Interpolación y Transformaciones Geométricas

Interpolación

- Operación que transforma una imagen discreta $u(i,j)$ (definida sobre una grilla) en una imagen $u(x,y)$ definida sobre un continuo.

- Busca efectuar la operación 'inversa' al muestreo.

Para qué interpolar?

- Modificación de la resolución de la imagen

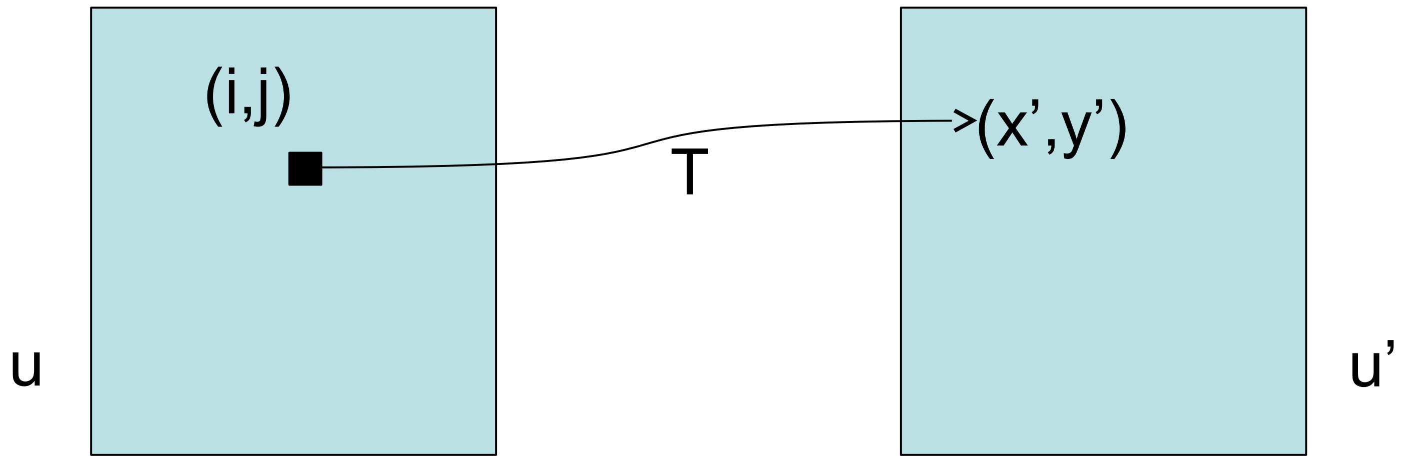
- Transformaciones geométricas de la imagen:
  - Translaciones no enteras
  - Zoom, rotación, transformaciones afines
  - Deformaciones elásticas (*warpings*)

- Otros (necesidad de precision sub-pixel)

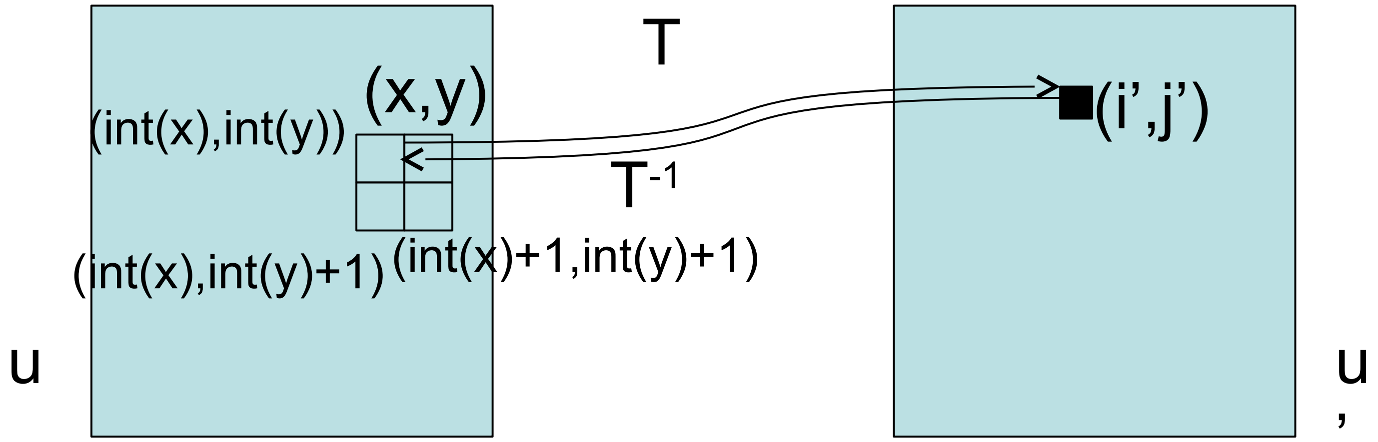
- Ejemplo (muy común en aplicaciones):

Al deformar una imagen *u* (dada en forma discreta) en otra *u'* (que también será discreta) por una transformación *T* invertible, en general el punto *T*(*i*,*j*) no cae en la grilla (*i'*,*j'*).

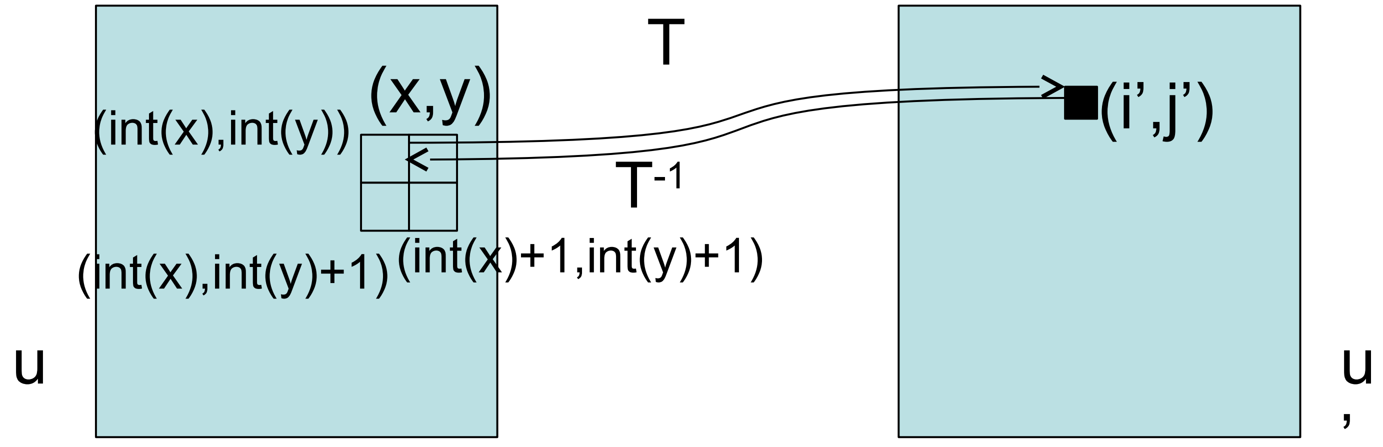
¿Qué valor ponemos en *u'*(*i'*,*j'*)?

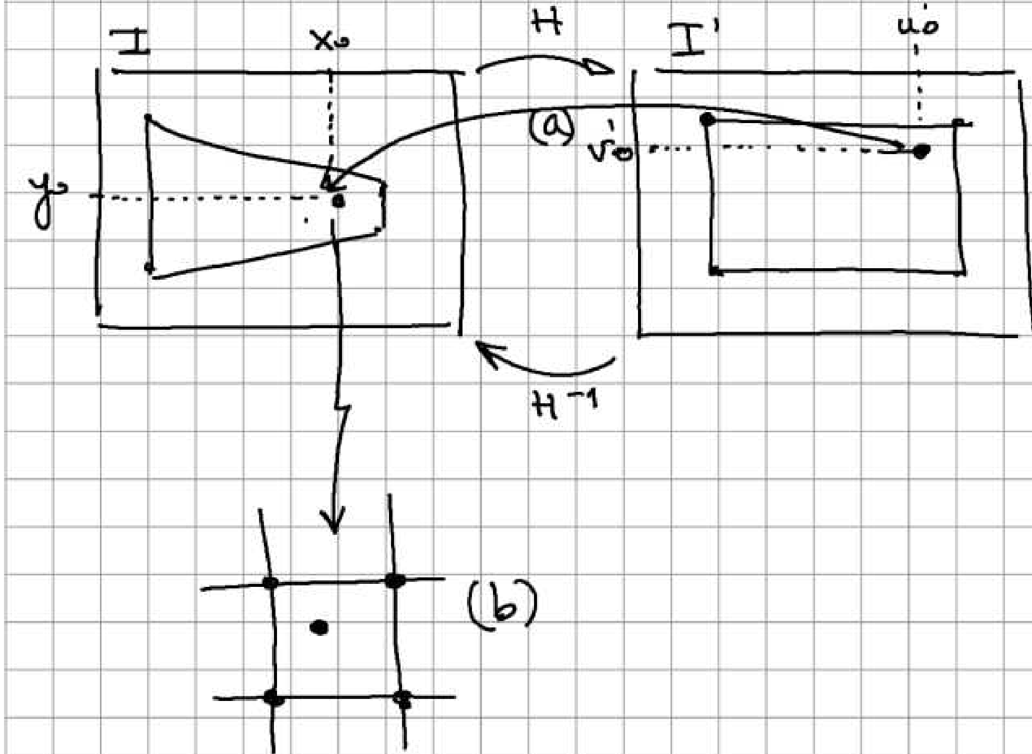


→ Interpolación "para atrás": calculo $T^{-1}(i',j')$, interpolo ese valor en la imágen de origen u, y lo asigno a $u'(i',j')$



→ Interpolación “para atrás”: calculo $T^{-1}(i',j')$, interpolo ese valor en la imágen de origen u, y lo asigno a $u'(i',j')$





Recorrer la grilla de I'

(a) ver de donde venía ese pixel con el mapeo inverso

(b) interpolar el valor en la grilla de I

(c) asignar el valor interpolado al pixel de I'

Núcleo de interpolación

- Consideramos métodos de interpolación lineales e invariantes ante translaciones

=> convolución de la imagen discreta $u(i,j)$ con un núcleo de interpolacion $\phi(x,y)$:

$$\tilde{u}(x,y) = \sum_{(i,j)\in Z^2} u(i,j)\varphi(x-i,y-j)$$

- Interpolación exacta: $\phi(0,0)=1$, $\phi(i,j)=0$ si (i,j) en $Z^2 \setminus \{(0,0)\}$
- Veremos sólo núcleos separables:

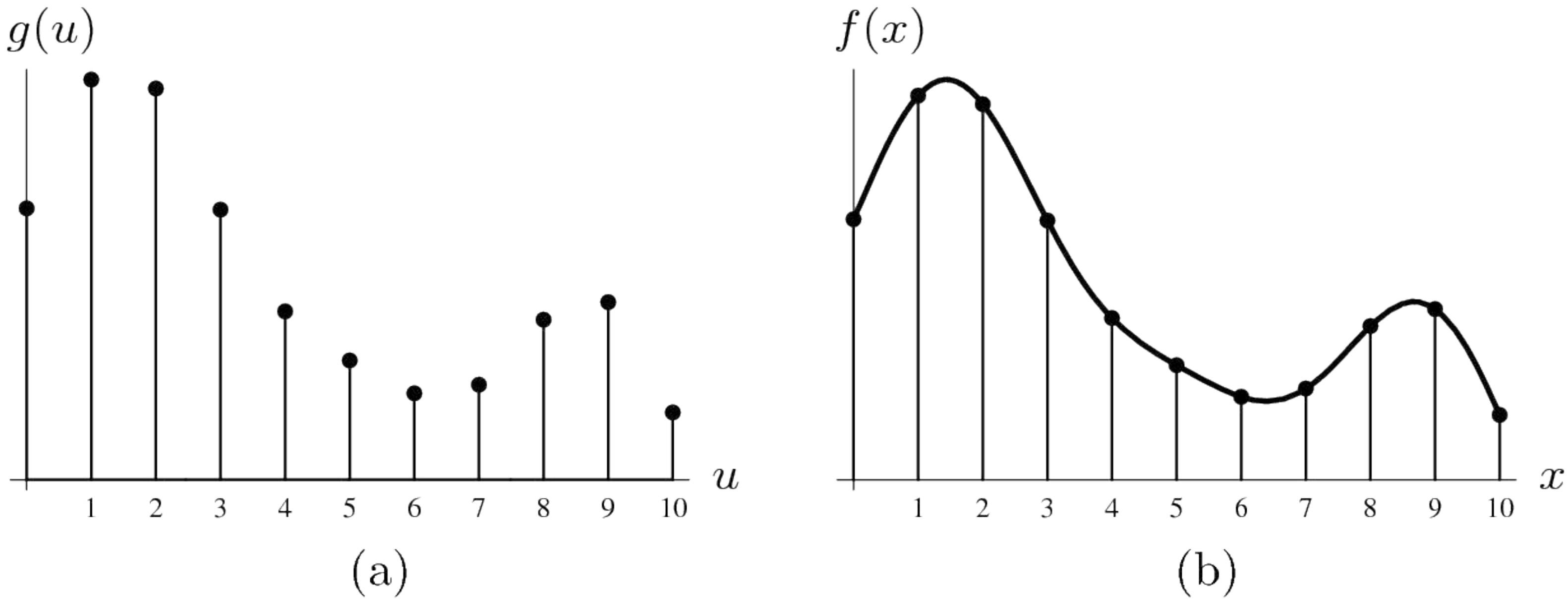
$$\phi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

¿Interpolar es "inventar" información?

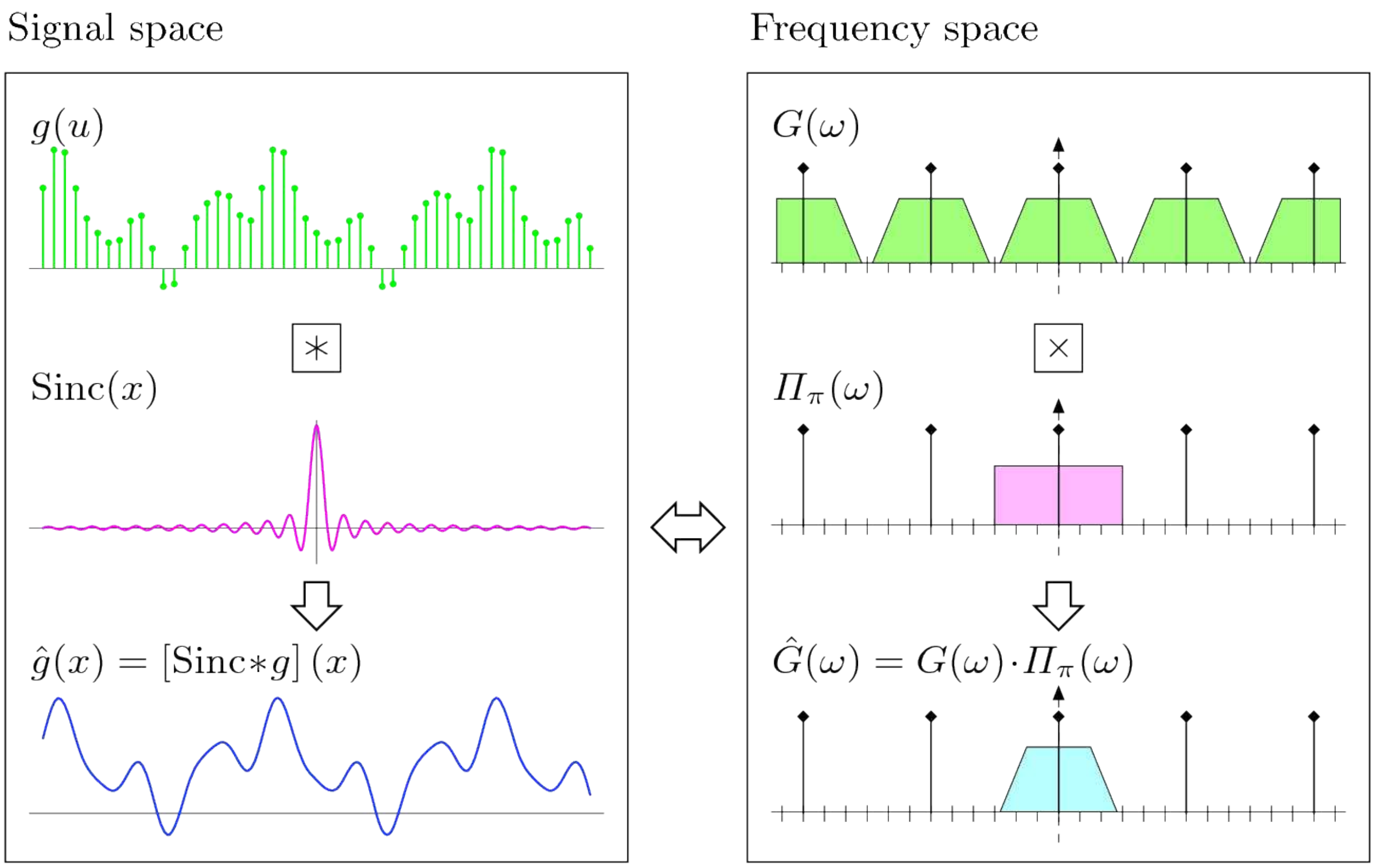
- Depende de cúanto sabemos de la imagen a interpolar…

Ejemplo: si sabemos que la imagen es de banda limitada y la imagen original discreta es un muestreo a Shannon, los interpolantes serán *sinc*

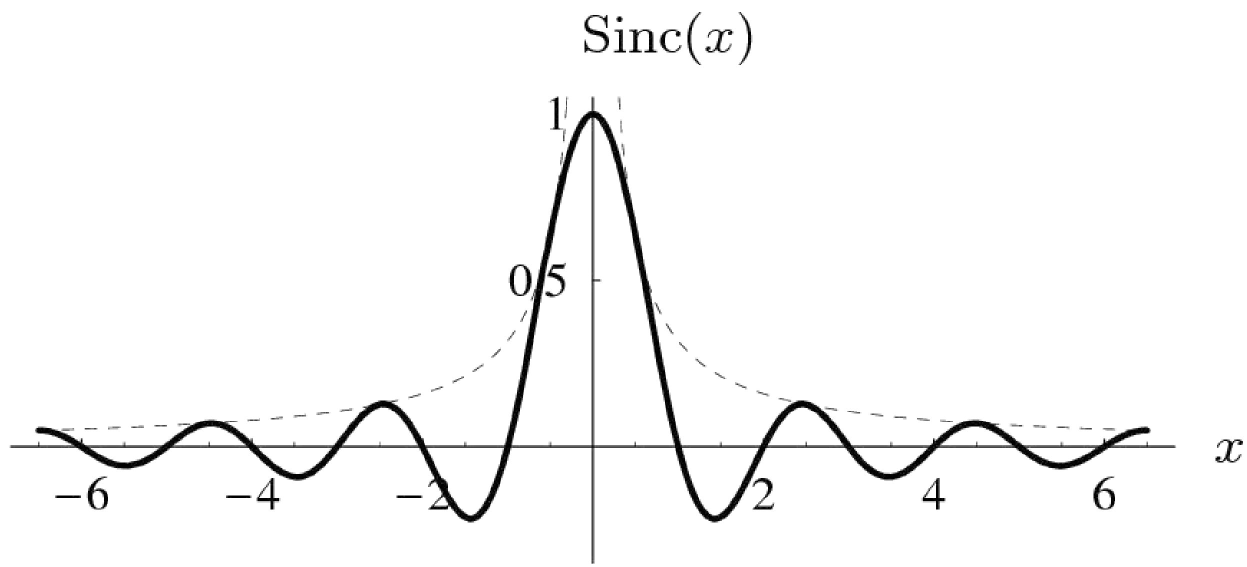
- Las interpolaciones basadas en Fourier las veremos más adelante

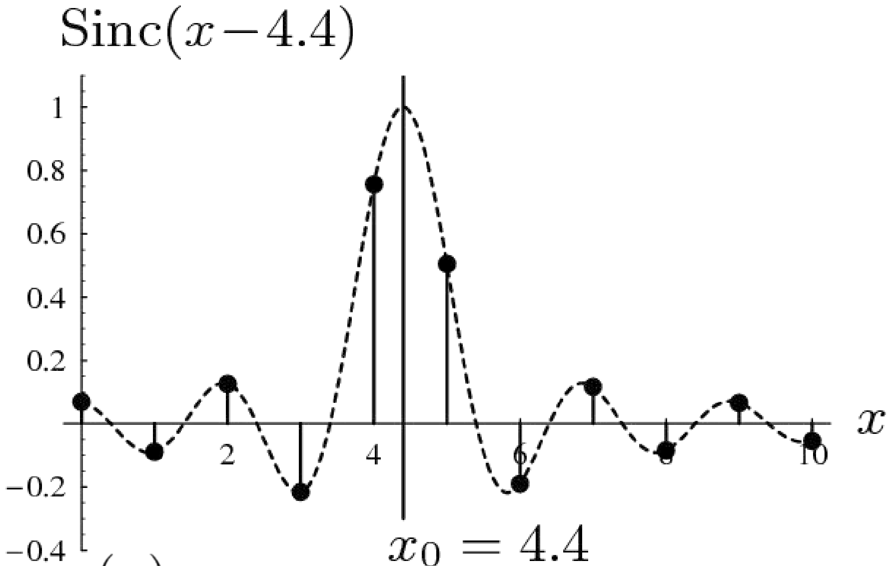


g(u)
u
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
(a)
f(x)
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
(b)

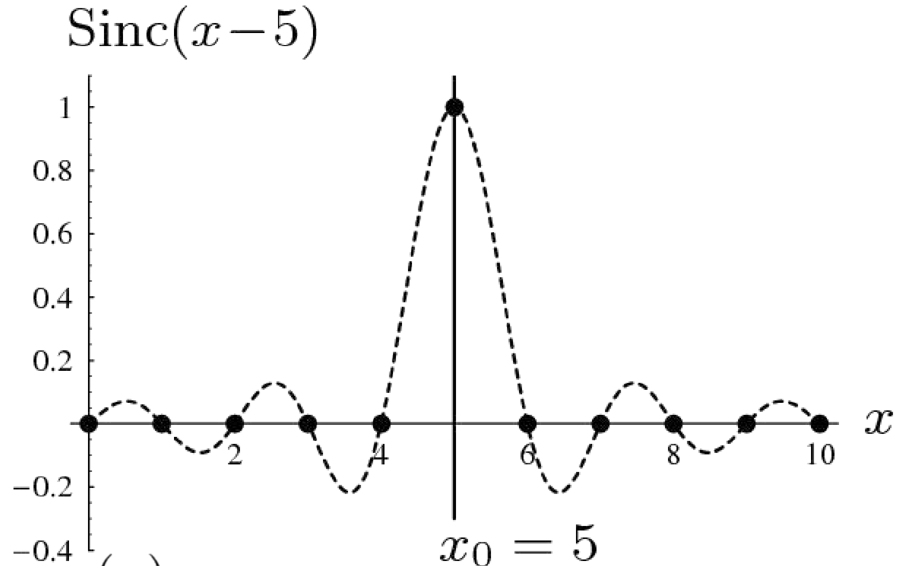


Signal space
Frequency space
$g(u)$
$G(\omega)$
$*$
$\times$
$\mathrm{Sinc}(x)$
$\Pi_\pi(\omega)$
$\hat{g}(x) = [\mathrm{Sinc} * g](x)$
$\hat{G}(\omega) = G(\omega) \cdot \Pi_\pi(\omega)$

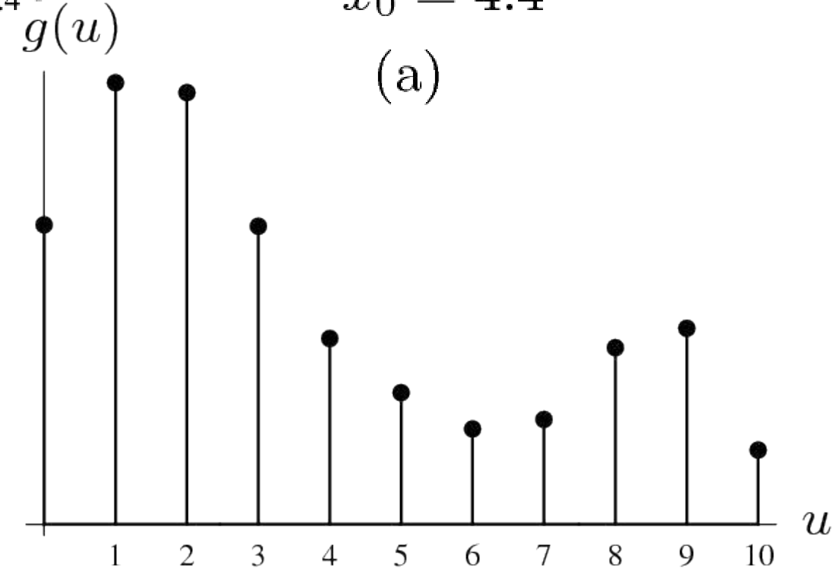

Sinc(x)
1
0.5
−6
−4
−2
2
4
6
x


Sinc(x−4.4)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
2
4
6
8
10
x
$x_0 = 4.4$

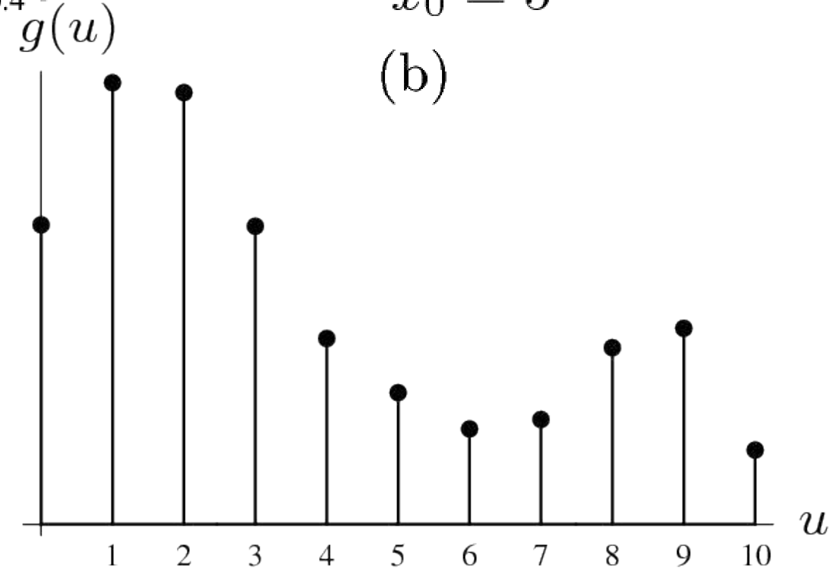
(a)


Sinc(x−5)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
2
4
6
8
10
x
$x_0 = 5$

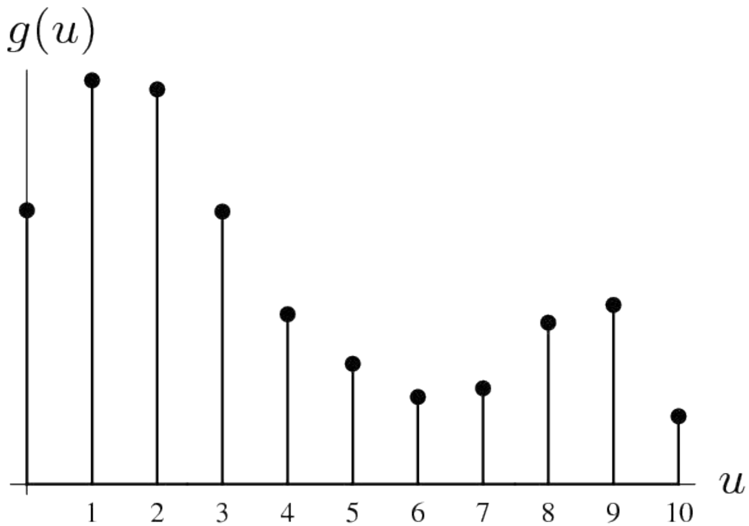
(b)


g(u)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
u

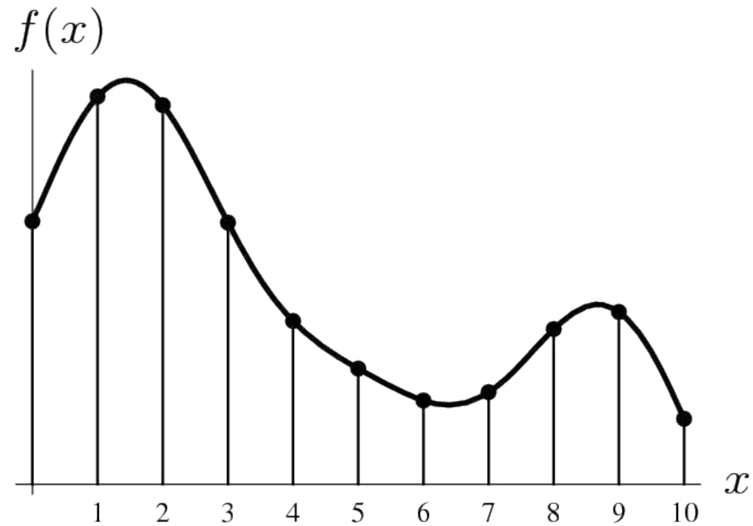
(a)


g(u)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
u

(a)



(a)



(b)

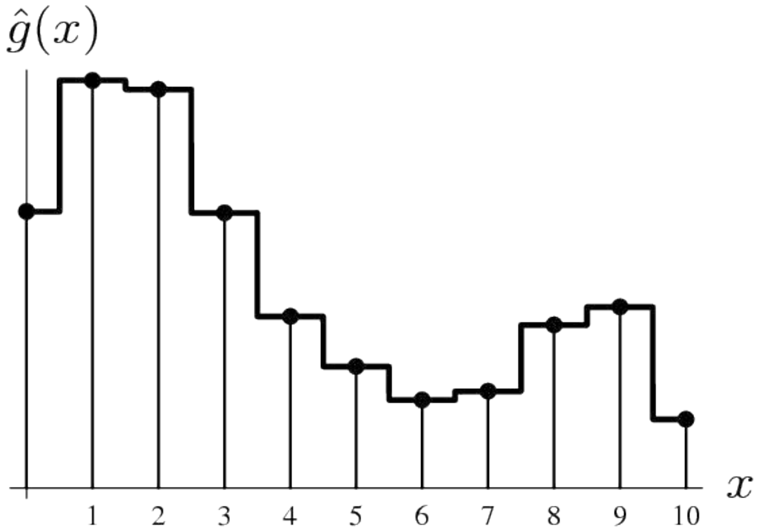
Análisis de interpolaciones

- Orden: la interpolación se dice de orden n si, para toda imagen u en L^2 y C^∞,

  $$||u - u_h|| = o(h^n),$$

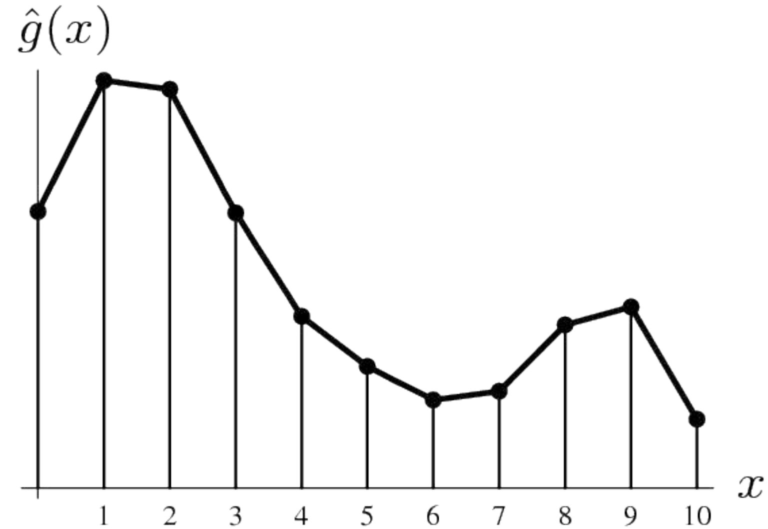
  donde u_h es la imagen interpolada a partir de las muestras $\{u(kh,lh)\}$

- Soporte: supp(φ) (medida de localidad)
- Regularidad de φ (y por ende en general de la imagen interpolada)



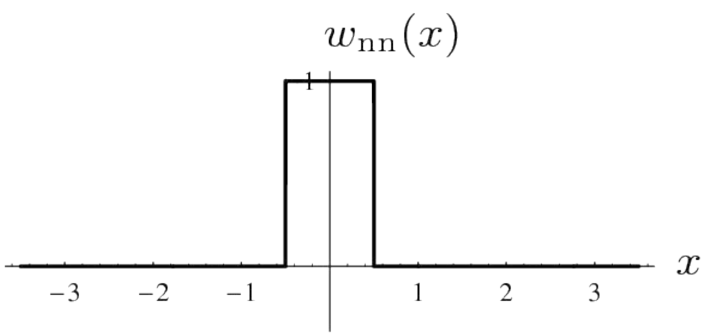
$\hat{g}(x)$
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

(a)



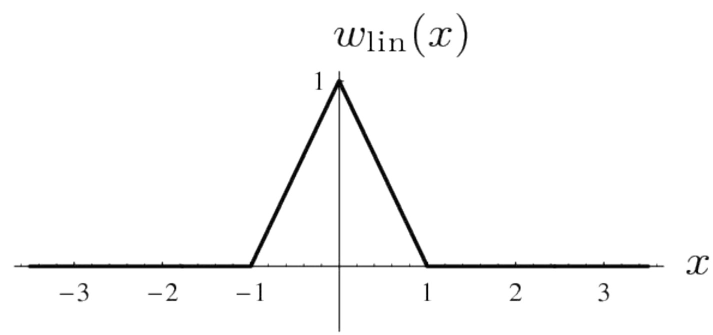
$\hat{g}(x)$
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

(b)



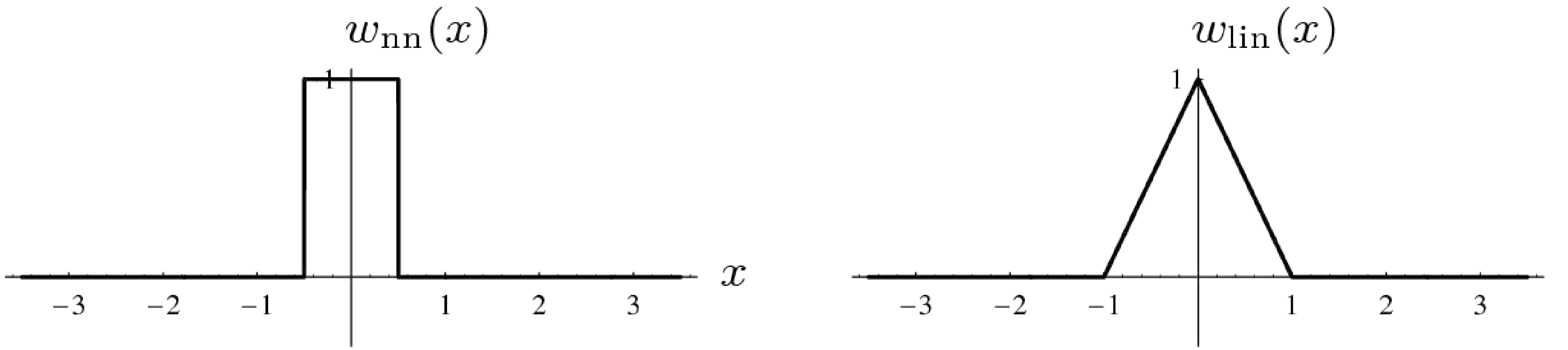
$w_{\mathrm{nn}}(x)$
1
x
−3 −2 −1 1 2 3

(a)

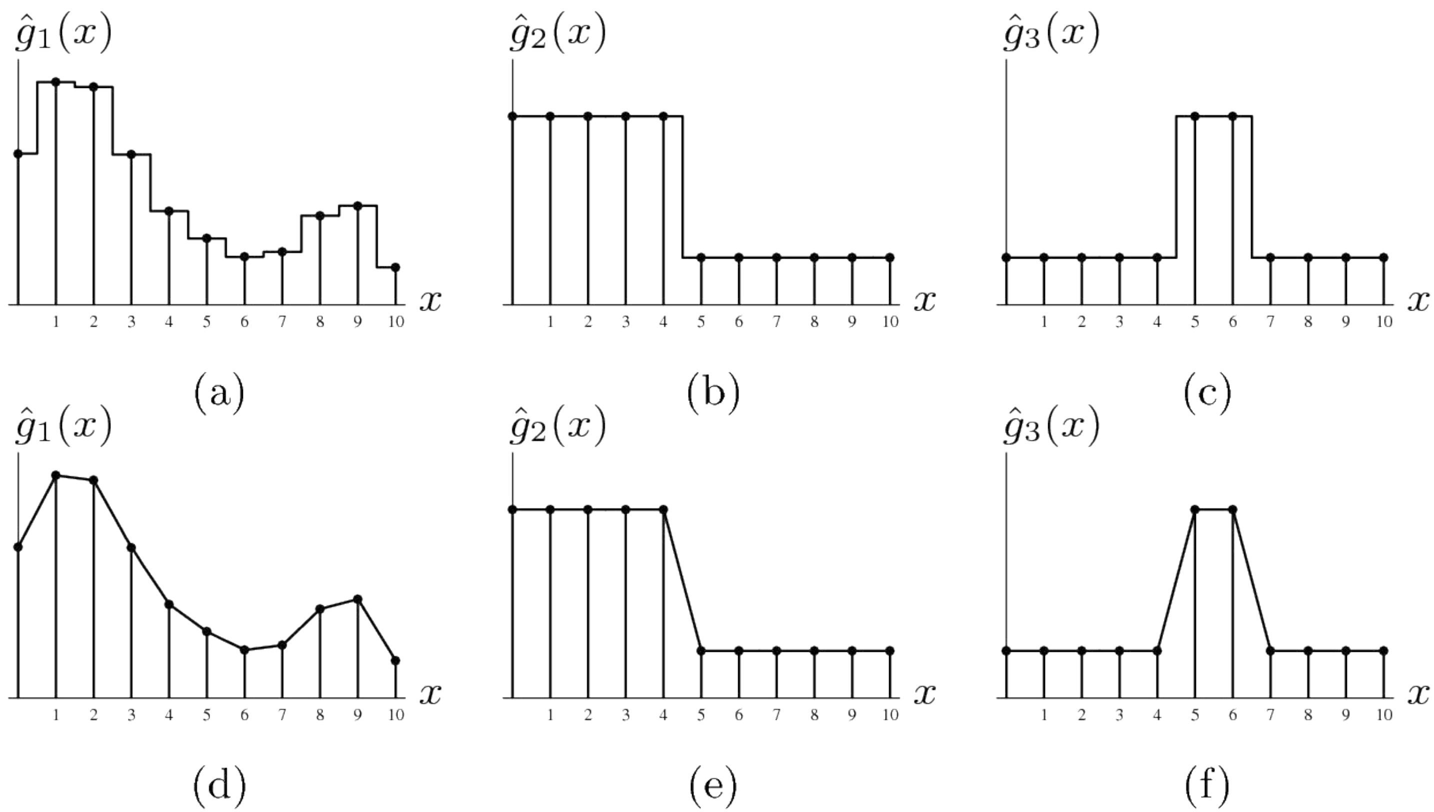


$w_{\mathrm{lin}}(x)$
1
x
−3 −2 −1 1 2 3

(b)

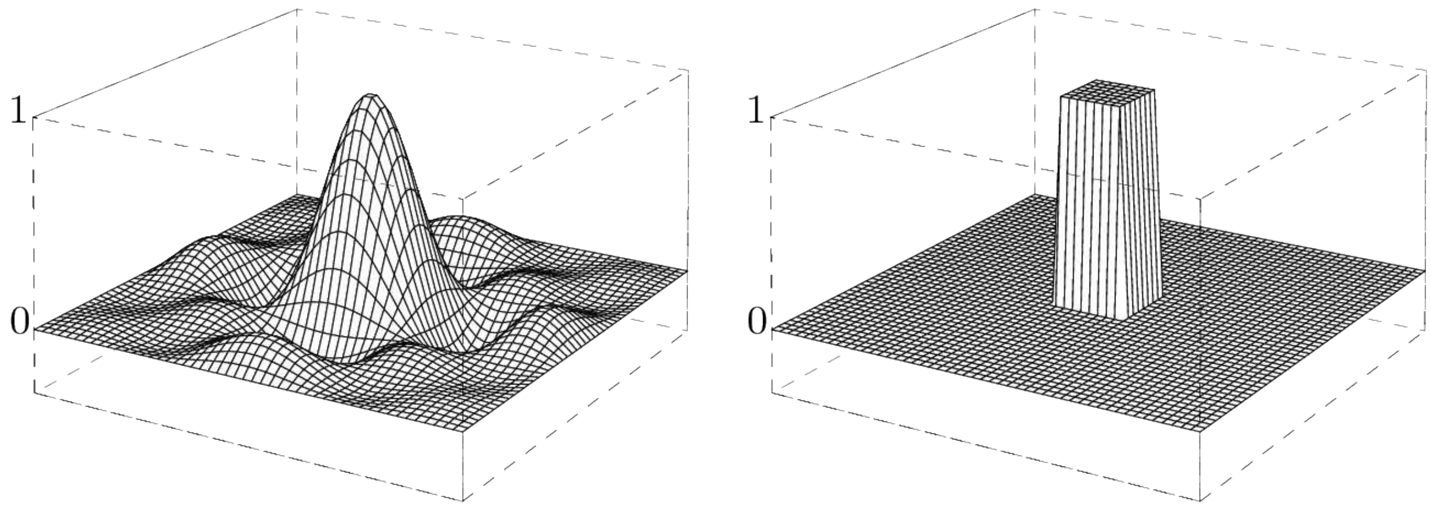


(a) (b)

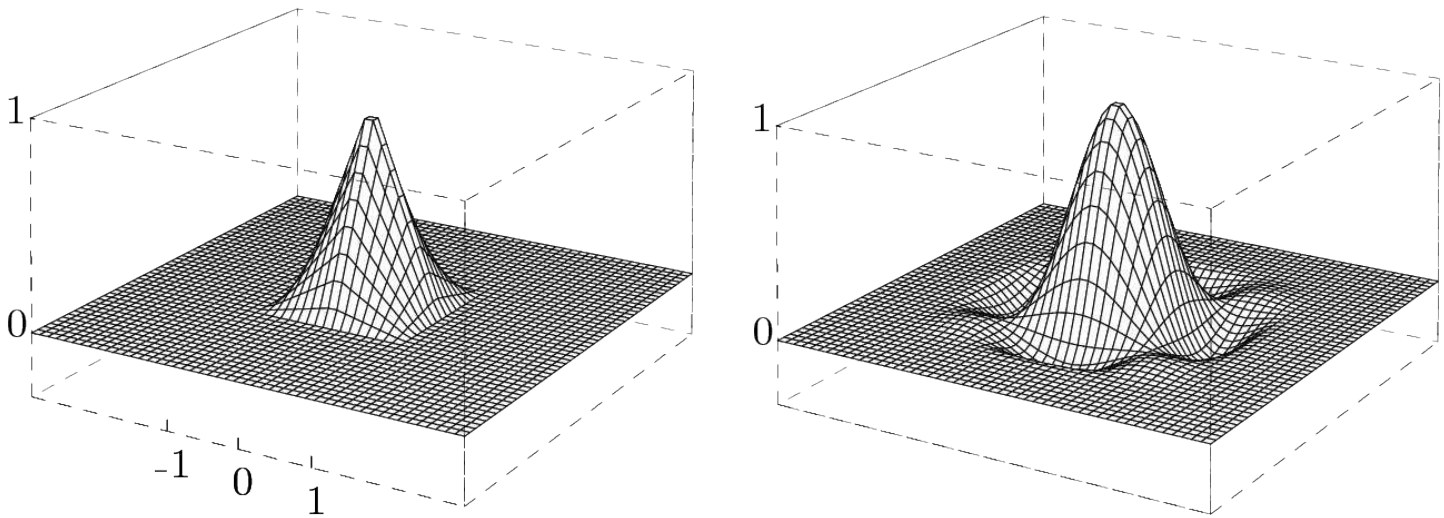


$\hat{g}_1(x)$
$\hat{g}_2(x)$
$\hat{g}_3(x)$
x
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)

En 2D



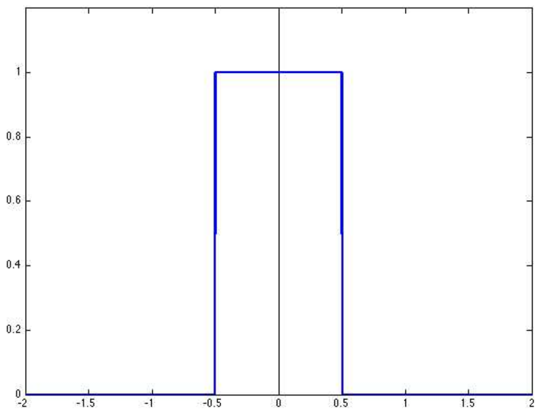
(a) (b)

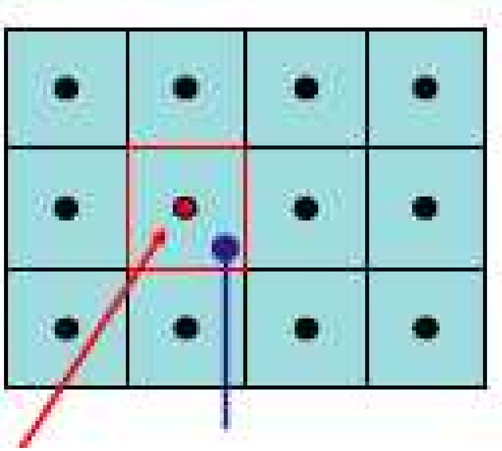


(a) (b)

Vecino más cercano

$$\varphi(t) = \beta^0(t) = \chi_{\{[-0.5,0.5]\}}(t)$$

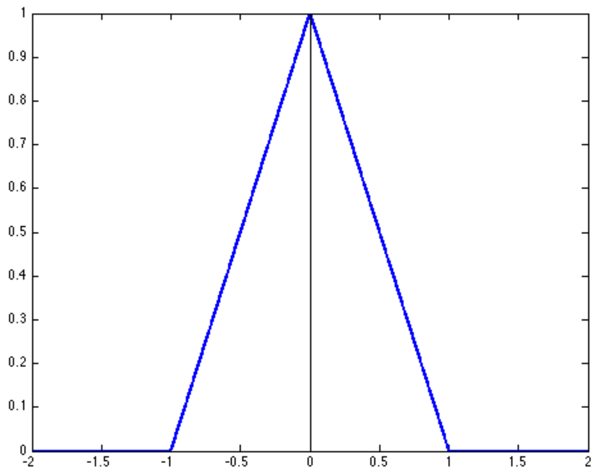


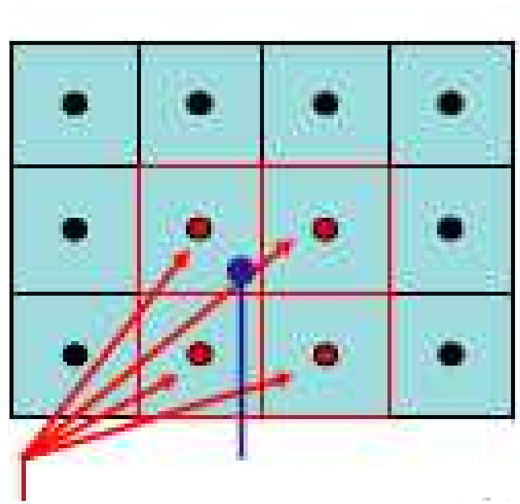


- Orden 0, Soporte 1, discontinua

Bilineal

$$\varphi(t) = \beta^1(t) = \beta^0 \star \beta^0(t) = \max(1-|t|,0)$$



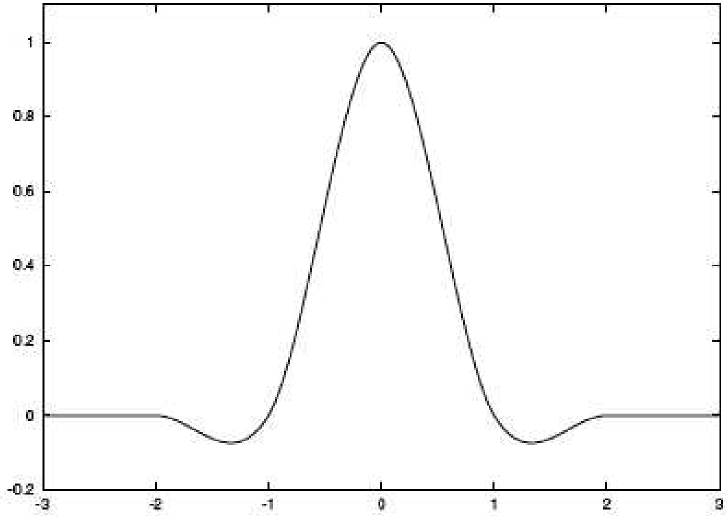


- Orden 1, soporte 2, clase C^0
- Monótona:

$$u_1(i,j) \geq u_2(i,j)\ \forall (i,j) \Rightarrow \tilde{u}_1(x,y) \geq \tilde{u}_2(x,y)\ \forall (x,y)$$

Bicúbica

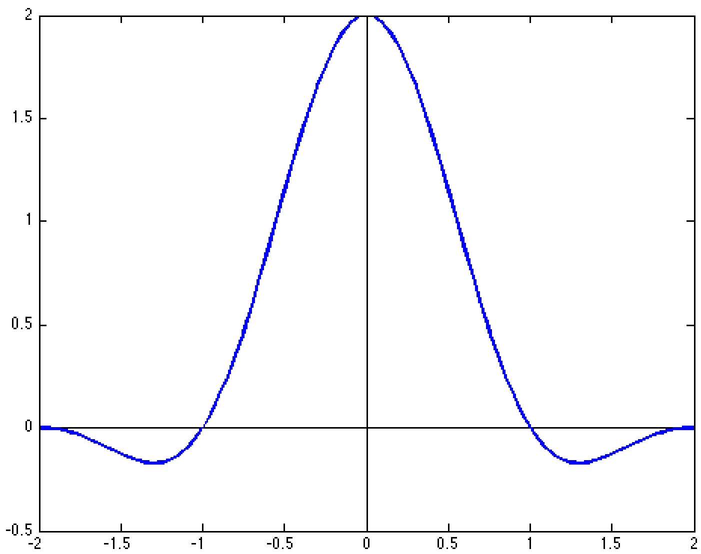
$$\phi(t) = \begin{cases} 1-(a+3)\,|t|^2 + (a+2)\,|t|^3 & \text{si } |t|<1 \\ -4a+8a\,|t| - 5a\,|t|^2 + a\,|t|^3 & \text{si } 1 \le |t| < 2 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$



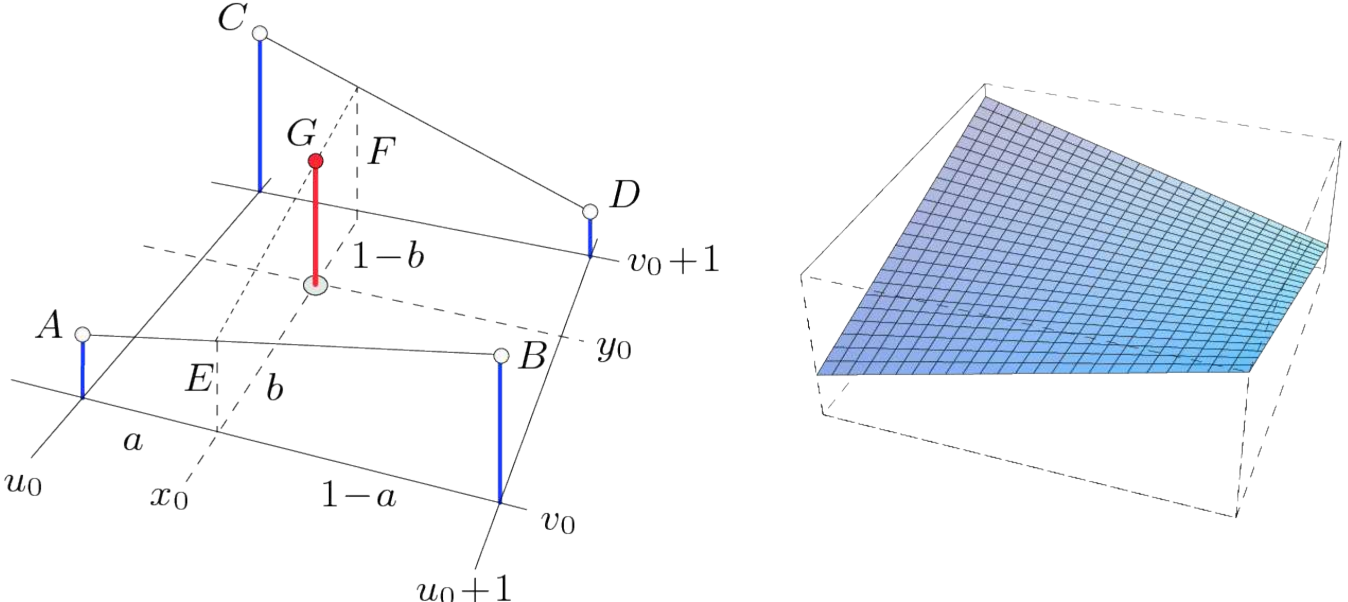
Orden 1 en general (2 si a=-0.5), soporte 4, C^1

Lanczos

$$L(x) = \begin{cases} 2\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\dfrac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a} & -a < x < a, x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

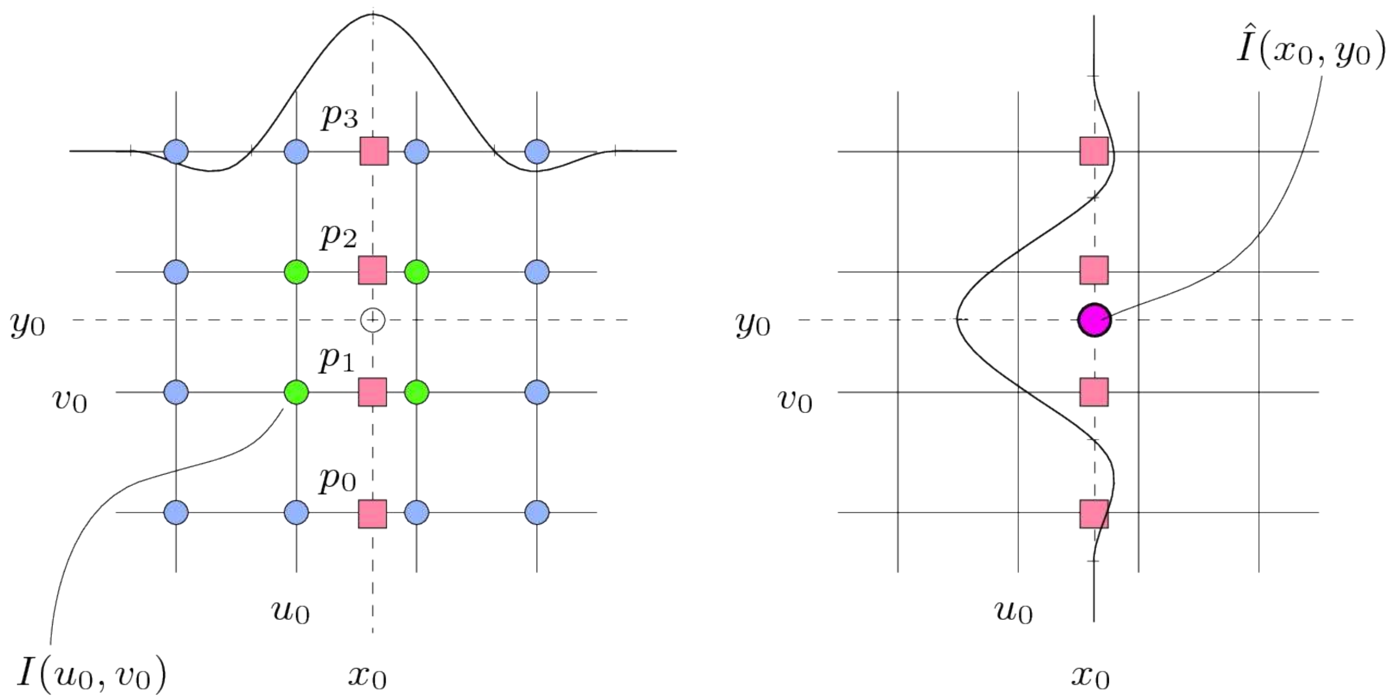


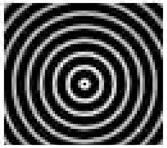
Bilinear



(a) (b)

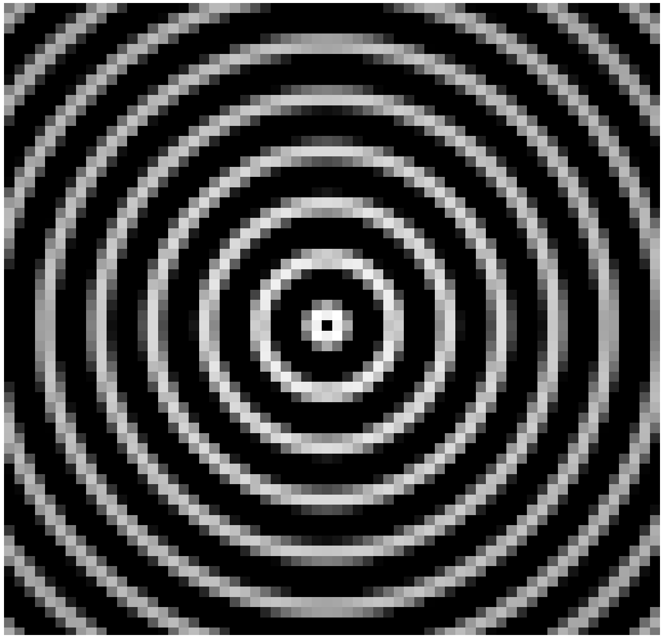
Bicúbica

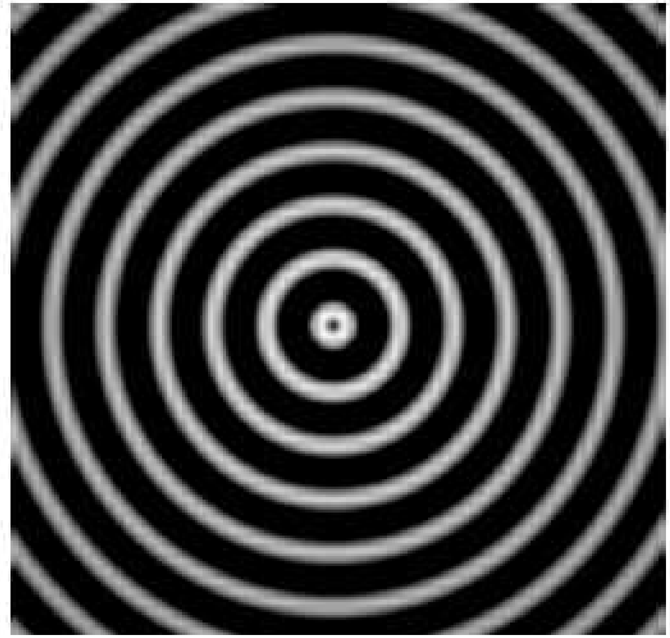




zoom
x4

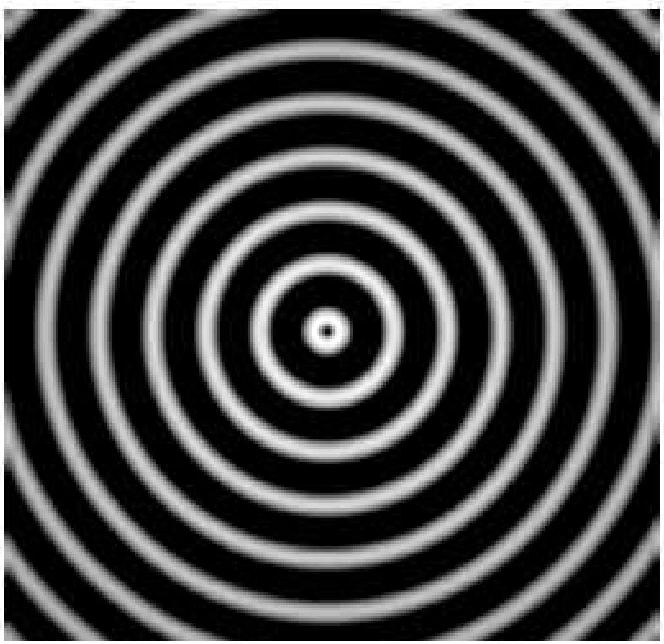
NN

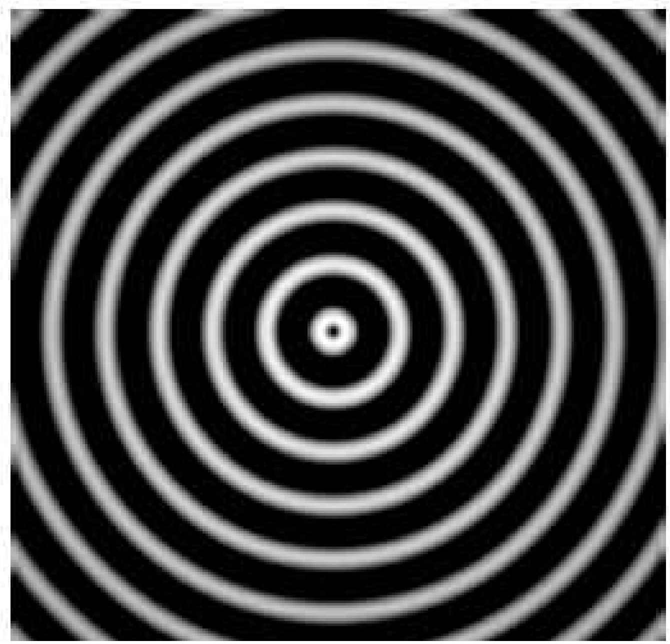




Bilinear

Bicubic





Lanczos2

Transformaciones proyectivas en el plano

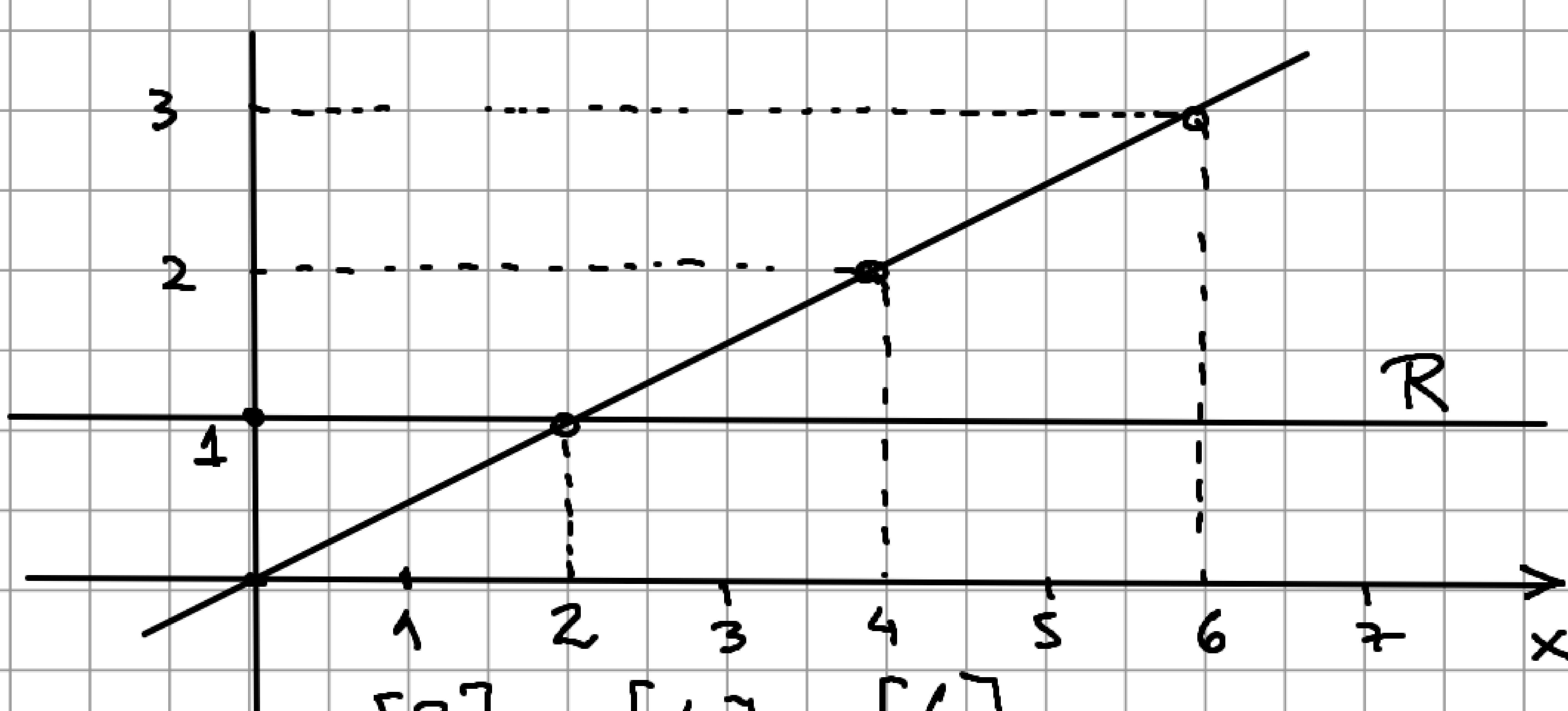
- Modelizan la distorsión geométrica que ocurre cuando un plano es visto desde una cámara
- Antes de estudiarlas, introduciremos la noción de coordenadas homogéneas, que simplifican las manipulaciones algebraicas en geometría proyectiva

Recta proyectiva

Consideramos recta R embebida en $\mathbb{R}^2$

Definimos la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2/\{0,0\}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} \quad \text{con } k>0$$



$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} \underset{\text{si } y \neq 0}{\sim} \begin{bmatrix} x/y \\ 1 \end{bmatrix}$$

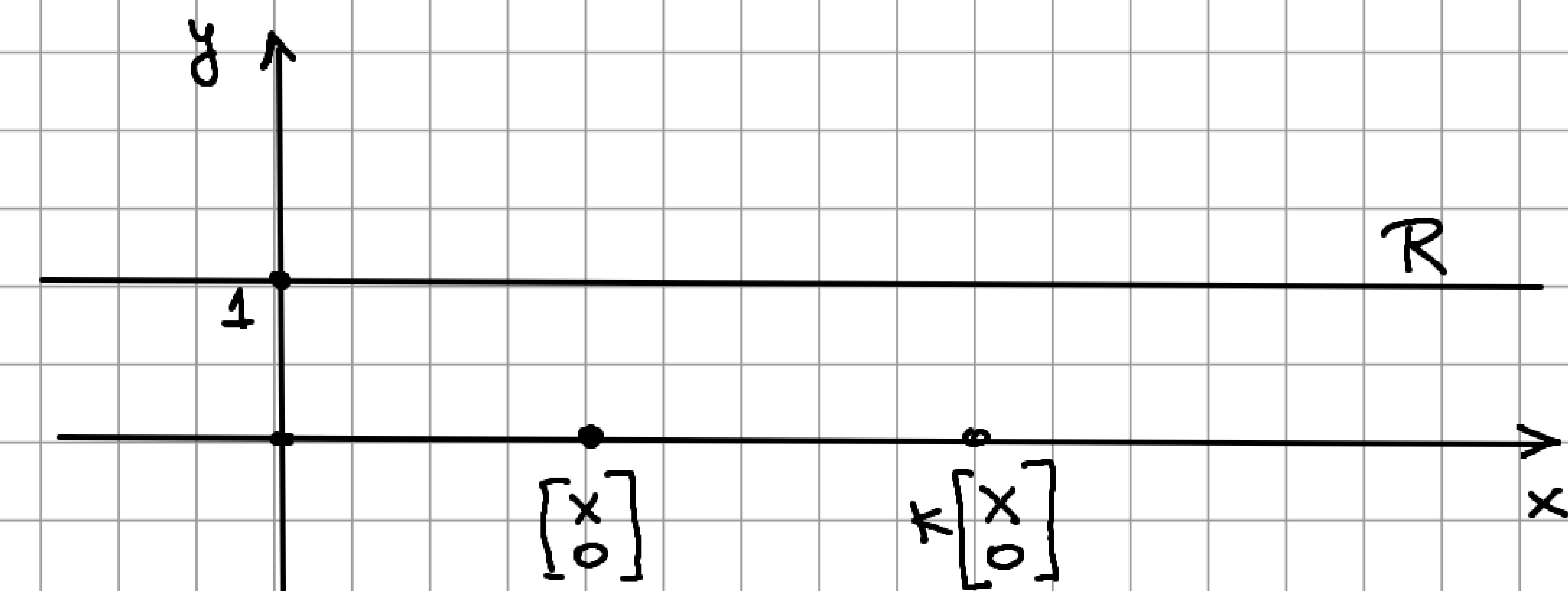
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \sim 1.5 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{representante canónico}}$$ en el ejemplo anterior

---

$R^2/\{0,0\}$ + relación de equivalencia define la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$

$$x \in R^1 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^1$$

También se dice que $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ es x en coordenadas "homogéneas".



¿Qué pasa en P^1 con los puntos con segunda coordenada cero.?

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} kx \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ punto del infinito

En R^1 el infinito es un "concepto"

En P^1 el infinito es un punto del conjunto coord no homogéneas

x

x/y

coord homogéneas

$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} kx \\ k \end{bmatrix}$

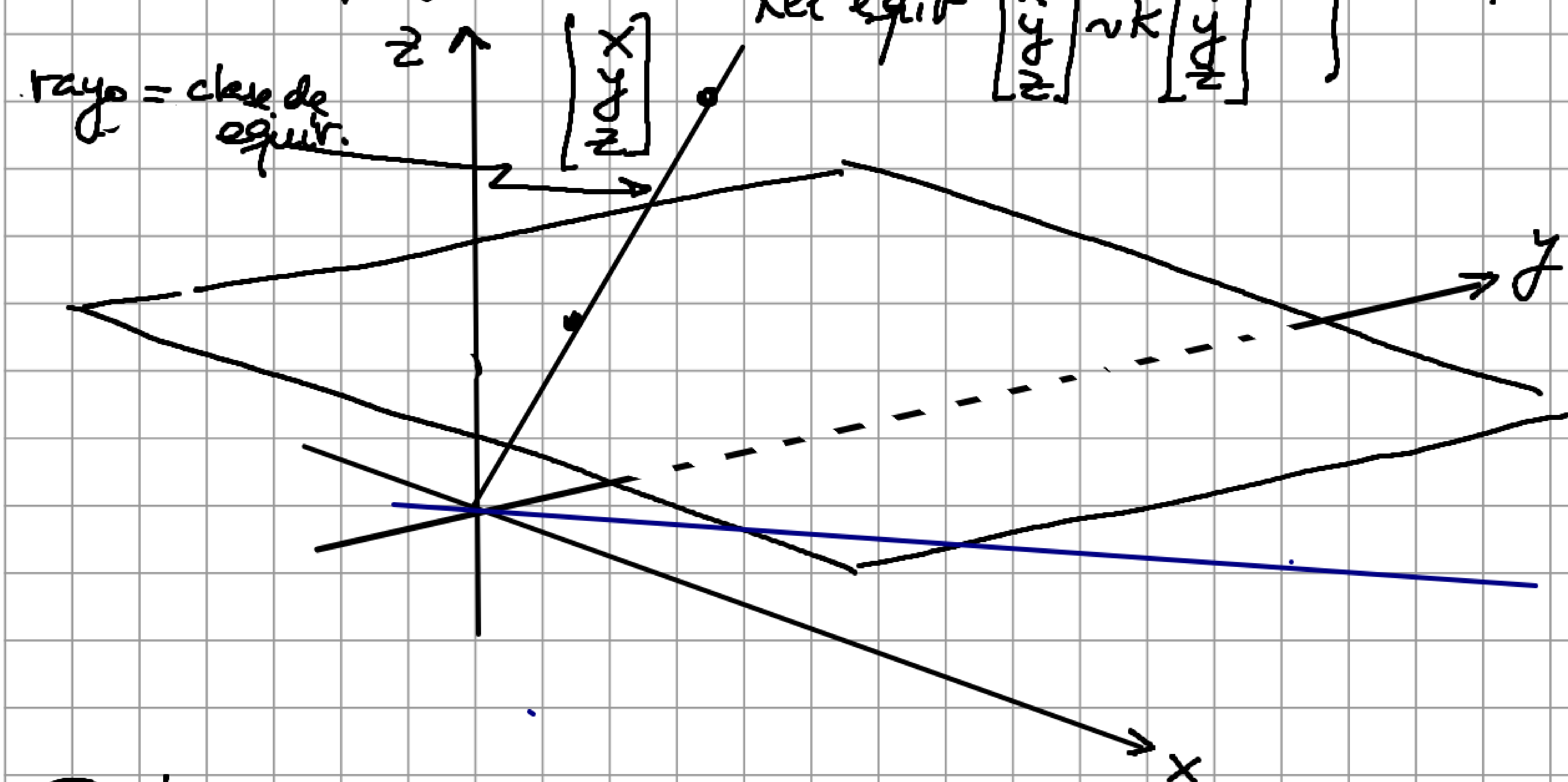
$k \neq 0$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$x/y \xleftarrow{\text{sólo si } y \neq 0} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Plano proyectivo

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^3/\{0,0,0\} \\ \text{Rel equiv } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \sim k \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow P^2$$



Puntos con $z=0$ son puntos del infinito.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{punto del infinito}$$

Recta en P^2

definida por $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \sim k \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $k \neq 0$

ecuación: $ax+by+cz=0$

si $\underline{l} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ entonces $\underline{x} \in \underline{l}$ si $\underline{x} \cdot \underline{l} = 0$

$$\underline{x} \cdot \underline{l} = 0 \Leftrightarrow \underline{x}^t \underline{l} = 0 \Leftrightarrow \underline{l}^t \underline{x} = 0$$

Recta por 2 puntos

$\underline{l}$ pasa por $\underline{x}$ y $\underline{x}'$ $\iff$ $\underline{l} = \underline{x} \wedge \underline{x}'$

$\underline{l} = \underline{x} \wedge \underline{x}' \perp \underline{x} \iff l^t \underline{x} = 0 \iff \underline{x} \in \underline{l}$

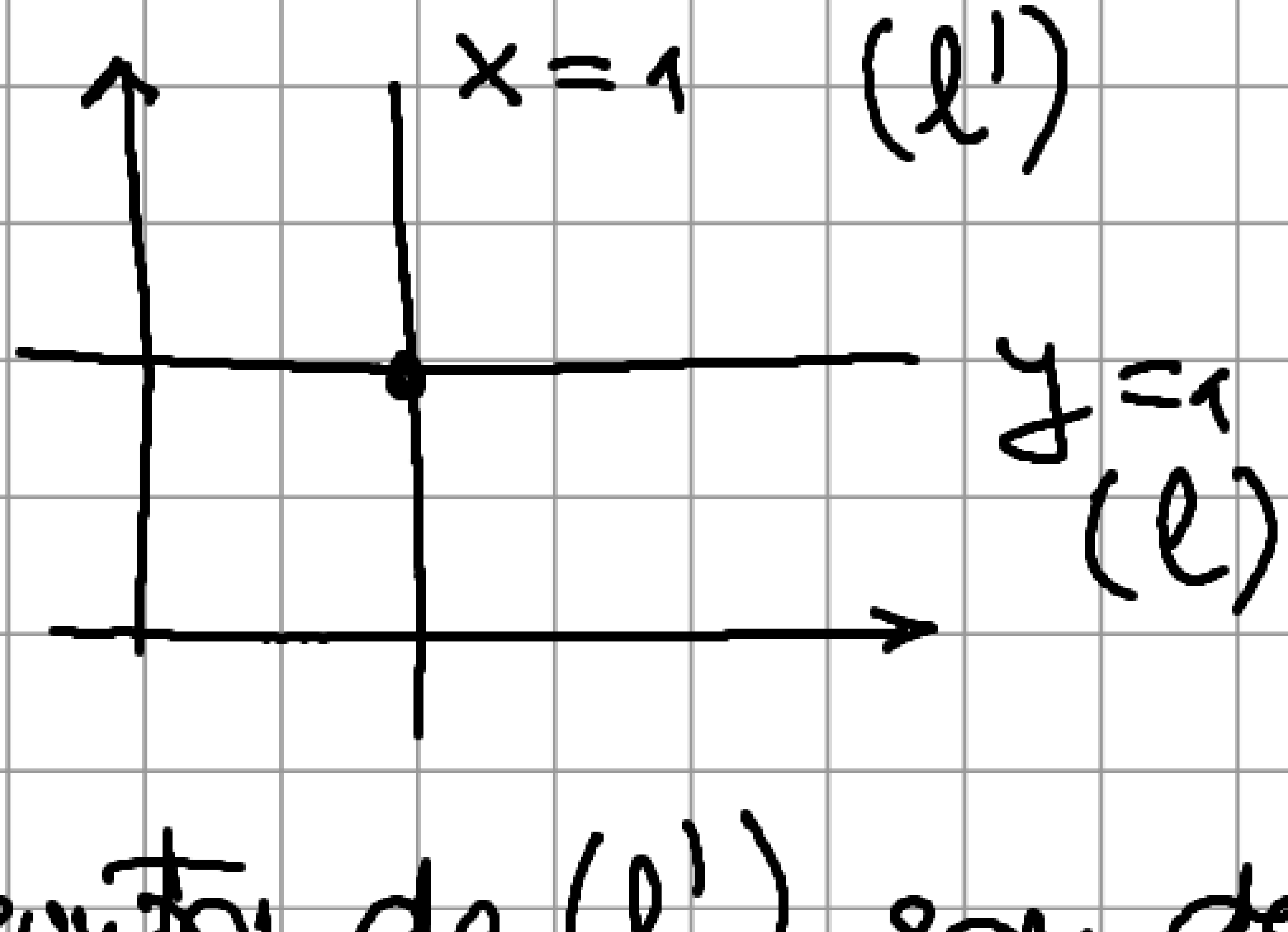
$\quad$ " $\quad \perp \underline{x}' \iff l^t x' = 0 \iff \underline{x}' \in \underline{l}$

Intersección de 2 rectas

$\underline{x} = l \cap l' \iff \underline{x} = \underline{l} \wedge l'$

Demostrar.

Ejemplo de intersección $\qquad ax + by + cz = 0$



$$l = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad l' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

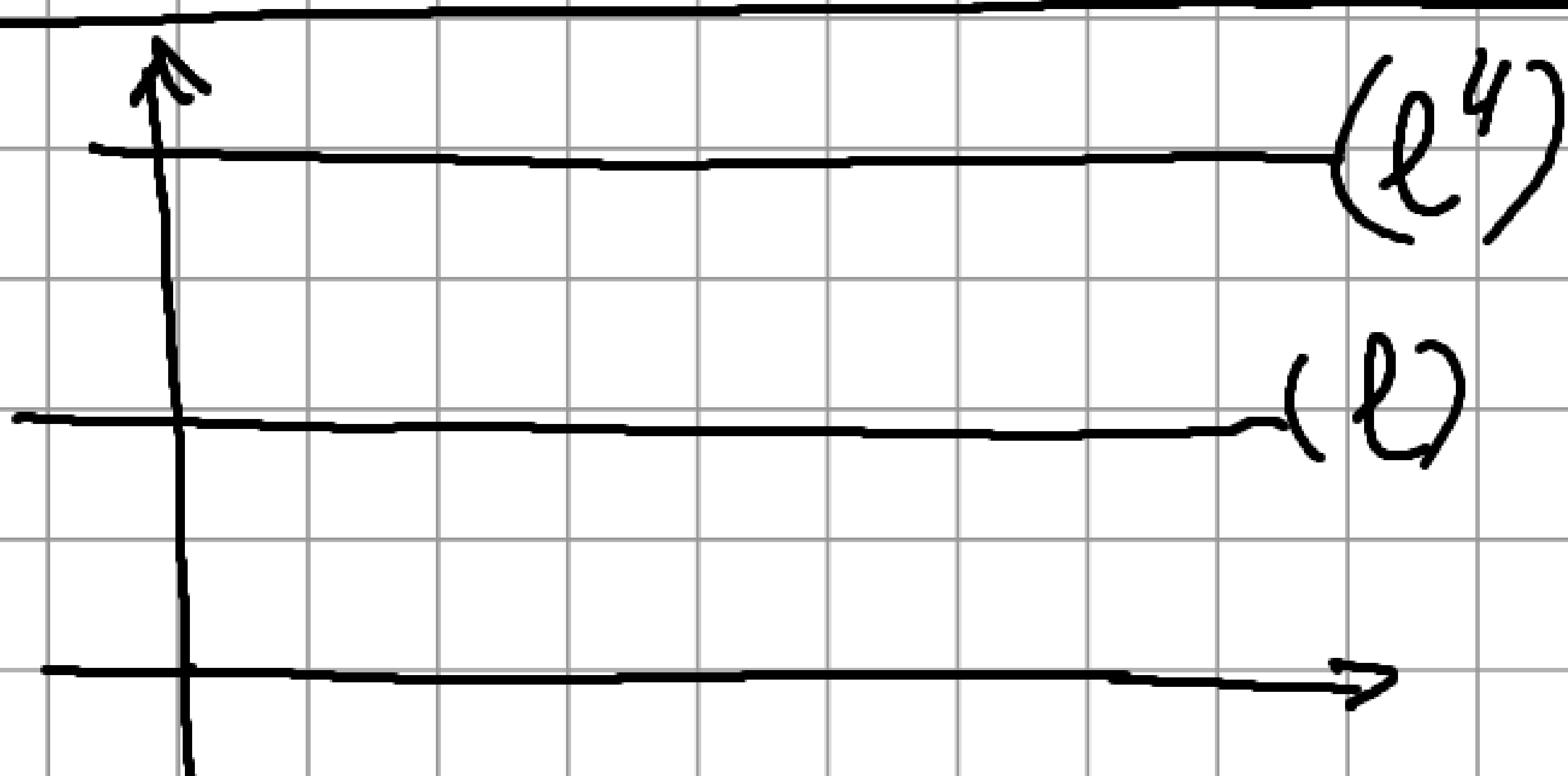
puntos de (l') son de la forma $\begin{bmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ en coord. homogéneas

$$\begin{bmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$\underline{x} = \underline{l} \cap \underline{l}'$

$$\underline{x} = l \wedge l' = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En coord no homogéneas $\underline{x} = \begin{bmatrix} -1/-1 \\ -1/-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



$$(l) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(l^4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = l \wedge l^4 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0.5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{x}$ tiene tercera componente nula (punto del infinito en dirección $(1,0)$)

En general $l \parallel l'$ son de la forma $l = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $l' = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c' \end{bmatrix}$

$$l \times l' = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a & b & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(c'-c) \\ -a(c'-c) \\ 0 \end{bmatrix} = (c'-c) \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Recta del infinito</u>

$l_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ formada por todos los puntos $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, ptos del infinito

$$l_\infty \cdot \underline{x} = \emptyset$$

El plano proyectivo 2D

- Un punto en el plano: $(x, y) \in IR^2$
- Representación homogénea de rectas:
  - Recta del plano: $ax + by + c = 0$
  - El vector $(a,b,c)^T$ representa a la recta, pero la correspondencia no es biunívoca:

    $k(a,b,c)^T$ con $k \neq 0$ representa la misma recta
  - Dos vectores proporcionales (no nulos) son equivalentes. La clase de equivalencia se llama *vector homogéneo*
- El conjunto de clases de equivalencia de vectores homogéneos de $IR^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ conforma el espacio proyectivo IP^2

- Representación homogénea de puntos:
  - El punto (x,y) pertenece a la recta de coord homogéneas $\mathbf{l} = (a,b,c)^T$ ssi $ax + by + c = 0$ ssi $(x,y,1)^T \mathbf{l} = 0$
  - Para todo $k \neq 0$, para toda recta $\mathbf{l}$,

    $$(kx,ky,k)^T \mathbf{l} = 0 \quad \text{ssi} \quad (x,y,1)^T\mathbf{l} = 0$$
  - Consideramos entonces que los vectores $\{(kx,ky,k)^T, k \neq 0\}$ son todos representaciones del punto $(x,y) \in IR^2$
  - De esta manera los puntos del plano se pueden representar como vectores homogéneos. Un vector homogéneo arbitrario $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)^T$ representa al punto $(x_1/x_3, x_2/x_3)$ de IR^2

- Aplicaciones:
  - Un punto de coord. homog. $\mathbf{x}$ pertenece a la recta $\mathbf{l}$ ssi $\mathbf{x}^T\mathbf{l} = 0$
  - Dos rectas de coord. homog. $\mathbf{l}$ y $\mathbf{l}'$ se cortan en el punto de coord homog
    $\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$
  - La recta que pasa por ptos de coord homog $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}'$ tiene por coord homog
    $\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}'$

Puntos y recta en el infinito

- Intersección de rectas paralelas

$$\mathbf{l} = (a,b,c)^T \text{ y } \mathbf{l'} = (a,b,c')^T$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l'} = (c-c')\,(b,-a,0)^T$$

  - Las coord. inhomogéneas de este punto son infinitas, por lo que **x** no corresponde a ningún punto finito del plano
  - Rectas paralelas se intersectan en el infinito y el punto de intersección corresponde a la dirección de dichas rectas (dado por la pendiente)
- El cjto de vectores homog $(x_1,x_2,x_3)^T$ con $x_3 \neq 0$ representan ptos finitos de IR^2
- El espacio proyectivo IP^2 se obtiene extendiendo IR^2 con los puntos $(x_1,x_2,0)^T \neq (0,0,0)^T$ (puntos en el infinito, direcciones)

- El conjunto de todos los puntos en el infinito se llama recta en el infinito, y tiene por vector homogéneo $\mathbf{l}_\infty = (0,0,1)^T$: $(x_1,x_2,0)^T\mathbf{l}_\infty = 0$

- $\mathbf{l}_\infty$ representa el conjunto de direcciones de las rectas del plano

- Todo conjunto de rectas paralelas se intersecta en un punto de $\mathbf{l}_\infty$

Transformaciones proyectivas

- Def. geométrica: una homografía o proyectividad plana es una transformación $h{:}IP^2 \rightarrow IP^2$ invertible tal que: $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3$ alineados ssi $h(\mathbf{x}_1),h(\mathbf{x}_2),h(\mathbf{x}_3)$ alineados
- Obs: transforman rectas y puntos en rectas y puntos
- Def. algebraica: una homografía plana es una trafo lineal que actúa sobre vectores homog de 3D, representada por una matriz 3x3 invertible:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}' = \mathrm{H}\,\mathbf{x}$$

- Obs:
  - H es una matriz homogénea: la multiplicación por una constante no nula no afecta la transformación proyectiva efectuada
  - H tiene 8 grados de libertad (9 coeficientes – 1 factor de escala)

¿Cómo se transforma una recta o una cónica por una homografía H ?

- $\mathbf{x}$ pertenece a la recta $\mathbf{l}$: $\mathbf{x}^T\mathbf{l} = 0$
- $\mathbf{x}' = H\,\mathbf{x}$, H invertible

$\Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{l} = 0 \Leftrightarrow (H^{-1}\mathbf{x}')^T\mathbf{l} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}'^T H^{-T}\mathbf{l} = 0$

$\Rightarrow$ La recta $\mathbf{l}$ se transforma en la recta $H^{-T}\mathbf{l}$

- $\mathbf{x}$ pertenece a la cónica $\mathbf{C}$: $\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 0$

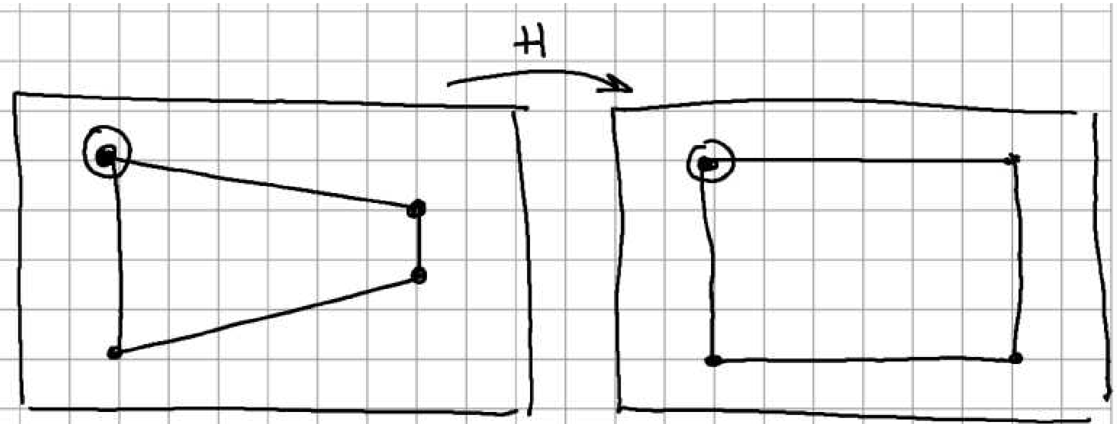
$\Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow (H^{-1}\mathbf{x}')^T\mathbf{C}\, H^{-1}\mathbf{x}' = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{x}'^T H^{-T}\mathbf{C}H^{-1}\mathbf{x}' = 0$

$\Rightarrow$ La cónica $\mathbf{C}$ se transf. en la cónica $H^{-T}\mathbf{C}H^{-1}$

Corrección de la distorsión proyectiva de la imagen perspectiva de un plano

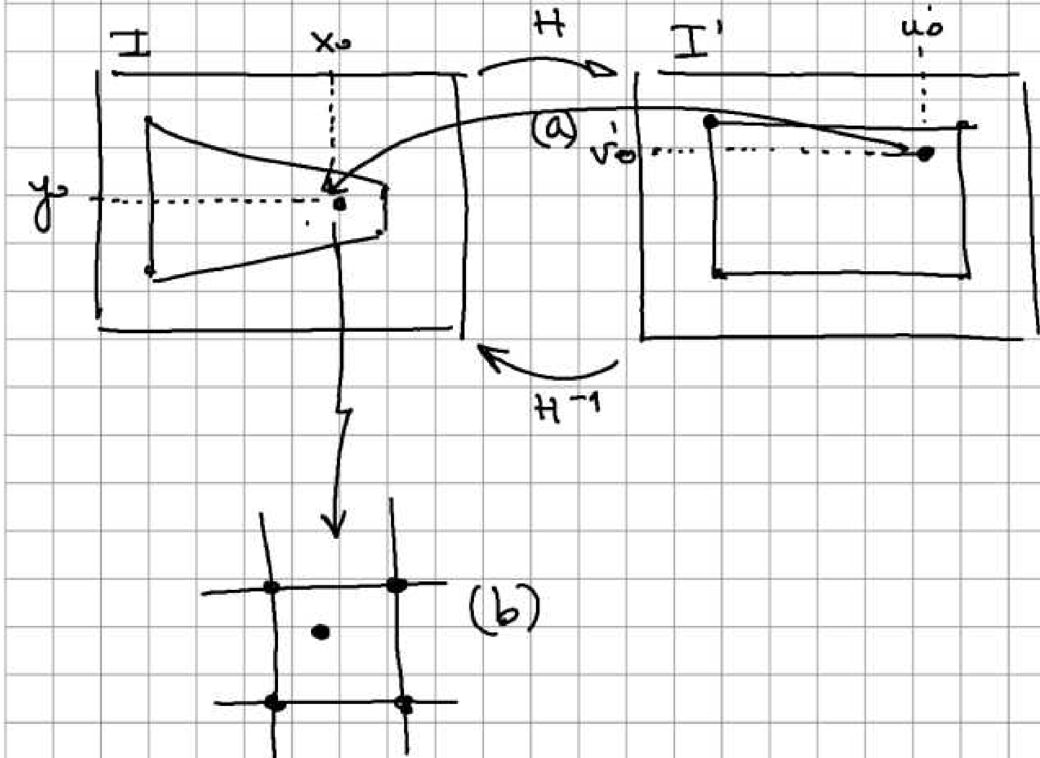
- Idea: dada la imagen de un plano tomada con una cámara perspectiva (e.g. fachada de edificio, cuadro en museo), corregir el efecto de la perspectiva
- Homografía plana: 8 dof => 4 pares de correspondencias (*x*,*y*) <-> (*x'*,*y'*) en configuración "general" (se puede ver que para que H no sea singular, de las 4 correspondencias, no puede haber 3 puntos colineales)
- Cada correspondencia aporta 2 ecuaciones lineales en los coeficientes de H:
    - $x'(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) = h_{11}x + h_{12}y + h_{13}$
    - $y'(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) = h_{21}x + h_{22}y + h_{23}$



$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{r}{t} = x' \qquad \frac{s}{t} = y'$$

Cada correspondencia aporta 2 ecuaciones
Con 4 (o más) correspondencias queda
un sistema lineal determinado (sobredet)
en los coeficientes $[h_{11} - h_{32}]$.



Recorrer la grilla de I'

(a) ver de donde venía ese pixel con el mapeo inverso

(b) interpolar el valor en la grilla de I

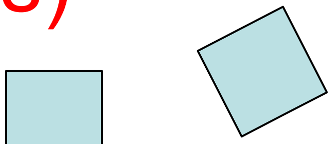
(c) asignar el valor interpolado al pixel de I'

Jerarquía de transformaciones

Jerarquia del sub-grupos del grupo proyectivo (de más específica a más general)

1. Isometrias (transf. Euclideas)

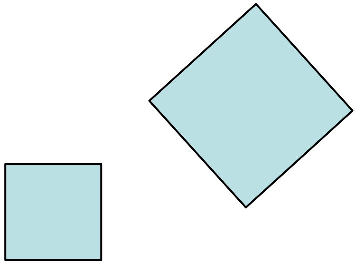
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t1 \\ \sin\theta & \cos\theta & t2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$



3 dof; dos pares de correspondencias para estimar la transformación

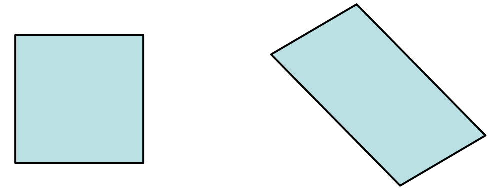
2. Similitudes

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s.\cos\theta & -s.\sin\theta & t1 \\ s.\sin\theta & s.\cos\theta & t2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \text{con } s > 0$$



4 dof; dos pares de correspondencias para estimar la transformación

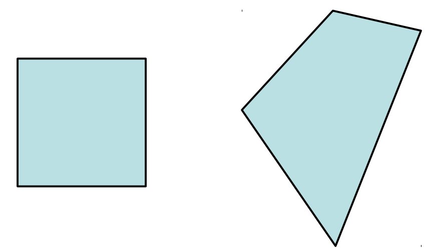
3. Afinidades



$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t1 \\ a_{21} & a_{22} & t2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \text{con } \det(\mathrm{A}) > 0$$

6 dof; 3 pares de correspondencias para estimar la transformación

4. Proyectividades



$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^T & v \end{pmatrix} \mathbf{x}, \text{ con } \det(\mathrm{H}) \neq 0$$

8 dof; 4 pares de correspondencias para estimar la transformación

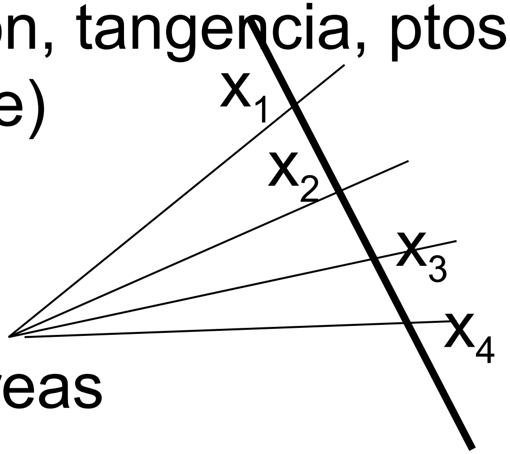
<u>Obs</u>: las transf. proyectivas no afines son las únicas que modifican la recta en el infinito (y por eso a diferencia de las otras no conservan el paralelismo)

Invariantes

Las transf. proyectivas no afines son las más generales y por eso las que tienen menos invariantes.

Proyectivas:

- Colinealidad y concurrencia (intersección, tangencia, ptos de inflexión, discontinuidad de la tangente)
- Cross-ratio $|x_1x_2||x_3x_4|/(|x_1x_3||x_2x_4|)$



Afines:

- **Se agregan** paralelismo, cociente de áreas y de longitudes en direcciones paralelos

Similitud:

- **Se agregan** ángulos, cociente de áreas y de longitudes

Isometrías:

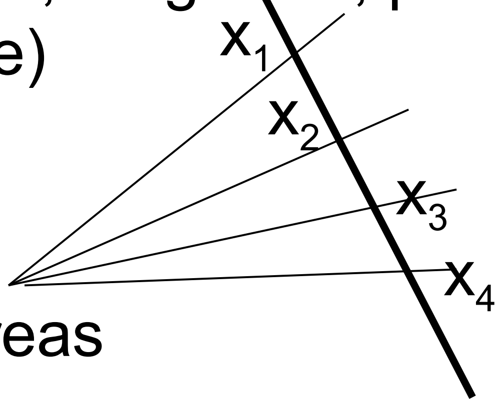
- **Se agregan** longitud y área

Invariantes

Las transf. proyectivas no afines son las más generales y por eso las que tienen menos invariantes.

Proyectivas:

- Colinealidad y concurrencia (intersección, tangencia, ptos de inflexión, discontinuidad de la tangente)
- Cross-ratio $|x_1x_2||x_3x_4|/(|x_1x_3||x_2x_4|)$



Afines:

- **Se agregan** paralelismo, cociente de áreas
  y de longitudes en direcciones paralelos

Similitud:

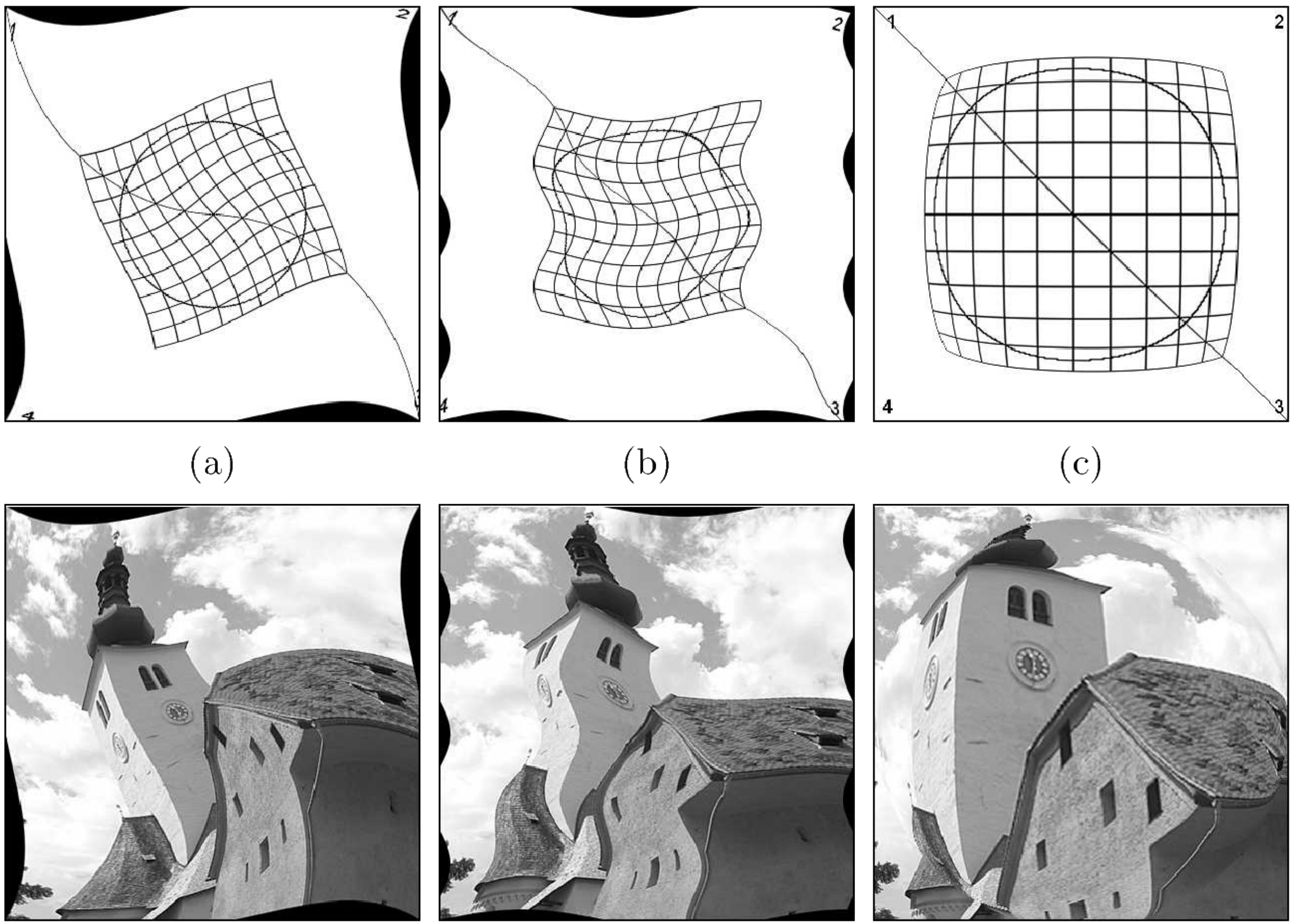
- **Se agregan** ángulos, cociente de áreas y de longitudes

Isometrías:

- **Se agregan** longitud y área

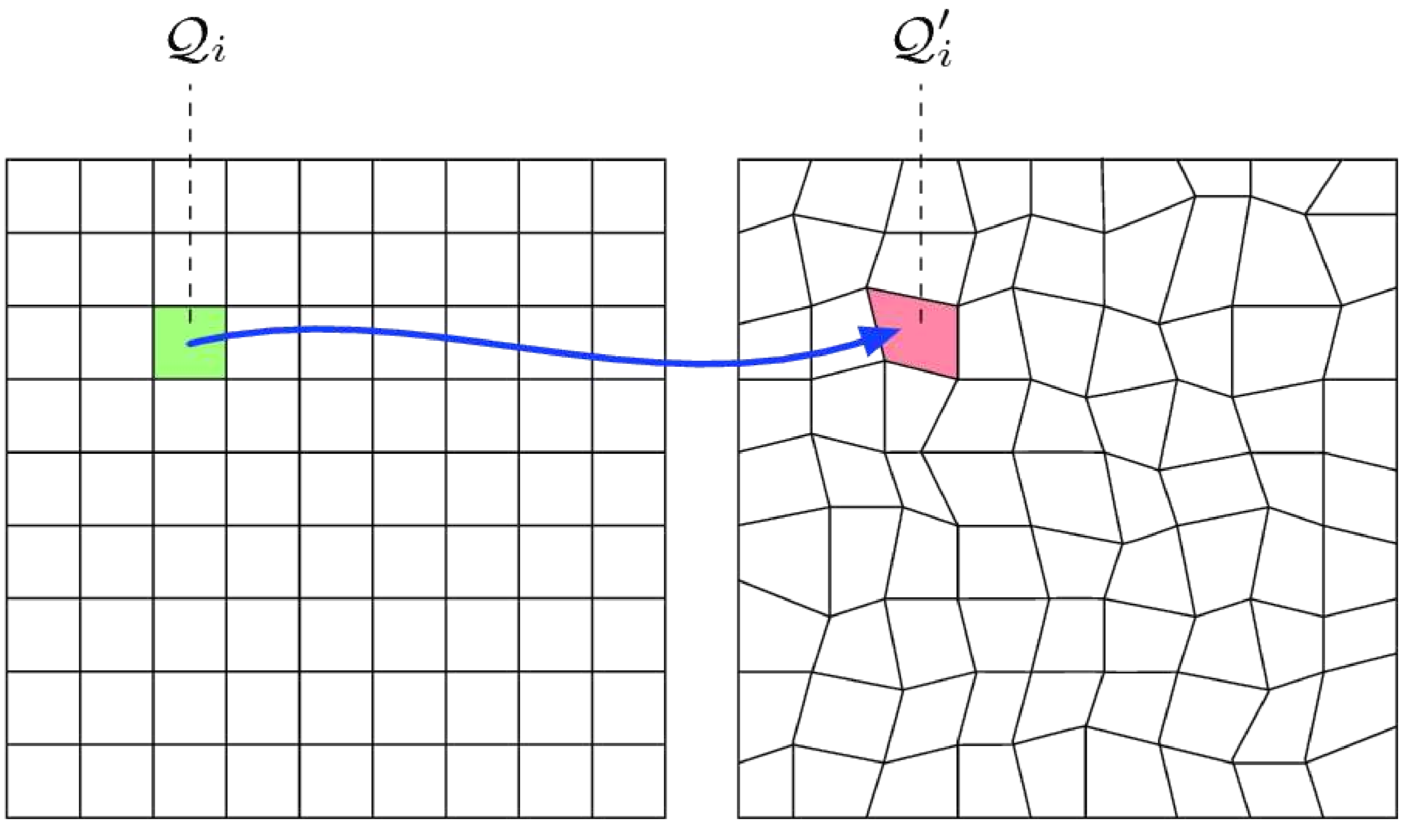
Transf no lineales

Transformaciones no lineales

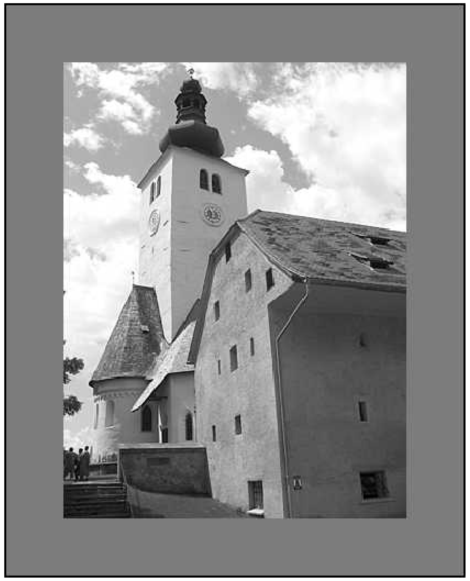


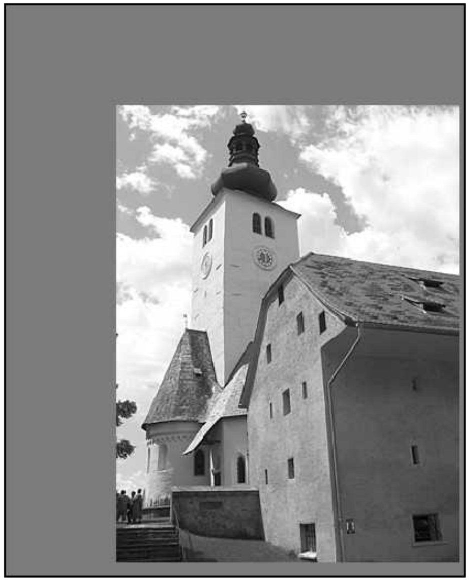
(a) (b) (c)

(d) (e) (f)



(b)


(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)