

# Capítulo 5

## Funciones continuas

### 5.1. Continuidad

1. Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas. Probar que la función  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  es continua.

2.

a) Probar que una función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple la propiedad de Lipschitz es continua.

b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable. Probar que la función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  es continua.

3. Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$  y  $c < d$ . Bosquejar, si es posible, una función continua que cumpla:

a)  $f : (a, b) \rightarrow [c, d], f((a, b)) = (c, d)$       b)  $f : (a, b) \rightarrow [c, d], f((a, b)) = [c, d]$

c)  $f : [a, b] \rightarrow [c, d], f([a, b]) = (c, d)$       d)  $f : [a, b] \rightarrow [c, d], f([a, b]) = [c, d]$

e)  $f : [a, b] \rightarrow [c, d], f([a, b]) = (c, d)$       f)  $f : (a, b) \rightarrow [c, d], f((a, b)) = (c, d)$

g)  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f((a, b)) = \mathbb{R}$       h)  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f([a, b]) = \mathbb{R}$

i)  $f : \mathbb{R} \rightarrow [c, d], f(\mathbb{R}) = (c, d)$       j)  $f : \mathbb{R} \rightarrow [c, d], f(\mathbb{R}) = [c, d]$

k)  $f : [a, b] \rightarrow [c, d], f([a, b]) = \left[ c, c + \frac{d-c}{4} \right) \cup \left( d - \frac{d-c}{4}, d \right]$

l)  $f : \left[ a, a + \frac{b-a}{4} \right) \cup \left( d - \frac{d-c}{4}, d \right] \rightarrow [c, d], f\left( \left[ a, a + \frac{b-a}{4} \right) \cup \left( d - \frac{d-c}{4}, d \right] \right) = [c, d]$

## 5.2. Teorema de Bolzano

### 1. Existencia de soluciones

- a) Demuestre que la ecuación dada  $x + 2\cos(x) = 0$  tiene al menos una solución.  
 b) En los siguientes casos, hallar un entero  $n$  para el cual existe  $x$  tal que  $n \leq x \leq n + 1$  y  $f(x) = 0$ :

$$a) \quad x^5 + 5x^4 + 2x + 1 \quad b) \quad x^5 + x + 1 \quad c) \quad x + e^x \quad d) \quad \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + x$$

- c) Demostrar que existe un número  $x$  tal que:

$$a) \quad \sin(x) = x - 1 \quad b) \quad 5\sin(x) = \cos(x)^2$$

$$c) \quad x^{117} + \frac{534}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 1212 \quad d) \quad x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 119$$

$$e) \quad \sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$$

- d) Mostrar que para todo par  $A, B \in \mathbb{R}^+$  la función  $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$  tiene una raíz.  
 e) Probar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo  $(1,2)$ :

$$x\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 5 = \log(x) - e^x$$

- f) Considere la ecuación  $1 - \frac{x^2}{4} = \cos(x)$ .

- 1) Muestre que tiene al menos una solución.
- 2) Muestre que tiene al menos dos soluciones.
- 3) Muestre que tiene al menos tres soluciones.

2. Sea  $g : [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ -2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

- a) Prueba que  $g$  no se encuentra en las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo  $[-3, 4]$ .  
 b) Prueba de todas formas que  $g$  tiene una única raíz en dicho intervalo.

3. Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas. Si  $f(a) > g(a)$  y  $f(b) < g(b)$  demuestra que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = g(c)$   
 4. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que existe un par  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$  y  $f(a) < 0 < f(b)$ . Sea  $A$  el conjunto definido por  $A = \{y > a : f(z) < 0 : \forall z \in [a, y]\}$ . Probar que  $A$  está acotado, no tiene máximo y  $\sup(A)$  es una raíz de  $f$ .

### 5. Puntos fijos

Dada  $f$  una función, un punto fijo de  $f$  es un valor  $c$  tal que  $f(c) = c$ . Notar que una función puede tener varios puntos fijos, uno solo o ninguno.

- Sea  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una función continua. Probar que  $f$  tiene al menos un punto fijo.
- Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y monótona decreciente. Probar que  $f$  tiene exactamente un punto fijo.
- De un ejemplo de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y sin puntos fijos.

### 6. Polinomios

- Dado un polinomio  $P$  decimos que una raíz ha sido separada si se ha encontrado un intervalo  $[a, b]$  que contiene esta raíz y ninguna otra. Separar las raíces reales de cada uno de los siguientes polinomios (todos tienen 4 raíces).

Comentarios: Estudiar  $P\left(\frac{n}{2}\right)$  para  $n \in \mathbb{Z}$

$$a) \quad 3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 \quad b) \quad x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2$$

- Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.
- Mostrar que la paridad de la cantidad de raíces contadas con multiplicidad es igual a la paridad del grado del polinomio.
- Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x)}{x^n}$$

Probar que si  $n$  es impar, entonces existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x^n + \phi(x) = 0$ .

### 7. Integrales

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua e integrable (más adelante se verá que esta hipótesis es redundante).

- Dados  $a < b$ , probar que si  $f$  es no negativa y  $\int_a^b f(t) dt = 0$  entonces la función  $f$  es 0 en el intervalo  $[a, b]$ .
- (Valor medio)**
  1. Demostrar que existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c)(b - a) = \int_a^b f(t) dt$
  2. ¿El  $c$  de la parte anterior es único? Justificar su respuesta.
  3. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  no es continua ¿vale la conclusión de la primera parte? Justificar su respuesta

- c) Si  $f$  continua es tal que  $\int_{-2}^1 f(t) dt = 3$ , entonces se cumple necesariamente que:
- (A)  $f(\alpha) = 1, \forall \alpha \in [-2, 1]$ .
  - (B)  $f(\alpha) < 2, \forall \alpha \in [-2, 1]$ .
  - (C)  $\exists \alpha \in [-2, 1]$  tal que  $f(\alpha) = -3$ .
  - (D)  $\exists \alpha \in [-2, 1]$  tal que  $f(\alpha) = 1$ .
  - (E)  $f(\alpha) > \frac{1}{2}, \forall \alpha \in [-2, 1]$ .
- d) Sea  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Probar que si  $\text{máx}(F) = F(c)$  para algún  $c \in (a, b)$  entonces  $f(c) = 0$
8. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $x \leq f(x) \leq x + 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Calcule  $f(\mathbb{R})$ .
- 9.
- a) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  es continua y  $f(x)$  es entero para todo  $x$ . ¿Qué puede decirse acerca de  $f$ ?
  - b) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  es continua y  $f(x)$  es racional para todo  $x$ . ¿Qué puede decirse acerca de  $f$ ?
  - c) Si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas que cumplen  $f(r) = g(r), \forall r \in \mathbb{Q}$ , entonces  $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 10.
- a) Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, tal que  $x^2 + (f(x))^2 = 1$ . Demuestre que o bien  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  o bien  $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$
  - b) ¿Cuántas funciones continuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hay que satisfagan  $(f(x))^2 = x^2$ ?

### 5.3. Teorema de Weierstrass

1. Para las siguientes funciones determinar cuáles están acotadas inferior o superiormente y, en caso de estarlo, si tienen mínimo y máximo respectivamente.

$$a) f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \quad b) f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$c) f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} \quad d) f : (3, 5) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

$$e) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x) \quad f) f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$$

2. Sea  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(x) > 0, x \in [0, 2]$  y  $\int_0^2 f(t) dt = 10$

- a) Supongamos además que  $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable y acotada con máximo  $M$  y mínimo  $m$ . Probar que

$$10m \leq \int_0^2 f(t)g(t) dt \leq 10M.$$

- b) Deducir que  $10 \leq \int_0^2 (3t^2 + 1)e^t dt \leq 10e^2$ .

- c) Deducir que  $10 \leq \int_0^2 (3t^2 + 1)e^{t^2} dt \leq 10e^4$ .

3. Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *periódica* si existe  $T > 0$  tal que  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Ejemplos de estas funciones son sin y cos.

Probar que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y periódica, entonces  $f$  tiene mínimo y máximo.

4. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un polinomio. Probar que existe  $y \in \mathbb{R}$ , tal que  $|f(y)| \leq |f(x)| \forall x \in \mathbb{R}$ .
5. En este ejercicio se trabajará con el problema de la existencia de extremos de funciones continuas con dominio  $\mathbb{R}$  (donde no podemos aplicar el teorema de Weierstrass).

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Probar o dar un contraejemplo de las siguientes afirmaciones

- a) Si existen  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ , entonces  $f$  tiene máximo y mínimo.

- b) Si existen  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ , entonces  $f$  tiene máximo o mínimo.

- c) Si existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , entonces  $f$  tiene máximo y mínimo.

- d) Si existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , entonces  $f$  tiene máximo o mínimo.

- e) Si existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , entonces  $f$  tiene máximo.

- f) Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , entonces  $f$  tiene máximo.

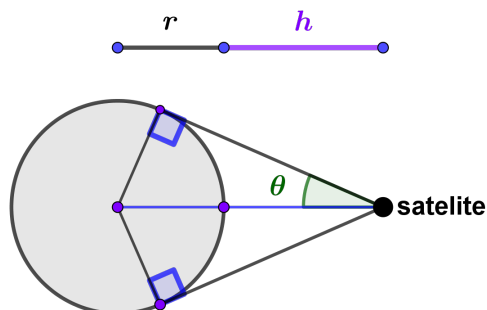
6. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y estrictamente creciente y sobreyectiva. Probar que la función  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.

## 5.4. Aplicaciones

1. Sea  $F$  la función que le asigna a cada punto del planeta tierra su temperatura, asumamos que la tierra tiene forma esférica perfecta, y que la función  $F$  es continua.

Discutir si la siguiente afirmación es verdadera: Existen dos puntos antipodales (diametralmente opuestos en la esfera) que tienen la misma temperatura.

2. Cuando un satélite explora la Tierra, solo tiene acceso a una parte de la superficie. Alguno de ellos cuentan con sensores que pueden medir un ángulo  $\theta$  como se muestra en la figura.



donde  $r$  es el radio de la Tierra,  $h$  la distancia del satélite a la superficie terrestre y  $\theta$  el ángulo entre el segmento que une el satélite y el centro de la Tierra con el segmento tangente a la tierra que pasa por el satélite.

El radio de la Tierra es de 6371 km aproximadamente.

- Calcular  $h$  para que  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .
  - Sea  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función que le asigna a cada  $h$  su  $\theta$  correspondiente. Calcular  $\lim_{h \rightarrow +\infty} F(h)$  y deducir  $Im(F)$ .
  - Los satelites de navegación global, como el GPS, orbitan entre 20000 y 35786 km de altura. Determinar los angulos mínimos y máximos para estos  $h$  y comparar con  $\lim_{h \rightarrow +\infty} F(h)$ .
3. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo  $t_0$ . El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud periodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo  $t_0 + 12$  horas. Demuestre que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.
4. Suponga que tiene un resorte colgando desde el techo, y lo estira hacia abajo. ¿Es cierto que algún punto del resorte quedará en su posición original? Suponga que tiene un resorte sobre una superficie lateral (digamos una mesa) y lo contrae desde los extremos, aplicando fuerza similar, pero sin saber si es igual o no ¿Es cierto que algún punto del resorte quedará en su posición original?
5. **Distancia a una curva**
- Sean  $f$  un función continua en  $[a, b]$ , y sea  $x \in \mathbb{R}$ . Demuestre que existe un punto en la gráfica de  $f$  que es el que está más cerca al punto  $(x, 0)$ , en otras palabras, existe

un  $t$  de  $[a, b]$  tal que la distancia de  $(x, 0)$  a  $(t, f(t))$  es menor igual que la distancia  $(z, f(z))$  para todo  $z$  de  $[a, b]$ . Recordar que la distancia entre dos puntos del plano  $P = (p_1, p_2)$  y  $Q = (q_1, q_2)$  es  $d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$ .

- b) Muestre que este resultado no es cierto si  $[a, b]$  se sustituye por  $(a, b)$ .  
 c) Demuestre que el resultado es cierto si  $[a, b]$  se sustituye por  $\mathbb{R}$ .

## 5.5. Complementarios

1. Dé ejemplos de polinomios de grado 2, digamos  $P$  y  $Q$  tales que  $P(x) \neq Q(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Sean  $P, Q$  dos polinomios de grado impar, tales que  $P(x) \neq Q(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . ¿Qué relación puede deducir de estos polinomios en cuanto a sus grados y coeficientes?

2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .

Probar que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = cx$ .

3. Recordando que la función inversa de  $f(x) = \log(x)$  es  $g(x) = e^x$ , calcular los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

4. Calcular los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow e^+} (\log(x))^{\frac{1}{x-e}} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

### 5. Funciones convexas

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa.

a) Probar que  $f$  no tiene máximo.

b) Probar que  $f$  es continua.

c) Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  convexa.

1) Probar que  $f$  es continua en  $(a, b)$ .

2) Dé un ejemplo de una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  convexa tal que no es continua en  $a$  y no es continua en  $b$ .

6. Demuestre que no existe una función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que la preimagen de cada punto tenga 2 valores, es decir  $\#f^{-1}(y) = 2$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ .

### 7. Topología I

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $A \subset \mathbb{R}$  un conjunto *abierto*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Decimos que  $A$  es *abierto* si  $\forall a \in A$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $E(a, \varepsilon) \subset A$ .

Probar que  $f^{-1}(A)$  es un conjunto abierto.

### 8. Topología II

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua.

- Probar que  $f([a, b])$  es un intervalo cerrado. De un ejemplo de función continua tal que  $f((0, 2))$  sea un intervalo cerrado.
- Probar que dado un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  se tiene que  $J = f(I)$  también es un intervalo.
- Probar que la función

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Verifica el punto anterior pero no es continua.

### 9. Topología III

La idea de este ejercicio es ver de forma intuitiva cómo funciones continuas pueden tener inversas no continuas, cuando consideramos espacios distintos de intervalos.

- Sea  $f : [0, 2) \cup (4, 10] \rightarrow [0, 10]$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Probar que  $f$  es biyectiva y continua.

Calcular  $f^{-1}$ . Probar que  $f^{-1}$  no es continua.

- Se considera la función  $f : [0, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ (1, t-1) & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ (3-t, 1) & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ (0, 4-t) & \text{si } 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

Observar que  $f$  es inyectiva y que la imagen de  $f$  es el cuadrado de vértices opuestos  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ .

Dado  $t_0 \in [0, 4)$  calcular la función  $g(t) = d(f(t), f(t_0))$  (la distancia de  $f(t)$  a  $f(t_0)$ )

Probar que la función  $g$  es continua. Esto muestra, de forma intuitiva que la función  $f$  es continua ( $f(x)$  está cerca de  $f(x_0)$  si  $x$  está cerca de  $x_0$ ).

Mostrar que para todo  $\delta > 0$  existen  $y_1, y_2 \in \text{Im}(f)$  tal que  $d(y_0, y_1) < \delta$  pero  $d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) > 3$ . Esto muestra de forma intuitiva que  $f^{-1}$  no es continua.