Práctico 5 - Integrales de línea

Definición 13 (Camino). Un **camino** es una curva continuamente diferenciable a trozos. Esto es, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es un camino, entonces existen puntos s_j, con $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ tales que γ' es continua en (s_j, s_{j+1}) es existen $\lim_{t\to s_j^+} \gamma'(t)$ y $\lim_{t\to s_{j+1}^-} \gamma'(t)$.

Definición 15. Sea f una función definida en $\gamma([a, b])$ y con valores complejos. Supongamos que f es continua. Se define la **integral de f sobre el camino** γ a:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))\gamma'(t)}_{\text{Producto en } \mathbb{C}}dt = \int_a^b Re[f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt + i\int_a^b Im[f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt.$$

6. Teorema local de Cauchy

Teorema 10. *Si $f \in H(\Omega)$ y supongamos que existe $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$ (esto es f tiene primitiva) entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \text{ para todo camino cerrado } \gamma \subset \Omega.$$

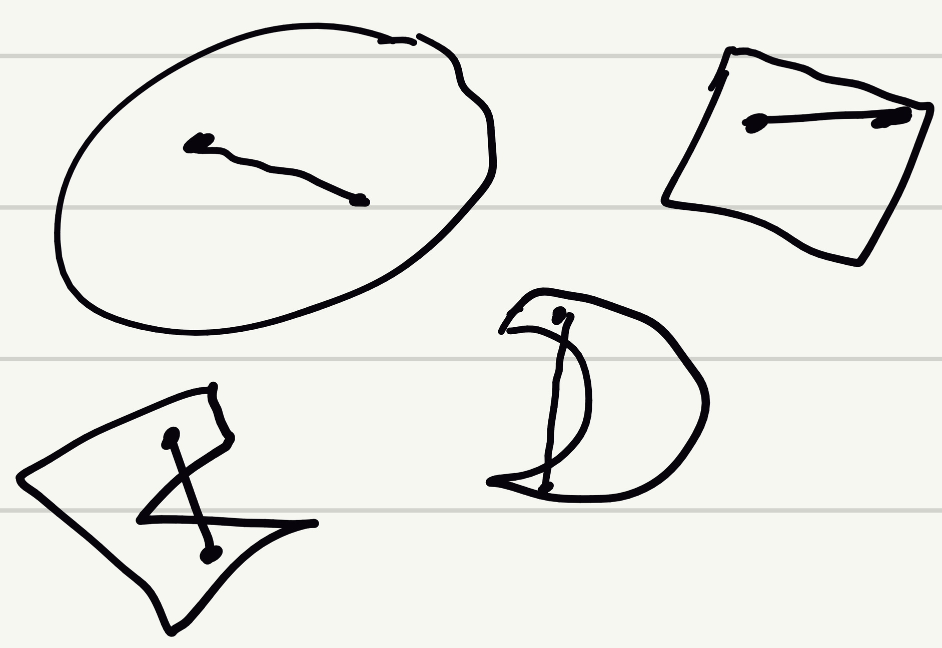
Barrow

Teorema 12 (Teorema de Cauchy para un triángulo). *Sean Δ un triángulo cerrado contenido en un abierto Ω, $p \in \Omega$, f continua en Ω y $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Si $\partial\Delta$ denota el borde del triángulo y a un camino cuya imagen es $\partial\Delta$ entonces*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Teorema 14 (Teorema de Cauchy en un convexo). *Sea Ω un abierto convexo, $p \in \Omega$, f continua en Ω y $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Entonces $F' = f$ para alguna $F \in H(\Omega)$ (f tiene primitiva). Del Teorema 10, tenemos que:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \text{ para todo } \gamma \text{ en } \Omega.$$



Salvo que se indique lo contrario Ω será un región del plano complejo, es decir un conjunto abierto y conexo.

1. Calcular $\int_\gamma f(z)\, dz$ en los siguientes casos:

   a) $f(z) = e^z$ siendo $\gamma(t) = (e^t - 1)(e^t - e^\pi) + i \operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le \pi$.

$$\gamma(0) = (e^0 - 1)\cdot(\cdots) + i\sin(0) = 0$$
$$\gamma(\pi) = (\cdots)(e^\pi - e^\pi) + i\sin(\pi) \overset{\shortparallel}{=} 0$$

Entera

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$f' = f \in H(\mathbb{C}) \implies \int_\gamma f = 0$$

b) $f(z) = z^m\overline{z}^n$ siendo $\gamma(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le 2\pi$, con m y n enteros.

γ cerrada $\qquad \gamma(t) = e^{it} \Rightarrow \gamma'(t) = ie^{it}$

$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} (e^{it})^m \overline{(e^{it})}^n \cdot i e^{it} dt =$$

$$i\int_0^{2\pi} e^{mit}\cdot e^{-nit}\cdot e^{it} dt = i\int_0^{2\pi} e^{(m-n+1)it} dt$$

Si $m-n+1\neq 0$: $\cancel{i}\,\dfrac{e^{(m-n+1)it}}{(m-n+1)\cancel{i}}\Bigg|_0^{2\pi}=0$

Si $m-n+1=0$: $i\displaystyle\int_0^{2\pi} e^0\,dt = 2\pi i$

En particular si $m-n+1=0$, $f\notin H(\mathbb{C})$

Igualmente aunque $\int_\gamma f=0$ para alguna γ, f puede no ser holomorfa.

Ejemplo: $f(x+iy)=\overbrace{1-x^2-y^2}^{u}\quad\overbrace{\qquad\quad}^{v=0}$

No es holomorfa porque $u_x=-2x\neq 0=v_y$

$f(e^{i\theta})=0 \Rightarrow \displaystyle\int_{|z|=1} f=\int_{|z|=1} 0=0$

c) $\gamma=\{z\in\mathbb{C} : z=i+3e^{it}, 0\leq t\leq 2\pi\}$ y $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$.

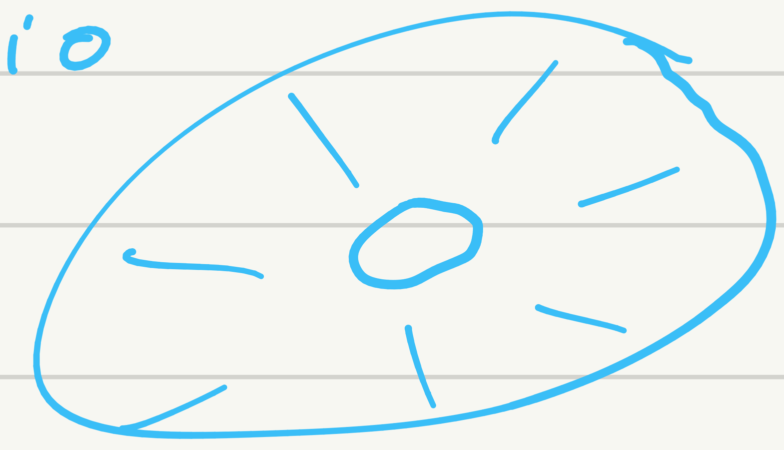
TEOREMA 32. **Teorema de Cauchy global.** *Sea Ω un abierto cualquiera de $\mathbb{C}$, y $f\in H(\Omega)$. Sea Γ un ciclo en Ω tal que $\text{Ind}_\Gamma(a)=0$ para todo $a\notin\Omega$. Entonces para todo $z\in\Omega\backslash\Gamma^*$ se cumple:*

$$i)\qquad f(z).\text{Ind}_\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(w)}{w-z}dw$$

y también

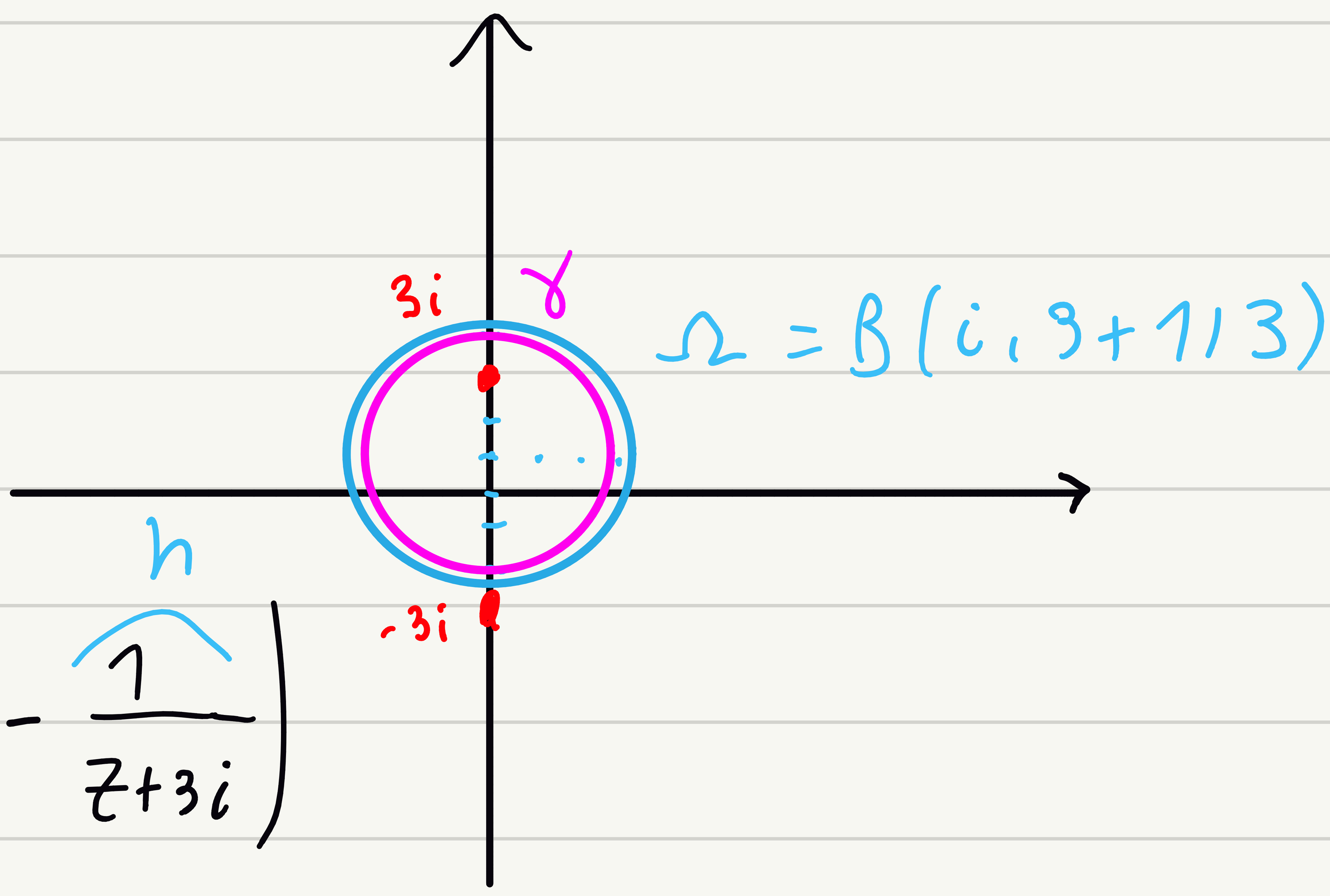
$$ii)\qquad \int_\Gamma f(z)dz=0$$

No encierra agujeros del dominio



En particular si Ω es simplemente conexo, $\gamma\subseteq\Omega$ es cerrada y $f\in H(\Omega)\Rightarrow\int_\gamma f=0$

$z^2+9=(z-3i)(z+3i)$



$\dfrac{1}{z^2+9}=\dfrac{1}{(z-3i)(z+3i)}=$

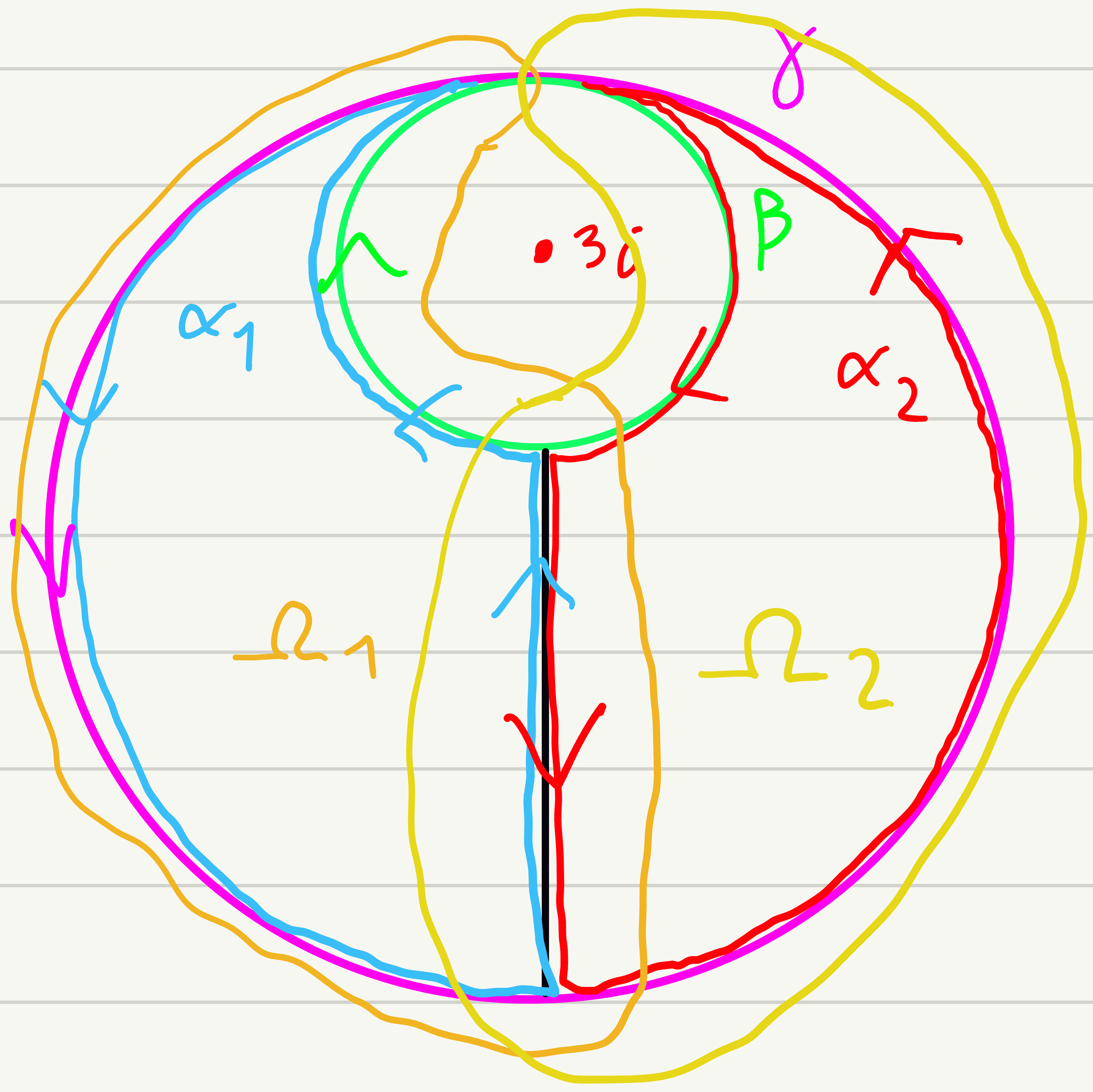
$\dfrac{1}{6i}\left(\dfrac{1}{z-3i}-\dfrac{1}{z+3i}\right)=\dfrac{-i}{6}\left(\overbrace{\dfrac{1}{z-3i}}^{g}-\overbrace{\dfrac{1}{z+3i}}^{h}\right)$

$$F = \frac{-i}{6}(g-h) \Rightarrow \int_\gamma F = \frac{-i}{6}\left[\int_\gamma g - \int_\gamma h\right]$$

$g \in H(\mathbb{C}\setminus\{3i\})$, $h \in H(\mathbb{C}\setminus\{-3i\})$

Como $B(i, 3+1/3) \supseteq \gamma$ y es convexa, y $h \in H(B(\dots))$ por Cauchy en el convexo, $\int_\gamma h = 0$

$$\Rightarrow \int_\gamma F = \frac{-i}{6}\int_\gamma g$$



$$\int_\gamma g + \int_\beta g = \int_{\alpha_1} g + \int_{\alpha_2} g$$

Como Ω_1 es una región simplemente conexa y $g \in H(\Omega_1)$, por Cauchy Global $\int_{\alpha_1} g = 0$

Idem. para α_2.

$$\Rightarrow \int_\gamma g = \int_{-\beta} g$$

$(-\beta)(t) = 3i + e^{it}$
$t \in [0, 2\pi]$ $\Rightarrow \int_{-\beta} g = \int_0^{2\pi} g((-\beta)(t))\,(-\beta)'(t)\,dt =$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{3i}+\cancel{e^{it}}-\cancel{3i}} \cdot i\cancel{e^{it}}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

$$\Rightarrow \int_\gamma F = \frac{\cancel{-i}}{6}\, 2\pi \cancel{i} = \frac{\pi}{3}$$

Teorema 9 (**Teorema del índice**). *Sean* γ *un camino cerrado* ($\gamma(a) = \gamma(b)$), $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ *y la función* $\operatorname{Ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ *tal que*

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{3i\}$

Entonces:

i) La función $\operatorname{Ind}_\gamma$ *solo toma valores enteros.*

ii) La función $\operatorname{Ind}_\gamma$ *es continua. Por lo tanto, por el item i), se tiene que es constante en cada componente conexa de* Ω.

iii) Si Ω_1 *es la componente conexa de* Ω *que no está acotada entonces* $\operatorname{Ind}_\gamma|_{\Omega_1} \equiv 0$.