.$$

Tomamos $\tilde{N} = \max\{N, n_K\}$. Supongamos $n \geq \tilde{N}$, y sea $n_k \geq \tilde{N}$. Luego, $n, n_k \geq N$ y $n_k \geq n_K$ $(k \geq K)$. Entonces,

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\therefore x_n \to a$. ■

Espacios métricos completos

Sea (M, d) un espacio métrico. Se dice que M es completo si toda sucesión de Cauchy en M es convergente (en M).

Ejemplo:

1) $\mathbb{Q}$ (con la métrica usual) no es completo.
2) $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) sí es completo.

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Entonces, (x_n) es acotada. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) posee una subsucesión convergente. Luego, por un resultado previo, al ser (x_n) una sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente, se tiene que (x_n) converge.

Veamos algunos resultados que permiten construir nuevos espacios completos a partir de espacios completos conocidos.

<u>Proposición</u>:

1) Sea (M, d) un espacio métrico completo y $X \subseteq M$. Entonces, X es completo si y solamente si X es cerrado.
2) Sean $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ espacios métricos y $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ con la métrica del máximo. Entonces, M es completo si y solamente si cada M_k es completo.
3) Si X es un conjunto y (M, d) un espacio métrico completo, entonces $\mathcal{B}(X, M)$ (con la métrica de convergencia uniforme) es completo.
4) Si $M_1, \ldots, M_n$ son subespacios completos de un espacio métrico (M, d), entonces $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ es completo.

5) Si (M, d) es un espacio métrico completo y C una componente conexa de M, entonces C es completo.

6) Si $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de subespacios métricos completos de un espacio métrico (M, d), entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ es completo.

· Demostración: Solamente demostraremos 1), 2) y 3) mientras que 4), 5) y 6) se dejan como ejercicios (ver Práctico # 8).

1) $(\Rightarrow)$ Supongamos $X \subseteq M$ cerrado en M, y sea (x_n) una sucesión de Cauchy con términos en X. Como M es completo, se tiene que existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$. Al ser X cerrado y (x_n) una sucesión convergente, ésta converge a un punto en X, por lo cual $x \in X$. Entonces, X es completo.
$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que $X \subseteq M$ es completo. Para ver que X es cerrado, basta con notar que toda sucesión en X convergente lo hace a un punto de X, pero esto ocurre inmediatamente al ser X completo.

2) Hagamos solamente el caso $n=2$.
$(\Rightarrow)$ Supongamos que $M = M_1 \times M_2$ es completo, con la métrica $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$

Basta probar que M_1 es completo. Sea (x_1^n) una sucesión de Cauchy en M_1. Fijamos $b \in M_2$, y consideremos la sucesión $((x_1^n, b))$ en $M_1 \times M_2$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow d_1(x_1^m, x_1^n) < \varepsilon.$$

Para tales m y n, se tiene

$$d((x_1^m, b), (x_1^n, b)) = \max\{d_1(x_1^m, x_1^n), d_2(b, b)\}$$
$$= \max\{d_1(x_1^m, x_1^n), 0\}$$
$$= d_1(x_1^m, x_1^n) < \varepsilon.$$

$\therefore$ $((x_1^n, b))$ es una sucesión de Cauchy en $M_1 \times M_2$. Al ser este producto completo, se tiene que $((x_1^n, b))$ converge en $M_1 \times M_2$, de donde se tiene que (x_1^n) converge en M_1.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que (M_1, d_1) y (M_2, d_2) son completos. Sea $((x_1^n, x_2^n))$ una sucesión de Cauchy en $M_1 \times M_2$. Luego, para $\varepsilon > 0$ se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \Rightarrow d((x_1^n, x_2^n), (x_1^m, x_2^m)) < \varepsilon.$$

Como $d_1(x_1^n, x_1^m) \leq d((x_1^n, x_2^n), (x_1^m, x_2^m))$ y

$$d_2(x_2^n, x_2^m) \leq d((x_1^n, x_2^n), (x_1^m, x_2^m)),$$

se tiene que tanto (x_1^n) como (x_2^n) son sucesiones de Cauchy en M_1 y M_2, respectivamente. Al ser estos dos espacios completos, se tiene que existen $a \in M_1$ y $b \in M_2$ tales que $x_1^n \to a$ y $x_2^n \to b$. Entonces,

$(x_1^m, x_2^m) \to (a, b)$.

3) Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(X, M)$.
Luego, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \,/\, \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \geq N \Rightarrow d_\infty (f_n, f_m) < \varepsilon$

Recuerde que $d_\infty (f_n, f_m) < \varepsilon \Leftrightarrow d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$ $\forall x \in X$.

En particular para cada $x \in X$, se tiene que $(f_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en M. Al ser M completo, existe $a_x \in M$ tal que $f_n(x) \to a_x$. Consideremos ahora la función $f: X \to M$ dada por

$$f(x) = a_x.$$

i) $f \in \mathcal{B}(X, M)$: Esto será consecuencia inmediata después de probar que (f_n) converge uniformemente a f.

ii) (f_n) converge uniformemente a f:
Sea $\varepsilon > 0$. Luego, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N \Longrightarrow d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \ \forall x \in X$.
Tomamos $m \to \infty$, y como $d(-,-)$ es continua en ambas variables, se tiene que

$$\begin{aligned} d(f_n(x), a_x) &= d(f_n(x), \lim_{m \to \infty} f_m(x)) \\ &= \lim_{m \to \infty} d(f_n(x), f_m(x)) \\ &< \lim_{m \to \infty} \varepsilon = \varepsilon, \quad \forall n \geq N \text{ y } \forall x \in X. \end{aligned}$$

Así, $n \geq N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X$.
Es decir, f_n converge uniformemente a f.
$\therefore \mathcal{B}(X, M)$ es completo. ■

Ejemplos:

1) $\mathbb{R}^n$ es completo.
2) Todo espacio métrico se puede sumergir, mediante una isometría, dentro de un espacio métrico completo.

Sea (M, d) un espacio métrico. Recuerde que

$$\Phi : M \longrightarrow \mathcal{B}(M, \mathbb{R})$$
$$x \longmapsto \Phi(x) : M \to \mathbb{R}$$
$$\Phi(x)(y) = d(y, x) - d(y, x_0),$$

con $x_0 \in M$ fijo.

define una isometría.

Por otro lado, $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ es completo.

A la clausura $\overline{\Phi(M)}$ en $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ se le conoce como completación de M.