Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Primer semestre de 2024

Primer parcial

30 de abril de 2024

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del parcial es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El parcial tiene 5 ejercicios de múltiple opción y un ejercicio de desarrollo con 2 partes.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**
- Recuerde que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.
- La siguiente tabla de valores para las funciones seno y coseno puede ser de utilidad:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 25 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Correctas: 5 puntos. Incorrectas: −1 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 15 puntos)

Un ejercicio de desarrollo se encuentra al final de la página 2.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.a)	D.1.b)	D.2	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Sea $A \subset \mathbb{C}$ el conjunto de los números $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

$$\begin{cases} z^5 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \\ z + \bar{z} > 0 \end{cases}$$

Solo una de las siguientes afirmaciones sobre el conjunto A es correcta. Indique cuál:

(A) A tiene exactamente cuatro elementos distintos.

(B) A tiene exactamente dos elementos distintos.

(C) A es simétrico respecto al eje real.

(D) A tiene exactamente cinco elementos distintos.

(E) A es simétrico respecto al eje imaginario.

2. Recuerde que decimos que L es un punto de aglomeración de la sucesión a_n si existe una subsucesión de a_n que converge a L.
Considere la sucesión $a_n = \dfrac{n}{3n+1}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Entonces:

(A) a_n tiende a $+\infty$.

(B) a_n tiene exactamente 1 punto de aglomeración, pero no tiene límite.

(C) a_n tiene exactamente 2 puntos de aglomeración, pero no tiene límite.

(D) a_n tiene exactamente 3 puntos de aglomeración, pero no tiene límite.

(E) a_n tiene límite finito.

3. Considere las siguientes series:

$$\text{(I)} \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(II)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{k^n n!}{n^n}$$

Entonces:

(A) La serie (I) converge, pero no converge absolutamente, y para $k=2$ la serie (II) converge.

(B) La serie (I) converge, pero no converge absolutamente, y para $k=4$ la serie (II) converge.

(C) La serie (I) no converge y para todo $k>e$ la serie (II) converge.

(D) La serie (I) converge absolutamente y para todo $k>2$ la serie (II) converge.

(E) La serie (I) converge absolutamente y para todo $k>e$ la serie (II) no converge.

4. Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \operatorname{sen}(x)$$

que cumple $y(0) = -\dfrac{1}{2}, y'(0) = 1$. Entonces:

(A) $y(\pi) = e^{-\pi} + 1$

(B) $y(\pi) = \pi e^{-\pi} + \dfrac{1}{2}$

(C) $y(\pi) = \dfrac{\pi}{2}e^{-\pi}$

(D) $y(\pi) = \dfrac{\pi}{4}e^{-\pi}$

(E) $y(\pi) = -1$

5. Considere las siguientes integrales impropias:

$$\text{(I)} \int_0^1 \frac{e^{-x^2}+1}{e^{\sqrt{x}}-1}\,dx$$

$$\text{(II)} \int_\pi^{+\infty} \frac{(4+\cos(x))(x+2\sqrt{x})}{(e^{-x}+\sqrt{x})x}\,dx$$

Entonces:

(A) Ambas integrales no convergen.

(B) La integral (I) converge y la integral (II) converge, pero no converge absolutamente.

(C) La integral (I) converge y la integral (II) no converge.

(D) La integral (I) no converge y la integral (II) converge.

(E) Ambas integrales convergen absolutamente.

DESARROLLO

1. *a)* Sea b_n una sucesión de términos no negativos, tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L < 1$. Demostrar que existen $k \in (0,1)$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $b_n < k, \forall n \geq n_0$.

   b) Sea $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Demostrar que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, entonces la serie es convergente.

2. Usando el resultado de la parte anterior, clasificar la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\log n)^n}{n^n}$$