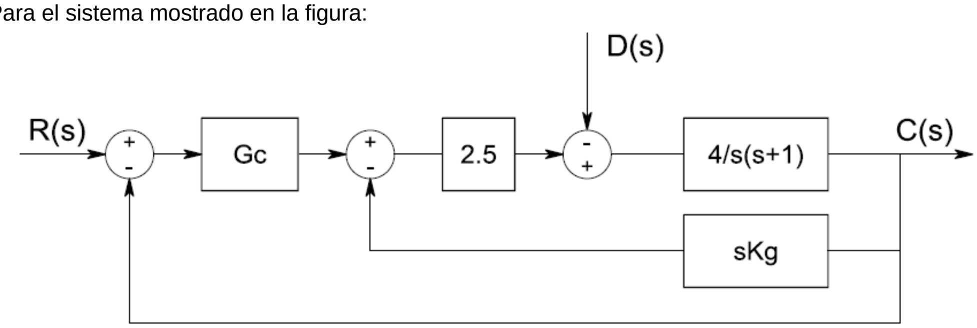
Ejercicio 1

Para el sistema mostrado en la figura:



a) Si Gc = Kc, encuentre Kg y Kc para obtener una Relación de Amortiguación del sistema de 0.5 y un Error de Estado Estacionario del 5%para una entrada escalón unitario en D(s).
b) ¿Afecta Kg al valor del Error de Estado Estacionario?
c) Si Gc(s) = Kc + Ki/s, (control PI), encuentre el Error de Estado Estacionario del sistema para una entrada escalón unitario en D(s).
d) Escriba la ecuación Característica para los valores de Kc y Kg encontrados en a) y usando el criterio de Routh-Hurwitz determine el valor límite de Ki para estabilidad.

a.

$Gc = Kc;\ \zeta = 0.5;\ e_{ss} = 5\%;\ D(s) = \frac{1}{S}$

$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s);\ \ E(s) = R(s) - C(s);\ \ R(s) = 0\ \rightarrow\ E(s) = -C(s);\ C(s) = \mathrm{T_d(s)\ D(s)} \rightarrow E(s) = -\ \mathrm{T_d(s)\ D(s)}$

Aplicando_Mason

Caminos_directos 1

Lazos 2

Lazos_distintos 0

$$\mathrm{T_d(s)} = \frac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{D(s)}} = -\frac{\mathrm{P_1.1}}{1 + \mathrm{L1} + \mathrm{L2}} = -\frac{\frac{4}{\mathrm{S(S+1)}}}{1 + \frac{\mathrm{S\ 10\ Kg)}}{\mathrm{S(S+1)}} + \frac{10\ \mathrm{Gc}}{\mathrm{S(S+1)}}} = -\frac{4}{\mathrm{S(S+1)} + 10\mathrm{KgS} + 10\ \mathrm{Gc}} = -\frac{4}{\mathrm{S^2} + (1 + 10\mathrm{Kg})\mathrm{S} + 10\ \mathrm{Gc}}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{4}{\mathrm{S^2} + (1 + 10\mathrm{Kg})\mathrm{S} + 10\ \mathrm{Gc}}\right)\frac{1}{S}\ ;\ Gc = Kc$$

$$e_{ss} = \frac{4}{10\ \mathrm{Kc}} = 0.05\ \rightarrow Kc = 8$$

Por comparación de un sistema de segundo Orden:

$$\begin{cases} E.C.\ \ \mathrm{S^2} + (1 + 10\mathrm{Kg})\mathrm{S} + 10\ \mathrm{Gc} = 0 \\ \qquad\ \mathrm{S^2} + 2\zeta\omega\mathrm{nS} + \omega\mathrm{n}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.\quad 1 + 10\mathrm{Kg} = 2\zeta\omega\mathrm{n}\ \rightarrow Kg = \frac{2\zeta\omega\mathrm{n} - 1}{10} \rightarrow Kg = \frac{2(0.5)(8.94) - 1}{10} = 0.794 \\ 2.\qquad 10\mathrm{Kc} = \omega\mathrm{n}^2\ \rightarrow\ \mathrm{Wn} = 8.94 \end{cases}$$

b.

No afecta ya que es independiente de Kg.

c.

$$\mathrm{Gc} = \mathrm{Kc} + \frac{\mathrm{Ki}}{\mathrm{S}}$$

$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s);\ \ E(s) = R(s) - C(s);\ \ R(s) = 0\ \rightarrow\ E(s) = -C(s);\ C(s) = \mathrm{T_d(s)\ D(s)} \rightarrow E(s) = -\ \mathrm{T_d(s)\ D(s)}$

$$\mathrm{T_d(s)} = \frac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{D(s)}} = -\frac{4}{\mathrm{S^2} + (1 + 10\mathrm{Kg})\mathrm{S} + 10\ \mathrm{Gc}}\ ;\ \mathrm{Gc} = \mathrm{Kc} + \frac{\mathrm{Ki}}{\mathrm{S}}$$

$$\mathrm{T_d(s)} = \frac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{D(s)}} = -\frac{4}{\mathrm{S^2} + (1 + 10\mathrm{Kg})\mathrm{S} + 10\left(\mathrm{Kc} + \frac{\mathrm{Ki}}{\mathrm{S}}\right)} = -\frac{4\mathrm{S}}{\mathrm{S^3} + (1 + 10\mathrm{Kg})\mathrm{S^2} + 10\mathrm{KcS} + 10\mathrm{Ki}}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{4\mathrm{S}}{\mathrm{S^3} + (1 + 10\mathrm{Kg})\mathrm{S^2} + 10\mathrm{KcS} + 10\mathrm{Ki}}\right)\frac{1}{S} = 0$$

d.

El sistema es "Condicionalmente estable"

Su ecuación Característica es:

$\mathrm{S^3} + (1 + 10\mathrm{Kg})\mathrm{S^2} + 10\mathrm{KcS} + 10\mathrm{Ki} = 0$

$\mathrm{S^3} + 8.94\mathrm{S^2} + 80\mathrm{S} + 10\mathrm{Ki} = 0$

Usando el Criterio de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} \mathrm{S^3} & 1 & 80 \\ \mathrm{S^2} & 8.94 & 10\mathrm{ki} \\ \mathrm{S^1} & \frac{715.2 - 10\mathrm{Ki}}{8.94} & \\ \mathrm{S^0} & 10\mathrm{Ki} & \end{array}$$

a. $715.2 - 10\mathrm{Ki} = 0\ \rightarrow Ki = 71.52 = Kcritico$

El rango de estabilidad $0 < \mathrm{K} \leq \mathrm{Kcrit}$

$0 < \mathrm{K} \leq 71.52$

Ecuación auxiliar:

b. $8.94\mathrm{S^2} + 10\mathrm{Ki} = 0\ \rightarrow\ \mathrm{S^2} = -\frac{10(71.52)}{8.94} \rightarrow \mathrm{S^2} = -80$

$S_{1,2} = \pm j8.94\ = \mathrm{Wo}$

Ejercicio 2

Indique cuál es la función de transferencia del sistema que tiene los diagrama de Bode de la figura que sigue.

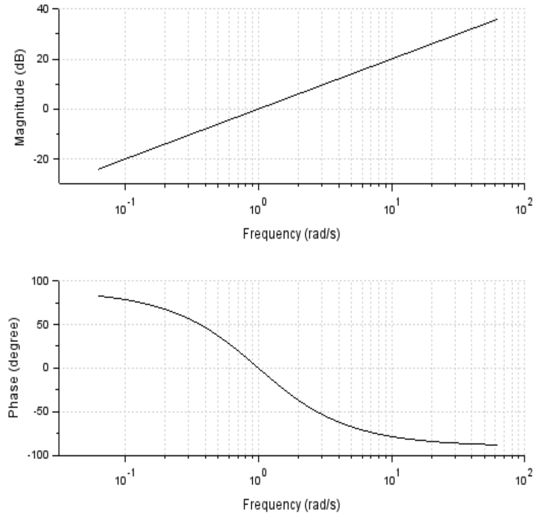
I. $F(s) = s$

II. $F(s) = \frac{s.(1-s)}{(1+s)}$

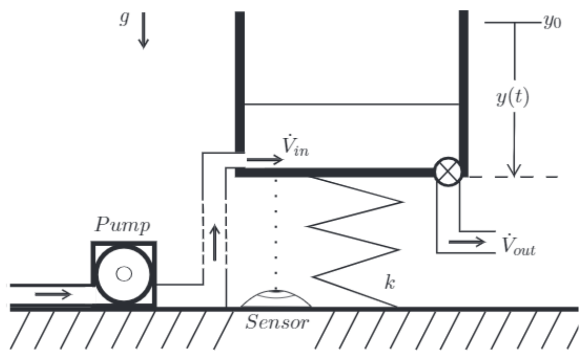
III. $F(s) = \frac{(s+1).s}{(1-s)}$

IV. $F(s) = \frac{(s^2-s)}{(s+1)}$

V. Ninguna de las alternativas anteriores.



Ejercicio 3



Un tanque vacío de masa m_o es posicionado sobre un resorte con rigidez k. El tanque es esta en equilibrio cuando $y_o = 0$ y solo se puede mover verticalmente. La fuerza del resorte es definida tal que $F_k(y_o) = 0$.
La densidad del líquido bombeado al tanque es ρ, con flujo volumétrico variable:
$\dot{V}_i = \dot{V}_{max} - Cy(t)$, el control electrónico de la bomba permite ajustar apropiadamente el caudal de acuerdo al valor a la posición y(t) medido por el sensor.
La masa de las tuberías unidas al tanque además de la masa propia del tanque están consideradas en m_o.
Una válvula a la salida del tanque puede ser ajustada y es considerada como la entrada $u(t) = \dot{V}_{out}$ del sistema.

Se pide:
Calcular las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento vertical del tanque.
Usar $z1 = y(t),\ z_2 = \dot{y}(t)$ y $z_3 = m_{tanque}(t)$ como estados. La entrada al sistema es $u(t) = \dot{V}_{out}(t)$ y la salida (señal medida) es $w(t) = y(t)$. Escribir las ecuaciones en la forma de espacio de estado incluyendo la ecuación de salida.

a) El tanque tiene que mantenerse en equilibrio a la distancia y_c, tal que la masa total permanezca en m_c . ¿Qué valor de la señal de entrada u es requerida para este propósito?
b) Linealizar las ecuaciones diferenciales con respecto al punto de equilibrio anterior. Representar las ecuaciones en la forma de espacio de estados standard (canónica) con matrices del sistema { A, B, C, D }.

1. Usando los estados dados se tiene que:

$$\dot{z}_1(t) = \dot{y}(t) = z_2(t).$$

Aplicando la 2da Ley de Newton al tanque posicionado sobre el resorte se tiene:

$$\begin{aligned} m_{tanque}(t)\ddot{y}(t) &= m_{tanque}(t)g - ky(t) \\ \ddot{y}(t) &= g - k\frac{y(t)}{m_{tanque}(t)} \\ \ddot{y}(t) &= \dot{z}_2(t) = g - k\frac{z_1(t)}{z_3(t)} \end{aligned}$$

De la Ley de Conservación de Masa:

$$\begin{aligned} m_{tanque}(t) &= m_o + \rho V_{in}(t) - \rho V_{out}(t) \\ \dot{m}_{tanque} &= 0 + \rho\dot{V}_{in}(t) - \rho\dot{V}_{out}(t) \\ \dot{m}_{tanque} &= \dot{z}_3 = \rho(\dot{V}_{max} - Cz_1(t) - u(t)) \end{aligned}$$

La representación espacio de estados del sistema es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_2(t) \\ g - k\dfrac{z_1(t)}{z_3(t)} \\ \rho(\dot{V}_{max} - Cz_1(t) - u(t)) \end{bmatrix} \\ w(t) &= \begin{bmatrix} z_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Usando la información dada: $z_1 = y_e$, $z_3 = m_{tanque} = m_e$ y $\dot{z}_1(t) = 0$, $\dot{z}_3(t) = \dot{m}_{tanque} = 0$, luego:

$$g - k\frac{y_e}{m_e} = 0 \rightarrow y_e = \frac{gm_e}{k}$$

Reemplando para obtener u_e:

$$u_e = \dot{V}_{max} - Cye \rightarrow u_e = \dot{V}_{max} - \frac{Cgm_e}{k}$$

3. Linealizando el sistema con respecto al punto de equilibrio $(y_e, 0, m_e, u_e)$.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{k}{z_{3e}} & 0 & \dfrac{kz_{1e}}{z_{3e}^2} \\ -\rho C & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{z}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix} \tilde{u}(t) \\ w(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{z}(t) + 0\tilde{u}(t) \end{aligned}$$

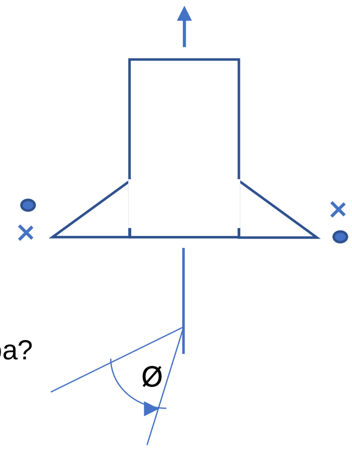
Problema 4

Un satélite tiene un sistema de posicionamiento mediante propulsores que proveen torque alrededor de su eje de giro.

El momento de inercia del sistema es $\mathrm{J} = 200\ \mathrm{kg}.m^2$

Los propulsores se ajustan en forma continua en un sentido y en otro con un par máximo de 2 Nm.

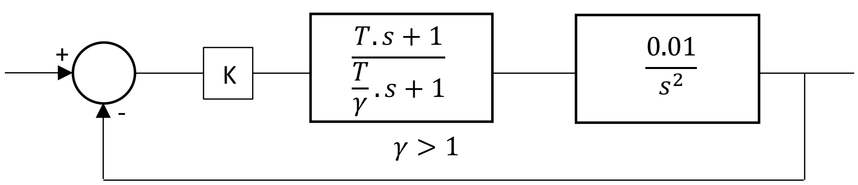
El sistema mide el ángulo Ø respecto a una referencia fija.



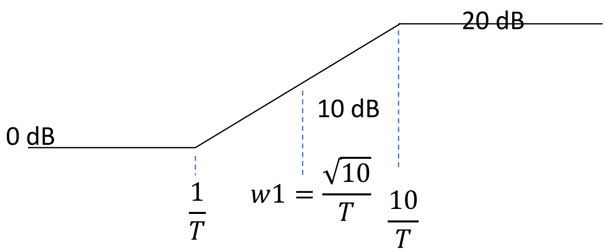
a) Diseñar un compensador proporcional, más un compensador que determine un margen de fase de 50° y frecuencia de corte de 0.1 $rad.seg^{-1}$.
b) ¿Cuál es el error estacionario ante una entrada rampa?

$$J\ddot{Ø} = u.T_{MAX}$$

$$\frac{Ø(s)}{u(s)} = \frac{T_{MAX}}{J} \cdot \frac{1}{s^2}$$



$\sin(\alpha) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ si α=55° → γ=10



W1=0.1 $rad.seg^{-1}$ → T = 31.6 seg

$$20\log(K) = -10$$

$$K = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.32$$