Modelo Estático de Redes

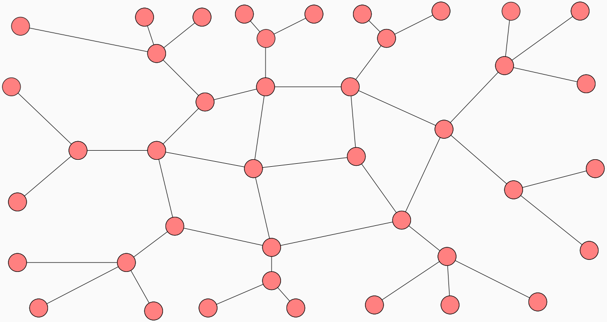
Cálculo Exacto, Cotas y Simplificaciones

Leslie Murray

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Rosario, Argentina

Abril, 2024

Modelo

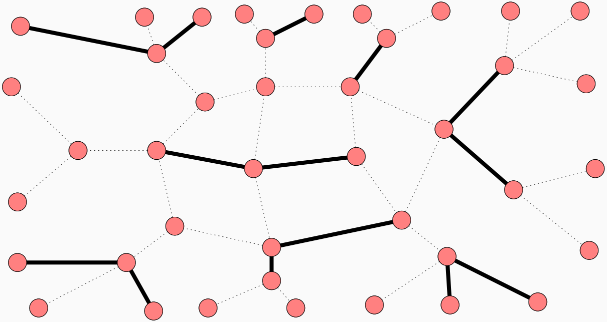


- Grafo no dirigido: $G(V,E)$
- $V = \{\text{conjunto de nodos}\}$, $|V| = n$, $E = \{\text{conjunto de enlaces}\}$, $|E| = m$

Modelo de Red

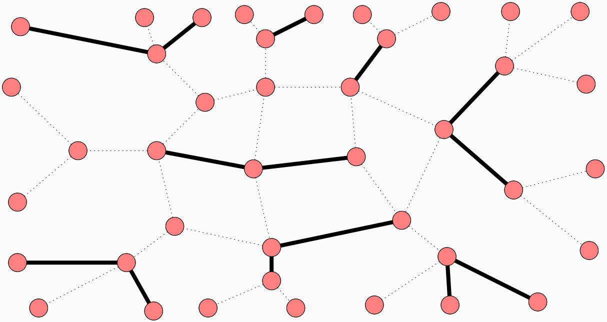
nodo: genera y procesa información que recibe y transmite a través de los enlaces
enlace: permite el paso de información entre los nodos de sus extremos

Estados



Vamos a trabajar sobre un modelo simple en el cual:

- Los nodos son "perfectos" (no fallan).
- Los enlaces pueden estar en uno de dos estados posibles.



Vamos a trabajar sobre un modelo simple en el cual:

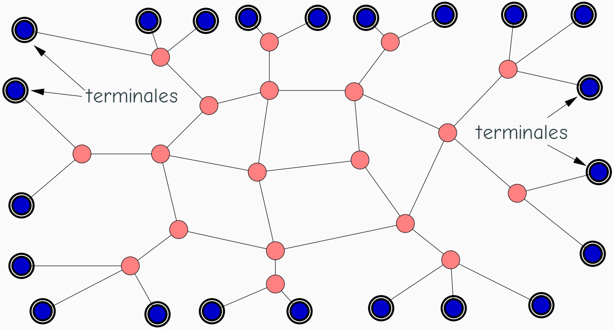
- Los nodos son "perfectos" (no fallan).
- Los enlaces pueden estar en uno de dos estados posibles.

Estados de un enlace

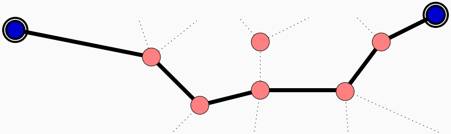
fallado: equivale a retirado del grafo

sano u operativo: indica una conexión perfecta entre los nodos de sus extremos

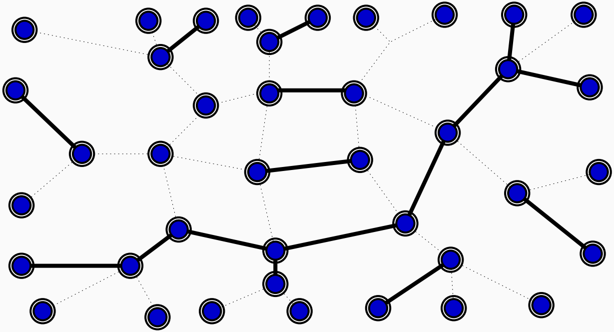
Objetivo



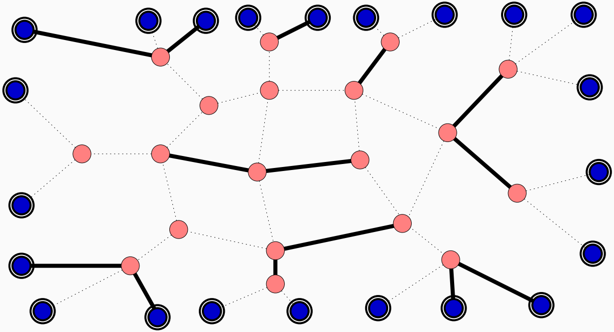
- Garantizar la conexión entre nodos terminales (conectividad).



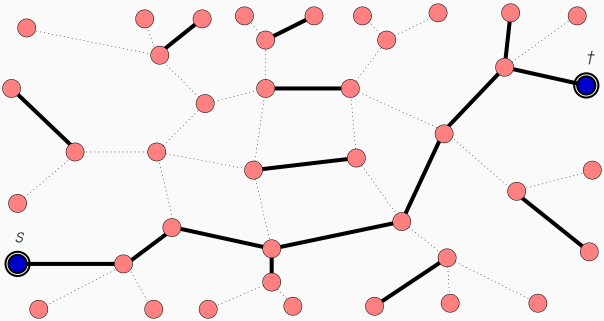
- Para el análisis vamos a considerar tres formas posibles de conectividad.



Si la red está formada sólo por terminales, **la red se considera *operativa* si existe al menos un camino formado por enlaces *operativos* que los conecte a todos.**



Si la red está formada sólo por K terminales, **la red se considera *operativa* si existe al menos un camino formado por enlaces *operativos* que conecte los K terminales.**



Si la red está formada sólo por 2 terminales, s y t, **la red se considera *operativa* si existe al menos un camino formado por enlaces *operativos* entre s y t.**

$s =$ *source* (origen, fuente) $\qquad$ $t =$ *terminal* (objetivo, blanco)

Conectividad

La elección del tipo de conectividad no tiene un peso importante frente al problema a resolver ni modifica sustancialmente las formas de resolverlo.

Función de Estructura I

- Los enlaces de la red se modelan mediante variables x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.
- Cada componente del vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, es una variable indicatriz del estado de operación del enlace asociado:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el } i\text{–ésimo enlace está } \textit{operativo} \\ 0 & \text{si el } i\text{–ésimo enlace está } \textit{fallado} \end{cases}$$

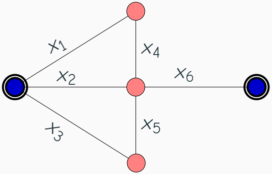
- La red —en forma global— también puede encontrarse en uno de dos estados de operación: garantizando la conexión entre nodos terminales, o no.
- El estado de operación de la red depende del estado de los enlaces.
- La *función de estructura*, $\phi(\mathbf{x})$, es una variable indicatriz del estado de operación de la red:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \text{ garantiza la conexión entre los nodos terminales }^{(*)} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

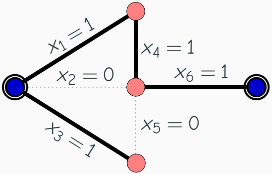
Función de estructura

$\phi(\mathbf{x})$ es la indicatriz de que la red cumple con el cometido para el cual fue diseñada.

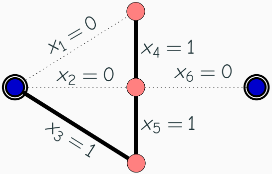
(*) Ya sea para conectividad s–t, K–terminales o todos–con–todos.



$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

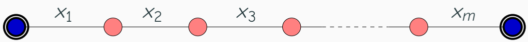


$\phi(1,0,1,1,0,1) = 1$

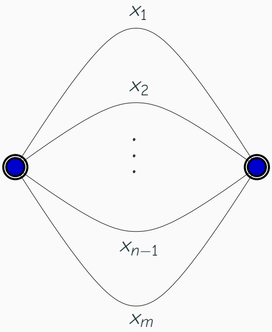


$\phi(0,0,1,1,1,0) = 0$

Función de Estructura III

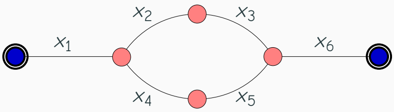


$$\phi(\mathbf{x}) = \min(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod_{i=1}^{m} x_i$$



$$\phi(\mathbf{x}) = \max(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - x_i)$$

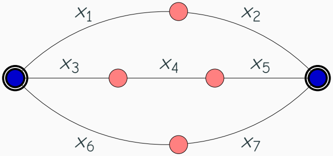
EJEMPLO 1:



$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= \min(x_1,\ \max(\min(x_2,x_3),\min(x_4,x_5)),\ x_6) \\
&= x_1\ \max(\min(x_2,x_3),\min(x_4,x_5))\ x_6 \\
&= x_1\ \max((x_2x_3),(x_4x_5))\ x_6 \\
&= x_1\ (x_2x_3 + x_4x_5 - x_2x_3x_4x_5)\ x_6
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2:



$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= \max(x_1x_2\ ,\ x_3x_4x_5\ ,\ x_6x_7) \\
&= 1-(1-x_1x_2)(1-x_3x_4x_5)(1-x_6x_7) \\
&= x_1x_2 + x_3x_4x_5 + x_6x_7 - x_1x_2x_3x_4x_5 - x_1x_2x_6x_7 - \\
&\quad x_3x_4x_5x_6x_7 + x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7
\end{aligned}$$

□

Supongamos ahora que los enlaces están *operativos* o *fallados* en forma aleatoria.

- El i–ésimo enlace está *operativo* con probabilidad r_i y *fallado* con probabilidad $q_i = 1 - r_i$.
- El estado de la red es un vector de v.a. de Bernoulli, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}\{X_i = 1\} = r_i & \text{confiabilidad individual del } i\text{–ésimo enlace} \\ \mathbb{P}\{X_i = 0\} = q_i = 1 - r_i & \text{anti–confiabilidad individual del } i\text{–ésimo enlace} \end{cases}$$

- La *función de estructura* también es una v.a. de Bernoulli,

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{X} \text{ garantiza la conexión entre los nodos terminales} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Basados en $\phi(\mathbf{X})$ se define ζ, la confiabilidad de la red:

$$\zeta = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\} = \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$$

Confiabilidad de la red, ζ

Es la probabilidad de que la red cumpla con el cometido para el cual fue diseñada.

De aquí en más las v.a. X_i, $i = 1, \ldots, m$, se considerarán mutuamente independientes.

Nota: para una v.a. B de Bernoulli, $\mathbb{E}\{B\} = 1 \times \mathbb{P}\{B = 1\} + 0 \times \mathbb{P}\{B = 0\} = \mathbb{P}\{B = 1\}$.

Supongamos ahora que los enlaces están *operativos* o *fallados* en forma aleatoria.

- El i–ésimo enlace está *operativo* con probabilidad r_i y *fallado* con probabilidad $q_i = 1 - r_i$.
- El estado de la red es un vector de v.a. de Bernoulli, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}\{X_i = 1\} = r_i & \text{confiabilidad individual del } i\text{–ésimo enlace} \\ \mathbb{P}\{X_i = 0\} = q_i = 1 - r_i & \text{anti–confiabilidad individual del } i\text{–ésimo enlace} \end{cases}$$

- La *función de estructura* también es una v.a. de Bernoulli,

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{X} \text{ garantiza la conexión entre los nodos terminales} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Basados en $\phi(\mathbf{X})$ se define $1 - \zeta$, la anti–confiabilidad de la red:

$$1 - \zeta = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 0\} = 1 - \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\}$$

Anti–confiabilidad de la red, $1 - \zeta$

Es la probabilidad de que la red no cumpla con el cometido para el cual fue diseñada.

De aquí en más las v.a. X_i, $i = 1, \ldots, m$, se considerarán mutuamente independientes.

Nota: en futuras discusiones se evaluará la conveniencia de trabajar con $1 - \zeta$ en lugar de ζ.

Hay diversas formas de encontrar (algunas en forma exacta, otras en forma aproximada) el valor de ζ:

- **Cálculo Exacto (C.E.).** Determinar el valor de ζ mediante una expresión matemática.
- **Determinación de Cotas.** Encontrar valores ζ_L y ζ_U tales que

$$\zeta_L \leq \zeta \leq \zeta_U.$$

  - Útil si es más sencillo el cálculo de ζ_L y ζ_U que el cálculo exacto de ζ.
  - Se pueden evaluar las cotas mediante indicadores de precisión relativa:

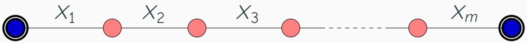
$$\mathrm{AR}_L = \frac{\zeta - \zeta_L}{\zeta} \qquad \mathrm{AR}_U = \frac{\zeta_U - \zeta}{\zeta} \qquad \mathrm{AR} = \frac{\zeta_U - \zeta_L}{\zeta}$$

- **Simplificaciones.** Eliminar nodos y enlaces sin que eso modifique el valor de ζ, pero haciendo más sencillo tanto el cálculo exacto, como la determinación de cotas o la estimación.
- **Estimación.** Encontrar un valor $\widehat{\zeta}$ (estimador), cercano a ζ.
  - Útil si es más sencillo el cálculo de $\widehat{\zeta}$ que el cálculo exacto de ζ
  - Se puede evaluar la calidad de $\widehat{\zeta}$ mediante un indicador de error relativo:

$$\mathrm{ER} = \frac{|\,\widehat{\zeta} - \zeta\,|}{\zeta} \qquad \text{(vamos a trabajar con otras formas de error relativo)}$$

Cálculo Exacto

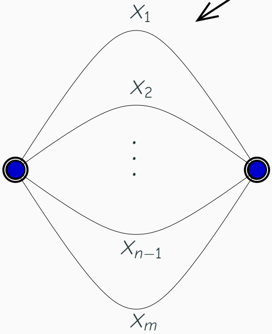
Casos Elementales



SERIE

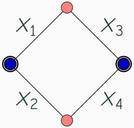
$$\zeta = \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\} = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\}$$
$$= \mathbb{P}\{\text{todos los } X_i = 1\}$$
$$= \mathbb{P}\{X_1 = 1 \ \wedge \ X_2 = 1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ X_m = 1\}$$
$$= \mathbb{P}\{X_1 = 1\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 1\}\ldots\mathbb{P}\{X_m = 1\}$$
$$= \prod_{i=1}^{m} r_i$$

PARALELO

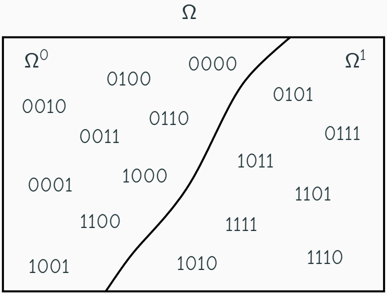


$$\zeta = \mathbb{E}\{\phi(\mathbf{X})\} = \mathbb{P}\{\phi(\mathbf{X}) = 1\}$$
$$= \mathbb{P}\{\text{al menos un } X_i = 1\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{todos los } X_i = 0\}$$
$$= 1 - \mathbb{P}\{X_1 = 0 \ \wedge \ X_2 = 0 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ X_m = 0\}$$
$$= 1 - \mathbb{P}\{X_1 = 0\}\,\mathbb{P}\{X_2 = 0\}\ldots\mathbb{P}\{X_m = 0\}$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - r_i)$$

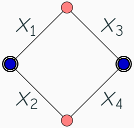
Enumeración I



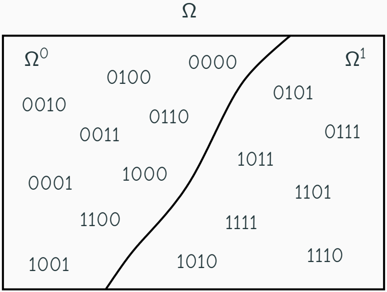
$\mathbf{X} = X_1X_2X_3X_4 \quad \rightarrow \quad$ EJEMPLOS: $\mathbf{X}_1 = 0000,\ \mathbf{X}_2 = 0001,\ \ldots$



Ω^1: subespacio de configuraciones que permiten la conexión entre los terminales.
Ω^0: subespacio de configuraciones que no permiten la conexión entre los terminales.



$\mathbf{X} = X_1X_2X_3X_4 \quad \rightarrow \quad$ EJEMPLOS: $\mathbf{X}_1 = 0000,\ \mathbf{X}_2 = 0001,\ \ldots$



ζ es la suma de las probabilidades de todas las configuraciones de Ω^1.
$1 - \zeta$ es la suma de las probabilidades de todas las configuraciones de Ω^0.

- Sea $\Omega = \{\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \ldots, \mathsf{X}_{2^m}\}$, el conjunto de todos los estados de la red.
- Los eventos $\{\mathsf{X} = \mathsf{X}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^m$ son mutuamente excluyentes, por lo que:

$$\sum_{i=1}^{2^m} \mathbb{P}\{\mathsf{X} = \mathsf{X}_i\} = 1$$

- Siendo $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^0$, donde:

$$\begin{cases} \Omega^1 = \{\text{estados que garantizan la conectividad entre terminales}\} \\ \Omega^0 = \{\text{los restantes}\} \end{cases}$$

- Claramente:

$$\zeta = \sum_{\mathsf{X}_i \in \Omega^1} \mathbb{P}\{\mathsf{X} = \mathsf{X}_i\} \qquad 1 - \zeta = \sum_{\mathsf{X}_i \in \Omega^0} \mathbb{P}\{\mathsf{X} = \mathsf{X}_i\}$$

$$\mathbf{X} = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6$$

$$\mathbf{x} = 110101$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\} &= \mathbb{P}\{X_1 = 1\} \times \mathbb{P}\{X_2 = 1\} \times \mathbb{P}\{X_3 = 0\} \times \mathbb{P}\{X_4 = 1\} \times \mathbb{P}\{X_5 = 0\} \times \mathbb{P}\{X_6 = 1\} \\ &= r_1 \times r_2 \times q_3 \times r_4 \times q_5 \times r_6 \end{aligned}$$

Si todos los enlaces son iguales: $r_i = r \ \forall i$

$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\} = r^4 \times q^2 = r^4 \times (1 - r)^2$$

Enumeración V

- Un vector $\mathbf{X}$ es un *camino* si $\phi(\mathbf{X}) = 1$.
- Sea $C_k = \{i : X_i = 1 \wedge X_i \in \mathbf{X}_k, \text{siendo } \mathbf{X}_k \text{ un } \textit{camino}\}$.
- La probabilidad de que el estado de la red sea $\mathbf{X}_k$ es:

$$\mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{X}_k\} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \in C_k}}^{m} r_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin C_k}}^{m} (1 - r_j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \in C_k}}^{m} r_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin C_k}}^{m} q_j$$

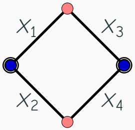
- Siendo $\Omega^1 = \{\mathbf{X} : \phi(\mathbf{X}) = 1\}$, es decir, el conjunto de todos los *caminos* $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_{|\Omega^1|}$, y $C_1, C_2, \ldots, C_{|\Omega^1|}$ los correspondientes conjuntos de índices, $|\ \Omega^1\ | \leq 2^m$,

$$\zeta = \sum_{k=1}^{|\Omega^1|} \mathbb{P}\{\mathbf{X} = \mathbf{X}_k\} = \sum_{k=1}^{|\Omega^1|} \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \in C_k}}^{m} r_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \notin C_k}}^{m} q_j \right)$$

Es necesario generar los 2^m estados, ver cuáles son caminos, y sumar las probabilidades de aquellos que lo sean.

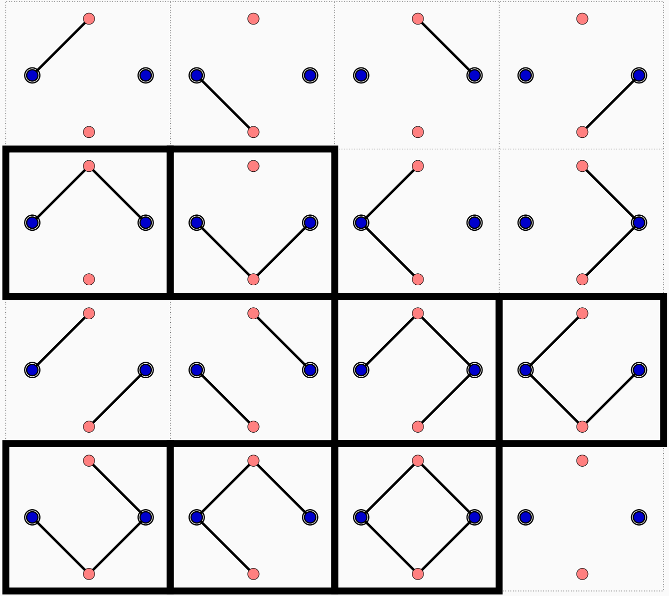
Enumeración VI

EJEMPLO 3:



$\mathbb{P}\{X_i = 1\} = r$
$\mathbb{P}\{X_i = 0\} = q$

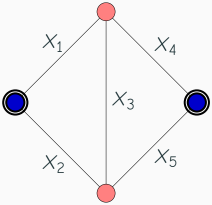
$i = 1, 2, 3, 4$



$$
\begin{aligned}
\zeta &= rrqq + rrqq + rrrq + rrrq + rrrq + rrrq + rrrr \\
&= 2r^2q^2 + 4r^3q + r^4 \\
&= 2r^2(1-r)^2 + 4r^3(1-r) + r^4 \\
&= 2r^2(1-2r+r^2) + 4r^3(1-r) + r^4 \\
&= 2r^2 - r^4
\end{aligned}
$$

$\square$

EJEMPLO 4:



La confiabilidad ζ es la suma de las probabilidades indicadas en la columna derecha de la tabla.

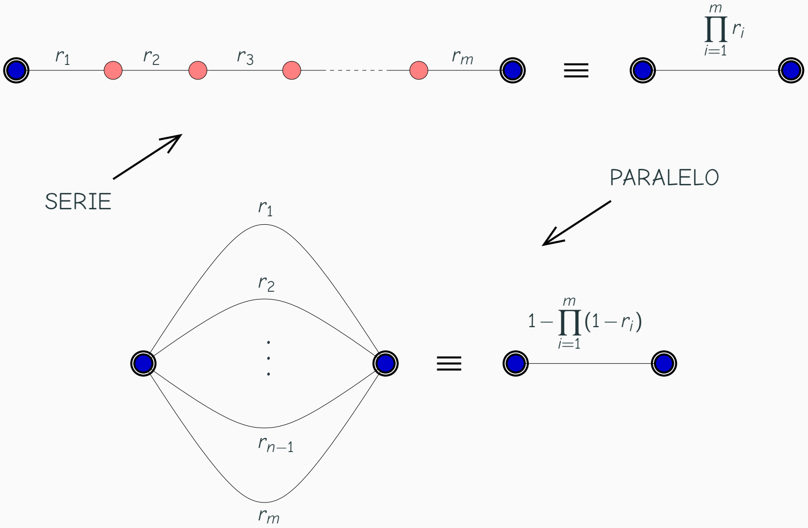
C_k	$\mathbb{P}\{\mathbf{X} = x_k\}$
12345	$r_1 r_2 r_3 r_4 r_5$
1234	$r_1 r_2 r_3 r_4 q_5$
1235	$r_1 r_2 r_3 q_4 r_5$
1245	$r_1 r_2 q_3 r_4 r_5$
124	$r_1 r_2 q_3 r_4 q_5$
125	$r_1 r_2 q_3 q_4 r_5$
1345	$r_1 q_2 r_3 r_4 r_5$
134	$r_1 q_2 r_3 r_4 q_5$
135	$r_1 q_2 r_3 q_4 r_5$
145	$r_1 q_2 q_3 r_4 r_5$
14	$r_1 q_2 q_3 r_4 q_5$
2345	$q_1 r_2 r_3 r_4 r_5$
234	$q_1 r_2 r_3 r_4 q_5$
235	$q_1 r_2 r_3 q_4 r_5$
245	$q_1 r_2 q_3 r_4 r_5$
25	$q_1 r_2 q_3 q_4 r_5$

$\square$

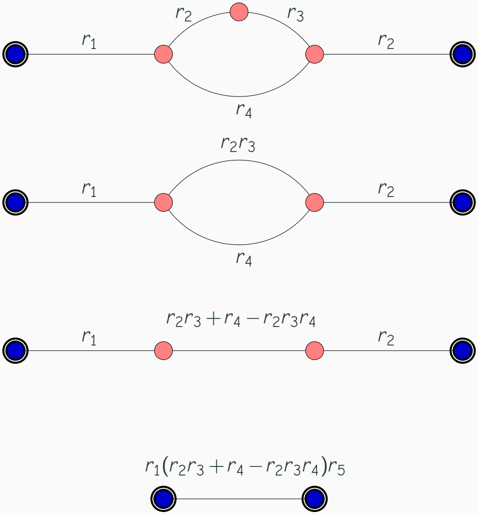
Simplificaciones

Simplificaciones I

Sin que esto implique resolver la determinación de ζ, algunas redes pueden reducirse (eliminando nodos y enlaces), en algunos casos hasta su resolución total.



Simplificaciones II



Bibliografía

C. J. Colbourn. *The Combinatorics of Network Reliability*. New York, NY, USA: Oxford University Press, Inc., 1987. ISBN: 0195049209.

Ilya B. Gertsbakh and Yoseph Shpungin. *Models of Network Reliability: Analysis, Combinatorics, and Monte Carlo*. 1st ed. CRC Press, Inc., 2009. ISBN: 1439817413, 9781439817414.

S.M. Ross. *Introduction to Probability Models*. 10th ed. Elsevier Science, 2006. ISBN: 9780123756879.