Conexidad en $\mathbb{R}$ y aplicaciones en cálculo

Recordamos de los cursos básicos de cálculo que la imagen de un intervalo en $\mathbb{R}$ a través de una función continua a valores reales es de nuevo un intervalo. Este resultado puede probarse usando herramientas de conexidad en espacios métricos, y es porque los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) son precisamente los intervalos. Empecemos por definir este último término.

Definición: Un subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo si:

(1) I contiene al menos dos puntos distintos;

(2) si dados $a, b \in I$ con $a < b$, entonces para cada x tal que $a < x < b$, se tiene que $x \in I$.

Teorema: $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo si y solamente si I es alguno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
(a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $\mathbb{R}$.

• **Demostración**: Se puede verificar a partir de sus definiciones, que cada uno de los conjuntos (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ y $\mathbb{R}$ es un intervalo. Por ende, solamente nos enfocaremos en demostrar la implicación $(\Rightarrow)$.

Sea I un intervalo. Hagamos la prueba en un análisis por casos según la existencia o no de cotas superiores e inferiores de I.

(i) I no es acotado: Al ser I un intervalo, en este caso se tiene que $\mathbb{R} = I$.

(ii) I está acotado superiormente pero no inferiormente: Por el axioma de completitud, existe $a = \sup(I)$. Veamos que $I = (-\infty, a)$ o $I = (-\infty, a]$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < a$. Luego, x no puede ser cota superior de I, por lo cual existe $a' \in I$ tal que $x < a' \leq a$. Por otro lado, x tampoco puede ser una cota inferior de I, por lo cual existe $b \in I$ tal que $b < x$. Así, $b < x < a'$ con $b, a' \in I$, y como I es un intervalo, se concluye que $x \in I$. Entonces, $(-\infty, a) \subseteq I$. Ahora, sea $y \in I$. Si $y > a$ entonces a no sería el supremo de I. Por lo tanto, $y \in I \Rightarrow y \leq a$, y como $(-\infty, a) \subseteq I$, se concluye que $I = (-\infty, a)$ o $I = (-\infty, a]$ (dependiendo si $a \in I$ o $a \notin I$).

(iii) I está acotado inferiormente pero no superiormente: Este caso es análogo al anterior.

(iv) I está acotado inferiormente y superiormente: Sean $a = \inf(I)$ y $b = \sup(I)$. Veamos que

$I=(a,b)$, $I=(a,b]$, $I=[a,b)$ o $I=[a,b]$.

Como $a=\inf(I)$ y $b=\sup(I)$, es claro que $I\subseteq[a,b]$. Ahora, sea $x\in\mathbb{R}$ tal que $a<x<b$. Como $b=\sup(I)$, existe $b'\in I$ tal que $x<b'<b$. De manera análoga, existe $a'\in I$ tal que $a<a'<x$. Luego, como I es un intervalo y $a'<x<b'$ con $a', b'\in I$, se tiene que $x\in I$, por lo cual $I\supseteq(a,b)$. Por lo tanto, $I=(a,b)$ (si $a,b\notin I$), o $I=[a,b)$ (si $a\in I$ y $b\notin I$), o $I=(a,b]$ (si $a\notin I$ y $b\in I$), o $I=[a,b]$ (si $a\in I$ y $b\in I$). $\blacksquare$

Para completar el resultado anterior, los intervalos alistados son los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

Teorema: $I\subseteq\mathbb{R}$ es conexo si y solamente si I es un intervalo, donde $I\subseteq\mathbb{R}$ posee al menos dos puntos.

- Demostración: ($\Rightarrow$) Supongamos que I no es un intervalo. Como I posee al menos dos puntos $a,b\in I$, podemos encontrar $a<c<b$ y considerar la partición

$$I=\big((-\infty,c)\cap I\big)\cup\big((c,+\infty)\cap I\big).$$

Note que $a\in(-\infty,c)\cap I$ y $b\in(c,+\infty)\cap I$. Entonces, lo anterior es una partición de I no trivial, por lo cual I no es conexo.

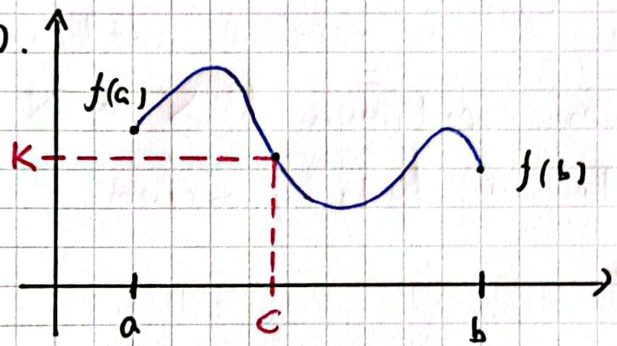
($\Leftarrow$) Si I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, es conexo por ser homeomorfo a $\mathbb{R}$ (el cual es conexo). Luego, los intervalos semicerrados y cerrados están entre I y su clausura, por lo cual son conexos también.

Ejemplo: $(a,b)\subseteq[a,b)\subseteq[a,b]=\overline{(a,b)}$. $\blacksquare$

Veamos ahora algunas aplicaciones conocidas al cálculo en una variable.

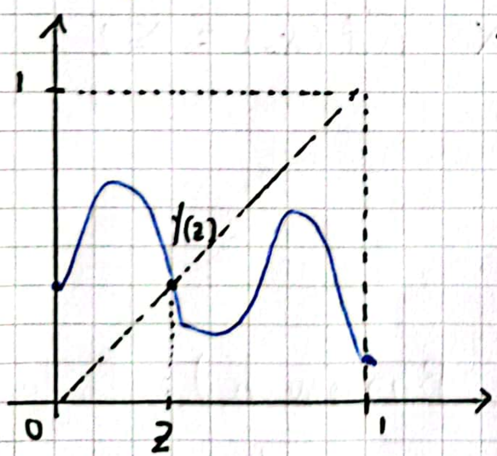
Teorema del valor medio: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \neq f(b)$. Entonces, para cada K entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = K$.

· **Demostración:** Como f es continua y $[a,b]$ es conexo, se tiene que $f([a,b])$ es conexo en $\mathbb{R}$. Luego, $f([a,b])$ es un intervalo en $\mathbb{R}$. Por otro lado, $f(a), f(b) \in f([a,b])$, y como K está entre $f(a)$ y $f(b)$, y $f([a,b])$ es un intervalo, se tiene que $K \in f([a,b])$. Por lo tanto, existe $c \in [a,b]$ tal que $K = f(c)$.



■

Corolario (un primer teorema del punto fijo): Sea $f: [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Entonces, existe $z \in [0,1]$ tal que $f(z) = z$.



· **Demostración:** Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$ no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Considere la función continua $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - f(x)$, $\forall x \in [0,1]$.

$g(0) = -f(0) < 0$ y $g(1) = 1 - f(1) > 0$.

Por el teorema del valor medio, existe $z \in [0,1]$ tal que $g(z) = 0$. Luego, $f(z) = z$. ■

Se puede probar una versión más general del teorema anterior, a saber, toda función continua $g\ [a,b] \to [a,b]$ tiene un punto fijo. Esto se debe a que $[a,b]$ y $[0,1]$ son homeomorfos.

$$\begin{tikzcd} & {[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & {[0,1]} \arrow[dr, "\cong"] & \\ {[a,b]} \arrow[ur, "\cong"] \arrow[rrr, "g"'] & & & {[a,b]} \end{tikzcd}$$

De manera más formal, necesitamos probar el siguiente resultado.

Proposición: Si X e Y son espacios métricos homeomorfos, entonces toda función continua $f: X \to X$ posee un punto fijo si y solamente si toda función continua $g: Y \to Y$ posee un punto fijo.

· **Demostración:** Supongamos que toda función continua $f: X \to X$ tiene un punto fijo, y sea $g: Y \to Y$ continua. Considere un homeomorfismo $h: X \to Y$, y sea $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Entonces, f tiene un punto fijo $x_0 \in X$ $(f(x_0) = x_0)$.

Luego, $x_0 = h^{-1}(g(h(x_0)))$

$$h(x_0) = g(h(x_0)).$$

Sea $y_0 = h(x_0)$. Así, $g(y_0) = y_0$. $\blacksquare$

Corolario (teorema del punto fijo de Brouwer): Toda función continua $g: [a,b] \to [a,b]$ posee un punto fijo.

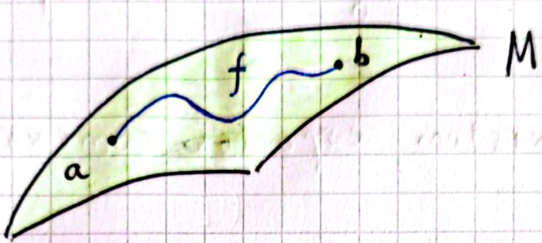
Ejercicio (teorema de Borsuk-Ulam): Sea $f: S^1 \to \mathbb{R}$ continua. Entonces existen un par de puntos antipodales $(x,y), (-x,-y) \in S^1$ tales que $f(x,y) = f(-x,-y)$.

Comexidad pon ancos

Estudianemos ahona um tipo más fuente de comexidad, que se comoce como comexidad pon ancos.

Defimicióm: Sea (M, d) um espacio métnico y $x, y \in M$.

- Um camimo de x a y es uma fumcióm comtimua $f : [0, 1] \to M$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.



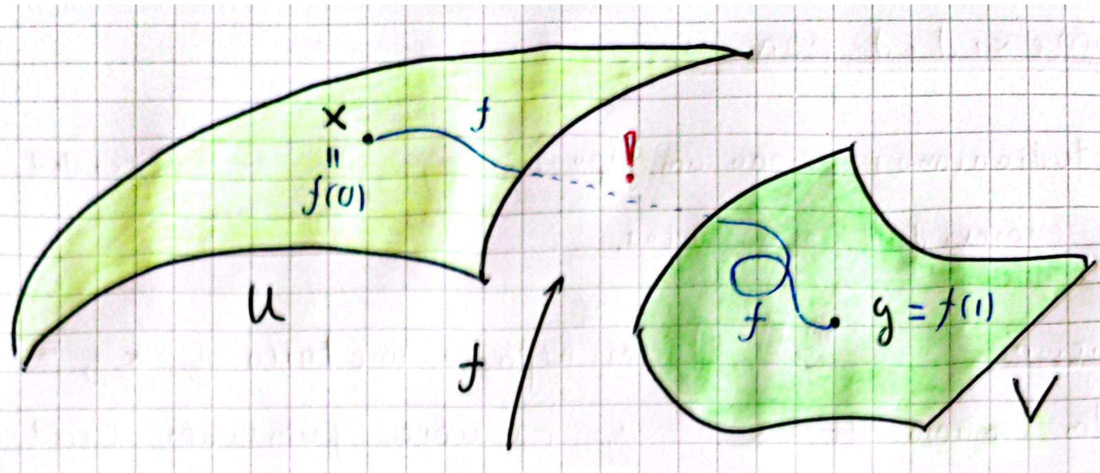
- M es comexo pon ancos si $\forall x, y \in M$, existe um camimo de x a y.

Cuamdo decimos que la comexidad pon ancos es más fuente que la comexidad topológica, es ponque la pnimena implica la segumda.

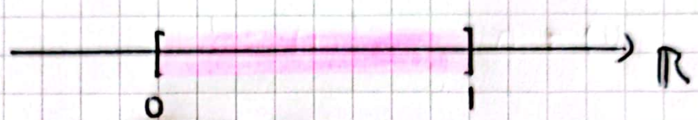
Teonema: Si (M, d) es comexo pon ancos, emtomces es comexo.

- **Demostnacióm:** Supomgamos que M mo es comexo, y sea $\{U, V\}$ uma panticióm mo tnivial de M. Luego, elegimos $x \in U$ e $y \in V$. Como M es comexo pon ancos, existe uma fumcióm comtimua $f : [0, 1] \to M$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Pon otno lado, como f es comtimua y $[0, 1]$ es comexo, se tieme que $f([0, 1])$ es um subcomjumto comexo de M. Pon um nesultado amtenion, $f([0, 1])$ está emtenamemte comtemido em U o emtenamemte comtemido em V, lo cual es uma comtnadiccióm ya que $x \in U$ e $y \in V$ com $U \cap V = \emptyset$. ■

Escaneado con CamScanner



El recíproco del teorema anterior no es cierto en general, es decir, existen espacios conexos que no son conexos por arcos.



<u>Ejemplo</u>: La curva seno del topólogo es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ que no es conexo por arcos.

$$X = \{(0,y) / y \in [-1,1]\} \cup \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) / 0 < x \leq 1\}.$$

Considere $(0,0), (1, \operatorname{sen}(1)) \in X$. Veamos que no puede existir un camino de $(0,0)$ a $(1, \operatorname{sen}(1))$. Supongamos lo contrario, y sea $f : [0,1] \to X$ una función continua tal que $f(0) = (0,0)$ y $f(1) = (1, \operatorname{sen}(1))$. Al ser f continua, $f^{-1}(\{(0,y) / -1 \leq y \leq 1\})$ es cerrado en $[0,1]$. Luego, existe $m = \max f^{-1}(\{(0,y) / -1 \leq y \leq 1\})$.

Sea $f(m) = (0, M) \in \{0\} \times [-1,1]$, y considere la restricción $f : [m,1] \to X$, donde

$$\underset{\displaystyle (x(t), y(t))}{\overset{\shortparallel}{f(t)}} \in \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) / 0 < x \leq 1\} \quad \forall t \in (m, 1].$$

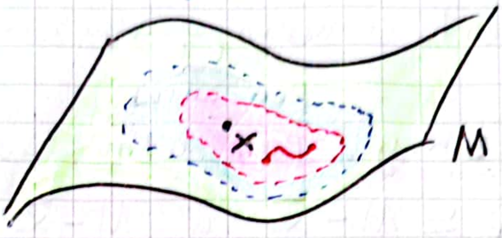
Considere una sucesión $\{t_n\} \subseteq (m,1]$ tal que $t_n \to 0$ e $y(t_n) = (-1)^n$. Como f es continua, $f(t_n) \to (0, M)$, de donde $y(t_n) = (-1)^n \to M$, lo cual es una contradicción.

Bajo ciertas condiciones, sí es válido el recíproco del teorema anterior.

<u>Definición</u>: Un espacio métrico (M, d) se dice **localmente conexo por arcos** si para cada $x \in M$ y $U \in \mathcal{T}_d$ con $x \in U$, existe $V \in \mathcal{T}_d$ tal que:

(i) $x \in V \subseteq U$.

(ii) V es conexo por arcos.



Claramente, todo espacio conexo por arcos es localmente conexo por arcos. El recíproco de esto último no es cierto. De hecho:

<u>Teorema</u>: Sea (M, d) un espacio métrico localmente conexo por arcos. Entonces, (M, d) es conexo por arcos si y solamente si es conexo.

• <u>Demostración</u>: Basta probar que M conexo (y localmente conexo por arcos) implica M conexo por arcos.

Dados $x, y \in M$. Denotamos $y \sim x$ si existe un camino de y a x.

- <u>Ejercicio</u>: Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.
- <u>Idea de la demostración</u>: Fijar $x_0 \in M$, considerar la clase de equivalencia de x_0, $\overline{x_0}$, bajo la relación anterior y probar que $\overline{x_0} = M$ verificando que $\overline{x_0}$ es abierto y cerrado a la vez.

(i) $\overline{x_0}$ es abierto en M: Sea $x \in \overline{x_0}$. Como M es localmente conexo por arcos, se puede considerar $U \in \mathcal{T}_d$ con $x \in U$ y U conexo por arcos.

Si $y \in U$, entonces $y \sim x$. Por otro lado, $x \sim x_0$. Luego, $y \sim x_0$ $\forall y \in U$, es decir, $U \subseteq \overline{x_0}$. Por lo cual, $\overline{x_0}$ es abierto en M.

(ii) $\overline{x_0}$ es cerrado en M: Sea $y \in M - \overline{x_0}$, y considere V un abierto conexo por arcos que contiene a y. Tomemos $z \in V$. Luego, $z \sim y$. Por otro lado, $y \not\sim x_0$, por lo cual $z \not\sim x_0$. Así, $V \subseteq M - \overline{x_0}$, y $M - \overline{x_0}$ es abierto en M.

Como M es conexo, y $\overline{x_0} \neq \emptyset$ es abierto y cerrado a la vez, tenemos que $M = \overline{x_0}$. $\blacksquare$

Terminemos esta sección con propiedades generales de la conexidad por arcos.

Proposición (propiedades de la conexidad por arcos):

1) Si $f : (M, d) \to (N, \rho)$ es continua y M conexo por arcos, entonces $f(M)$ es conexo por arcos.
2) Si (M, d) es un espacio métrico y $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de M conexos por arcos y con un punto en común, entonces $\bigcup_{i \in I} X_i$ es conexo por arcos.
3) Si (M, d) y (N, ρ) son espacios métricos, entonces M y N son conexos por arcos si, y solamente si, $M \times N$ lo es.

- **Demostración:**

1) Sean $f(x), f(y) \in f(M)$. Como M es conexo por arcos, existe una función continua $\sigma : [0,1] \to M$ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = y$. Luego, $f \circ \sigma : [0,1] \to N$ es continua con $f \circ \sigma(0) = f(x)$ y $f \circ \sigma(1) = f(y)$. Por lo tanto, $f(M)$

es conexo por arcos.

2) Sea $p \in \bigcap_{i \in I} X_i$ y $x, y \in \bigcup_{i \in I} X_i$.

$x \in X_i$ para algún $i \in I$

$y \in X_j$ para algún $j \in I$

X_i conexo por arcos $\Rightarrow x \sim p$.

X_j conexo por arcos $\Rightarrow p \sim y$

$\sim$ transitiva $\Rightarrow x \sim y$.

$\therefore \bigcup_{i \in I} X_i$ es conexo por arcos.

3) Supongamos primero que M y N son conexos por arcos.

Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M \times N$.

M conexo por arcos $\Rightarrow \exists\, \sigma : [0,1] \to M$ continua tal que $\sigma(0) = x_1$ y $\sigma(1) = y_1$.

N conexo por arcos $\Rightarrow \exists\, \delta : [0,1] \to N$ continua tal que $\delta(0) = x_2$ y $\delta(1) = y_2$.

$\therefore (\sigma, \delta) : [0,1] \to M \times N$
$(\sigma, \delta)(t) = (\sigma(t), \delta(t))$ es un camino de (x_1, x_2) a (y_1, y_2).

$\therefore M \times N$ es conexo por arcos.

Recíprocamente, si $M \times N$ es conexo por arcos (se considera a $M \times N$ con la métrica del máximo), entonces al ser $\pi_M : M \times N \to M$ (proyección canónica) una función continua, por la primera parte se tiene que $M = \pi_M(M \times N)$ es conexo por arcos.

De manera similar, N es conexo por arcos si $M \times N$ es conexo por arcos. ∎

Componentes conexas

Sabemos que si tenemos dos espacios métricos (M,d) y (N,d), donde uno de ellos es conexo y el otro no, entonces M y N no pueden ser homeomorfos. Cuando M y N son ambos disconexos, es posible saber si no son homeomorfos en razón del número de componentes conexas de cada uno. Hablando informalmente, las componentes conexas de un espacio métrico son sus subconjuntos conexos "más grandes".

Definición: Sea (M,d) un espacio métrico y $x \in M$. La componente conexa de x es la unión de todos los subconjuntos de M que contienen a x. Denotaremos por C_x a la componente conexa de x.

Observaciones:

1) $C_x \neq \emptyset$, ya que hay al menos un subconjunto conexo de M que contiene a x, a saber, $\{x\}$.
2) C_x es un subconjunto conexo de M, por ser la unión de subconjuntos conexos con al menos un punto en común, a saber, x.
3) C_x es el mayor subconjunto conexo de M que contiene a x. En efecto, si X es un subconjunto conexo de M con $x \in X$, entonces por la definición de C_x se tiene que $X \subseteq C_x$.

Definamos ahora la siguiente relación en M.

- Para $x, y \in M$, $x \mapsto y$ si existe $N \subseteq M$ conexo tal que $x, y \in N$.

Ejercicio: Probar que $\mapsto$ es una relación de equivalencia.

Proposición: $x \mapsto y$ si y solamente si $C_x = C_y$.

- **Demostración:** Si $x \mapsto y$, entonces $x, y \in N$ para algún $N \subseteq M$ conexo. Luego, $N \subseteq C_x$, por lo cual C_x es un subconjunto conexo de M que contiene a y. Entonces, $C_x \subseteq C_y$. De manera similar, $C_y \subseteq C_x$.

  Ahora, si $C_x = C_y$, entonces $x, y \in C_x$, donde $C_x \subseteq M$ es conexo. Por lo tanto, $x \mapsto y$. $\blacksquare$

Todo espacio métrico se puede escribir como unión disjunta de sus componentes conexas, como se muestra a continuación.

Proposición: Sea $\{C_x\}_{x \in M}$ la familia de componentes conexas de M. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1) $M = \bigcup_{x \in M} C_x$, y $C_x \cap C_y = \emptyset$ si y solamente si $C_x \neq C_y$

2) Cada componente conexa C de M es la componente conexa de cada uno de sus puntos $x \in C$

3) Cada componente conexa C de M es un subconjunto conexo maximal de M, en el sentido de que si $X \subseteq M$ es conexo y $X \supseteq C$, entonces $X = C$.

4) Todo subconjunto conexo y no vacío de M está contenido en una única componente conexa de M.

5) Toda componente conexa de M es un subconjunto cerrado.

6) Si $f: M \to N$ es un homeomorfismo, entonces C es una componente conexa de M si, y solamente si, $f(M)$ es una componente conexa de N.

· Demostración:

1) Es claro que $\bigcup_{x \in M} C_x \subseteq M$. Por otro lado, si $x \in M$, entonces $x \in C_x \subseteq \bigcup_{x \in M} C_x$. Así, $M \subseteq \bigcup_{x \in M} C_x$.

Si $C_x \cap C_y = \emptyset$, entonces x e y no están contenidos por un conjunto conexo común, por lo cual $x \not\vdash y$. De esto último se tiene que $C_x \neq C_y$.

Ahora supongamos que $C_x \neq C_y$. Luego, $x \not\vdash y$. Por otro lado, si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ con $z \in C_x \cap C_y$, entonces $z \vdash x$ y $z \vdash y$, de donde $x \vdash y$, obteniendo así una contradicción. Por lo tanto $C_x \cap C_y = \emptyset$.

2) Sea C una componente conexa de M. Entonces, $C = C_y$ para algún $y \in M$. Sea $x \in C$. Luego, $x \vdash y$, por lo cual $C_y = C_x$. Así, $C = C_x \cdot \forall x \in C$.

3) Sea C una componente conexa de M, y $X \subseteq M$ conexo tal que $X \supseteq C$. Por 2), $C = C_x$ para algún $x \in C$. Así, X es un subconjunto conexo de M que contiene a x, por lo cual $X \subseteq C_x = C$. Por lo tanto, $X = C$.

4) Sea $\emptyset \neq X \subseteq M$ conexo. Como $X \neq \emptyset$, podemos elegir $x \in X$. Al ser X conexo, se tiene $X \subseteq C_x$.

Escaneado con CamScanner

Si además $X \subseteq C_y$, entonces $C_x \cap C_y \neq \emptyset$.
Por la parte 1), nos queda $C_x = C_y$. Por lo tanto, C_x es la única componente conexa de M que contiene a X.

5) Sea C una componente conexa de M. Por ser C conexo, se tiene que $\overline{C}$ es conexo. Por la parte 4), se tiene que $C = \overline{C}$, por lo cual C es cerrado.

6) Basta probar la implicación $(\Rightarrow)$.
Sea $C \subseteq M$ una componente conexa de M. Como f es continua, $f(C)$ es conexo en N. Sea $f(x) \in f(C)$. Luego, $f(C) \subseteq C_{f(x)}$, de donde

$$C = f^{-1}(f(C)) \subseteq f^{-1}(C_{f(x)}).$$

Como f^{-1} es continua, se tiene que $f^{-1}(C_{f(x)})$ es conexo en M. Por la parte 4), nos queda que $C = f^{-1}(C_{f(x)})$. Por lo tanto,

$$f(C) = f(f^{-1}(C_{f(x)})) = C_{f(x)}$$

es una componente conexa de N. ■

Ejemplos:

1) Las componentes conexas de $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ son $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$.

2) Para $X = \mathbb{Q}$, se tiene que C es una componente conexa de $\mathbb{Q}$ si y solamente si $C = \{q\}$ con $q \in \mathbb{Q}$.
De hecho, los subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$ son solamente los que tienen un solo punto. En efecto, si $C \subseteq \mathbb{Q}$ es conexo y $q_1, q_2 \in C$ con $q_1 < q_2$, tomando $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, se tiene una partición no trivial
$C = ((-\infty, x) \cap C) \cup (C \cap (x, +\infty))$

El concepto de componente conexa también se puede llevar a la conexidad por arcos, con propiedades análogas a las ya vistas para la conexidad topológica.

Definición: Sea (M, d) un espacio métrico y $x \in M$. La componente conexa por arcos de x es la unión de todos los subconjuntos conexos por arcos que contienen a x.

Observaciones:

1) Si denotamos por C_x^{arc} a la componente conexa por arcos de x, tenemos que $C_x^{arc} \neq \emptyset$, ya que al menos $\{x\} \subseteq M$ es un subconjunto conexo por arcos que contiene a x. (Recuerde que $x \sim x$).
2) C_x^{arc} es conexo por arcos por ser la unión de conjuntos conexos por arcos con un punto en común, a saber x.
3) C_x^{arc} es el mayor subconjunto de M conexo por arcos que contiene a x.
4) $x \sim y$ si y solamente si $C_x^{arc} = C_y^{arc}$. En efecto, si $x \sim y$ entonces existe un camino $\sigma : [0,1] \to M$ de x a y. Note que $\sigma([0,1]) \subseteq M$ es un subconjunto conexo por arcos con $x, y \in \sigma([0,1])$. Luego, $x \in \sigma([0,1]) \subseteq C_x^{arc}$, y entonces C_x^{arc} es un subconjunto de M conexo por arcos y que contiene a y; por lo cual $C_x^{arc} \subseteq C_y^{arc}$. De manera similar, se puede ver que $C_x^{arc} \supseteq C_y^{arc}$. Por lo tanto, $C_x^{arc} = C_y^{arc}$.

   Ahora supongamos que $C_x^{arc} = C_y^{arc}$. Luego, $x, y \in C_x^{arc}$, y como C_x^{arc} es conexo por arcos, existe un camino en C_x^{arc} de x a y, es decir, $x \sim y$.

5) $M = \bigcup_{x \in M} C_x^{arc}$, donde $C_x^{arc} \cap C_y^{arc} = \emptyset$ si y solamente si $C_x^{arc} \neq C_y^{arc}$.

La igualdad $M = \bigcup_{x \in M} C_x^{arc}$ es clara.

Si $C_x^{arc} \cap C_y^{arc} = \emptyset$, entonces no existe un camino $\sigma : [0,1] \to M$ de x a y, ya que $\sigma([0,1])$ es un subconjunto conexo por arcos que contiene a x e y, por lo cual $\sigma([0,1]) \subseteq C_x^{arc} \cap C_y^{arc}$. Así, $x \not\sim y$. es decir, $C_x^{arc} \neq C_y^{arc}$.

Supongamos ahora que $C_x^{arc} \neq C_y^{arc}$. Si $C_x^{arc} \cap C_y^{arc} \neq \emptyset$, tomemos $z \in C_x^{arc} \cap C_y^{arc}$. Luego,

$x, z \in C_x^{arc} \Rightarrow x \sim z$ (existe un camino en C_x^{arc} de x a z).

$z, y \in C_y^{arc} \Rightarrow z \sim y$ (existe un camino en C_y^{arc} de z a y).

Entonces, existe un camino en M de x a y, es decir, $x \sim y$, lo cual contradice que $C_x^{arc} \neq C_y^{arc}$.

6) Cada componente conexa C por arcos de M es la componente conexa por arcos de cada uno de sus puntos $x \in C$.

Esto se prueba de forma análoga a como se hizo para la conexidad topológica.

7) Si C es una componente conexa por arcos de M y $X \subseteq M$ es un subconjunto conexo por arcos tal que $X \supseteq C$, entonces $X = C$. Esto se prueba de forma análoga a como se hizo para conexidad topológica.

Escaneado con CamScanner

8) Todo subconjunto de M conexo por arcos y no vacío está contenido en una única componente conexa por arcos de M. Esto se prueba de manera análoga a como se hizo para la conexidad topológica.

9) <u>No es cierto</u> que toda componente conexa por arcos de M sea un conjunto cerrado en M. Como contraejemplo, considere

$$A = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) / \ 0 < x \leq 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Note que $\bar{A}$ es la curva seno del topólogo, y así $A \neq \bar{A}$.

10) Si $f: M \to N$ es un homeomorfismo, entonces C es una componente conexa por arcos de M si, y solamente si, $f(C)$ es una componente conexa por arcos de N.

Solo basta con probar la implicación $(\Rightarrow)$. Supongamos entonces que C es una componente conexa por arcos de M. Sabemos que $f(C)$ es un subconjunto de N conexo por arcos. Por (8), existe $Y \subseteq N$ una componente conexa por arcos de N tal que $f(C) \subseteq Y$. Luego, $C = f^{-1}(f(C)) \subseteq f^{-1}(Y)$, donde $f^{-1}(Y)$ es conexo por arcos al ser f^{-1} continua. Como C es una componente conexa de M, se tiene por 7) que $C = f^{-1}(Y)$. Por lo tanto, $f(C) = Y$.

Para finalizar estas notas, extendamos un poco nuestra lista de invariantes topológicos. De momento tenemos los siguientes:

- Invariante # 1 (cardinalidad):

Si M y N son homeomorfos, entonces $\text{Card}(M) = \text{Card}(N)$

- Invariante # 2 (conexidad):

Si M y N son homeomorfos, entonces M es conexo si y solamente si N es conexo.

- Invariante # 3 (conexidad por arcos):

Si M y N son homeomorfos, entonces M es conexo por arcos si y solamente si N es conexo por arcos.

- Invariante # 4 (propiedad del punto fijo):

Un espacio métrico (M, d) se dice tener la propiedad del punto fijo si toda función continua $f : M \to M$ posee al menos un punto fijo (es decir, existe $x \in M$ tal que $f(x) = x$).

Si M y N son homeomorfos, entonces M tiene la propiedad del punto fijo si y solamente si N la tiene.

Agreguemos dos invariantes más a la lista anterior. Dado un espacio métrico (M, d), considere los conjuntos cociente $M/_{\vdash\!\dashv}$ y $M/_{\sim}$ (En topología algebraica, a $M/\sim$ se le denota por $\pi_0(M)$ y se denomina el conjunto de cero homotopía de M). Notamos que

$$\text{Card}(M/\vdash\!\dashv) \quad y \quad \text{Card}(M/\sim)$$

cuentan la cantidad de componentes conexas y componentes conexas por arcos de M, respectivamente.

- **Invariante #5 (cantidad de componentes conexas):**

Si M y N son homeomorfos, entonces
$$\mathrm{Cand}(M/\mapsto) = \mathrm{Cand}(N/\mapsto).$$

- **Invariante #6 (cantidad de componentes conexas por arcos):**

Si M y N son homeomorfos, entonces
$$\mathrm{Cand}(M/\sim) = \mathrm{Cand}(N/\sim).$$

Ejemplo (Cand $(M/\mapsto)$ y Cand $(M/\sim)$ no son el mismo invariante):

Considere la curva seno del topólogo
$$X = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(x, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})) \,/\, 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Por un lado, $\mathrm{Cand}(X/\mapsto) = 1$, ya que X es conexo.

Por otro lado, $\{0\} \times [-1,1]$ y $\{(x, \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})) \,/\, 0 < x \leq 1\}$ son las componentes conexas por arcos de X, por lo cual $\mathrm{Cand}(X/\sim) = 2$.