Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Primer semestre de 2024

Solución Primer parcial

30 de abril de 2024

MÚLTIPLE OPCIÓN

Las vesiones del parcial se identifican por el primer ejercicio de múltiple opción.
Versión 1: El primer ejercicio es "Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial ..."
Versión 2: El primer ejercicio es "Sea $A \subset \mathbb{C}$ el conjunto de los números $z \in \mathbb{C}$ que verifican: ..."

Versión	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	C	E	D	C	A
2	B	D	A	B	C

DESARROLLO

---

1. *a*) Tomamos $\varepsilon = (1-L)/2$. Como $\lim_{n\to\infty} b_n = L$, para ese ε existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Entonces podemos tomar como $k = L + \varepsilon = \frac{1+L}{2}$ (observar que es menor que uno), y para el n_0 encontrado arriba se cumple que $b_n < k$ para todo $n \geq n_0$.

   b) Como $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, usando el resultado de la parte a), sabemos que existe un $k < 1$, y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\sqrt[n]{a_n} < k$ para todo $n \geq n_0$. Entonces, a partir de ese n_0 tenemos que $a_n < k^n$, y por el criterio de comparación (como $k < 1$ la serie geométrica de término general k^n es convergente), la serie $\sum a_n$ es convergente.

2. Usando el criterio demostrado:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\log n)^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0.$$
   Donde el último límite es por el orden polinomial del denominador, contra el logartítmico del numerador.

   Como el límite es $0 < 1$, el criterio demostrado en la parte b) nos permite concluir la convergencia de la serie.